

# Capacité portante de ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle - Modèle d'évaluation intégrant le niveau d'endommagement

THÈSE N° 4596 (2009)

PRÉSENTÉE LE 11 FÉVRIER 2010

À LA FACULTÉ ENVIRONNEMENT NATUREL, ARCHITECTURAL ET CONSTRUIT  
LABORATOIRE DE MAINTENANCE, CONSTRUCTION ET SÉCURITÉ DES OUVRAGES  
PROGRAMME DOCTORAL EN STRUCTURES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

**Alix GRANDJEAN**

acceptée sur proposition du jury:

Prof. I. Smith, président du jury  
Prof. E. Brühwiler, directeur de thèse  
Prof. K. Beyer, rapporteur  
Dr P. Lestuzzi, rapporteur  
Dr Ph. Rück, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse  
2010



---

*« Si tu veux que les hommes s'entendent,  
fais leur construire un pont »*

*Antoine de Saint-Exupéry*



---

# Table des matières

Table des matières .....	I
Préface.....	VII
Résumé.....	IX
Summary.....	XI
Zusammenfassung .....	XIII
Remerciements .....	XV
Notations.....	XVII
1. Introduction .....	1
1.1. Motivations.....	1
1.2. Objectifs et structure de la thèse.....	2
1.3. Terminologie .....	3
1.4. Référence.....	4
2. Les ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle : typologie et historique .....	5
2.1. Typologie .....	5
2.1.1. Le tracé d'intrados.....	5
2.1.2. Le surbaissement .....	8
2.1.3. L'ouverture .....	8
2.2. Historique .....	9
2.2.1. Les premiers ponts .....	9
2.2.2. Les premiers arcs .....	10
2.2.3. Evolution.....	11
2.2.3.1. Les ponts de l'Antiquité (396 av. J.-C. à 476) .....	11
2.2.3.2. Les ponts du Moyen Age (476 à 1453).....	12
2.2.3.3. Les ponts de la Renaissance (1453 à 1779).....	15
2.2.3.4. Les ponts de l'Époque Moderne (1779 à nos jours).....	16
2.3. Références .....	18
2.4. Références complémentaires .....	18
3. Etat de l'art.....	21
3.1. Les règles empiriques .....	21
3.2. La théorie de la ligne des pressions .....	22
3.3. Les méthodes élastiques .....	24
3.4. Les méthodes semi-empiriques .....	26
3.4.1. La méthode MEXE.....	26
3.4.2. La méthode FILEV .....	27
3.5. Les méthodes basées sur l'analyse limite .....	27

3.5.1.	Modes de rupture des arcs en maçonnerie .....	27
3.5.2.	La méthode de base de Heyman.....	29
3.5.3.	Les méthodes dérivées.....	30
3.6.	Les méthodes numériques.....	32
3.7.	Les études expérimentales .....	33
3.8.	Conclusions .....	33
3.9.	Références .....	34
3.10.	Références complémentaires.....	39
4.	Etude au micro-niveau – Loi constitutive pour la maçonnerie de pierre naturelle.....	43
4.1.	Introduction .....	43
4.2.	Matériaux constitutifs .....	45
4.2.1.	La pierre .....	45
4.2.1.1.	Types employés en Suisse.....	45
4.2.1.2.	Origines et classification.....	45
4.2.1.3.	Principales propriétés mécaniques .....	47
4.2.2.	Le mortier .....	48
4.2.2.1.	Origines et classification.....	48
4.2.2.2.	Caractéristiques mécaniques .....	50
4.2.3.	La maçonnerie .....	52
4.2.3.1.	Définition .....	52
4.2.3.2.	Interface pierre – mortier.....	52
4.2.3.3.	Appareillage .....	53
4.3.	Modélisation numérique .....	54
4.3.1.	Généralités .....	54
4.3.2.	Description du modèle utilisé .....	56
4.3.2.1.	Pierre et mortier .....	56
4.3.2.2.	Interfaces .....	58
4.3.2.3.	Modèle.....	59
4.3.2.4.	Cas étudié.....	60
4.3.3.	Observations sur le comportement de la maçonnerie .....	62
4.3.3.1.	Distribution des efforts .....	62
4.3.3.2.	Propagation de la fissuration.....	63
4.3.3.3.	Modes de rupture .....	65
4.3.3.4.	Courbes contrainte – déformation .....	69
4.4.	Conclusions .....	70
4.5.	Références .....	71
4.6.	Références complémentaires .....	78
5.	Etude au méso-niveau – Conditions de formation de la rotule.....	83

5.1.	Mécanisme de formation de la rotule .....	83
5.2.	Calcul des efforts intérieurs .....	85
5.2.1.	Courbe contrainte – déformation admise .....	85
5.2.2.	Etat de contrainte lors la formation de la rotule .....	86
5.2.3.	Diagramme d’interaction .....	89
5.2.4.	Points caractéristiques de la courbe d’interaction .....	92
5.2.5.	Comparaison avec d’autres modèles de comportement du matériau .....	93
5.2.5.1.	Comportement élastique linéaire .....	93
5.2.5.2.	Comportement rigide plastique avec stress-block .....	94
5.3.	Conclusions .....	95
5.4.	Références .....	96
5.5.	Références complémentaires .....	96
6.	Etude au macro-niveau – Capacité portante de l’arc.....	97
6.1.	Principe et hypothèses .....	97
6.2.	Géométrie de l’arc.....	101
6.3.	Calculs préliminaires.....	102
6.3.1.	Angle $\gamma_D$ .....	102
6.3.2.	Charges permanentes .....	102
6.4.	Effet du remplissage .....	105
6.5.	Modèle de charge .....	108
6.6.	Développement du modèle.....	110
6.7.	Conclusions .....	116
6.8.	Références .....	116
6.9.	Références complémentaires .....	118
7.	Validation .....	121
7.1.	Schwarzwasserbrücke.....	121
7.1.1.	Micro-niveau : Loi constitutive adoptée .....	122
7.1.2.	Méso-niveau : Conditions de formation de la rotule.....	122
7.1.3.	Macro-niveau : Capacité portante de l’arc.....	123
7.1.3.1.	Géométrie de l’arc.....	123
7.1.3.2.	Charges permanentes.....	123
7.1.3.3.	Effet du remplissage .....	124
7.1.3.4.	Modèle de charge .....	124
7.1.3.5.	Application du modèle.....	124
7.1.4.	Résultats obtenus et validation.....	124
7.2.	Pont romain sur le ravin du Buès.....	126
7.2.1.	Micro-niveau : Loi constitutive adoptée .....	126
7.2.2.	Méso-niveau : Conditions de formation de la rotule.....	127

7.2.3.	Macro-niveau : Capacité portante de l'arc.....	127
7.2.3.1.	Géométrie de l'arc.....	127
7.2.3.2.	Charges permanentes.....	128
7.2.3.3.	Effet du remplissage.....	129
7.2.3.4.	Modèle de charge.....	129
7.2.3.5.	Application du modèle.....	129
7.2.4.	Résultats obtenus et validation.....	129
7.2.5.	Remarque concernant le mode de rupture.....	130
7.3.	Shinafoot Bridge.....	131
7.3.1.	Micro-niveau : Loi constitutive adoptée.....	132
7.3.2.	Méso-niveau : Conditions de formation de la rotule.....	133
7.3.3.	Macro-niveau : Capacité portante de l'arc.....	134
7.3.3.1.	Géométrie de l'arc.....	134
7.3.3.2.	Charges permanentes.....	134
7.3.3.3.	Effet du remplissage.....	135
7.3.3.4.	Modèle de charge.....	135
7.3.3.5.	Application du modèle.....	136
7.3.4.	Résultats obtenus et validation.....	136
7.4.	Conclusions.....	137
7.5.	Références.....	137
8.	Etude paramétrique.....	139
8.1.	Choix des paramètres.....	139
8.2.	Tracé d'intrados.....	140
8.3.	Caractéristiques géométriques.....	142
8.4.	Efforts admis dans les rotules A, C et B.....	143
8.5.	Caractéristiques du matériau de remplissage.....	146
8.5.1.	Poids volumique du matériau de remplissage.....	147
8.5.2.	Poussée latérale exercée par le remplissage.....	149
8.6.	Loi constitutive.....	150
8.7.	Conclusions.....	152
8.8.	Références.....	153
9.	Extension du modèle aux arcs endommagés.....	155
9.1.	Cas d'endommagement n°1 – Fissures longitudinales à l'intrados.....	155
9.1.1.	Description.....	155
9.1.2.	Modifications du modèle.....	157
9.1.3.	Conséquences de l'endommagement.....	157
9.2.	Cas d'endommagement n°2 – Mouvement des appuis.....	158
9.2.1.	Description.....	158

---

9.2.2.	Modifications du modèle .....	160
9.2.2.1.	Ecartement des appuis.....	161
9.2.2.2.	Rapprochement des appuis.....	162
9.2.3.	Conséquences de l'endommagement.....	164
9.3.	Cas d'endommagement n°3 – Matériau localement manquant .....	164
9.3.1.	Description .....	164
9.3.2.	Modifications du modèle .....	165
9.3.3.	Conséquences de l'endommagement.....	165
9.4.	Conclusions .....	169
9.5.	Références .....	169
9.6.	Références complémentaires .....	170
10.	Examen d'un pont en arc en maçonnerie .....	171
10.1.	Principes.....	171
10.2.	Relevé de l'état et appréciation du risque.....	172
10.2.1.1.	Probabilité d'insécurité .....	172
10.2.1.2.	Conséquences de la ruine .....	175
10.3.	Vérification de la sécurité structurale.....	176
10.4.	Vérification de l'aptitude au service .....	179
10.5.	Evaluation et recommandation d'intervention .....	179
10.6.	Conclusions.....	181
10.7.	Références.....	181
10.8.	Références complémentaires .....	182
11.	Travaux futurs.....	185
11.1.	Loi constitutive .....	185
11.2.	Mode de ruine .....	185
11.3.	Comportement de la rotule .....	186
11.4.	Tracé d'intrados.....	186
11.5.	Efforts admis dans les rotules A, C et B .....	186
11.6.	Poussée exercée par le remplissage .....	187
11.7.	Ponts multi-portées.....	187
11.8.	Références.....	188
12.	Conclusions.....	189
Annexe 1 :	Carrières suisses en activité ou fermées, état en 1996 .....	193
Annexe 2 :	Propriétés mécaniques indicatives des roches .....	197
Annexe 3 :	Classification des roches en fonction de leurs propriétés	

mécaniques .....	199
Annexe 4 : Appareillages, selon la Recommandation SIA V 178 (1996) .....	201
Annexe 5 : Classification des appareillages .....	205
Annexe 6 : Efforts intérieurs M et N .....	207
Annexe 7 : Diagramme d’interaction M – N .....	209
Annexe 8 : Points caractéristiques de la courbe d’interaction M – N.....	211
Annexe 9 : Comparaison avec d’autres modèles de comportement pour la maçonnerie .....	213
Annexe 10 : Calcul de l’angle $\gamma_D$ .....	215
Annexe 11 : Calcul des charges permanentes .....	217
Annexe 12 : Calcul de la poussée horizontale due au remplissage.....	221
Annexe 13 : Développement du modèle .....	225
Annexe 14 : Représentation du modèle dans un tableau Excel .....	235
Annexe 15 : Schwarzwasserbrücke – Plan, coupe et élévation.....	239
Annexe 16 : Schwarzwasserbrücke – Application du modèle .....	241
Annexe 17 : Pont romain sur le ravin du Buès – Elévation .....	243
Annexe 18 : Pont romain sur le ravin du Buès – Application du modèle .....	245
Annexe 19 : Shinafoot Bridge – Plan et élévation .....	247
Annexe 20 : Shinafoot Bridge – Application du modèle.....	249
Annexe 21 : Représentation du modèle modifié – Cas d’endommagement n°1	251
Annexe 22 : Développement du modèle modifié pour tenir compte du cas d’endommagement n°2 .....	255
Annexe 23 : Représentation du modèle modifié – Cas d’endommagement n°2 (Écartement des appuis) .....	275
Annexe 24 : Calcul de la poussée horizontale due au remplissage, dans le cas d’un rapprochement des appuis .....	279
Annexe 25 : Représentation du modèle modifié – Cas d’endommagement n°2 (Rapprochement des appuis) .....	283
Annexe 26 : Représentation du modèle modifié – Cas d’endommagement n°3.....	287
Curriculum vitae.....	291

---

## Préface

Les ponts et viaducs en maçonnerie sont durables, et il n'est donc pas surprenant qu'environ 20% de tous les ouvrages d'art en Suisse soient en maçonnerie de pierre naturelle. L'examen de ces ouvrages comporte souvent la détermination de la capacité portante d'arcs en maçonnerie. Les modèles existants sont peu fiables, leur application est souvent laborieuse et ils fournissent des résultats généralement conservateurs.

Dans sa thèse de doctorat, Mme Grandjean s'est proposée comme objectif d'améliorer les connaissances sur le comportement structural des arcs en maçonnerie de pierre naturelle. La présente étude scientifique a été effectuée à l'aide d'une modélisation analytique et numérique, basée sur la théorie de la plasticité, afin de fournir un modèle d'ingénieur pour déterminer la capacité portante de ces arcs. Une particularité concerne la prise en compte de dommages observés et de leur effet sur la capacité portante d'ouvrages réels. Le modèle développé est, comparé à d'autres, plus simple et transparent. Il peut être utilisé par l'ingénieur mandaté pour déterminer la sécurité structurale des ponts et viaducs en maçonnerie.

Par la présente thèse de doctorat, Mme Grandjean apporte la preuve de sa maîtrise de méthodes scientifiques, d'une faculté de développement de modèles mécaniques et de son aptitude à cerner et à résoudre des problèmes complexes de manière indépendante. Nous la remercions de son engagement et de ses compétences.

EPFL, en janvier 2010

Professeur Eugen Brühwiler



---

## Résumé

Les ponts historiques sont des structures faisant partie intégrante de notre patrimoine culturel et qui méritent par conséquent la considération et la mise en œuvre des moyens permettant la préservation de leur valeur culturelle.

Diverses méthodes existent aujourd'hui pour évaluer la capacité portante des arcs en maçonnerie. Toutes présentent cependant un inconvénient de taille sous la forme d'un conservatisme excessif pour certaines ou d'exigences importantes en matière informatique pour d'autres. La présente étude propose un modèle basé sur les concepts de la théorie de la plasticité, transparent, rapide et simple d'application. Il ne nécessite en outre pas de moyens informatiques importants. Une validation sur la base de cas d'étude et d'une comparaison des résultats obtenus avec des valeurs attestées a, par ailleurs, prouvé la fiabilité du modèle.

Afin de prendre en compte de manière optimale les comportements respectifs du matériau et de la structure, le modèle présenté dans ce travail s'articule autour de trois niveaux d'étude. En premier lieu, le micro-niveau s'attache à la caractérisation et à la compréhension de la réponse de la maçonnerie soumise à un effort de compression simple. Une modélisation numérique impliquant la représentation des deux matériaux et d'éléments d'interfaces a permis de cerner le rôle précis de chaque constituant ainsi que celui joué par l'appareillage. L'influence de ce dernier se révèle déterminante en ce qui concerne tant le mode de rupture que l'importance relative des caractéristiques propres à chacun des deux matériaux constitutifs.

Le méso-niveau exploite les résultats obtenus au micro-niveau en vue de définir le phénomène de plastification locale d'un arc soumis à un effort de flexion composée. La connaissance de la courbe contrainte – déformation permet d'établir un diagramme d'interaction moment de flexion – effort normal pour une section donnée. Chaque point de cette courbe représente un état de sollicitation potentiellement responsable d'une plastification locale, sous la forme d'une rotule.

Enfin, le macro-niveau s'attache à l'étude de l'arc, en tant que structure hyperstatique se ruinant suite à la formation successive de quatre rotules, selon le principe exploré au méso-niveau. Le modèle élaboré considère l'arc alors que trois rotules sont déjà formées. De simples réflexions sur l'équilibre de la structure, ainsi rendue isostatique, permettent d'obtenir une évaluation de la capacité portante de l'arc.

Bon nombre de ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle sont aujourd'hui vieux de plus d'une centaine d'années et présentent certains dommages consécutifs tant à leur grand âge qu'à un manque de maintenance. Trois dommages types communément rencontrés sur ce type d'ouvrages ont été recensés et incorporés au modèle précédemment établi. Leur effet sur la capacité portante de l'arc peut ainsi être évalué.

Le modèle développé s'intègre finalement dans une méthodologie globale permettant l'examen des ponts en maçonnerie. Celle-ci implique deux approches simultanées et complémentaires. La première se base sur le modèle développé pour fournir une évaluation quantitative de la sécurité, tandis que l'autre comprend une appréciation qualitative du risque, fondée sur le relevé de l'état. Cette méthodologie offre la possibilité d'un examen objectif de la structure et permet de se prononcer sur une recommandation d'intervention.

**Mots clés :** *ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle, comportement de la maçonnerie, micro-niveau, macro-niveau, méso-niveau, méthode cinématique de la plasticité, mécanisme à quatre rotules, dommages, examen, risque, sécurité structurale*



---

## Summary

Historical masonry arch bridges are an integral part of our cultural heritage and deserve the attention and the efforts required to safeguard their patrimonial value.

There is currently a diverse range of methods available to engineers for evaluating the load-bearing capacity of masonry arches. The major drawbacks are that these methods are either too conservative or computationally intensive. The study presented here proposes a model based on the theory of plasticity. The result is a transparent model that is both rapid and easy to use. Moreover, its application does not involve heavy computation tools. The model is validated by comparison with available experimental results and with the results of a widely-recognised analysis software.

In order to take into account the material and structural behaviour of an arch in an optimal way, the present thesis provides a new integral model divided into three evaluation levels. At the micro-level, the response of masonry under pure compression is used to characterise the material of an arch. At this level, numerical models are used to describe the behaviour of natural-stone masonry. These models distinguish between the constitutive units and mortar as well as the unit – mortar interface. The shape and arrangement of the units have the most influential role in defining the failure mode in comparison to the properties of each constitutive material.

At the meso-level, the material behaviour from the preceding level is used to define the limit for the local plastification of an arch section under combined compression and flexure. This phenomenon is described as the formation of a hinge. The resistance of an arch section can be expressed using the bending moment – normal force interaction diagram based on the stress-strain curve of the masonry material. Each point along the interaction diagram refers to a state of stress causing the local plastification of an arch section due to the formation of a hinge.

The macro-level focuses on the structural analysis of a masonry arch – a structure with four degrees of indeterminacy. The arch failure corresponds to the successive formation of four hinges defined by the yielding condition determined at the meso-level. The analytical model developed in this study considers an arch at the state of being a statically determinate structure – after three of the four hinges are developed. Using the principle of equilibrium, the model calculates the load-bearing capacity of the arch at the ultimate limit state.

A large number of existing natural-stone masonry arches include deficiencies accumulated throughout years of service without any regular maintenance. Three common types of deficiencies on these bridges are considered. The model is extended to take into account their effects on the load-bearing capacity of arches.

Finally, the model developed in this study is incorporated into a global methodology for the examination of masonry arch bridges. This methodology implies two complementary approaches, which have to be applied parallel to one another. The first uses the developed model and gives a quantitative evaluation of structural security. The second includes a qualitative appreciation of the risk, based on the condition survey of the structure. This methodology allows an objective examination of the structure and recommendations for intervention measures.

**Keywords:** *natural-stone masonry arch bridges, masonry behaviour, multi-level analysis, upper-bound theorem of plasticity, four-hinge mechanism, deficiencies, examination, risk, security*



---

## Zusammenfassung

Historische Brücken sind als Bauwerke integraler Bestandteil unseres Kulturerbes und bedürfen daher der Berücksichtigung und des Einsatzes von Massnahmen, die ihren kulturellen Wert bewahren.

Es existieren heute unterschiedliche Methoden, um die Tragfähigkeit von Mauerwerksbogen zu ermitteln. Sämtlichen Methoden zu Eigen ist jedoch der schwerwiegende Nachteil, entweder übermässig konservativ zu sein oder umfangreiche Rechenressourcen zu erfordern. Die vorliegende Studie schlägt ein auf der Plastizitätstheorie basierendes Modell vor, welches transparent, schnell und einfach in der Anwendung ist. Zudem erfordert es keine hohe Rechenkapazität. Die Validierung des Modells erfolgte durch den Vergleich mit Versuchsergebnissen und Ergebnissen anerkannter Berechnungsprogramme.

Um das Material- und Bauwerksverhalten optimal abzubilden, stützt sich das vorgeschlagene Modell auf drei Betrachtungsebenen. Auf der Mikroebene wird das Verhalten von Mauerwerk unter einfacher Druckbeanspruchung betrachtet. Eine numerische Modellierung, welche die Abbildung der beiden Materialien und der Grenzschichtelemente einschliesst, erlaubt präzise den Einfluss jedes Bestandteils sowie den des gesamten Mauerwerksverbands zu erfassen. Der Einfluss des letztgenannten erweist sich für den Bruchmechanismus als massgebend im Vergleich zur Bedeutung der Eigenschaften der beiden Ausgangsmaterialien.

Die Mesoebene nutzt die auf der Mikroebene gewonnenen Resultate, um das Phänomen der lokalen Plastifikation eines Bogens unter Beanspruchung durch Biegung und Normalkraft zu erklären. Die Kenntnis der Spannungs-Dehnungskurve ermöglicht das Erstellen eines Momenten-Normalkraft Interaktionsdiagramm für einen gegebenen Querschnitt. Jeder Punkt dieser Kurve stellt einen Spannungszustand dar, der potentiell eine lokale Plastifikation und damit ein Gelenk erzeugen kann.

Auf der Makroebene wird der Bogen schliesslich als statisch unbestimmtes Tragwerk untersucht, welches unter der sukzessiven Ausbildung von vier Gelenken gemäss dem auf Mesoniveau untersuchten Prinzip seine Tragfähigkeit erreicht. Das erarbeitete Modell betrachtet einen Bogen, bei dem drei Gelenke bereits ausgebildet sind. Einfache Gleichgewichtsbetrachtungen des nun statisch bestimmten Tragwerks ermöglichen eine Beurteilung der Tragfähigkeit des Bogens.

Eine grosse Anzahl von Bogenbrücken aus Natursteinmauerwerk ist heute mehrere Jahrhunderte alt und weist spezifische Schäden aufgrund ihres hohen Alters und mangelnden Unterhalts auf. Drei typische Schadensbilder, die gemeinhin an solchen Tragwerken angetroffen werden, wurden erfasst und in das zuvor erstellte Modell eingebunden, um ihre Auswirkungen auf die Tragfähigkeit des Bogens beurteilen zu können.

Das entwickelte Modell ist in eine übergeordnete Methodik integriert, welche die Untersuchung von Bogenbrücken aus Mauerwerk erlaubt. Diese beinhaltet zwei parallele, sich ergänzende Ansätze. Der erste basiert auf dem entwickelten Modell, um eine quantitative Bewertung der Tragsicherheit vorzunehmen. Der zweite umfasst eine qualitative Risikoeinschätzung auf der Basis der Zustandsanalyse. Diese Methodik bietet die Möglichkeit einer objektiven Überprüfung und erlaubt, Empfehlungen für eine Erhaltungsmassnahmen abzugeben.

**Schlüsselwörter:** *Bogenbrücke aus Natursteinmauerwerk, Tragverhalten von Mauerwerk, Mikroebene, Mesoebene, Makroebene, Kinematischer Grenzwertsatz, Viergelenkmechanismus, Schäden, Überprüfung, Risiko, Tragsicherheit*



---

## Remerciements

Antoine de Saint-Exupéry l'avait compris bien avant moi : « *Si tu veux que les hommes s'entendent, fais leur construire un pont* ». Après ces quelques années passées à l'EPFL, je puis en tout cas vous affirmer que non seulement l'étude des ponts a été pour moi source de fraternisation, mais qu'elle m'a apporté, et j'en suis sûre m'apportera encore, bien d'autres satisfactions. Je dois celles-ci à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à ce travail et m'ont apporté leur soutien. Par ces quelques lignes, je souhaite vous témoigner, à tous, ma plus profonde gratitude.

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma reconnaissance au Professeur Eugen Brühwiler qui, au cours de mes études déjà, avait compris et supporté mon intérêt pour les ponts anciens. Grâce à son soutien, sa compréhension, sa patience et les nombreux échanges que nous avons partagés, j'ai pu progresser dans ce sujet qui me tient à cœur. Je souhaiterais également associer à ces remerciements les membres de mon jury de thèse, Mme le Professeur Katrin Beyer et MM Pierino Lestuzzi et Philipp Rück, rapporteurs, ainsi que le Professeur Ian Smith, président du jury, pour leur lecture attentive de mon travail et pour les remarques et critiques constructives qu'ils ont émis.

C'est dans les moments de doute, qui accompagnent inévitablement le travail de doctorat, que l'on est soulagé d'être entouré d'une véritable équipe... Je tiens ainsi à adresser un remerciement tout particulier à Talayeh Noshiravani pour son soutien scientifique et moral, à Alexis Kalogeropoulos, pour partager avec moi l'amour des vieilles pierres, ainsi que pour sa relecture patiente et attentive de ma thèse et, enfin, à Cornelius Oesterlee pour avoir pallié à mes lacunes en allemand ! Ma reconnaissance va également à Hamid Sadouki, dont l'expérience m'a ouvert les portes de l'analyse numérique détaillée.

Emmanuel Denarié, Hadi Kazemi Kamyab, Tohru Makita, Agnieszka Switek, Karl Telleen, James Birdsall, John Wuest, Aicha Kamen, Andrin Herwig et David Conciatori forment le reste de l'équipe dont j'ai eu le plaisir de faire partie. Un grand merci à vous tous pour votre soutien et pour les moments que nous avons partagés, que ce soit dans un cadre professionnel ou extra-professionnel. Enfin, que serions-nous sans sa disponibilité et son attention permanente ? Merci Christine !

Ma reconnaissance va également à tout le staff technique du Groupe d'Ingénierie des Structures (anciennement IS !), et en particulier à Roland Gysler et Sylvain Demierre, pour leur aide, leur savoir-faire et leur bonne-volonté.

Last but not least : rien de ce travail n'aurait abouti sans le soutien, la confiance et les encouragements de mes proches, amis et famille. J'adresse en particulier toute ma reconnaissance à mes parents, mes frères et à Antonio, dont la patience et le support permanents ont été d'une importance qu'ils ne soupçonnent pas...

Merci !



---

# Notations

## MAJUSCULES LATINES

A, B, C, D	Rotules	[-]
$C_F$	Coûts de défaillance de la structure	[Frs]
$C_W$	Coûts de restauration de la structure	[Frs]
E	Module d'élasticité	[N/mm <sup>2</sup> ]
E	Changement de variable dans $M_D$	[kNm]
$E_1$	Changement de variable dans $M_D$ , selon le premier état de sollicitation	[kNm]
$E_2$	Changement de variable dans $M_D$ , selon le second état de sollicitation	[kNm]
$E_T$	Changement de variable dans $M_D$ , état de sollicitation total	[kNm]
F	Changement de variable dans $M_D$	[kNm]
$F_1$	Changement de variable dans $M_D$ , selon le premier état de sollicitation	[kNm]
$F_2$	Changement de variable dans $M_D$ , selon le second état de sollicitation	[kNm]
$F_T$	Changement de variable dans $M_D$ , état de sollicitation total	[kNm]
G	Changement de variable dans $N_D$	[kN]
$G_1$	Changement de variable dans $N_D$ , selon le premier état de sollicitation	[kN]
$G_2$	Changement de variable dans $N_D$ , selon le second état de sollicitation	[kN]
$G_{d,act,sup}$	Valeur d'examen actualisée des actions permanentes dont l'effet est défavorable	[kN]
$G_{d,act,inf}$	Valeur d'examen actualisée des actions permanentes dont l'effet est favorable	[kN]
$G_d$	Fonction d'état limite	[-]
$G_{m,act}$	Valeur moyenne actualisée des actions permanentes	[kN]
$G_T$	Changement de variable dans $N_D$ , état de sollicitation total	[kN]
$G_f^I$	Energie de rupture en traction	[J/m <sup>2</sup> ]
H	Changement de variable dans $N_D$	[kN]
$H_1$	Changement de variable dans $N_D$ , selon le premier état de sollicitation	[kN]
$H_2$	Changement de variable dans $N_D$ , selon le second état de sollicitation	[kN]
$H_T$	Changement de variable dans $N_D$ , état de sollicitation total	[kN]

$H_A$	Effort horizontal à la rotule A	[kN]
$H_{A1}$	Effort horizontal à la rotule A, dans le premier état de sollicitation	[kN]
$H_{A2}$	Effort horizontal à la rotule A, dans le second état de sollicitation	[kN]
$H_{AT}$	Effort horizontal total à la rotule A	[kN]
$H_B$	Effort horizontal à la rotule B	[kN]
$H_{B1}$	Effort horizontal à la rotule B, dans le premier état de sollicitation	[kN]
$H_{B2}$	Effort horizontal à la rotule B, dans le second état de sollicitation	[kN]
$H_{BT}$	Effort horizontal total à la rotule B	[kN]
$K_p$	Coefficient de poussée des terres	[-]
$K_{pc}$	Coefficient de poussée des terres	[-]
$L$	Ouverture réelle	[m]
$L_R$	Ouverture active	[m]
$M$	Moment de flexion	[kNm]
$M_{admis}$	Moment de flexion admis	[kNm]
$M_{B1}$	Moment de flexion dans la rotule B, selon le premier état de sollicitation	[kNm]
$M_{B2}$	Moment de flexion dans la rotule B, selon le second état de sollicitation	[kNm]
$M_{DT}$	Moment de flexion total dans la rotule D	[kNm]
$M_i$	Moment de flexion dans la rotule $i$ ( $i = A, B, C, D$ )	[kNm]
$N$	Effort normal	[kN]
$N_{admis}$	Effort normal admis	[kN]
$N_D$	Effort normal dans la rotule D	[kN]
$N_{DT}$	Effort normal total dans la rotule D	[kN]
$N_{max}$	Effort normal maximal	[kN]
$N_{min}$	Effort normal minimal	[kN]
$P$	Charge ponctuelle	[kN]
$PP_R$	Poids propre du matériau de remplissage	[kN/m <sup>3</sup> ]
$PP_S$	Poids propre de la voie de roulement	[kN/m <sup>3</sup> ]
$Q$	Charge de trafic ponctuelle	[kN]
$Q_{k,act}$	Valeur caractéristique actualisée de l'action variable concomitante	[kN]
$Q_{d,act}$	Valeur d'examen actualisée de l'action variable prépondérante	[kN]
$Q_{ult\_mod}$	Charge de trafic ponctuelle ultime obtenue avec le modèle	[kN]

$Q_{ult\_exp}$	Charge de trafic ponctuelle ultime obtenue expérimentalement	[kN]
R	Résultante de la force horizontale par rapport à la rotule B	[kN]
$R_d$	Résistance (valeur d'examen)	
$RZ_A$	Moment de flexion induit par la résultante de la force horizontale R par rapport à la rotule A	[kNm]
$RZ_B$	Moment de flexion induit par la résultante de la force horizontale R par rapport à la rotule B	[kNm]
$RZ_C$	Moment de flexion induit par la résultante de la force horizontale R par rapport à la rotule C	[kNm]
$RZ_D$	Moment de flexion induit par la résultante de la force horizontale R par rapport à la rotule D	[kNm]
S	Surbaissement	[-]
$S_d$	Sollicitation (valeur d'examen)	
V	Effort tranchant	[kN]
$V_A$	Effort vertical à la rotule A	[kN]
$V_B$	Effort vertical à la rotule B	[kN]
$V_D$	Effort tranchant dans la rotule D	[kN]
$X_{d,act}$	Valeur d'examen actualisée d'une propriété du matériau	
$Y_{d,act}$	Valeur d'examen actualisée de la grandeur Y	
$Y_{k,act}$	Valeur caractéristique actualisée de la grandeur Y	
$Y_{m,act}$	Valeur moyenne actualisée de la grandeur Y	

### **MINUSCULES LATINES**

a	Distance séparant les rotules A et C	[m]
$a_{d,act}$	Valeur d'examen actualisée d'une donnée géométrique	
b	Distance séparant les rotules D et B	[m]
c	Cohésion	[N/mm <sup>2</sup> ]
d	Épaisseur de l'arc	[mm]
$d_A$	Épaisseur réduite de l'arc en A	[mm]
$d_B$	Épaisseur réduite de l'arc en B	[mm]
$d_C$	Épaisseur réduite de l'arc en C	[mm]
f	Premier paramètre de l'équation polynomiale approximant le tracé d'intrados de l'arc	[-]
$f_c$	Résistance en compression	[N/mm <sup>2</sup> ]
$f_{cél}$	Limite élastique en compression	[N/mm <sup>2</sup> ]
$f_{cult}$	Contrainte de compression correspondant à la déformation maximale	[N/mm <sup>2</sup> ]

$f_t$	Résistance en traction	[N/mm <sup>2</sup> ]
$h_i$	Coordonnée verticale de la rotule i (i = A, B, C, D)	[m]
$h_{L/2}$	Flèche	[m]
$h_R$	Hauteur de remplissage à la naissance de l'arc	[m]
$h_{Rclé}$	Hauteur de remplissage à la clé de voûte	[m]
$h_S$	Hauteur équivalente de la voie de roulement	[m]
i	Indice d'hydraulicité	[-]
j	Second paramètre de l'équation polynomiale approximant le tracé d'intrados de l'arc	[-]
k	Troisième paramètre de l'équation polynomiale approximant le tracé d'intrados de l'arc	[-]
$k_n$	Rigidité normale	[N/mm <sup>3</sup> ]
$k_s$	Rigidité tangentielle	[N/mm <sup>3</sup> ]
$\ell$	Longueur d'application transversale de la charge de trafic ponctuelle	[m]
$m_p$	Facteur de correction	[-]
$m_{pc}$	Facteur de correction	[-]
n	Multiplicateur limite des charges utiles	[-]
q	Charge permanente totale	[N/mm <sup>2</sup> ]
$q_1$	Part uniforme de la charge permanente totale	[N/mm <sup>2</sup> ]
$q_2$	Part non uniforme de la charge permanente totale	[N/mm <sup>2</sup> ]
$q_h$	Force horizontale appliquée sur l'arc	[N/mm <sup>2</sup> ]
$q_{rép}$	Charge de trafic uniformément répartie	[N/mm <sup>2</sup> ]
$q_{trans}$	Charge de trafic uniformément répartie après diffusion transversale	[N/mm]
r	Quatrième paramètre de l'équation polynomiale approximant le tracé d'intrados de l'arc	[-]
u	Cinquième paramètre de l'équation polynomiale approximant le tracé d'intrados de l'arc	[-]
v	Largeur efficace de l'arc	[m]
$v_{initial}$	Largeur initiale de l'arc	[m]
$v_{réduit}$	Largeur efficace de l'arc réduite	[m]
$x_i$	Coordonnée horizontale de la rotule i (i = A, B, C, D)	[m]

### MAJUSCULES GRECQUES

$\Omega$	Rotation	[°]
----------	----------	-----

## MINUSCULES GRECQUES

$\alpha$	Premier paramètre de la courbe contrainte – déformation parabolique	[-]
$\alpha_Y$	Facteur de sensibilité relatif à la grandeur Y	[-]
$\beta$	Second paramètre de la courbe contrainte – déformation parabolique	[-]
$\beta_0$	Valeur cible de l'indice de fiabilité	[-]
$\gamma_D$	Angle déterminé par la perpendiculaire à la tangente à l'axe de l'arc en D et la verticale	[°]
$\gamma_Q$	Facteur de charge pour l'action variable prépondérante	[-]
$\gamma_Y$	Facteur partiel relatif à la grandeur Y	[-]
$\delta$	Angle de diffusion de la charge à travers le matériau de remplissage	[°]
$\varepsilon$	Déformation	[-]
$\varepsilon_C$	Déformation correspondant à la résistance en compression	[-]
$\varepsilon_{él}$	Déformation élastique	[-]
$\varepsilon_{ult}$	Déformation maximale	[-]
$\eta$	Résultante de la charge permanente	[kN]
$\eta_W$	Moment de flexion induit par la résultante de la charge permanente, par rapport à la rotule B	[kNm]
$\mu$	Coefficient de frottement	[-]
$\nu$	Coefficient de Poisson	[-]
$\nu_{Y,act}$	Coefficient de variation actualisé relatif à la grandeur Y	[-]
$\rho$	Rapport entre les coûts de défaillance de la structure et les coûts de restauration de la structure	[-]
$\sigma$	Contrainte	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_h$	Contrainte horizontale	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_v$	Contrainte verticale	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\phi$	Résultante de la charge permanente appliquée sur la portion d'arc comprise entre les rotules A et C	[kN]
$\phi_d$	Angle de dilatance	[°]
$\phi_f$	Angle de frottement interne	[°]
$\phi_S$	Moment de flexion induit par la résultante de la charge permanente appliquée sur la portion d'arc comprise entre les rotules A et C, par rapport à C	[kNm]
$\chi$	Charge de trafic ponctuelle après diffusion transversale et longitudinale	[N/mm <sup>2</sup> ]

$\psi$	Résultante de la charge permanente appliquée sur la portion d'arc comprise entre les rotules D et B	[kN]
$\psi$	Facteur de réduction de l'action variable concomitante	[-]
$\psi t$	Moment de flexion induit par la résultante de la charge permanente appliquée sur la portion d'arc comprise entre les rotules B et D, par rapport à D	[kNm]

# 1. Introduction

## 1.1. Motivations

Les ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle (figure 1.1) constituent encore aujourd'hui une proportion étonnamment importante du parc des ouvrages européens. A portée unique, pour la plupart, ils représentent environ 15 % des ponts des Chemins de Fer Fédéraux suisses, 77 % des ouvrages ferroviaires en France et 95 % en Italie [1.1]. Le manque de connaissances relatif tant à leur importance patrimoniale qu'à leur mode de fonctionnement implique malheureusement trop souvent leur négligence. Le besoin d'outils modernes et efficaces permettant d'optimiser leur durée de service tout en respectant leur valeur culturelle se fait par conséquent de plus en plus impérieux.

Au même titre que des palais ou des cathédrales, les ponts anciens sont des monuments historiques, faisant partie intégrante de notre patrimoine culturel. Comme l'illustre le chapitre 2 de ce travail, la richesse de leur histoire ne se reflète pas uniquement par leur aspect extérieur, mais également par leur mode de construction. Ainsi, les caractéristiques des ponts historiques se trouvent être révélatrices de modes, de courants mais également du contexte socio-économique prévalent au moment de leur édification. Les ponts en arc en maçonnerie sont par conséquent les précieux témoins d'époques révolues et notre devoir est de mettre en œuvre les moyens nécessaires au maintien non seulement de leur condition, mais également de leur fonction et de leur utilité.



Figure 1.1 : Pont de Baume les Messieurs

Trop fréquemment négligée ou mal adaptée, la maintenance dont les ponts historiques font l'objet ne permet souvent pas une utilisation optimale et respectueuse de la valeur culturelle de l'ouvrage. Dans la mesure où cette dernière réside non seulement dans leur aspect, mais également dans leur mode de fonctionnement, les opérations de maintenance doivent autant que possible éviter d'en faire des pièces de musée et viser à étendre leur durée de service ainsi qu'à conserver leur mode de fonctionnement originel.

Généralement en service depuis plus d'une centaine d'années, les ponts en arc en maçonnerie ont incontestablement prouvé leur capacité à supporter des charges nettement supérieures à celles considérées lors de leur édification. Ainsi, bien que bon nombre d'entre eux présentent souvent des dommages sous la forme d'une fissuration parfois très étendue, ces ouvrages disposent d'une réserve de portance conséquente dont il est crucial de tenir compte dans l'examen, afin de limiter au maximum, voire éviter, la mise en œuvre d'interventions et de préserver ainsi la valeur patrimoniale de ces édifices.

L'atteinte de ces objectifs nécessite cependant l'emploi de méthodes d'évaluation de la capacité portante fiables et basées sur des principes d'analyse modernes. Comme le montre le chapitre 3 de cette étude, les méthodes actuellement employées se basent essentiellement sur des concepts élastiques et empiriques, dont le sur-conservatisme est reconnu, ou alors font appel à des logiciels plus adaptés à l'objectif fixé, mais dont les résultats sont peu aisés à contrôler et nécessitent un investissement temporel et financier souvent conséquent.

## **1.2. Objectifs et structure de la thèse**

Les considérations présentées ci-dessus illustrent le besoin d'un modèle analytique, d'application simple, permettant à l'ingénieur confronté à la question de l'examen d'un pont en maçonnerie de pierre naturelle de déterminer, de manière fiable et rapide, la capacité portante de ce dernier. La crédibilité du modèle souhaité nécessite la prise en compte des concepts de la théorie de la plasticité, la forte ductilité de ce type de structures ayant été établie et les principes élastiques s'étant révélés par conséquent trop conservatifs. Une exigence supplémentaire réside dans la transparence du modèle, caractéristique altérant la qualité des méthodes empiriques ou par éléments finis actuelles. Bien que nécessitant une appréciation objective des résultats, le modèle souhaité ne devra pas faire appel de manière exagérée au jugement de l'ingénieur dans l'évaluation des paramètres clés. Il devra par ailleurs tenir compte le plus précisément possible des particularités liées à la maçonnerie de pierre naturelle, considérée en tant que matériau de construction.

Le modèle présenté dans cette étude s'applique à répondre à ces besoins, en fournissant une valeur de la capacité portante de l'arc, préalable à une étude plus approfondie, si cette dernière est jugée nécessaire. Dans le but de considérer au mieux le comportement global de l'arc en maçonnerie, il s'articule autour de trois niveaux, dont les principales caractéristiques sont résumées ci-dessous.

Le **micro-niveau** s'attache à comprendre et à définir le comportement de la maçonnerie sous un effort de compression simple. Ce dernier dépend non seulement des propriétés mécaniques des deux matériaux constitutifs, mais également de la manière dont ceux-ci sont assemblés. De par leur provenance, à caractère naturel, la pierre et le mortier de chaux impriment une forte variabilité au comportement de la maçonnerie, dont le chapitre 4 vise à cerner les causes, à l'aide de l'application d'un modèle numérique.

L'étude dite au **méso-niveau**, présentée au chapitre 5, exploite les résultats obtenus au micro-niveau dans le but de définir les conditions de plastification locale d'un arc soumis à un effort de flexion composée. La connaissance du comportement de la maçonnerie permet ainsi l'élaboration d'une courbe d'interaction représentative de la résistance en section de l'arc et dont chacun des points représente un état de sollicitation potentiellement responsable d'une plastification locale, sous la forme d'une rotule.

Enfin, le **macro-niveau**, développé au chapitre 6, considère l'arc en tant que structure hyperstatique dont la ruine survient suite à la formation d'un mécanisme à quatre rotules, selon le principe exploré au méso-niveau. La considération de l'arc isostatique, avec trois rotules déjà développées, permet

l'application de simples réflexions sur l'équilibre et offre ainsi la possibilité d'évaluer la capacité portante de la structure.

Trois dommages types, communément rencontrés sur des ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle, peuvent être intégrés dans le modèle ainsi développé. Ce dernier, tel qu'il est présenté au chapitre 9, permet alors d'évaluer la capacité portante résiduelle d'un pont endommagé et d'apprécier la nécessité, d'un point de vue structural, d'implémenter des interventions de renforcement.

En raison des impératifs liés aux structures historiques présentés ci-dessus, le modèle développé doit impérativement s'intégrer dans une procédure d'examen spécifique, telle que celle présentée au chapitre 10. Incluant deux approches simultanées et complémentaires, celle proposée dans cette étude se base sur une analyse de risque et tient compte des incertitudes relatives à la modélisation. Elle permet ainsi d'obtenir une évaluation objective de la sécurité structurale et de se prononcer quant à une recommandation d'intervention.

### 1.3. Terminologie

La constitution des ponts anciens en maçonnerie fait appel à un vocabulaire spécifique dont la définition est préalablement nécessaire afin qu'aucune ambiguïté n'altère la compréhension du lecteur (figure 1.2).

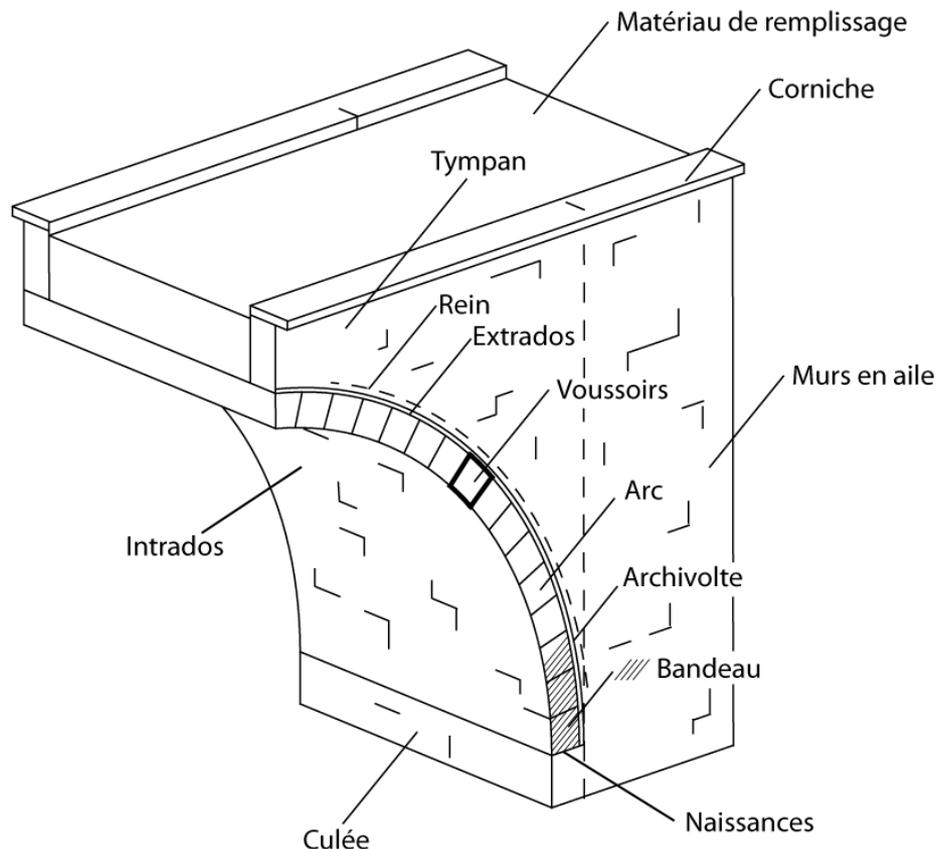


Figure 1.2 : Terminologie d'un pont en arc

L'arc est constitué d'un assemblage de **voussoirs**, blocs rigides, plus ou moins précisément taillés en forme de trapèze et parfois également appelés **claveaux**. La face intérieure de l'arc porte le nom d'**intrados**, tandis que son opposé extérieur, généralement dissimulé, est appelé **extrados**. Les faces latérales visibles de l'arc, forment le **bandeau**, parfois trompeur car non conforme à la maçonnerie réellement mise en œuvre dans la partie centrale de l'arc. La courbe commune au bandeau et à l'extrados est parfois mise en évidence par un

décrochement ou une moulure et porte le nom d'**archivolte**. Le voussoir formant le sommet de l'arc est appelé **clé de voûte** (non représenté sur la figure 1.2), tandis que la base de ce dernier est dénommée **naissance** et prend appuis sur une **pile** ou une **culée**. La partie de l'arc séparant la naissance de la clé de voûte prend parfois le nom de **rein**.

Les deux murs surmontant les faces latérales de l'arc sont connus sous le nom de **tympan**, ou de **murs de tête**. Ils forment avec l'arc une cuvette contenant le **matériau de remplissage** et sont surmontés par la **corniche**. Les tympan se prolongent par les **murs en aile**.

## **1.4. Référence**

- [1.1] Orbàn Z. (2007) *UIC Project on assessment, inspection and maintenance of masonry arch railway bridges*, Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Arch Bridges, ARCH'07.

## 2. Les ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle : typologie et historique

Grâce à leurs bonnes caractéristiques en matière de durabilité, de nombreux ponts en maçonnerie très anciens sont parvenus jusqu'à nous et sont les précieux témoins d'époques aujourd'hui révolues. Bien que s'appuyant toujours sur le même type de système statique, les ponts en arc historiques s'illustrent par de grandes différences stylistiques, notamment, relatives à l'époque de construction. Cette variété s'exprime par l'allure des éléments structuraux, par le mode de construction ou encore par les matériaux employés et reflète l'évolution des connaissances techniques, mais aussi celle du contexte économique. L'ornementation et les fonctions connexes que l'on a attribuées au pont au cours du temps témoignent, quant à elles, de l'évolution socioculturelle de la civilisation responsable de l'édification.

Ce chapitre présente, dans une première partie, la typologie des ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle sous la forme d'une énumération des critères généralement employés pour les caractériser. Ces derniers sont représentatifs de l'évolution des ponts en maçonnerie, depuis les débuts de l'utilisation systématique de l'arc, dans l'Antiquité, jusqu'au déclin de l'édification de ce type de structures, à l'époque moderne.

Au moyen de quelques repères historiques, la suite de ce chapitre présente un aperçu de l'évolution globale de la construction de ces ponts, mise en parallèle avec l'avancement des connaissances techniques et le contexte historique. L'objectif n'est toutefois pas de fournir une étude architecturale et historique exhaustive, mais simplement d'offrir quelques clés permettant d'établir une relation entre l'ouvrage et son environnement au moment de son édification.<sup>1</sup>

### 2.1. Typologie

Trois critères sont communément utilisés en vue de caractériser l'arc en tant qu'élément structurel. Il s'agit en premier lieu du tracé d'intrados, puis du surbaissement et enfin de l'ouverture. Une description complète d'un arc nécessite cependant le relevé d'autres paramètres, tels que l'épaisseur de l'élément porteur, les matériaux mis en œuvre ou encore l'appareillage employé.

#### 2.1.1. Le tracé d'intrados

Le tracé d'intrados est le principal critère déterminant l'aspect de l'arc. Ayant vu sa forme évoluer au cours du temps, au gré des connaissances et des nécessités, il peut être considéré comme plus ou moins indicateur de l'époque de construction de l'ouvrage.

Le tracé d'intrados le plus élémentaire et le plus facile à dessiner et à construire était celui dit en **plein cintre** (figure 2.2 (a)), soit formant un demi-cercle parfait. Employé de manière régulière depuis l'Antiquité jusqu'aux derniers ponts construits au XX<sup>ème</sup> siècle, ce tracé présentait en outre l'avantage d'une stéréotomie facilitée par le fait que tous les voussoirs à façonner étaient identiques et qu'une taille parfaite de ces derniers n'était pas nécessaire à leur ajustement. La quasi verticalité des efforts induits par l'arc aux naissances permettait par ailleurs la réalisation de culées d'une épaisseur plus faible que dans le cas d'un arc surbaissé. En contrepartie, le franchissement de grandes

<sup>1</sup> L'essentiel du contenu de ce chapitre est repris de [2.1].

portées impliquait une forte surélévation de la partie centrale du pont, ce dernier formant ainsi un dos d'âne gênant la visibilité, et donc la circulation.

Notons encore que pour des raisons de stabilité de l'élément structural, un remplissage rigide a le plus souvent été placé au dessus de la partie inférieure des reins de l'arc, permettant ainsi de considérer ce dernier comme n'étant actif qu'à partir de la hauteur à laquelle se termine ce remplissage. Bien que généralement dissimulée extérieurement par un bandeau simulant le demi-cercle complet, cette caractéristique est cruciale car elle permet de considérer, d'un point de vue structural, la plupart des arcs en plein cintre comme en fait légèrement surbaissés (figure 2.1).

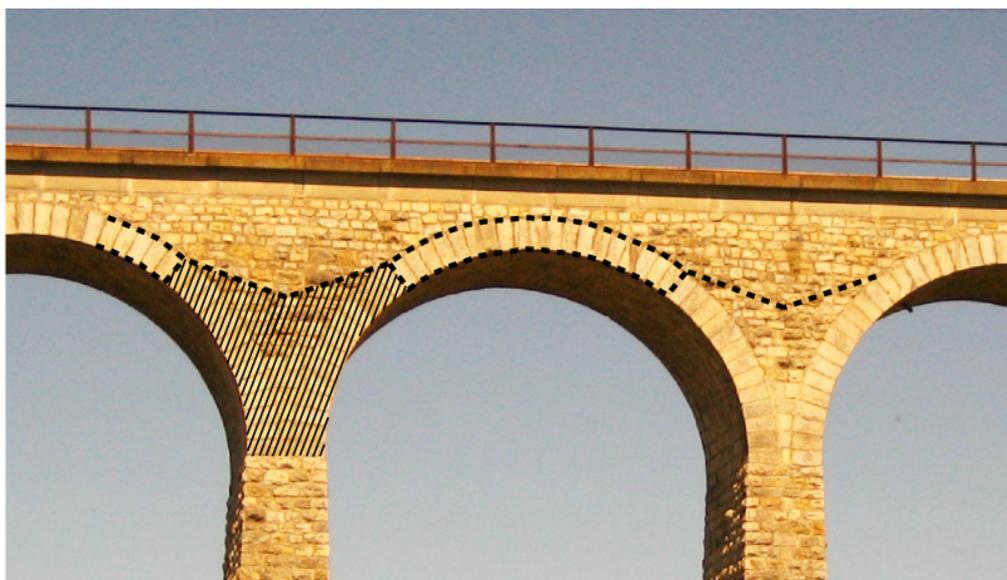


Figure 2.1 : Remplissage rigide placé au-dessus de la partie inférieure des reins de l'arc

Le tracé d'intrados en **ogive** (figure 2.2 (b)) est caractérisé par un point anguleux en son sommet. Il est constitué de deux arcs de cercle dont l'intersection forme la clé de voûte. Particulièrement prisé à l'époque médiévale en raison de sa simplicité d'exécution, il offrait en outre un gabarit élevé, favorisant la circulation fluviale, et n'induisait qu'une faible poussée horizontale sur les appuis. Quant au fort dos d'âne résultant de ce tracé d'intrados, il ne représentait, en ce temps-là, qu'un inconvénient secondaire.

Le principe de l'arc surbaissé a probablement pris sa source dans le souci de limiter le nombre de piles à ériger en rivière, tout en maintenant un débouché raisonnable au dessous de la structure et en évitant un dos d'âne prononcé. Les fortes poussées horizontales induites sur les piles et culées impliquèrent toutefois pendant longtemps la réalisation d'appuis particulièrement massifs. Le tracé d'intrados surbaissé le plus élémentaire était l'**arc de cercle** (figure 2.2 (c)). En dépit d'une stéréotomie avantageuse, ce tracé formé d'une portion de cercle présentait l'inconvénient de n'offrir qu'un faible débouché, ce qui favorisa le développement d'intrados plus élaborés, tels que l'**ellipse** (figure 2.2 (d)) ou l'**anse de panier** (figure 2.2 (e)), forme obtenue en traçant la tangente à des cercles juxtaposés en nombre impair et de rayon croissant des naissances à la clé. Par opposition à l'arc de cercle, ces tracés offraient un débouché important au-dessous de l'ouvrage et permettaient de limiter la poussée horizontale aux naissances.

Par rapport au tracé en ellipse, l'anse de panier présentait un certain nombre d'avantages : l'élaboration des épures était plus aisée et précise, la position des normales délimitant les joints était plus facile à déterminer et le cintre plus simple

à réaliser. Par ailleurs, l'anse de panier mettait en œuvre un nombre limité de courbures différentes et permettait de réaliser des groupes de voussoirs identiques, à l'inverse de l'ellipse pour laquelle, à l'exception de la symétrie, tous les claveaux étaient différents. Contrairement aux formes en plein cintre ou en ogive, la réalisation d'arcs surbaissés, plus osée, réclamait une taille et un placement des voussoirs précis ainsi qu'une grande maîtrise de la géométrie et du tracé des épures.

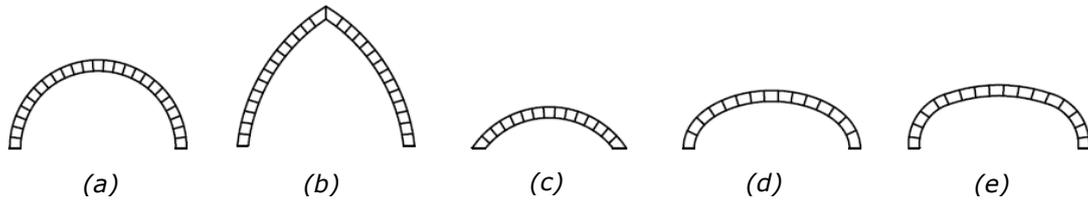


Figure 2.2 : Intrados - a) en plein cintre, b) en ogive, c) en arc de cercle, d) en ellipse, e) en anse de panier

Dès le XVI<sup>ème</sup> siècle, les premières réflexions concernant la mécanique des arcs permirent de mieux comprendre quelle était l'influence de la forme de ce dernier sur les efforts qu'il transmettait. Il fut ainsi réalisé que la forme idéale d'un arc, soit celle permettant de n'introduire dans l'élément porteur que des efforts de compression, correspondait à celle dite de la chaînette. Ce tracé est le symétrique de celui d'un câble fixé aux deux naissances et sollicité par la même charge et de même longueur que l'arc considéré (figure 2.3). La compréhension de ce principe eut dès lors une incidence logique sur le tracé d'intrados choisi.

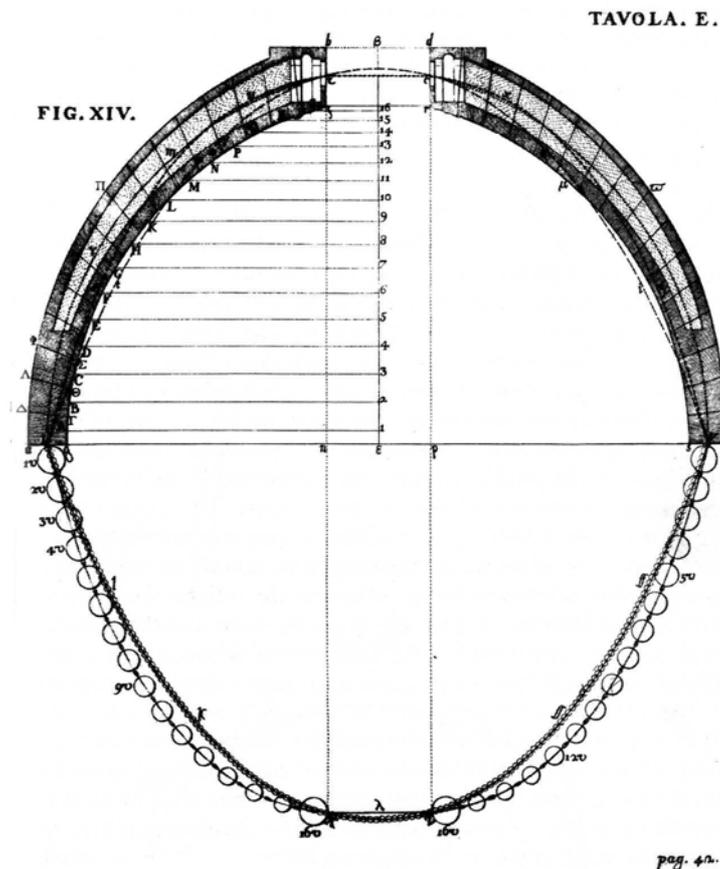


Figure 2.3: Analyse du dôme de la Basilique Saint-Pierre de Rome par Poleni (1683-1761), analogie du câble [2.2]

## 2.1.2. Le surbaissement

Le surbaissement d'un arc est défini comme le rapport entre la flèche  $h_{L/2}$  et l'ouverture  $L$  (figure 2.4) :

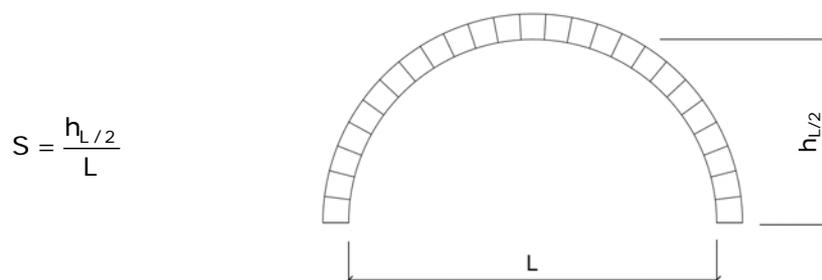


Figure 2.4 : Paramètres de calcul du surbaissement d'un arc

Bien que communément utilisée, cette définition entraîne un paradoxe notable : plus un arc paraît surbaissé visuellement, plus la valeur de son surbaissement calculée est faible... Un arc en plein cintre présente ainsi un surbaissement égal à  $1/2$ , tandis que le record de l'arc le plus surbaissé est détenu par le Pont de Nemours, avec une valeur atteignant  $0.065$ . Conçu par Jean-Rodolphe Perronet (1708-1794), cet ouvrage fut édifié entre 1795 et 1804 (figure 2.5).

Un arc peut également être dit surhaussé, soit présentant un surbaissement supérieur à  $1/2$ . C'est notamment souvent le cas des tracés d'intrados en ogive.



Figure 2.5 : Pont de Nemours (Photo : Jacques Mossot, [www.structurae.de](http://www.structurae.de)) [2.3]

## 2.1.3. L'ouverture

L'ouverture mesure la distance comprise entre les faces intérieures, ou parfois les extrémités de la ligne moyenne, au niveau des naissances de l'arc. Elle est indicatrice de l'ampleur de l'ouvrage considéré. La très grande majorité des arcs de ponts en maçonnerie construits au cours du temps présentait une ouverture ne dépassant pas quelques mètres, ce qui n'empêcha cependant pas, dès le XIX<sup>ème</sup> siècle, la course au record de la plus grande ouverture. En ce qui concerne les ponts en maçonnerie, en occident, il sera finalement établi par le Pont Frédéric Auguste (ou Pont de la Paix ou encore Syrtalbrücke) érigé à Plauen en Saxe en 1905, avec une ouverture atteignant  $90$  m (figure 2.6). La plus grande arche jamais érigée aurait toutefois pu être celle que Léonard de Vinci avait projetée pour franchir la Corne d'or à Constantinople, en 1502. Constitué d'un seul arc d'une ouverture égale à  $240$  m, ce pont ne sera cependant jamais réalisé.



Figure 2.6 : Pont Frédéric Auguste, à Plausen (Photo : Thomas Joram, [www.structurae.de](http://www.structurae.de)) [2.3]

## 2.2. Historique

### 2.2.1. Les premiers ponts

L'origine des ponts semble se perdre dans la nuit des temps. Il ne reste en effet aujourd'hui aucune trace des premiers ouvrages érigés par l'homme et on ne peut par conséquent qu'émettre hypothèses et suppositions quant à leur aspect ou mode de fonctionnement. Le plus vieux pont encore visible aujourd'hui semble être un ouvrage de type montant – linteau retrouvé à Smyrne, l'actuelle Izmir, et qui remonterait à 850 av. J.-C.

Nomades, les premiers hommes se trouvèrent fréquemment confrontés à la nécessité de franchir une rivière ou une vallée. Se contentant probablement de gués naturels dans un premier temps, ils purent sans doute emprunter ensuite un tronc tombé bien à propos entre les deux rives de l'obstacle à franchir. Ils profitèrent en outre certainement d'autres éléments naturels, tels que des arcs façonnés par l'érosion ou le courant, ou des amoncellements de déchets créés suite à un éboulement.

Mais les nécessités de la vie d'homme, qui peu à peu se sédentarisa, impliquèrent le besoin de pouvoir disposer de passages fiables, en des points clés choisis. Ainsi, progressivement, l'homme développa le concept de ponts durables, entièrement réalisés de ses mains. Le système statique le plus élémentaire élaboré fut probablement un simple linteau de pierre appuyé sur des amoncellements pierreux, prémices des premières piles. Celles-ci évoluèrent peu à peu vers un système de pieux de bois forcés dans le lit de la rivière et formant un batardeau qui pouvait ensuite être rempli de caillasse.

Le choix du matériau employé dépendait avant tout des ressources locales disponibles. Néanmoins, les propriétés mécaniques et les possibilités de mise en œuvre relatives à chaque matériau entraient également en ligne de compte. Ainsi, si les qualités mécaniques du bois rendaient ce matériau idéal pour un système statique en montant – linteau, ce n'était pas le cas de la pierre, dont la faible résistance en traction impliquait des portées très restreintes et donc la nécessité de réaliser un grand nombre de piles. Il fallut en outre attendre le développement d'outils permettant la taille de la pierre pour que l'homme

s'affranchisse de l'inconvénient lié à la recherche de plaques ou de blocs façonnés par la nature et présentant des dimensions suffisantes. Dès ce moment, la très bonne durabilité de la pierre, alliée à de nouveaux systèmes statiques sollicitant le matériau essentiellement en compression, démocratisèrent son emploi en construction.

On ne sait exactement de quand date la première utilisation d'un mortier pour lier les pierres d'une maçonnerie. Il a néanmoins été démontré que les Egyptiens s'en servaient déjà au III<sup>ème</sup> millénaire avant notre ère.

Des systèmes mixtes comprenant des appuis en matériaux pierreux surmontés d'un platelage en bois ont probablement également été développés de manière assez précoce. On imagine en outre, des ponts faits de lianes tressées et attachées sur les deux rives, prémices des ponts-rubans actuels.

## 2.2.2. Les premiers arcs

La première idée d'un arc comme élément de franchissement d'un espace résulte probablement, à nouveau, de l'observation de la nature. On peut en effet fréquemment observer des arcs naturels façonnés par l'érosion (figure 2.7) ou suite à un amoncellement de matériaux pierreux placé en équilibre précaire.

Structure essentiellement sollicitée par des efforts de compression, l'arc était parfaitement adapté pour être érigé dans un matériau présentant une faible résistance à la traction, tel la pierre ou la brique. Par rapport à une structure en montant – linteau comme celles généralement utilisées jusqu'alors, l'arc permettait une augmentation notable de la portée et de la capacité portante, essentiellement grâce à une meilleure utilisation des capacités mécaniques des matériaux.

Les Sumériens semblent avoir été les premiers, au IV<sup>ème</sup> millénaire av J.-C., à façonner des éléments – en l'occurrence probablement des briques de terre crue – de manière à ce que leur assemblage par juxtaposition forme un arc stable. Bien que maîtrisé par de nombreuses civilisations (Egypte, Moyen Orient, Grèce), l'arc clavé ne connut une utilisation massive, en tant qu'élément de construction, qu'à partir de 800 av. J.-C., époque à laquelle les Etrusques en généralisèrent le procédé dans leur architecture (figure 2.8).



Figure 2.7 : Arc naturel (Utah, USA) [2.4]



Figure 2.8 : Arc étrusque, à Falerii Novi [2.4]

### 2.2.3. Evolution

S'étendant de l'Antiquité jusqu'au XX<sup>ème</sup> siècle, la construction des ponts en arc en maçonnerie a évolué au gré des époques. Chaque ouvrage présente des caractéristiques, telles que le tracé d'intrados, l'allure des avant- et arrière-becs ou encore les éléments décoratifs, qui sont plus ou moins évocatrices de l'époque de sa construction. Les paragraphes suivants présentent une brève vision de cette évolution, telle qu'elle a pu être observée en Europe.

#### 2.2.3.1. *Les ponts de l'Antiquité (396 av. J.-C. à 476)*<sup>2</sup>

Les multiples conquêtes des Romains leur permirent de s'approprier les savoirs et techniques des peuples soumis, pour ensuite les développer et les exploiter massivement. C'est ainsi, grâce à leur victoire définitive sur les Etrusques au IV<sup>ème</sup> siècle av. J.-C., que les Romains acquirent le savoir-faire nécessaire à l'édification des arcs clavés. Ils en firent l'un des principaux éléments structurels de leur architecture et le diffusèrent peu à peu à travers toute la Rome antique.

Conscient que le maintien de l'ordre et la diffusion de la culture romaine à travers un territoire qui ne cessait de s'agrandir passait nécessairement par l'établissement et la préservation de voies de communication efficaces et utilisables en permanence, les Romains firent de la construction des routes et des ponts l'une de leurs priorités. Leur forte consommation d'eau impliquait en outre la construction de longs aqueducs dont le tracé comportait inévitablement de nombreux ponts.

Les ponts romains sont généralement des ouvrages robustes et imposants, auxquels leurs constructeurs s'efforcèrent toujours d'appliquer des principes de simplicité, d'économie, de rapidité d'exécution et surtout de fonctionnalité. Les ponts n'étaient en effet pas considérés comme des œuvres à caractère esthétique, mais uniquement comme des ouvrages purement utilitaires. Aucun élément décoratif ne venait les orner et, si on y détecte un soin du détail incontestable, celui-ci ne résultait que de considérations liées à la qualité et à la durabilité de l'ouvrage. L'édification d'un pont n'en demeurerait pas moins un symbole de puissance et de richesse et son financier s'assurait ainsi de laisser son nom à la postérité.

Bien que possédant le savoir-faire nécessaire pour ériger des arcs surbaissés, les Romains n'en firent que très rarement usage, se bornant à n'édifier que des arcs en plein cintre, probablement en raison de la simplicité et de la rapidité d'exécution de ces derniers. Suffisamment larges pour permettre un trafic aisé (4 à 8 m), les ponts romains étaient généralement supportés par des arcs d'une ouverture inférieure à 15 m et ceci afin de limiter le dos d'âne. Maîtrisant l'art de l'établissement des fondations en rivière, notamment grâce au traité de Vitruve, ils ne craignaient pas l'édification des nombreuses piles résultant de cette configuration. Celles-ci présentaient généralement des avant-becs triangulaires et des arrière-becs rectangulaires, ou également triangulaires.

Les plus grands ouvrages étaient généralement montés à sec, ce qui réclamait un soin particulier dans la taille des blocs et leur assemblage. Les Romains avaient en outre pour habitude de solidariser les voussoirs au moyen d'éléments de liaison internes en bois ou en métal et dont le rôle était de prévenir l'ouverture des joints suite à un éventuel mouvement d'ensemble de la structure. La plupart des ponts romains étaient cependant en bois, la maçonnerie étant réservée aux

<sup>2</sup> Les repères temporels évoqués dans les sous-titres de ce chapitre ne sont qu'indicatifs. Ils correspondent à des événements historiques choisis arbitrairement comme indication d'une phase de transition entre deux époques représentatives du point de vue de la construction des ponts en arc.

ouvrages d'importance, en général édifiés en milieu urbain et que l'on voulait symboles de puissance et de pouvoir.

Les arcs étaient érigés successivement, chaque pile étant suffisamment massive pour résister à la poussée induite par l'un des deux arcs, sans que la contrebutée de l'autre ne soit nécessaire à l'équilibre de l'ouvrage. Un tel mode de construction permettait une économie considérable sur le cintre, support réalisé par une triangulation d'éléments de bois et nécessaire au soutien de l'arc qui n'est stable qu'une fois la clé de voûte mise en place. Celui-ci, dont la construction réclamait un savoir-faire propre et un investissement considérable, était alors déplaçable et réutilisable d'un arc à l'autre. Le même souci d'économie conduisit les ingénieurs romains à construire leurs arcs par anneaux indépendants juxtaposés parallèlement, comme ce fut par exemple le cas au Pont du Gard (figure 2.9).

Les ponts érigés à cette époque sont ainsi le reflet de la société romaine. Ils témoignent d'une organisation sans faille, dont l'efficacité était l'une des clés de la puissance.

Pendant de longs siècles, le savoir-faire permettant le dimensionnement des ponts en arc se limita à des règles empiriques déduites de l'expérience transmise, de l'observation et de quelques essais plus ou moins fructueux. Ces relations, fournissant des rapports entre les principales dimensions de l'arc (ouverture, flèche et épaisseur) et des appuis (épaisseur, hauteur), n'avaient cependant pas valeur de normes absolues et chaque constructeur était libre de les modifier sur la base de sa propre expérience et des conditions particulières à l'ouvrage concerné. Transmises essentiellement par bouche à oreille, leur diffusion fut certainement assurée par l'important système de voies de communication et par l'organisation centralisée de l'Empire romain. Il résultait de l'application de ces règles empiriques un dimensionnement très conservateur, grâce auquel de nombreux ouvrages anciens sont aptes, encore aujourd'hui, à supporter des charges bien plus importantes que celles auxquelles ils étaient soumis lors de leur construction.

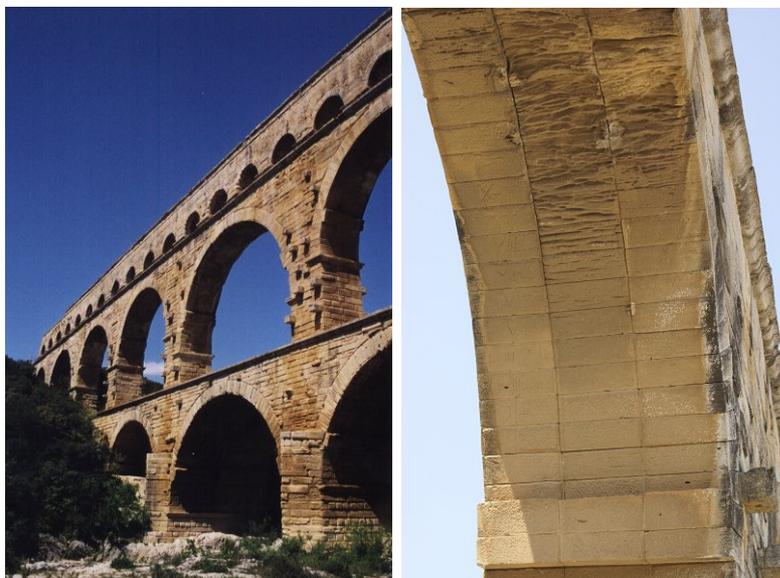


Figure 2.9 : Pont du Gard (Photo : Nicolas Janberg, [www.structurae.de](http://www.structurae.de)) [2.3]

### **2.2.3.2. Les ponts du Moyen Age (476 à 1453)**

Avec le déclin de l'Empire romain, l'entretien des routes et aqueducs devint de plus en plus difficile et fini par être totalement négligé. Les invasions barbares, qui succédèrent à la chute de Rome, instaurèrent un climat peu propice à la

construction d'édifices durables ou à la maintenance d'ouvrages existants. Ainsi, les ponts édifiés pendant le Haut Moyen Age furent vraisemblablement des ouvrages de bois, bon marché et rapidement construits. Tous ont aujourd'hui disparus.

La chute de l'Empire carolingien précipita l'Europe dans le système féodal consistant en un morcellement des territoires en petits fiefs indépendants, soucieux autant de se protéger des dernières invasions barbares que de disputer une terre à son voisin. Il en résulta, à nouveau, un contexte peu propice à l'établissement de voies de communication durables et il faudra attendre le XI<sup>ème</sup> siècle pour voir l'Eglise prendre en charge le développement d'un système routier, et par conséquent l'édification de ponts, en vue de favoriser le pèlerinage.

L'absence totale d'organisation administrative centralisée et de financement institutionnalisé, ainsi que les fréquents conflits, induisirent de grosses difficultés dans l'aboutissement des grands projets. Ainsi, il était fréquent que la construction des ponts soit interrompue pour cause de guerre ou de manque de moyens financiers et les chantiers s'éternisaient généralement sur plusieurs dizaines d'années.

Deux typologies distinctes se retrouvent nettement sur les ouvrages du Bas Moyen Age : d'un côté les ponts marqués par les symboles religieux (figure 2.10) et de l'autre ceux à caractère défensif (figure 2.11). Les premiers, édifiés par l'Eglise sur les chemins de pèlerinage, étaient fréquemment surmontés d'une chapelle ou d'une croix, tandis que les seconds étaient dominés par des tours de garde et garnis de herses, d'archères, de mâchicoulis et parfois d'une travée en pont levis. Ces ouvrages fortifiés incarnaient la puissance de la cité, leur vocation étant souvent d'avantage d'impressionner d'éventuels envahisseurs que de protéger la ville en cas de combat. Ils devinrent donc objets de fierté et on les retrouve fréquemment illustrant le nom ou les armoiries d'une cité médiévale.



Figure 2.10 : Pont St-Bénézet, à Avignon (Photo : Nicolas Janberg, [www.structurae.de](http://www.structurae.de)) [2.3]

Généralement en plein cintre ou en ogive, l'arc des ponts médiévaux était souvent mis en évidence par une archivolte moulurée ou un bandeau en retrait. Les difficultés rencontrées à cette époque lors de l'édification des piles conduisaient à en minimiser le nombre, ce qui, conjugué avec le type de tracés d'intrados employé, avait pour conséquence un fort dos d'âne. Chacun des appuis était conçu comme une culée, c'est-à-dire capable de reprendre l'entier de la poussée horizontale induite par un arc, ce système permettant d'une part les interruptions prolongées du chantier et évitant d'autre part l'effondrement complet du pont en cas de rupture de l'une des travées.



Figure 2.11 : Pont Valentré, à Cahors

La chaussée des ponts médiévaux était généralement étroite, de manière à faciliter la défense de l'ouvrage et la perception du péage, systématiquement prélevé à cette époque, comme une contrepartie à la sécurité qu'offrait le pont pour la traversée. Les piles étaient généralement munies de puissants avant- et arrière-becs triangulaires ou rectangulaires (ou encore parfois en amande). Fréquemment prolongés jusqu'à la hauteur de la chaussée, ceux-ci formaient ainsi autant de refuges pour les piétons et marquaient fortement la verticalité de l'ouvrage, effet encore rehaussé par l'absence de corniche. A l'exception de symboles religieux ou éventuellement des armoiries du seigneur local, les ponts du Moyen Age étaient dépourvus de décorations. Pour faciliter la circulation fluviale, les ponts de cette époque présentaient en outre fréquemment une arche dite « marinière », soit dont la flèche était plus haute.

D'une manière générale, les ponts du Bas Moyen Age offrent une impression de robustesse et de sobriété. Plus pittoresques que les ponts romains, ils sont empreints d'une certaine fantaisie, reflet d'une organisation sociale bien plus aléatoire que sous l'Empire romain, marquée par les multiples conflits et la forte influence de l'église.

Avec la fin du Moyen Age et l'étiollement progressif du système féodal, un pouvoir plus centralisé, permettant une institutionnalisation des financements de grands projets, s'organisa. Parallèlement, le commerce se développa et le pont, point de passage obligé, devint un lieu d'achalandage idéal. Des marchands commencèrent à s'y installer avec leur étal mobile, avant d'y aménager, petit à petit, des boutiques permanentes, puis finalement d'y élire domicile, au-dessus de leur échoppe. Les ponts urbains, tels le Ponte Vecchio de Florence (figure 2.12), se virent donc peu à peu couverts de maisonnettes.



Figure 2.12 : Ponte Vecchio, à Florence (Photo : Bodil Anderson, [www.structurae.de](http://www.structurae.de)) [2.3]

Progressivement redécouvertes à partir du IX<sup>ème</sup> siècle, les règles de dimensionnement empiriques étaient toujours la seule et unique base permettant la réalisation des ponts au Moyen Age. Elles se transmettent ensuite de génération en génération, de maître à apprentis et, la plupart du temps, de bouche à oreille tout au long de l'époque médiévale. Les règles de construction en général, faisaient alors l'objet de secrets jalousement gardés et ne se transmettaient qu'entre personnes de la même corporation. Le contexte politico-économique du moment ne favorisant pas la transmission des savoirs, l'enrichissement possible des connaissances ne fut que faible et essentiellement dû aux voyages qu'entreprenaient les maîtres d'œuvre.

### **2.2.3.3. Les ponts de la Renaissance (1453 à 1779)**

Outre des améliorations administratives, la disparition progressive du système féodal permit la restauration d'un climat pacifique et d'une certaine stabilité politique. Les vocations religieuses et militaires des ponts médiévaux furent peu à peu abandonnées et l'accroissement du trafic imposa d'une part la destruction de nombreuses chapelles et tours de gardes, mais aussi la transformation des arcs à intrados en plein cintre ou en ogive en des tracés surbaissés, permettant l'atténuation du dos d'âne.

La Renaissance vit éclore un mouvement architectural remettant radicalement en question la culture médiévale et se dirigeant vers la recherche d'un caractère plus antique. Parallèlement, se dessinait une nouvelle conception de l'urbanisme. Les ponts des cités étaient, au début de la Renaissance, encore couverts d'échoppes, coutume en outre favorisée par la reprise économique. Peu à peu cependant, l'idée d'un fleuve purificateur comme élément d'embellissement de la ville fit son chemin. Les premiers décrets visant la démolition de ces maisons, par ailleurs insalubres, datent du début du XVII<sup>ème</sup> siècle. Il faudra toutefois attendre jusqu'au XVIII<sup>ème</sup> siècle pour que cette pratique disparaisse totalement.

Enfin considérés comme des œuvres architecturales faisant partie intégrante de la ville, les ponts de la Renaissance étaient richement ornés de corniches moulurées, d'archivoltes, de modillons sculptés, etc. Par opposition aux ponts médiévaux, l'horizontalité était, en outre, à nouveau mise en évidence (figure 2.13). Bien que ralentie, une évolution stylistique similaire pourra être constatée dans les campagnes.

Dès le XIV<sup>ème</sup> siècle déjà, les maîtres d'œuvre commencèrent à ériger des arcs surbaissés, dont la construction était plus ardue, notamment en raison des poussées horizontales plus importantes, mais qui permettait une économie de matériau conséquente et atténuait le dos d'âne. En dépit des difficultés d'élaboration qu'il représentait, le tracé d'intrados en ellipse sera longtemps

préféré à celui en anse de panier qui ne sera adopté qu'à partir de la fin du XVII<sup>ème</sup> siècle.

Le souci d'améliorer les conditions de trafic impliqua également la modification de nombreux ponts médiévaux que l'on élargit au moyen de porte-à-faux et dont on diminua la valeur du surbaissement des arcs en modifiant le tracé d'intrados.



Figure 2.13 : Pont neuf, à Paris

Grâce aux améliorations administratives, les projets de ponts pouvaient être mieux définis. Les chantiers se poursuivaient généralement sans interruption jusqu'au terme, le financement de l'ouvrage étant généralement assuré. Parallèlement, les premiers traités de construction résumant les principales règles empiriques de construction furent publiés, permettant ainsi une diffusion massive des connaissances. La création d'institutions, telle que l'Académie d'Architecture en France, contribua également à la transmission facilitée de l'information.

La Renaissance est connue comme une période d'intense recherche culturelle et scientifique. Bien que Léonard de Vinci se soit déjà préoccupé du fonctionnement des arcs clavés, ce n'est qu'au XVII<sup>ème</sup> siècle que le monde de la science s'intéressera réellement à la mécanique des structures. Le fonctionnement des arcs pourra être considéré comme maîtrisé dès la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle. Néanmoins, l'application des théories qui en découle ne sera pas continue, certains aspects des recherches étant périodiquement « oubliés », puis redécouverts plus tard par d'autres savants. Par ailleurs, l'emploi des règles empiriques perdurera encore pendant plusieurs dizaines d'années.

#### **2.2.3.4. Les ponts de l'Époque Moderne (1779 à nos jours)**

L'époque de la révolution industrielle va marquer un tournant dans la construction des ponts. Bien que connu et exploité en construction depuis plusieurs millénaires, le travail du métal s'était longtemps limité à des interventions locales sous la forme de tirants ou de goujons. La raison en était son coût prohibitif pour une utilisation à grande échelle. Le développement que connut la sidérurgie à la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle, et qui devint l'un des principaux facteurs de la révolution industrielle, permit la réalisation du premier pont entièrement métallique (en l'occurrence en fonte), l'Ironbridge, à Coalbrookdale, en 1779.

L'élaboration des matériaux métalliques restant cependant onéreuse, la construction de ponts en maçonnerie perdura encore longtemps et connut quelques raffinements d'ordre structurel. Ainsi, avec le tracé en plein cintre, celui

en anse de panier restait le plus prisé, l'ellipse et l'arc de cercle n'étant employés qu'épisodiquement. La volonté de toujours surbaisser davantage les arcs conduisit les concepteurs de ponts à tracer des anses de panier non plus sur la base de trois, mais de cinq cercles, voir plus encore.

Techniquement, une innovation d'importance fut introduite par Jean-Rodolphe Perronet (1708-1794). Jusqu'alors, chaque pile était conçue comme une culée, à savoir capable de reprendre et transmettre à la fondation l'entier de la poussée introduite par un arc. Cette dernière était d'autant plus importante que les tracés d'intrados étaient toujours plus surbaissés, impliquant la nécessité d'édifier des piles massives qui entravaient fortement l'écoulement et provoquaient une accélération du courant au passage du pont, augmentant ainsi fortement le risque d'affouillement des piles. Perronet le premier osa tenir compte de la présence de l'arc adjacent, qui exerce une poussée symétrique et donc capable d'équilibrer, tout au moins en partie, celle appliquée par l'arc sur une pile. Bien que logique, cet avancement ne fut toutefois possible que grâce au contexte politique et économique favorable, qui garantissait un déroulement du chantier rapide et sans interruption.

A partir du XIX<sup>ème</sup> siècle, le développement du chemin de fer nécessita l'édification de nombreux ponts qui, pour la plupart, furent encore réalisés en maçonnerie. Mais la construction métallique poursuivait son évolution et de plus en plus d'ouvrages furent érigés selon un système comprenant des poutres à treillis métalliques appuyées sur des piles de maçonnerie. Un grand nombre de ces ouvrages seront cependant ultérieurement remplacés par des ponts en arcs en maçonnerie, lorsque le poids des nouvelles locomotives à vapeur, puis électriques, excédera la capacité portante des treillis métalliques en place.

Le passage au XX<sup>ème</sup> siècle verra la réalisation des derniers grands projets de ponts en maçonnerie. Généralement constitués d'un arc de grande portée entouré d'arcs secondaires et surmonté de tympans évidés, ces ouvrages spectaculaires établiront les records de portées de ce type de ponts. Un bel exemple est le pont réalisé à Luxembourg par Paul Séjourné (1851-1939), maître en la matière, entre 1889 et 1904 (figure 2.14).

Ces grands projets sonnèrent toutefois le glas de la construction des ponts en maçonnerie. Rapidement, le béton, redécouvert et popularisé grâce à la fabrication des ciments artificiels, permit l'édification d'ouvrages plus économiques. Présentant des propriétés mécaniques très similaires à celles de la maçonnerie, le béton fut employé, dans les premiers temps, pour réaliser des ouvrages en arc, fréquemment parementés de pierre. L'invention du béton armé et l'amélioration des techniques de fabrication de l'acier, rendant ce matériau financièrement plus accessible, permirent ensuite le développement de systèmes structuraux différents, grâce à des propriétés mécaniques améliorées, en particulier en traction. Dès lors, ces matériaux supplantèrent rapidement la maçonnerie dans le domaine de la construction des ponts.

Aujourd'hui, la réalisation d'un pont en maçonnerie n'est plus envisageable en raison du prix qu'elle représenterait. Bien que bénéficiant de propriétés de durabilité exceptionnelles en comparaison de celles des matériaux modernes, la maçonnerie ne pourrait être employée de manière rentable dans la construction actuelle qu'en cas de garantie d'une durée de service de l'ouvrage de plusieurs siècles. Les prévisions d'évolutions du trafic n'étant en aucun cas ni fiables, ni même disponibles, à ce terme, l'emploi de la maçonnerie se borne aujourd'hui à l'entretien et à la restauration d'ouvrages existants.



Figure 2.14 : Pont Adolphe, Luxembourg

### **2.3. Références**

- [2.1] Grandjean A. (2005) *Histoire des ponts en arc, de l'Antiquité à la Renaissance*, Projet de master, EPFL – ENAC – MCS, 103 p.
- [2.2] Heyman J. (1972) *Coulomb's Memoir on Statics. An Essay in the History of Civil Engineering*, Imperial College Press, 212 p.
- [2.3] <http://fr.structurae.de/>
- [2.4] <http://en.wikipedia.org>

### **2.4. Références complémentaires<sup>3</sup>**

- [2.5] Bennett D. (2000) *Les ponts : histoire et technique*, Eyrolles, Paris, 232 p.
- [2.6] Berger R. (1975) *D'une rive à l'autre ou les ponts de la Suisse*, Editions André Eiselé, Lausanne, 142 p.
- [2.7] Bernard-Gely A., Calgaro J.-A. (1994) *Conception des ponts*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 360 p.
- [2.8] Bessac J.-C., Journot F., Prigent D., Sapin C., Seigne J. (1999) *La construction en pierre*, Collection Archéologiques, Errance, Paris, 174 p.
- [2.9] Bolliger S. (2003) *Römische Brücken in der Schweiz*, Les chemins et l'histoire, Publication Viastoria – Centre pour l'histoire du trafic, Berne, pp. 16-21.
- [2.10] Browne L. (1996) *Les Ponts : Chefs-d'œuvre de l'architecture*, PML, 80 p.
- [2.11] Delacrétaz P. (1990) *Fribourg jette ses ponts*, Ketty & Alexandre, Chapelle-sur-Moudon, 126 p.

---

<sup>3</sup> Bien que non citées dans le texte, les références dites complémentaires sont susceptibles d'apporter un supplément d'information au lecteur.

- [2.12] Delacrétaz P. (1991) *Vieux ponts du pays de Vaud*, Ketty & Alexandre, Chapelle-Vaudanne (sur Moudon), 142 p.
- [2.13] Demeude H., Escudero P. (2003) *Ponts de Paris*, Flammarion, Paris, 159 p.
- [2.14] van Deputte J. (1994) *Ponts de Paris*, Sauret / Paris-Musées, Paris, 230 p.
- [2.15] Dupré J. (1998) *Les ponts*, Könemann, Cologne, 128 p.
- [2.16] Ecole – Atelier de restauration, Centre historique de Léon (1999) *Taille de la pierre : guide pratique*, Eyrolles, Paris, 215 p.
- [2.17] Fabre G. J. J. (2001) *Le pont du Gard, l'aqueduc antique de Nîmes*, Equinoxe, Barbentane, 95 p.
- [2.18] Fellmann R. (1992) *La Suisse Gallo-Romaine, cinq siècles d'histoire*, Payot, Lausanne, 470 p.
- [2.19] Fiches J.-L. (2001) *Le pont du Gard*, Editions du patrimoine, Paris, 64 p.
- [2.20] Gaillard M. (1982) *Les quais et ponts de Paris*, CEP Editions Moniteur, Paris, 205 p.
- [2.21] Graf B. (2002) *Bridges that changed the world*, Prestel, 128 p.
- [2.22] Grattesat G. (1982) *Ponts de France*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 294 p.
- [2.23] Guyon M. (2000) *Les fondations des ponts en France*, Monique Mergoïl, Montagnac, 253 p.
- [2.24] de Kalbermatten G., Biner J.-M. (1991) *Ponts du Valais*, Pillet, Martigny, 262 p.
- [2.25] Kurrer, K.-E. (2008) *The history of the theory of structures: From arch analysis to computational mechanics*, Ernst & Sohn, Berlin, 848 p.
- [2.26] de La Hire, P. (1695) *Traité de mécanique où l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des arts & les propriétés des corps pesants lesquelles ont un plus grand usage dans la physique*, Imprimerie Royale, Paris, 492 p.
- [2.27] Lambert G. (1999) *Les ponts de Paris*, Collection Paris et son Patrimoine, Action Artistique de la Ville de Paris, Paris, 240 p.
- [2.28] Leonhardt F. (1981) *Ponts*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 307 p.
- [2.29] Malissard A. (1994) *Les Romains et l'eau*, Realia / Les Belles Lettres, Paris, 342 p.
- [2.30] Mesqui J. (1986) *Le pont en France avant le temps des ingénieurs*, Picard, Paris, 303 p.
- [2.31] Mesqui J., Repérant D. (1998) *Les vieux ponts*, Arthaud, Paris, 143 p.
- [2.32] Montens S. (2001) *Les plus beaux ponts de France*, Bonneton, Paris, 199 p.
- [2.33] Murray P., Stevens M. A. (1996) *Living Bridges: The inhabited bridge, past, present and future*, Prestel, 157 p.
- [2.34] Office Fédéral des Routes (2003) *Les chemins historiques du canton de Vaud*, Inventaire des voies de communication historiques de la Suisse (IVS), Berne, 52 p.

- [2.35] Prade M. (1986) *Les ponts, monuments historiques*, Brissaud, Poitiers, 431 p.
- [2.36] Prade M. (1990) *Ponts remarquables d'Europe*, Brissaud, Poitiers, 428 p.
- [2.37] Rohn A. (1926) *Les ponts de Fribourg*, Conférence faite en assemblée générale de la 107<sup>ème</sup> session annuelle de la SHSN à Fribourg, le 29 août 1926, Büchler, Berne, 24 p.
- [2.38] Vergara L., Tomasella G. M. d. (2001) *Reconnaître les styles architecturaux, de la préhistoire à l'architecture contemporaine*, Vecchi, Paris, 165 p.

### 3. Etat de l'art

La présente étude ayant pour sujet global l'établissement d'une méthode de détermination de la capacité portante des arcs en maçonnerie, ce chapitre, consacré à la description de l'état de la recherche, se concentre sur l'aperçu des méthodes de dimensionnement et de vérification existantes. Des références concernant des aspects plus particuliers de cette recherche peuvent être trouvées dans les différents chapitres constituant ce travail.

#### 3.1. Les règles empiriques

Pendant des siècles, le dimensionnement des ponts en maçonnerie ne s'est basé que sur des principes empiriques. Se transmettant de génération en génération et de bouche à oreille, ces règles se sont pour la plupart perdues, puis ont été redécouvertes et modifiées, au gré de l'expérience des bâtisseurs.

Le présent paragraphe n'a pas pour but d'établir une liste exhaustive de ces principes empiriques, la plupart ne nous étant par ailleurs pas parvenues, mais simplement d'illustrer au moyen de quelques exemples, le type de rapports ayant conduit au dimensionnement des principaux éléments constitutifs d'un pont en arc en maçonnerie (tableau 3.1). Les références répertoriant ces règles dont nous disposons aujourd'hui sont, pour l'essentiel, les premiers traités de construction des ponts, publiés au XIX<sup>ème</sup> siècle. On peut néanmoins supposer que les principes qui y sont décrits sont cohérents avec ceux employés antérieurement.

Ces règles empiriques permettaient la déduction des dimensions des principaux éléments structuraux, les uns relativement aux autres, au moyen de relations simples. Il en existe ainsi concernant la forme de l'arc, l'épaisseur de ce dernier à la clé et aux naissances, les dimensions des fondations, celles des culées et des piles ou encore donnant l'ouverture en fonction des dimensions de la vallée à franchir [3.1]. De multiples exemples de ces règles empiriques peuvent être trouvés dans les anciens traités de construction des ponts [3.1] et ont été résumés par Proske [3.2] et Corradi [3.3]. Ils ne sont par conséquent pas reproduits dans leur intégralité ici.

Tableau 3.1 : Exemples de règles empiriques [3.1-3.4]

Règle de ...	Expression	Paramètres
Dupuit	$e = k \cdot \sqrt{L}$	e : épaisseur de l'arc L : ouverture de l'arc k : paramètre fonction du matériau utilisé
Huste	$e = \alpha \cdot \sqrt{\rho}$	e : épaisseur de l'arc $\alpha$ : paramètre fonction du matériau utilisé $\rho$ : courbure de l'arc
Croizette-Desnoyers	$e = k_1 + k_2 \cdot \sqrt{\rho}$	e : épaisseur de l'arc $k_1, k_2$ : paramètres fonction du type de pont (routier, ferroviaire) $\rho$ : courbure de l'arc
Gay	$L = 0.2 \cdot H$	L : ouverture de l'arc H : hauteur de la vallée
Séjourné	$P = 0.1 \cdot L + 0.04 \cdot H$	P : épaisseur de la pile en tête L : ouverture de l'arc H : hauteur de la vallée

En dépit de l'apparition des premières théories concernant la mécanique des structures, publiées dès la fin du XVII<sup>ème</sup> siècle, l'usage de ce type de principes empiriques va subsister encore longtemps, favorisé par les difficultés liées à une modélisation analytique correcte de ce type de structure. Ainsi, dans les années 1950 encore, une directive britannique recommandait la vérification des ponts en maçonnerie sur la base des résultats d'un essai de charge. Si la déflexion à la clé ne dépassait pas une valeur donnée, la sécurité présentée par l'ouvrage pouvait alors être considérée comme garantie [3.5].

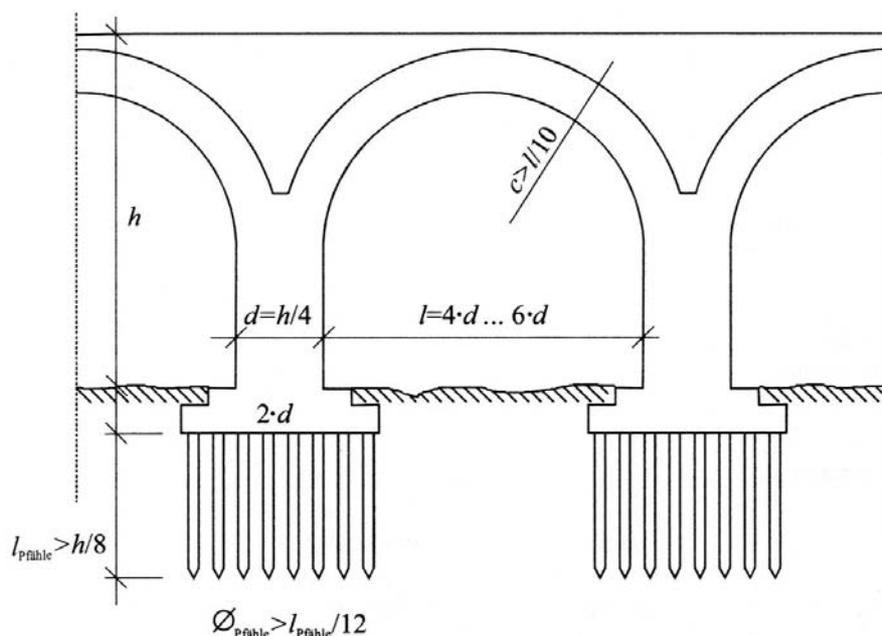


Figure 3.1 : Règles empiriques préconisées par Alberti en 1450 [3.2 ; 3.6]

### 3.2. La théorie de la ligne des pressions <sup>4</sup>

Les courants de pensées émergeant à la Renaissance influencèrent de manière capitale la construction des ponts. Ces changements s'illustrent par l'ornementation, mais se détectent également par le choix du tracé d'intrados. La recherche d'un raffinement esthétique particulier dans la géométrie donnée à l'arc conduisit ainsi les grands esprits de cette époque à amorcer les premières considérations concernant les implications de ces choix sur le dimensionnement des éléments constitutifs de l'ouvrage. La compréhension mécanique, puis mathématique, du fonctionnement d'un arc devint alors l'un des principaux sujets de réflexion de la fin du XVII<sup>ème</sup> siècle et tous les grands noms s'y intéressèrent.

Léonard de Vinci (1452-1519) en fut l'un des premiers. Il élaborait ainsi une machine visant à répondre à l'une des principales questions nécessaires à l'élaboration d'un pont, à savoir quelle est la poussée horizontale exercée par l'arc aux naissances (figure 3.2). Il fut, en outre, le premier à considérer l'arc comme résultant de l'assemblage de voussoirs indépendants et non plus comme un élément homogène continu.

<sup>4</sup> La brève retranscription de l'historique des méthodes d'évaluation de la capacité portante des arcs en maçonnerie, entre les premiers développements et l'apparition des théories élastiques, présentée ici résulte essentiellement de l'étude des ouvrages de Kurrer [3.7], Heyman [3.8] et Timoshenko [3.9]

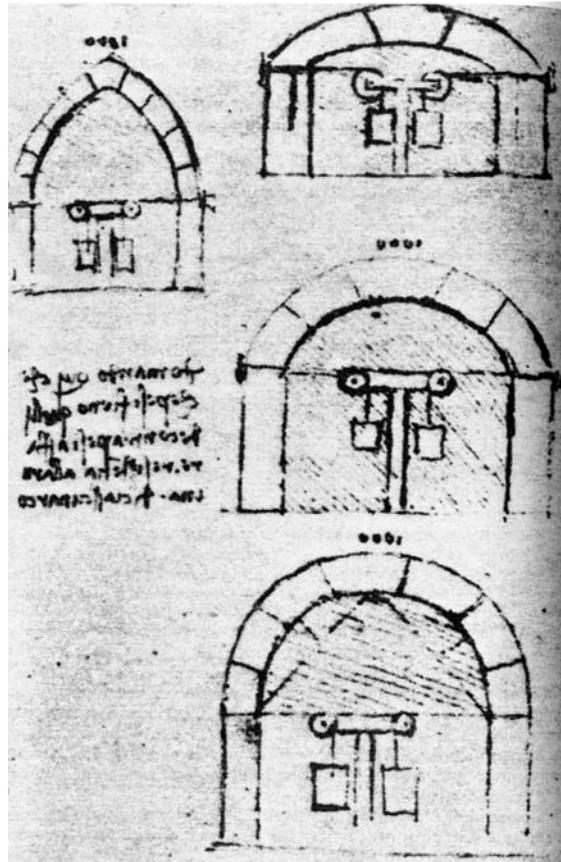


Figure 3.2 : Machines imaginées par Léonard de Vinci dans le but de mesurer la poussée horizontale exercée par un arc sur ses appuis [3.10]

Bien que probablement connue antérieurement, l'affirmation selon laquelle la forme idéale d'un arc consiste en l'inversion de celle que prendrait une corde de même longueur, suspendue entre ses appuis et chargée identiquement, ne sera publiée qu'en 1675, par Robert Hooke (1635-1703). En 1697, le britannique David Gregory (1659-1708) établit la première tentative d'expression mathématique de la chaînette et comprit alors intuitivement que les arcs dont le tracé d'intrados s'éloigne de cette forme résistent grâce à leur épaisseur. L'équation mathématique de la chaînette sera déterminée en 1704, par Jakob Bernoulli (1654-1705) grâce au calcul différentiel et intégral.

En dépit des travaux précoces de Léonard de Vinci, il faudra attendre la toute fin du XVII<sup>ème</sup> siècle pour que la première réelle théorie des arcs en maçonnerie soit publiée. Avec pour but de valider les principes empiriques utilisés jusqu'alors, Philippe de La Hire (1640-1718) y préconisa pour la première fois d'inverser le polygone funiculaire des charges et relia ce dernier à la notion de ligne des pressions. Sa théorie se basant toutefois sur l'hypothèse de l'absence de frottement entre les voussoirs, elle ne donna pas de résultats satisfaisants. En dépit de cette erreur, la théorie de La Hire, puis celle résultant des améliorations apportées par Bernard Forest de Bélidor (1697/1698-1761), fournissaient des résultats proches de ceux obtenus par l'application des règles empiriques et furent universellement reconnues en Europe. Différentes modifications leur furent peu à peu apportées, mais il faudra cependant attendre le milieu du XVIII<sup>ème</sup> siècle et la mise au point, par Charles de Coulomb (1736-1806) entre autres, de la théorie du frottement sec, pour que cette caractéristique puisse être introduite dans la théorie des arcs en maçonnerie.

Les progrès en matière de méthode de détermination de la capacité portante des arcs en maçonnerie connurent alors une période de stagnation, en raison

notamment de l'absence de considération du mécanisme de ruine dans la théorie. Les recherches se concentrèrent alors sur l'établissement de la ligne des pressions pour des cas de charge donnés. L'infinité de position d'équilibre, et donc de ligne des pressions, possibles rendait alors ce problème insoluble, à moins d'admettre une série d'hypothèses, pénalisant, par ailleurs, la validité des méthodes élaborées.

En 1730, Pierre Couplet (?-1743) fut le premier à ne pas baser sa théorie des arcs en maçonnerie sur une ligne des pressions admise, mais sur un mécanisme de ruine observé. Les essais menés par Augustin Hyacinthe Danyzy (1698-1777) en 1732, puis par Boistard (?-?) en 1800, confirmèrent par ailleurs le mode de ruine considéré par Couplet. En admettant par hypothèse un frottement infini entre les voussoirs, une résistance en compression du matériau illimitée et l'absence de résistance à la traction pour la maçonnerie, ce dernier posa les fondements des théories plastiques modernes qui seront élaborées plus de deux siècles plus tard.

L'étape suivante consista à combiner les approches par la ligne des pressions et celle par le mécanisme de ruine. Le premier à y parvenir fut Méry (?-?), en 1840. En se basant sur les résultats de la campagne d'essais menés par Boistard, il développa une méthode graphique de détermination de la ligne des pressions portant son nom et qui sera massivement utilisée pendant plusieurs dizaines d'années.

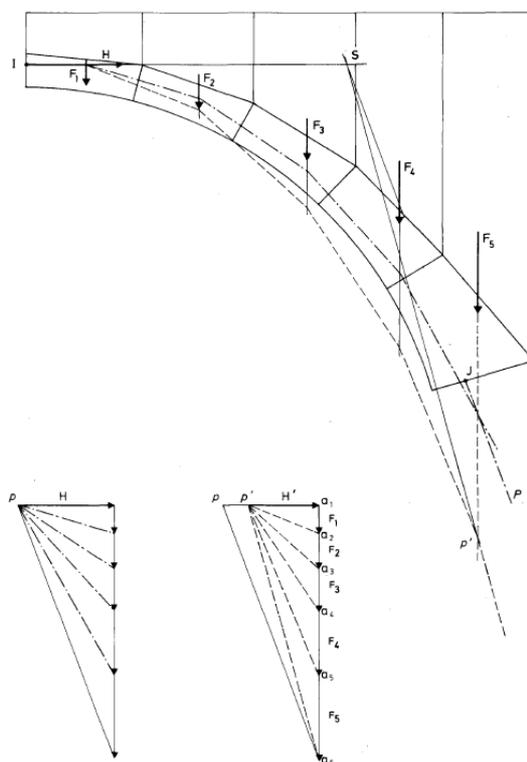


Figure 3.3 : Exemple d'épure de Méry pour un cas symétrique [3.11]

### 3.3. Les méthodes élastiques

En 1821, Claude-Louis-Marie-Henry Navier (1785-1836) établit les bases de la théorie de l'élasticité et l'appliqua aux arcs en maçonnerie. Les équations qui en résultèrent n'avaient cependant que rarement de solution et de nouvelles tables de dimensionnement furent établies.

En 1858, William Rankine (1820-1872) coupla la notion de ligne des pressions avec la théorie élastique et parvint à la conclusion que la résultante de l'effort appliqué, et par conséquent la ligne des pressions, devait rester dans la portion

centrale de l'arc. Il en résulta un principe, bien connu aujourd'hui sous le nom de règle du tiers central.

L'italien Carlo Alberto Castigliano (1847-1884) fournit, dès 1879, une méthode basée sur la théorie de l'élasticité qui fit date et fut à la base de nombreux développements futurs [3.12]. Se basant sur l'équation de l'énergie minimale de déformation, cumulée avec celles résultant de l'équilibre, la méthode de Castigliano permettait de calculer la position de la ligne des pressions, et donc l'état de contraintes s'établissant dans un arc en maçonnerie. Lorsque cette dernière sortait du tiers central, le matériau, théoriquement soumis à un effort de traction, était alors considéré comme fissuré et donc inefficace. Un nouveau calcul de la ligne des pressions, tenant compte de la section localement amincie, était alors effectué et les zones en traction résultant retirées. Le calcul se poursuivait ainsi, de manière itérative, jusqu'à l'atteinte de la contrainte admissible en compression [3.13].

Parfaitement maîtrisée par des ingénieurs tels Emil Mörsch (1872-1950) ou Paul Séjourné (1851-1939), la théorie élastique sera à l'origine du dimensionnement des derniers grands ponts en maçonnerie érigés en Europe.

Les essais menés par le professeur Pippard, en 1936, avec pour objectif de mieux comprendre le comportement réel d'un arc en maçonnerie et d'en identifier les modes de ruine, marquèrent un nouveau jalon dans l'étude des arcs en maçonnerie [3.14] (figure 3.4). Réalisées sur des arcs bi-articulés, ces expérimentations permirent à Pippard de confirmer les observations de Castigliano, à savoir que sous faible charge, l'arc en maçonnerie dont les appuis sont infiniment rigides se comporte comme un élément élastique continu. Une augmentation de la charge implique alors une diminution locale de la section efficace. Pippard poursuivit cependant le raisonnement et introduisit pour la première fois la notion de rotule, apparaissant lorsque l'épaisseur de la section tend vers zéro. Il établit ainsi la correspondance entre une excentricité de la ligne des pressions trop importante et l'apparition d'une telle rotule. Pippard constata en outre que dans le cas des arcs bi-articulés, la formation de deux d'entre elles était nécessaire à la rupture totale de l'élément, identifiant ainsi le mécanisme de ruine à quatre rotules.



Figure 3.4 : Essais effectués par Pippard [3.14]

Sur la base de ces essais et de la théorie de Castigliano, Pippard établit une nouvelle méthode élastique permettant d'évaluer la charge ultime supportée par un arc en maçonnerie. Considérant un modèle d'arc bi-articulé d'une largeur unitaire, elle permettait de déterminer la contrainte agissant dans une section d'arc sous charges de service et de la comparer à une contrainte admissible. La sollicitation limite ainsi calculée était ensuite augmentée d'un facteur de sécurité adéquat. Une restriction sur la contrainte de traction sollicitant la section était en outre introduite, en vue de limiter la fissuration et d'assurer ainsi un bon comportement en service [3.5]. La contribution d'éléments additionnels, tels que les tympans et le remplissage, était négligée. Pippard établit, grâce à sa méthode, une série de tables de dimensionnement qui furent longtemps utilisées.

Depuis lors, diverses études se sont attachées à modifier les méthodes de Castigliano et Pippard, permettant notamment d'exploiter les moyens informatiques disponibles de nos jours [3.15].

Les modèles basés sur la théorie élastique présentent l'avantage de fournir des indications quant aux contraintes et déformations sollicitant l'arc et de permettre une analyse de ce dernier en service. Toutefois, leur inadéquation avec le comportement du matériau et de la structure observé [3.16], allié à l'aspect fastidieux de leur application, implique que ce type de modèles tend peu à peu à être abandonné au profit des méthodes plastiques ou par éléments finis.

### **3.4. Les méthodes semi-empiriques**

La complexité des théories élastiques a en outre favorisé le développement de méthodes semi-empiriques, simples et rapides d'application, généralement conservatrices, mais dont la validité est aujourd'hui discutée. Deux d'entre elles sont présentées ci-dessous.

#### **3.4.1. La méthode MEXE**

La méthode MEXE (Military Engineering Experimental Establishment) a été développée durant, et juste après, la seconde guerre mondiale par des ingénieurs britanniques dans le but de vérifier, de manière simple et rapide, la portance d'anciens ouvrages au passage d'engins militaires. Basée sur un amalgame entre la théorie élastique de Pippard [3.14] et une série d'observations effectuées sur des ouvrages en service, elle requiert l'admission d'un certain nombre d'hypothèses restrictives, touchant au chargement, au tracé d'intrados, au système statique, au surbaissement ou encore à l'état de conservation de l'ouvrage. Une série d'abaques permet ensuite la détermination d'une charge axiale dite « provisionnelle », en fonction de l'ouverture de l'arc, de l'épaisseur de ce dernier et de celle de remplissage à la clé. Cette valeur doit finalement être révisée au moyen d'un certain nombre de facteurs de modification atténuant l'implication des diverses simplifications admises dans la méthode.

Adaptée pour un usage civil dans les années 1960, cette méthode connaît encore de nos jours un grand succès en raison de sa simplicité d'application et du fait qu'elle fournit dans la majorité des cas – mais pas toujours ! [3.13 ; 3.17-3.19] – un résultat conservatif. Cette méthode est néanmoins aujourd'hui critiquée par de nombreux experts et vue comme insuffisante à une évaluation adéquate de la capacité portante des ponts en maçonnerie.

Un grand nombre de critiques lui sont aujourd'hui adressées [3.20], parmi lesquelles l'absence d'informations quant aux hypothèses considérées, la négligence de certains paramètres, tels que la résistance en compression de la maçonnerie, l'absence de considération d'une interdépendance des facteurs de modifications, la trop forte implication de la hauteur de remplissage et surtout la grande sensibilité du résultat aux divers facteurs de modification, dont l'évaluation est entièrement laissée au jugement de l'ingénieur.

Par ailleurs, le niveau de restriction du domaine d'application de la méthode implique que son utilisation se borne à des situations très précisément définies et que son emploi pour des cas inadaptés peut conduire à des résultats totalement erronés [3.21]. L'usage de MEXE requiert par conséquent une grande expérience et une vision claire de ses limites est primordiale [3.19].

Un certain nombre de versions modifiées de MEXE ont été développées depuis lors [3.22]. Leur but est généralement de limiter l'influence des facteurs de modifications. Ces méthodes souffrent néanmoins toujours d'un manque de transparence et de trop grandes limitations quant à leur domaine d'application.

En résumé, MEXE est certainement une méthode économique et simple d'application, mais dont l'« obscurité » implique la nécessité de rester très prudent [3.22]. Il est par conséquent conseillé de n'utiliser MEXE que lors d'une première étape de l'examen d'un ouvrage, celle-ci étant ensuite à compléter par des investigations plus fiables [3.22 ; 3.23]. Basée sur des concepts élastiques, les résultats qu'elle fournit peuvent, en outre, être trop conservateurs. Il peut être par conséquent considéré que MEXE est aujourd'hui dépassée et que la nécessité d'une nouvelle méthode basée sur les concepts de la plasticité, transparente, économique et simple d'application, est impérieuse.

### **3.4.2. La méthode FILEV**

Moins connue et plus récente que MEXE, la méthode FILEV a été établie par Marin-Caro, Martinez et León [3.2 ; 3.24] sur la base de la modélisation numérique d'un grand nombre de ponts en arc en maçonnerie. Elle permet d'obtenir une évaluation de la charge limite uniquement sur la base de critères géométriques, tels l'épaisseur et l'ouverture de l'arc. Tout comme MEXE, son domaine d'application est strictement limité par des critères géométriques et relatifs au relevé de l'état. L'opacité des paramètres empiriques, sur lesquels repose entièrement la méthode, rend toute extrapolation aléatoire, voire dangereuse, et la méthode FILEV souffre, au final, de défauts semblables à ceux reprochés à MEXE.

## **3.5. Les méthodes basées sur l'analyse limite**

Dès les années 1950, la (re)découverte des concepts de dimensionnement plastiques, plus simples d'application que les méthodes basées sur la théorie élastique, offrit une nouvelle opportunité au calcul des ouvrages en maçonnerie. Associés à l'analyse limite, ils présentent le grand avantage de se baser uniquement sur l'état ultime de la structure, ce qui, dans le cas d'éléments hyperstatiques comme les arcs en maçonnerie, simplifie grandement le calcul [3.16].

La description des méthodes par analyse limite nécessite au préalable l'étude des différents modes de rupture décelés sur des arcs de ponts en maçonnerie.

### **3.5.1. Modes de rupture des arcs en maçonnerie**

Le mode de ruine des arcs en maçonnerie le plus fréquent et le plus facilement détectable est celui qui transforme l'élément structural en un mécanisme, suite à l'apparition de rotules [3.22 ; 3.25 ; 3.26] (figure 3.5). Ces dernières apparaissent consécutivement à l'application d'un moment de flexion induisant un décalage de la ligne des pressions vers l'intrados ou l'extrados de l'arc. L'apparition de la quatrième d'entre elles transforme la structure en un mécanisme instable, synonyme de la ruine.

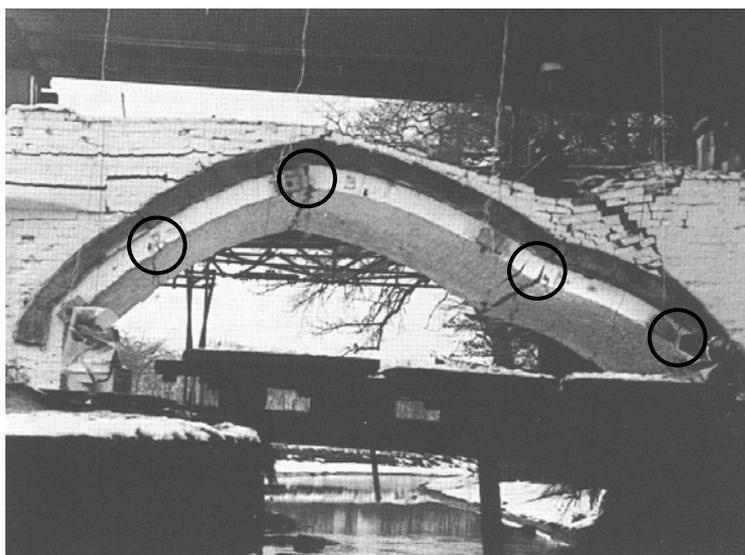


Figure 3.5 : Le Prestwood Bridge, juste avant son effondrement par la formation d'un mécanisme à quatre rotules [3.26]

Toutefois, bien que le mécanisme à quatre rotules soit le mode de ruine le plus souvent identifié, d'autres peuvent intervenir. La rupture dite par « snap-through » a été identifiée expérimentalement [3.27 ; 3.28] et survient après la formation de trois rotules, lorsque la ligne des pressions tend à être tangente à l'intrados aux naissances. Il s'en suit un brusque changement de la géométrie de l'arc, puis son effondrement, la section située sous la charge tendant à passer au-dessous de la ligne liant les naissances de l'arc (figure 3.6). Pour des raisons évidentes liées à la géométrie, ce mode de ruine est plus probable dans le cas d'arc surbaissés [3.29 ; 3.30].

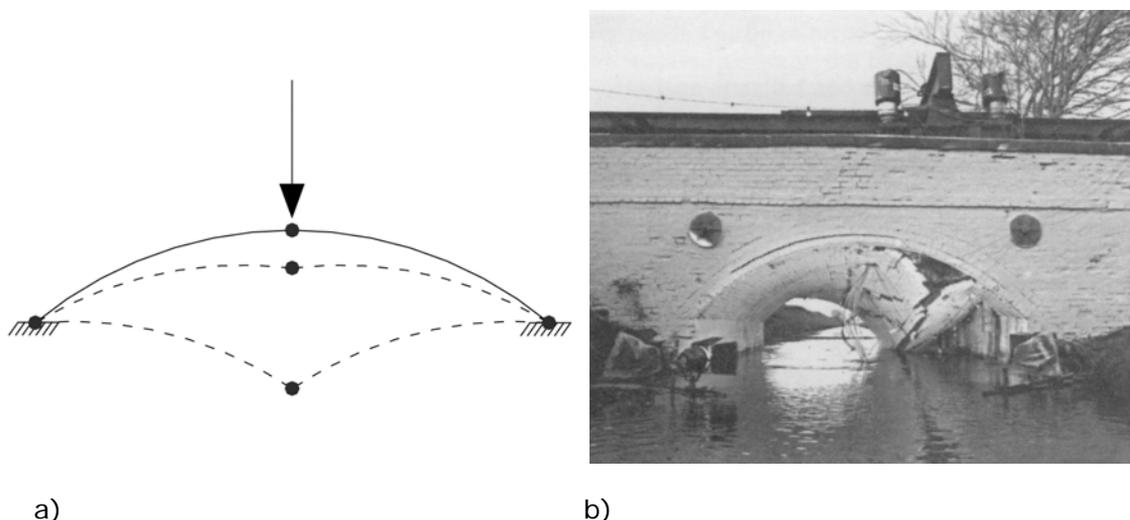


Figure 3.6 : Ruine d'un arc par snap-through [3.29] – a) schéma, b) Torksey Bridge [3.27]

Grâce à l'important coefficient de frottement inhérent à la maçonnerie, la ruine d'un arc par cisaillement est généralement admise comme étant extrêmement rare et a, de ce fait, le plus souvent été ignorée dans l'analyse de leur capacité portante [3.8 ; 3.31-3.33].

Dans le cas d'arcs surmontés d'une mince couche de remplissage, le risque d'une rupture locale par poinçonnement d'une charge ponctuelle devrait être examiné, tout au moins lorsque la structure est fortement endommagée [3.22]. Ce type de rupture n'est cependant généralement pas considéré dans les méthodes

d'évaluation de la capacité portante et doit être évalué au cas par cas, lorsque la situation le réclame.

Bien que l'arc soit une structure essentiellement soumise à des efforts de compression, le risque d'une rupture uniquement due à cette sollicitation est considéré comme pratiquement nul [3.31-3.33]. La résistance en compression intervient, par contre, conjointement avec la formation d'un mécanisme ou l'apparition d'une rupture par snap-through, lorsque la surface résiduelle d'application de l'effort de compression est réduite, suite au développement des rotules.

Qu'elles soient locales ou globales, des ruptures impliquant des éléments constitutifs des ponts en maçonnerie autres que l'arc, sont en outre fréquentes. Parmi les plus souvent citées, remarquons en particulier l'effondrement de l'un des tympans suite à un mauvais entretien et à la poussée du remplissage, ou encore l'affouillement de la fondation d'une pile.

### **3.5.2. La méthode de base de Heyman**

Les premières suggestions d'utilisation de la théorie de la plasticité pour les arcs en maçonnerie datent des années 1950 [3.34 ; 3.35]. C'est toutefois Jacques Heyman, alors professeur à l'Université de Cambridge qui, en se basant sur les observations de Pippard concernant l'apparition de rotules lorsque la ligne des pressions s'éloigne suffisamment de l'axe de l'arc, va développer la première analyse limite pour les arcs en maçonnerie [3.31 ; 3.32].

Sa théorie [3.33] se base sur l'application aux arcs en maçonnerie, de l'analyse plastique développée pour les structures métalliques. Elle implique, pour hypothèse principale, que ce type de structures se ruine par la formation d'un mécanisme à quatre rotules, à laquelle il ajoute les trois principes de base suivants :

- la maçonnerie a une résistance en compression infinie
- aucun effort de traction ne peut être transmis au travers des joints
- aucun glissement relatif entre les blocs n'est possible

Bien que non conservatrice, la première hypothèse se justifie par le très faible niveau de contraintes régnant dans les arcs, au regard de la résistance en compression de la maçonnerie (un ou deux ordres de grandeur de différence, selon Kurrer [3.7]).

Le second principe se situe, quant à lui, du côté de la sécurité. Bien qu'une certaine résistance à la traction existe et devrait être considérée pour une analyse parfaitement rigoureuse, la négliger dans le cas d'une vérification est considéré comme une hypothèse admissible dans le cas d'anciennes maçonneries [3.20].

Le troisième postulat se justifie par le coefficient de frottement relativement important de la maçonnerie, généralement évalué entre 0.6 et 0.72, ainsi que par diverses observations expérimentales [3.31].

La conséquence directe de la considération de ces hypothèses est que la résultante de l'effort intérieur au sein de l'arc est toujours une compression, perpendiculaire à la section. Il en résulte une concentration de la fissuration localement, puis la formation de rotules entre deux voussoirs adjacents (voir chapitre 5). La ruine globale de l'arc survient alors suite au développement d'un nombre suffisant de ces articulations pour transformer la structure en un mécanisme (voir chapitre 6).

Les trois postulats de Heyman garantissent en outre la possibilité d'appliquer les théorèmes fondamentaux de l'analyse limite aux arcs en maçonnerie. Le premier d'entre eux, dit statique, prend la forme générale suivante [3.36] :

*Toute charge limite obtenue à partir d'une distribution licite des efforts intérieurs, est inférieure ou égale à la charge limite réelle.*

Ce théorème implique que dans le cas de structures faites d'un matériau ductile, le seul respect des conditions statiques d'équilibre et de plasticité fournit une solution forcément du côté de la sécurité, la cinématique pouvant être violée. Dans le cadre des arcs en maçonnerie, l'implication de ce théorème peut être traduite de la manière suivante [3.33] :

*Un arc est stable si l'on peut trouver une ligne des pressions statiquement admissible, dont le tracé se situe entièrement à l'intérieur de l'arc et ne s'approche pas suffisamment de l'intrados ou de l'extrados pour induire l'écrasement du matériau en plus de trois points.*

Outre le fait appréciable de fournir une borne inférieure de la solution, la puissance de ce théorème réside dans le fait qu'il n'est pas nécessaire de déterminer la ligne des pressions réelle, ce qui est fort avantageux dans le cas de structures hyperstatiques comme l'arc en maçonnerie. En effet, prouver qu'il existe une possibilité d'établir une ligne des pressions répondant aux critères précités suffit à garantir la stabilité de l'élément. Une fois une telle ligne déterminée, un processus itératif permet d'évaluer la capacité portante de l'arc considéré.

Le second théorème fondamental de l'analyse limite, dit cinématique, peut, d'une manière générale, être exprimé par la forme suivante [3.36] :

*Tout multiplicateur limite obtenu à partir d'une cinématique licite est supérieur ou égal au vrai multiplicateur.*

L'implication directe de ce théorème est que la capacité portante d'une structure calculée sur la base du respect des seules conditions cinématiques de compatibilité et de plasticité est surestimée, la violation de la condition statique de plasticité ne plaçant pas le résultat obtenu du côté de la sécurité. Dans le cadre de l'analyse des arcs en maçonnerie, ce théorème pourrait prendre la forme suivante [3.33] :

*Un arc devient instable lorsque le chargement en équilibre auquel il est soumis transforme la structure en un mécanisme cinématiquement admissible.*

Fournissant, quant à lui, une borne supérieure de la solution, ce théorème implique d'admettre à priori la position des rotules et de réviser celle-ci par itérations successives pour trouver leur configuration critique, correspondant à la valeur minimale de la borne supérieure ainsi déterminée.

L'application de ces principes aux arcs en maçonnerie permet à Heyman de déterminer l'épaisseur nécessaire au maintien de la ligne des pressions dans l'arc, et donc à la reprise d'une sollicitation donnée [3.33 ; 3.37]. Le rapport entre l'épaisseur minimale nécessaire et l'épaisseur réelle de l'arc peut dès lors être interprété comme un facteur de sécurité, qualifié par Heyman de géométrique.

Outre les trois hypothèses fondamentales présentées ci-dessus, la méthode de base développée par Heyman implique certaines simplifications, telles notamment l'absence de considération des effets dus au remplissage. La méthode nécessite, en outre, un double processus itératif, permettant la détermination d'une part de la configuration critique des rotules, et d'autre part de la position déterminante de la charge appliquée.

### **3.5.3. Les méthodes dérivées**

Un grand nombre de méthodes ont été développées sur la base des principes établis par Heyman. Celles-ci tendent généralement soit à révoquer une ou plusieurs des hypothèses de base de la méthode, soit à considérer certains effets ignorés dans le concept de base de Heyman.

Ainsi, les méthodes modernes basées sur le mécanisme à quatre rotules considèrent généralement des propriétés mécaniques plus élaborées, en particulier en ce qui concerne la résistance en compression qui n'est dès lors plus admise infinie [3.18 ; 3.20 ; 3.38-3.41]. D'autres modèles se sont par contre attachés à révoquer l'hypothèse concernant le frottement entre les voussoirs et considèrent une possibilité de glissement entre ces derniers [3.42 ; 3.43].

Les effets du remplissage, représentés sous la forme d'une poussée s'exerçant contre une portion donnée de l'arc lorsque ce dernier se déforme, ainsi qu'une certaine diffusion de la charge à travers ce matériau sont en outre généralement intégrés aux méthodes actuelles de détermination de la capacité portante des arcs en maçonnerie [3.18 ; 3.44-3.46]. Certaines d'entre elles sont en outre capables de considérer l'effet d'un éventuel endommagement de l'arc, tel un manque local de matériaux [3.19] ou encore une séparation des rouleaux concentriques constituant parfois certains arcs [3.44 ; 3.47] (figure 3.7).

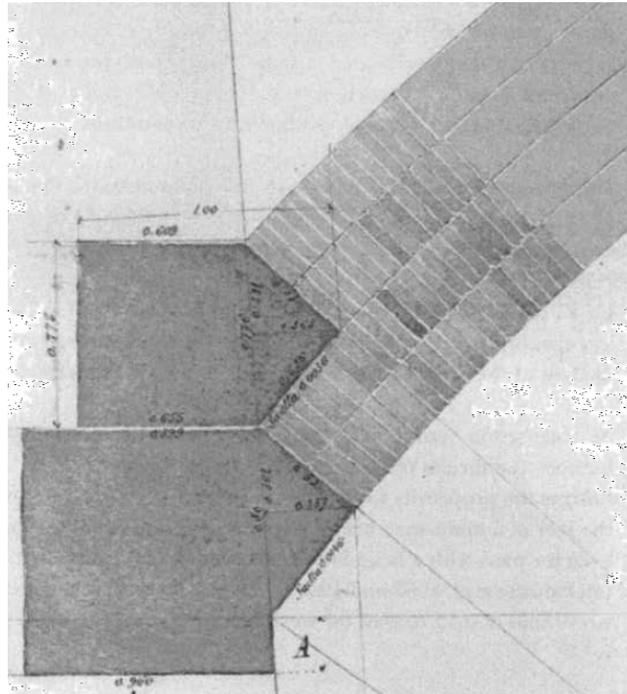


Figure 3.7 : Exemple d'une naissance d'arc de pont constitué de quatre rouleaux concentriques [3.48]

En raison de l'aspect fastidieux des processus itératifs, les méthodes modernes basées sur le mécanisme à quatre rotules sont de plus en plus souvent implémentées dans des programmes informatiques [3.16 ; 3.39 ; 3.45 ; 3.49-3.51].

En 1978, Livesley introduisit le concept consistant à diviser l'arc en un certain nombre de blocs rigides, connectés par des joints sans épaisseur et sans résistance à la traction. Toutes les combinaisons possibles des déplacements virtuels compatibles avec les lois cinématiques du système de blocs rigides sont alors considérées dans sa méthode. Les processus itératifs y sont, en outre, remplacés par une résolution utilisant la programmation linéaire, la fonction objective étant la maximisation de la charge soumise à des contraintes résultant de l'application des équations d'équilibre au premier ordre [3.52].

Ce type d'analyse conduisit plus tard Gilbert et Melbourne à développer une méthode basée sur l'optimisation linéaire et sur l'équilibre successif de chaque voussoir, considérés comme des blocs rigides [3.44]. Implémenté dans un programme informatique, ce modèle a donné naissance au logiciel RING,

largement utilisé aujourd'hui pour la détermination de la capacité portante des arcs en maçonnerie (voir chapitre 7) [3.53].

Les méthodes basées sur le mécanisme à quatre rotules sont difficilement adaptables pour une extension aux ponts multi-portées, le mécanisme de ruine développé dans ces cas impliquant d'autres éléments structuraux que l'arc lui-même, tels que les piles ou les portées adjacentes. Certains s'y sont néanmoins essayés, citons par exemple Hughes [3.54] ou encore Gilbert, via le logiciel RING [3.53].

Des tentatives d'extension tridimensionnelle des méthodes basées sur le mécanisme à quatre rotules ont en outre été relevées [3.55].

### **3.6. Les méthodes numériques**

La complexité et l'aspect fastidieux des problèmes liés aux arcs en maçonnerie de pierre naturelle ont rapidement conduit les chercheurs à se tourner vers les éléments finis, dont la facilité d'application peut cependant être parfois trompeuse.

A l'inverse des méthodes basées sur le mécanisme, les éléments finis sont en mesure de fournir l'état de contrainte sollicitant l'arc en fonction de l'historique de chargement et permettent la prise en compte de différents modes de rupture, notamment celui par snap-through. L'intégration de lois constitutives complexes est possible et l'effet bénéfique apporté par les tympans et les murs en aile peut être introduit, grâce aux modèles tridimensionnels [3.56].

L'influence positive du matériau de remplissage sur la capacité portante peut être prise en compte selon deux approches. La première comprend un ensemble de barres horizontales définies avec une rigidité équivalente [3.57 ; 3.58], alors que dans la seconde, le remplissage est discrétisé en un maillage d'éléments finis bidimensionnels liés à l'arc [3.57 ; 3.59 ; 3.60].

Les modèles par éléments finis permettent en outre de considérer l'état de conservation effectif de l'ouvrage. Il est cependant parfois difficile de traduire dans le modèle le dommage constaté in situ.

Les modèles par éléments finis développés ces dernières années sont multiples [3.57-3.59 ; 3.61]. Ils permettent l'incorporation d'un très haut degré de sophistication. Toutefois, un certain nombre de difficultés ont été relevées. Il a ainsi été noté que les conditions de bord étaient parfois ardues à déterminer [3.16] ou encore que des problèmes de convergence survenaient suite à la considération d'un matériau sans résistance à la traction [3.59 ; 3.60].

En raison des propriétés inhérentes au matériau, une analyse élastique-linéaire n'est clairement pas valable dans le cas de la maçonnerie et il est primordial qu'un programme d'éléments finis tienne compte des non-linéarités, tant géométriques que matérielles [3.18]. Le temps de calcul et la puissance informatique nécessaires peuvent alors rapidement prendre des proportions importantes [3.15]. Par ailleurs, selon certains auteurs [3.44 ; 3.47], les incertitudes liées aux propriétés des matériaux et aux détails constructifs internes rendent l'application de ces méthodes dangereuse en raison de leur sensibilité à de tels paramètres. Une procédure de validation du modèle est par conséquent primordiale.

Les programmes d'éléments finis permettent la modélisation de la maçonnerie comme un composite fait de blocs de pierre entourés de mortier (voir § 4.3.1) [3.62-3.65]. Les ressources nécessaires à l'application de tels modèles sont cependant très importantes et leur utilisation est souvent restreinte à l'étude d'éléments isolés de petite taille. Il est dès lors souvent préféré de considérer la maçonnerie comme un continuum. La caractérisation du comportement du

matériau dans ce cas n'est cependant pas immédiate et nécessite une étude particulière (voir chapitre 4).

En résumé, la puissance et les possibilités offertes par les modèles par éléments finis actuels rendent ces derniers incontournables dans l'analyse des ponts anciens. Les programmes ainsi réalisés permettent une modélisation précise et fiable, du moment que l'utilisateur qui les emploie dispose des connaissances et du recul nécessaires. Ainsi, une attention particulière doit être portée à la validation de tels modèles et l'application parallèle d'une méthode analytique constitue vraisemblablement le meilleur moyen d'adopter une œil critique sur les résultats obtenus.

### **3.7. Les études expérimentales**

Quelques études expérimentales, ayant pour objectif général la validation de divers modèles d'évaluation de la capacité portante des arcs en maçonnerie, ont été publiées dans la littérature. La majorité d'entre elles est relative à des essais menés en laboratoire sur des modèles réduits d'arcs, le plus souvent réalisés en brique [3.13 ; 3.21, 3.66-3.74]. Bien que très instructifs quand à la compréhension globale du comportement de ce type de structures, les résultats obtenus doivent cependant parfois faire l'objet d'une certaine réserve en ce qui concerne la considération des effets d'échelle et la prise en compte des divers composants influençant le comportement de l'arc, tels que le matériau de remplissage ou les tympans.

Des ponts en arcs en maçonnerie de pierre naturelle ont fréquemment été soumis à des essais sous charges de service, en vue de mesurer leur comportement statique et / ou dynamique. Ces derniers renseignent de manière optimale sur le fonctionnement de ce type d'ouvrages et permettent une vérification de leur comportement en service. Ils n'offrent cependant que peu d'indications quand à la réponse de l'ouvrage à l'approche de l'état limite ultime [3.75-3.81].

Dans les années 1980, le Transport and Road Research Laboratory (Crowthorn, UK) a testé jusqu'à la ruine une série de ponts existants. Bien que pas toujours menés de manière très rigoureuse, ces essais sont une précieuse source de renseignements quand au comportement à l'état limite ultime des ponts anciens en maçonnerie de pierre naturelle. Les résultats obtenus sont, par conséquent, encore fréquemment utilisés aujourd'hui comme moyen de validation des modèles d'évaluation de la capacité portante de ce type d'ouvrages [3.26-3.28 ; 3.82-3.85].

Les méthodes d'essais non destructives sont de plus en plus souvent employées dans le cadre de l'examen des ponts anciens [3.86-3.92]. Les plus fréquemment utilisées, telles par exemple que le géoradar, offrent en particulier la possibilité de déterminer la géométrie interne de la structure, telle que l'épaisseur de l'arc, des tympans ou des parements porteurs des piles, tout en préservant de manière absolue l'intégrité de l'ouvrage.

### **3.8. Conclusions**

A l'heure actuelle, les méthodes les plus courues en matière d'évaluation de la capacité portante des arcs en maçonnerie font presque toutes appel à la théorie du mécanisme ou aux éléments finis. En raison de leur aspect fastidieux, de leur conservatisme et des divergences observées par rapport au comportement réel de la maçonnerie, les méthodes élastiques ont tendance à être abandonnées.

Les modèles basés sur le mécanisme à quatre rotules sont avantagés par leur simplicité d'application et par leur transparence, qui autorise un contrôle plus détaillé des résultats obtenus que ne le permettent les éléments finis. Ces deux

types de modèles n'en demeurent pas moins complémentaires, leurs avantages respectifs se complétant pour offrir un moyen d'analyse le plus fiable possible.

### **3.9. Références**

- [3.1] Gay C. (1924) *Ponts en maçonnerie*, Encyclopédie du génie civil et des travaux publics, Librairie J.-B- Baillières, Paris, 704 p.
- [3.2] Proske D., Lieverwirth P., van Gelder P. (2006) *Sicherheitsbeurteilung historischen Bogenbrücken*, Sonderdruck zum 16. Dresdner Brückenbausymposium, Dirk Proske Verlag, Dresden, 310 p.
- [3.3] Corradi M. (1998) *Empirical methods for the construction of masonry arch bridges in the 19th century*, Arch Bridges : history, analysis, assessment, maintenance and repair. Proceedings of the second international arch bridge conference, Sinopoli (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 25-36.
- [3.4] Gentil T. (2007) *Pont sur la Dala : Rapport d'examen*, Projet de master, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 97 p.
- [3.5] Das P. C. (1995) *The assessment of masonry arch bridges*, Arch Bridges, C. Melbourne ed., Thomas Telford, London, UK, pp. 21-27.
- [3.6] Heinrich B. (1983) *Brücken : vom Balken zum Bogen*, Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Hambourg, 277 p.
- [3.7] Kurrer K.-E. (2008) *The History of the theory of structures: from arch analysis to computational mechanics*, Ernst & Sohn, Berlin, 848 p.
- [3.8] Heyman J. (1972) *Coulomb's memoir on statics. An Essay in the History of Civil Engineering*, Imperial College Press, Londres, 212 p.
- [3.9] Timoshenko S. P. (1953) *History of Strength of Materials*, Dover Publications, Inc., New York, 452 p.
- [3.10] Heinrich B. (1979) *Am Anfang war der Balken. Zur Kulturgeschichte der Steinbrücke*, Band 2, Kulturgeschichte der Naturwissenschaften und der Technik, Deutsches Museum, 220 p.
- [3.11] SETRA (1982) *Ponts en maçonnerie : Historique et Constitution*, Bagnaux, 96 p.
- [3.12] Castigliano C. A. P., (1966) *The theory or equilibrium of elastic systems and its applications*, Dover Publications, INC., New York, 360 p.
- [3.13] Page J. (1995) *Load tests for assessment of in-service arch bridges*, Arch Bridges C. Melbourne, Ed. Thomas Telford, London, UK, pp. 299-308.
- [3.14] Pippard A. J. S. (1951) *A Study of the Voussoir arch*, His Majesty's Stationery Office, National Building Studies, Research Paper n°11, 52 p.
- [3.15] Bridle R. J., Hughes T. G. (1990) *An energy method for arch bridges analysis*, Proc. Instn. Civ. Engrs., London, UK, 89, pp. 375-385.
- [3.16] Blasi C., Foraboschi P. (1994) *Analytical Approach to Collapse Mechanisms of Circular Masonry Arch*, Journal of Structural Engineering, vol. 120, n°8, pp. 2288-2309.
- [3.17] Harvey W. J. (1995) *Assessment of Masonry Arch Bridges Using Stability Analysis*, Restructuring: America and Beyond, Proceedings of Structures Congress XIII held in Boston, Massachusetts, Masoud Sanayei (eds.), New York, pp. 996-999.
- [3.18] Harvey W. J. (1988) *Application of the mechanism analysis to masonry arches*, The Structural Engineer, vol. 66, n°5/1, pp. 77-84.

- [3.19] McKibbins, L., Melbourne C., Sawar N., Sicilia Gaillard C. (2006) *Masonry arch bridges – Condition, appraisal and remedial treatment*, Department for Transport, Network Rail, Ciria, London, 342 p.
- [3.20] Boothby T. E., Fanning P. J. (2004) *Load Rating of Masonry Arch Bridges: Refinements*, Journal of Bridge Engineering, ASCE, vol. 9, n°3, pp.304-307.
- [3.21] Page, J. (1995) *Load tests to Collapse on Masonry Arch Bridges*, Arch Bridges, Ed. Thomas Telford, London, pp. 289-298.
- [3.22] Hughes T. G., Blackler M. J. (1997) *A review of the UK masonry arch assessment methods*, Proc. Instn. Civ. Engrs. Structs. & Bldgs, 122, pp. 305-315.
- [3.23] Union Internationale des Chemins de fer (1995) *Recommandations pour l'évaluation de la capacité portante des ponts-voûtes existants en maçonnerie et béton*, Code UIC, 778-3 R, 89 p.
- [3.24] Martin-Caro J. A., Martinez J. L., León J. (2004) *A First Level Structural Analysis Tool for The Spanish Railways Masonry Arch Bridges*, Proceedings of Arch Bridge IV – Advances in Assessment Structural Design and Construction, P. Roca & E. Oñate (eds.), CIMNE, Barcelona.
- [3.25] Kumar P., Bhandari N. M. (2005) *Non-linear Finite Element Analysis of Masonry Arches for Prediction of Collapse Load*, Structural Engineering International, 3, pp. 166-174.
- [3.26] Page J. (1987) *Load tests to collapse on two arch bridges at Preston, Shropshire and Prestwood, Staffordshire*, Transport and Road Research Laboratory, TRRL Research Report 110, 25 p.
- [3.27] Page J. (1988) *Load tests to collapse on two arch bridges at Torksey and Shinafoot*, Research Report 159, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 22 p.
- [3.28] Page J. (1989) *Load tests to collapse on two arch bridges at Strathmashie and Barlae*, Research Report 201, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 17 p.
- [3.29] Wang X. J., Harvey W. J. (1995) *Snap-through buckling analysis of shallow masonry arches*, Arch Bridges, C. Melbourne ed., Thomas Telford, London, UK, pp. 417-426.
- [3.30] Ochsendorf J. A. (2006) *The masonry arch on spreading supports*, The Structural Engineer, vol. 84, n°2 pp. 29-35.
- [3.31] Heyman J. (1966) *The stone skeleton*, Int. J. Solids Structures, vol. 2, pp. 269-279.
- [3.32] Heyman J. (1969) *The safety of masonry arches*, Int. J. Mech. Sci., vol. 11, pp. 363-385.
- [3.33] Heyman J. (1982) *The masonry arch*, Ellis Horwood Series in Engineering Science, Chichester, 117 p.
- [3.34] Drucker D. C. (1953) *Coulombs friction, plasticity and limit loads*, Transactions of the American Society of mechanical Engineers, vol. 21, pp. 71-74.
- [3.35] Kooharian A. (1953) *Limit analysis of voussoir (segmental) and concrete arches*, Proc. Am. Concr. Inst., vol. 49, pp. 317-328.
- [3.36] Frey F. (2000) *Analyse des structures et milieux continus. Mécanique des structures*, Traité de Génie Civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de

- Lausanne, vol. 2, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 452 p.
- [3.37] Heyman J. (1980) *The estimation of the strength of masonry arches*, Proc. Instn. Civ. Engrs., 68, London, pp.921-937.
- [3.38] Smith F. W., Harvey W. J., Vardy A. E. (1990) *Three-hinge analysis of masonry arches*, The Structural Engineer, vol. 68, n°11/5, pp. 203-213.
- [3.39] Taylor N., Mallinder P. (1993) *The brittle hinge in masonry arch mechanism* Structural engineer, vol. 71, Issue 20, London, pp. 359-366.
- [3.40] Harvey W. J. (1991) *Stability, strength, elasticity and thrustlines in masonry structures*, The Structural Engineer, vol. 69, n°9/7, pp. 181-184.
- [3.41] Harvey W. J. (1991) *The behaviour and assessment of multispan arches*, The Structural Engineer, vol. 69, n°24/17, pp. 411-417.
- [3.42] Begg, D. W., Fishwick R. J. (1994) *Limit analysis of masonry arch bridges*, Bridges: Assessment, management and design, B.I.G. Barr H. R., Evans and J. E. Harding (eds.), Elsevier, New York, pp. 175-180.
- [3.43] Boothby T. E. (1992) *Collapse Modes of Masonry Arch Bridges*, Proc. Historic Bridges Conf. Ohio, Historical Soc. Columbus, Ohio, pp. 184-203.
- [3.44] Gilbert M., Melbourne C. (1994) *Rigid-block analysis of masonry structures*, The Structural Engineer, vol. 72, n°21/1, pp. 356-361.
- [3.45] Crisfield M. A., Packham A. J. (1987) *A mechanism program for computing the strength of masonry arch bridges*, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, Research Report 124, Crowthorne, 20 p.
- [3.46] Melbourne C., Walker P. J. (1988) *Load tests to collapse of model brickwork masonry arches*, Brick and Block masonry, vol. 2, John W. DeCourcy (ed.), Elsevier Applied Science, NY, pp. 991-1002.
- [3.47] Melbourne C., Gilbert M. (1994) *The application of limit analysis techniques to masonry arch bridges*, Bridges: Assessment, management and design, B.I.G. Barr H. R., Evans and J. E. Harding (eds.), Elsevier, New York, pp. 193-198.
- [3.48] Brencich A., Colla C. (2002) *The influence of construction technology on the mechanics of masonry railway bridges*, 5<sup>th</sup> Int. Conf. Railway Engineering, M. C. Forde (ed.), Londres.
- [3.49] Hughes T. G., Hee S. C., Soms E. (2002) *Mechanism analysis of single span masonry arch bridges using a spreadsheet*, Proc. ICE Structures and Buildings, 152, pp. 341-350.
- [3.50] Gilbert M. (2001) *RING: A 2D Rigid-block analysis program for masonry arch bridges*, Arch'01, C. Abdunur (ed.), Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf. Arch Bridges, Paris, pp. 459-464.
- [3.51] Falconer R. E. (1987) *The assessment of masonry arches using commercial software*, Int. Conf. Structural faults and repair, London.
- [3.52] Livesley R. K. (1978) *Limit analysis of structures formed from rigid blocks*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 12, pp. 1853-1871.
- [3.53] RING 2.0. (2007) *Theory & Modelling Guide*. Limitstate Ltd, 85 p.

- [3.54] Hughes T. G. (1995) *The testing analysis and assessment of masonry arch bridges*, Structural analysis of historical constructions, P. Roca (ed.), CIMNE, Barcelona Spain.
- [3.55] Livesley R. K. (1992) *A computational model for the limit analysis of 3-dimensional masonry structures*, *Meccanica*, 27, pp. 161-172.
- [3.56] Molins C., Roca P. (1998) *Capacity of masonry arches and spatial frames*, *Journal of Structural Engineering*, vol. 124, n°6, pp. 653-663.
- [3.57] Crisfield M. A., Wills J. (1985) *Nonlinear analysis of concrete and masonry structures*, Proc. Europe-US Symp. On Finite Element Methods for Nonlinear Problems, pp. 693-652.
- [3.58] Choo B. S., Coutie M. G., Gong N. G. (1991) *Finite-element analysis of masonry arch bridges using tapered elements*, Proc. Instn. Civ. Engers., London, UK, 91, pp. 755-770.
- [3.59] Gong N. G., Choo B. S., Coutie M. G. (1993) *Crack and contact problems in masonry arch bridges*, Proc. V ICCCB, ASCE, New York, pp. 801-808.
- [3.60] Loo Y., Yang Y. (1991) *Cracking and failure analysis of masonry arch bridges*, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 117 (6), pp. 1641-1659.
- [3.61] Maunder E. A. W. (1995) *Thrust line solutions for masonry arches derived from finite element models*, Arch Bridges, C. Melbourne (ed.), Thomas Telford, London, UK, pp. 215-224.
- [3.62] Page A. W. (1978) *Finite element model for masonry*, *J. Struct. Div.*, ASCE, 104 (8), pp. 1267-1285.
- [3.63] Chiostri S., Vignoli A. (1989) *Application of a numerical method to the study of masonry panels with various geometry under seismic loads*, Structural repair and maintenance of historical buildings, Computation Mechanics Inc., pp. 309-317.
- [3.64] Ali S. S., Page A. W. (1988) *Finite element model for masonry subjected to concentrated loads*, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 114 (8), pp. 1761-1784.
- [3.65] Lourenço P. B. (1994) *Analysis of masonry structures with interface elements: Theory and applications*, Rep. n° 03-21-22-0-01, Delft Univ. of Technol., Delft, the Netherlands, 25 p.
- [3.66] Melbourne C., Begimgil M., Weeks L. (1995) *The load test to collapse a 5m span brickwork flat arch barrel*, Proc. Of the First International Conference on Arch Bridges held at Bolton, UK, pp. 397-406.
- [3.67] Melbourne C., Begimgil M., Gilbert M. (1995) *The load test to collapse a 5m span brickwork arch bridge with tied spandrel walls*, Proc. Of the First International Conference on Arch Bridges held at Bolton, UK, pp. 509-517.
- [3.68] Prentice D. J., Ponniah D. A. (1994) *Testing of multi-span model masonry arch bridges*, Bridge Assessment Management and Design, B. I. G. Barr, H. R. Evans, J. E. Harding (Eds.), pp. 169-174.
- [3.69] Royles R., Hendry A. W. (1991) *Model tests on masonry arches*, Proc. of Inst. of Civil Engrs., Part 2, 91, pp. 299-321.
- [3.70] Gilbert M., Melbourne C. (1995) *Analysis of multi-ring brickwork arch bridges*, Proc. Of the First International Conference on Arch Bridges held at Bolton, UK, pp. 225-238.
- [3.71] Soyland K., Rosson B. T. (1995) *The influence of mortar properties on the system behavior of masonry arch bridges*, Proc. Of the First

- International Conference on Arch Bridges held at Bolton, UK, pp. 355-364.
- [3.72] Brown G., Pretlove A. J., Ellick J. C. A., Hogg V., Choo B. S. (1995) *Changes in the dynamic characteristics of a masonry arch bridge subjected to monotonic loading to failure*, Proc. Of the First International Conference on Arch Bridges held at Bolton, UK, pp. 375-383.
- [3.73] Sumon S. K., Ricketts N. (1995) *Repair and strengthening of masonry arch bridges*, Proc. Of the First International Conference on Arch Bridges held at Bolton, UK, pp. 501-508.
- [3.74] Garrity S. W. (1995) *Retro-reinforcement – A proposed Repair system for masonry arch bridges*, Proc. Of the First International Conference on Arch Bridges held at Bolton, UK, pp. 557-566.
- [3.75] Brühwiler E. (2009) *Sanneviadukt Gümnenen, Verformungsmessungen – Interpretation der Ergebnisse*, Rapport interne EPFL-MCS n° 230805.1, 21 p.
- [3.76] Boothby T., Domalik D., Dalal V. (1995) *Assessment of masonry arch bridges by service load testing*, Proc. Of the First International Conference on Arch Bridges held at Bolton, UK, pp. 345-354.
- [3.77] Boothby T. E., Domalik D. E., Dalal V. A. (1998) *Service Load Response of Masonry Arch Bridges*, Journal of Structural Engineering, vol. 124, n°1, pp. 17-23.
- [3.78] Brencich A., Sabia D. (2007) *Tanaro Bridge: Dynamic Tests on a Couple of Spans*, Journal of Bridge Engineering, 12 (5), pp. 662-665.
- [3.79] Brookes C. L., Mullett P. J. (2004) *Service Load Testing, Numerical Simulation and Strengthening of Masonry Arch Bridges*, Arch Bridges, ARCH'04, CIMNE, Barcelona.
- [3.80] Gupta R. K. (2008) *Judging suitability of arch bridges for higher axle loading by load testing*, Bridge Maintenance, Safety, Management, Health Monitoring and Informatics – Koh & Frangopol (eds), pp. 468-475.
- [3.81] Mann P., Gunn M. (1995) *Computer modelling of the construction and load testing of masonry arch bridge*, Proc. Of the First International Conference on Arch Bridges held at Bolton, UK, pp. 277-286.
- [3.82] Alfaiate J., Gallardo A. (2001) *Numerical simulations of a full scale load test on a stone masonry arch bridge*, Historical Constructions, P.B. Lourenço, P. Roca (Eds.), Guimarães, pp. 739-748.
- [3.83] León J., Espejo S. R. (2007) *Load test to collapse on the masonry arch bridge at Urnieta*, 5th International Conference on Arch Bridges, ARCH'07, pp. 969-977.
- [3.84] Hendry A. W., Davies S. R., Royles R. (1985) *Test on stone masonry arch at Bridgemill – Girvan*, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, Contractor Report 7, Crowthorne, 63 p.
- [3.85] Hendry A. W., Davies S. R., Royles R., Ponniah D. A., Forde M. C., Komeyli-Birjandi F. (1986) *Load test to collapse on a masonry arch bridge at Bargower, Strathclyde*, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, Contractor Report 26, Crowthorne, 107 p.
- [3.86] Bensalem A., Fairfield C. A., Sibbald A. (1995) *Non-destructive testing for arch bridge assessment*, Proc. Of the First International Conference on Arch Bridges held at Bolton, UK, pp. 459-467.

- [3.87] Bien J., Kaminski T., Trela Ch. (2008) *Numerical analysis of old masonry bridges supported by field tests*, Bridge Maintenance, Safety, Management, Health Monitoring and Informatics – Koh & Frangopol (eds), pp. 2384-2391.
- [3.88] Helmerich E., Niederleithinger E., Trela C., Bien J., Bernardini G. (2008) *Complex multi-tool inspection of a masonry arch bridge using non-destructive testing*, Bridge Maintenance, Safety, Management, Health Monitoring and Informatics – Koh & Frangopol (eds), pp. 3716-3723.
- [3.89] Orban Z. (2006) *Increasing the reliability of the assessment of masonry arch bridges by non-destructive testing*, Pollack Periodica, An International Journal for Engineering and Information Sciences, vol. 1, No. 3, pp. 45–56.
- [3.90] Orban Z., Yakovlev G., Pervushin G. (2008) *Non-destructive testing of masonry arch bridges – an overview*, Bautechnik 85, Heft 10, pp. 711-717.
- [3.91] Orban Z. (2006) *Assessment of masonry arch railway bridges assisted by non-destructive testing*, 6<sup>th</sup> International PhD Symposium in Civil Engineering, Zurich.
- [3.92] Orban Z., Gutermann M. (2006) *Assessment of masonry arch railway bridges using non-destructive in-situ testing methods*, Engineering Structures 31, pp. 2287-2298.

### **3.10. Références complémentaires <sup>5</sup>**

- [3.93] Ashour A. F., Garrity S. W. (1998) *An upper bound analysis for the strength assessment of masonry arch bridges*, Arch Bridges, Sinopoli (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 139-146.
- [3.94] Begimgil M. (1995) *Behaviour of restrained 1.25 m span model masonry arch bridge*, Arch Bridges, Ed. Thomas Telford, London, pp. 321-325.
- [3.95] Boothby T. E., Browne C. B. (1993) *A general lower and upper bound theorem of static stability*, Engrg. Struct., vol. 15, n°3, pp.189-196.
- [3.96] Boothby T. E. (1994) *Limit states analysis of masonry arches*, Proc. Struct. Congr. XII, ASCE, New York, pp. 797-802.
- [3.97] Boothby T. E. (1997) *Elastic-Plastic stability of jointed masonry arches* Eng. Struct, 19 (5), pp. 345-351.
- [3.98] Boothby T. E. (2001) *Load Rating of Masonry Arch Bridges*, Journal of Bridge Engineering, ASCE, vol. 6, issue 2, pp. 79-86.
- [3.99] Boothby T. E. (2001) *Analysis of masonry arches and vaults*, Prog. Struct. Engrg. Mater., 3, pp. 246-256.
- [3.100] Boothby T. E., Atamturkur H. S., Hanagan L. M. (2006) *Modal analysis methods for validation of vaulted stone masonry models*, Proceedings of the 2006 Architectural Engineering National Conference Conference, Omaha, Nebraska, USA, Mohammed Ettouney (eds.), pp. 1-8.
- [3.101] Brencich A., De Francesco U. (2004) *Assessment of Multispan Masonry Arch Bridges. I: Simplified Approach*, Journal of Bridge Engineering, ASCE, vol. 9, issue 6, pp. 582-590.

<sup>5</sup> Bien que non citées dans le texte, les références dites complémentaires sont susceptibles d'apporter un supplément d'information au lecteur.

- [3.102] Brencich A., De Francesco U. (2004) *Assessment of Multispan Masonry Arch Bridges. II: Examples and Applications*, Journal of Bridge Engineering, ASCE, vol. 9, issue 6, pp. 591-598.
- [3.103] Choo B. S., Gong N. G. (1995) *Effect of skew on the strength of masonry arch bridges*, Arch Bridges, Ed. Thomas Telford, pp. 205-214.
- [3.104] Clemente P., Occhiuzzi A., Raithel A. (1995) *Limit Behavior of Stone Arch Bridges*, Journal of Structural Engineering, vol. 121, issue 7, pp. 1045-1050.
- [3.105] Como M. (1998) *Minimum and maximum thrust states in Statics of ancient masonry bridges*, Arch Bridges, Sinopoli (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 133-137.
- [3.106] Delbecq J. M. (1982) *Analyse de la stabilité des voûtes en maçonnerie par le calcul à la rupture*, Journal de Mécanique théorique et appliquée, vol. 1, n°1, pp. 91-121.
- [3.107] De Rubeis A. (1998) *On the definition of the geometrical safety of masonry arches*, Arch Bridges, Sinopoli (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 119-122.
- [3.108] Gautier H. (1716) *Traité des ponts*, A Paris chez André Cailleau, 416 p.
- [3.109] Harvey W. J., Smith F. W., Barthel R. (1998) *Some notes on system behaviour in arch bridges*, Arch Bridges, Sinopoli (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 315-319.
- [3.110] Heyman J., Padfield C. J. (1972) *Two masonry bridges: I. Clare College Bridge*, Proc. Instn. Civ. Engrs., 52, London, pp. 305-318.
- [3.111] Heyman J., Threlfall B. D. (1972) *Two masonry bridges: II. Telford's bridge at Over*, Proc. Instn. Civ. Engrs. 52, London, pp. 319-330.
- [3.112] Heyman J., Nobbs N. B., Jermy B. S. (1980) *The rehabilitation of Teston Bridge*, Proc. Instn. Civ. Engrs. 68, London, pp. 489-497.
- [3.113] Heyman J. (1998) *The assessment of strength of masonry arches*, Arch Bridges, Sinopoli (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 95-98.
- [3.114] Hughes T. G. (1988) *The analysis of masonry arches*, 8th Int. Brick/Block masonry conf., Ireland.
- [3.115] Hughes T. G., Pritchard R. (1998) *In-situ measurement of dead and live load stresses in a masonry arch*, Engineering Structures, vol. 20 n°1-2, pp. 5-13.
- [3.116] Hughes T. G., Davies M. C. R., Taunton P. R. (1998) *The influence of soil and masonry type on the strength of masonry arch bridges*, Arch Bridges, Sinopoli (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 321-330.
- [3.117] Kumar A. (1998) *Interactive assessment of masonry arch bridges*, Arch Bridges, Sinopoli (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 205-211.
- [3.118] Loo Y. (1995) *Collapse load analysis of masonry arch bridges*, Arch Bridges C. Melbourne, Ed. Thomas Telford, London, UK, pp. 167-174.
- [3.119] Ma M. Y., Pan A. D., Luan M., Gebara J. M. (1995) *Stone arch analysis by the DDA method*, Arch bridges, C. Melbourne (ed.), Thomas Telford London, UK, pp. 247-256.
- [3.120] Melbourne C., Hodgson J. A. (1994) *The Behaviour of Skew Brickwork Arches*, Bridge Assessment Management and Design, B.I.G. Barr, H.R. Evans, J.E. Harding (eds.), Elsevier Science B.V., pp. 187-192.

- [3.121] Melbourne C. (1998) *The collapse behaviour of a multi-span skewed brickwork arch bridge*, Arch Bridge, Sinopoli (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 289-294.
- [3.122] Melbourne C., Tomor A. K., Wang J. (2005) *Modes of failure of multi-ring masonry arches under fatigue loading*, Bridge Management 5, Ed. Thomas Telford, London, pp. 476-483.
- [3.123] Melbourne C., Wang J. (2005) *The 3-dimensional behaviour of masonry arches*, Bridge Management 5, Ed. Thomas Telford, London, pp. 121-128.
- [3.124] Molins C., Roca P. (1998) *Load capacity of multi-arch masonry bridges*, Arch Bridges, Sinopoli (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 213-222.
- [3.125] Ng K. H., Fairfield C. A., Sibbald A. (1999) *Finite element analysis of masonry arches bridges*, Proc. Instn. Civ. Engrs., J. Struct. & Bldgs, 134 (2), pp. 119-127.
- [3.126] Oppenheim I. J., Gunaratnam D. J., Allen R. H. (1989) *Limit State Analysis of Masonry Domes*, Journal of Structural Engineering, 115 (4), pp. 868-882.
- [3.127] Orduna A., Lourenço P. B. (2001) *A Limit Analysis Approach for Masonry Structures*, International arch bridges conference n°3, France, pp. 451-457.
- [3.128] Page J. (1993) *Masonry arch bridge*, TRL state of the art review, London, Her Majesty's Stationery Office.
- [3.129] Sinopoli A., Corradi M., Foce F. (1997) *Modern Formulation for Preelastic Theories on Masonry Arches*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 123, n°3 pp. 204-213.
- [3.130] Taylor N., Mallinder P. A. (1987) *On the limit state properties of masonry*, Proc. of Inst. of Civil Engrs., Part 2, 83, pp. 33-41.
- [3.131] Taylor N., Draper R., Broadhurst S., Mallinder P. A. (1994) *Static and cinematic limit states of masonry vaults*, Bridge Assessment Management and Design B.I.G. Barr, H.R. Evans, J.E. Harding (eds.), Elsevier Science B.V., pp. 181-186.
- [3.132] Theodossopoulos D., Sinha B. P., Usman, A. S., Macdonald A. J. (2002) *Assessment of the Structural Response of Masonry Cross Vaults*, Blackwell Science, Ltd, Strain, 38, pp. 119-127.
- [3.133] Trimbath K. (2006) *Software can assess structural integrity of older masonry structures*, Civil Engineering, 76 (5), p.42.
- [3.134] Vilnay O., Hughes T. G. (1988) *The analysis of masonry arches*, Proc. 8<sup>th</sup> Int. Brick/Block Masonry Conf., Elsevier, pp. 1311-1318.



## **4. Etude au micro-niveau – Loi constitutive pour la maçonnerie de pierre naturelle**

### **4.1. Introduction**

Toute analyse structurelle doit nécessairement être basée sur une solide connaissance du comportement des matériaux mis en œuvre. La maçonnerie est un matériau hétérogène et anisotrope au comportement complexe. Formée de deux types d'éléments constitutifs au comportement et au rôle très différents, sa réponse face à une sollicitation est fonction non seulement des caractéristiques de ses constituants mais également de la manière dont ceux-ci sont assemblés (l'appareillage).

L'étude présentée dans ce chapitre est dite au micro-niveau et a pour objectif l'analyse du matériau à une échelle suffisamment faible pour en déduire l'influence de l'hétérogénéité. Les différentes conclusions déduites de ce travail permettront une modélisation objective du comportement de la maçonnerie, considérée cette fois comme un matériau homogène, et qui pourra être exploitée lors de l'étude des niveaux supérieurs.

Les constructions en maçonnerie sont généralement conçues comme des structures poids et sont donc essentiellement sollicitées par des efforts de compression. En effet, si la maçonnerie présente un bon comportement sous un effort de compression, elle ne résiste que très faiblement face à une sollicitation de traction, présentant une résistance face à ce type d'effort généralement égale à 5 à 7 % de la résistance en compression [4.1]. Ainsi, bien que certains auteurs affirment que la prise en compte de la résistance en traction de la maçonnerie est nécessaire pour calibrer de manière précise un modèle, elle est plus généralement négligée, et ce dans un souci de conservatisme en vue d'une vérification structurelle [4.2].

A l'aide d'une série d'essais, Page [4.3] a démontré que la résistance d'une maçonnerie bien appareillée dépendait de l'orientation de l'effort par rapport aux joints d'assises. Il est toutefois généralement admis qu'un calcul analytique peut s'effectuer par vérification séparée de la sollicitation en compression simple et de celle en cisaillement, pour laquelle il est admis que la maçonnerie suit une loi de Coulomb [4.4].

De nombreux essais de compression simple ont été effectués sur de la maçonnerie. Ils révèlent que sous un effort de compression, la maçonnerie présente une première phase linéaire se prolongeant environ jusqu'au tiers de la force maximale, suivie d'un comportement non linéaire à l'approche de cette dernière [4.1 ; 4.5]. Cette phase est ensuite suivie d'un domaine non linéaire post-pic dont l'étendue dépend des matériaux constitutifs et de l'appareillage [4.6 ; 4.7-4.21] (figure 4.1). La phase post-pic reste cependant difficile à obtenir, tant expérimentalement que numériquement, et n'est que rarement donnée [4.22].

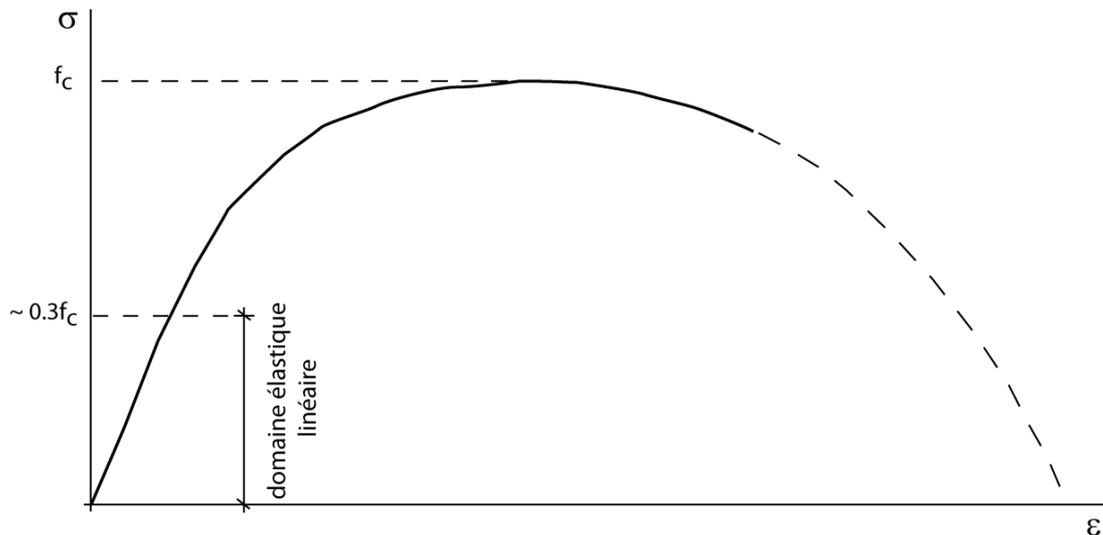


Figure 4.1 : Courbe contrainte - déformation type pour la maçonnerie

Les normes européennes se contentent généralement de donner une évaluation empirique conservatrice de la résistance en compression. Le module d'élasticité est quant à lui donné en proportion de la résistance [4.23 ; 4.24]. Au vu du comportement non linéaire de la maçonnerie précédemment évoqué, ces informations sont toutefois insuffisantes pour une compréhension approfondie du comportement de la maçonnerie. Par ailleurs, la considération d'une phase post-pic permet de rendre compte de manière plus adéquate de l'état de contrainte réellement présent dans la section à la rupture.

Quelques formules analytiques décrivant la courbe contraintes-déformations de la maçonnerie sous compression simple ont été développées [4.17-4.19 ; 4.25-4.31]. Elles sont toutefois généralement le plus souvent relatives à des maçonneries de brique. Outre le comportement des unités totalement différent de celui de la pierre, l'appareillage d'une maçonnerie de pierre naturelle n'est que rarement aussi régulier que celui d'une maçonnerie de brique. Ces relations ne peuvent donc en aucun cas être admises sans vérification comme étant valables pour une maçonnerie de pierre.

Ainsi, en dépit des essais effectués sur des éléments de maçonnerie, de nombreuses interrogations demeurent quant au comportement de la maçonnerie sous un effort de compression. Notamment, l'influence réelle des caractéristiques mécaniques des matériaux constitutifs ainsi que celle de l'appareillage restent incertaines et mal comprises. Le caractère « naturel » et donc aléatoire des constituants, et ainsi l'extrême difficulté liée à la reproduction des caractéristiques des essais, impliquent qu'un modèle numérique simulant ces derniers est sans aucun doute le moyen le plus adapté pour évaluer l'influence des paramètres précités. Un tel modèle devra toutefois être calibré au moyen de résultats expérimentaux.

Ce chapitre débute par une présentation des matériaux constitutifs d'une maçonnerie de pierre de taille ainsi que de leurs propriétés et fonctions respectives. Le modèle numérique employé pour simuler le comportement de la maçonnerie sous un effort de compression simple est ensuite présenté. Le chapitre se termine par les conclusions qu'un tel modèle permet de tirer quant au comportement de différentes maçonneries et à l'influence de divers paramètres relatifs aux matériaux constitutifs.

## **4.2. Matériaux constitutifs**

La maçonnerie est traditionnellement constituée d'éléments rigides, en pierre ou en brique, liés par un mortier aux faibles propriétés mécaniques. La maçonnerie dite « sèche », à savoir constituée d'éléments simplement imbriqués les uns avec les autres, sans l'aide d'un mortier, est un cas particulier dont l'étude sort du cadre de ce travail.

Les paragraphes suivant fournissent une description des matériaux constitutifs de la maçonnerie. Cet exposé a pour but de permettre de mieux cerner leur comportement en vue d'une meilleure compréhension de leurs rôles respectifs au sein d'une maçonnerie. Il illustre en outre le caractère naturel et donc variable qui les qualifie, impliquant la présence fréquente de discontinuités locales, sous la forme par exemple d'une microfissuration ou d'une insertion de matériaux plus faibles.

### **4.2.1. La pierre**

#### **4.2.1.1. Types employés en Suisse**

Avec le bois et la boue, la pierre est l'un des plus anciens matériaux de construction. Les types de pierre les plus divers ont été utilisés, certains ont cependant rapidement été destinés à l'ornementation et les principales roches employées en construction des ponts en Suisse sont le grès, le calcaire, le granite, le marbre et l'ardoise.

En raison des implications statiques, et particulièrement en ce qui concerne l'arc, la construction des ponts nécessitait l'emploi de matériaux de bonne qualité. Outre les propriétés mécaniques, d'autres critères entraient en ligne de compte dans le choix de la pierre utilisée, tels que la facilité de taille ou encore les possibilités d'approvisionnement. Il était en effet très rare d'importer une pierre sur une longue distance en vue de la réalisation d'un pont. L'inspection des carrières avoisinant le lieu de la construction à l'époque de la réalisation fournit souvent une bonne indication quant à la pierre employée et permet d'éviter le recours aux essais de laboratoire pour en évaluer les principales caractéristiques mécaniques.

A la veille de la première guerre mondiale, la Suisse comptait encore plus d'un millier de carrières en exploitation. Aujourd'hui, on n'en dénombre plus que 64 en activité [4.32]. Beaucoup de carrières disposant de gisements trop limités, souvent difficiles à exploiter ou trop éloignés des principales voies de communication, n'étaient rentables que pour une utilisation locale et ont cessé leur activité dans le courant du XX<sup>ème</sup> siècle.

Une liste des carrières en activité en 1996 et de celles fermées dans le courant du XX<sup>ème</sup> siècle figure en annexe 1.

#### **4.2.1.2. Origines et classification**

Chaque roche est un assemblage naturel et unique de minéraux en diverses proportions. Les propriétés tant mécaniques que chimiques mesurées sur une roche n'ont donc qu'un caractère local et aucune classification n'est absolue. La plus connue est basée sur l'origine géologique de la roche et distingue trois groupes principaux :

- Les roches magmatiques ou ignées : Elles sont le produits de la consolidation de magmas, tant à la surface qu'en profondeur de la croûte terrestre. Parmi les roches magmatiques communément utilisées en construction, citons le granite et le basalte (figures 4.2 et 4.3).

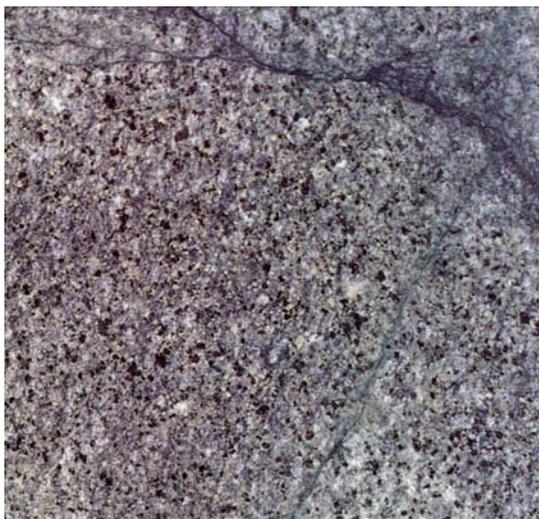


Figure 4.2 : Granite de Campascio (CH) [4.33]



Figure 4.3 : Nero Assoluto (basalte, Zimbabwe) [4.33]

- Les roches sédimentaires : Elles sont constituées à partir de l'accumulation de produits d'origine organique et / ou provenant de la dégradation d'autres roches présentes à la surface de la croûte terrestre. Transportées par l'eau et le vent, ces particules meubles se déposent ensuite en strates, puis se solidifient généralement sous l'action de leur propre poids pour former des roches. Dans le domaine de la construction, les principales roches sédimentaires exploitées sont le grès et le calcaire (figures 4.4 et 4.5).



Figure 4.4 : Molasse de Berne (Grès, CH) [4.33]



Figure 4.5 : Calcaire de Lägern (CH) [4.33]

- Les roches métamorphiques : Elles résultent de la transformation de roches préexistantes (magmatiques, sédimentaires ou déjà métamorphiques) sous l'influence conjointe de la pression et de la température au sein de la croûte terrestre. Parmi les roches métamorphiques utilisées en construction, le marbre, le gneiss et le schiste sont les plus communes (figures 4.6 et 4.7).



Figure 4.6 : *Cristallina Colombo Scuro (Marbre, CH) [4.33]*



Figure 4.7 : *Granite de Maggia (Gneiss, CH) [4.33]*

### **4.2.1.3. Principales propriétés mécaniques**

La pierre est un matériau rigide et résistant dont les propriétés peuvent égaler, voir dépasser, celles d'un bon béton.

Les roches, et en particulier celles d'origine sédimentaire, sont des éléments anisotropes et hétérogènes présentant des strates. Connue des constructeurs depuis des siècles, cette caractéristique implique une direction préférentielle pour la résistance en compression et le module d'élasticité optimaux, à savoir celle perpendiculaire aux strates. Il est sous-entendu dans la suite de ce chapitre que la résistance en compression est évaluée perpendiculairement aux strates, alors que celle en traction l'est transversalement à ces dernières.

De par son caractère naturel et son origine, la pierre montre fréquemment des défauts tels que des veines, des inclusions ou une microfissuration qui sont autant de zones de faiblesse potentielles, susceptibles de réduire localement les propriétés mécaniques du matériau.

Les valeurs des caractéristiques mécaniques des pierres de constructions répertoriées dans la littérature sont par conséquent très variables et couvrent un domaine plus ou moins large selon les cas. Globalement, on observe généralement un comportement élasto-fragile de la roche sous une sollicitation de compression uniaxiale. Notons encore que les conditions d'essai, et en particulier le confinement latéral et le niveau d'imbibition du matériau, peuvent considérablement influencer les résultats obtenus.

L'annexe 2 résume les principales caractéristiques mécaniques des pierres de construction et d'ornementation. L'examen d'une telle liste permet de constater une certaine corrélation entre les résistances en compression, en traction et le module d'élasticité. Les divers types roches utilisés dans le domaine de la construction en Suisse peuvent par conséquent être divisés en quatre catégories, selon leurs propriétés mécaniques. Cette classification, correspondant plus ou moins à celle proposée par la norme allemande DIN 1053-1 [4.23], figure en annexe 3.

## 4.2.2. Le mortier

### 4.2.2.1. Origines et classification

Un mortier est un mélange d'eau, de liant et d'agrégats dont le diamètre, par opposition à ceux incorporés à un béton, est inférieur à 8 mm.

Les mortiers sont généralement différenciés selon le type de liant les composant. Résultant d'une technique déjà maîtrisée durant l'Antiquité, les mortiers de chaux sont les seuls employés pour lier des maçonneries érigées avant le XIX<sup>ème</sup> siècle. La possibilité de fabriquer des fours capables de monter plus haut en température a, dès cette époque, permis la fabrication de ciment qui composent depuis les mortiers, soit partiellement, soit totalement.

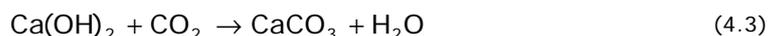
La chaux dite **aérienne** est obtenue par calcination de pierre calcaire pure ( $\text{CaCO}_3$ ) à une température d'environ  $900^\circ\text{C}$ . Cette opération, également nommée « décarbonatation », entraîne la formation d'oxyde de calcium ( $\text{CaO}$ ), ou chaux vive, et est accompagnée d'un fort dégagement de gaz carbonique et d'une importante perte de poids :



Matériau instable, hydrophile et agressif pour les matières organiques, la chaux vive subit ensuite une extinction (ou hydratation) par l'eau. Fortement exothermique, cette réaction entraîne la formation d'hydroxyde de calcium ( $\text{Ca(OH)}_2$ ) essentiellement, connu sous le nom de chaux éteinte :



Suivant la quantité d'eau de gâchage utilisée, la chaux éteinte peut se présenter sous la forme de pâte ou de poudre. Elle constitue le liant utilisé dans la fabrication du mortier. Mélangé avec l'eau de gâchage, elle fait prise par carbonatation, soit par réaction avec le gaz carbonique contenu dans l'atmosphère. Il en résulte du carbonate de calcium, chimiquement équivalent au calcaire initialement employé, et de l'eau :



Cette réaction achève le cycle de la chaux aérienne, représenté sur la figure 4.8.

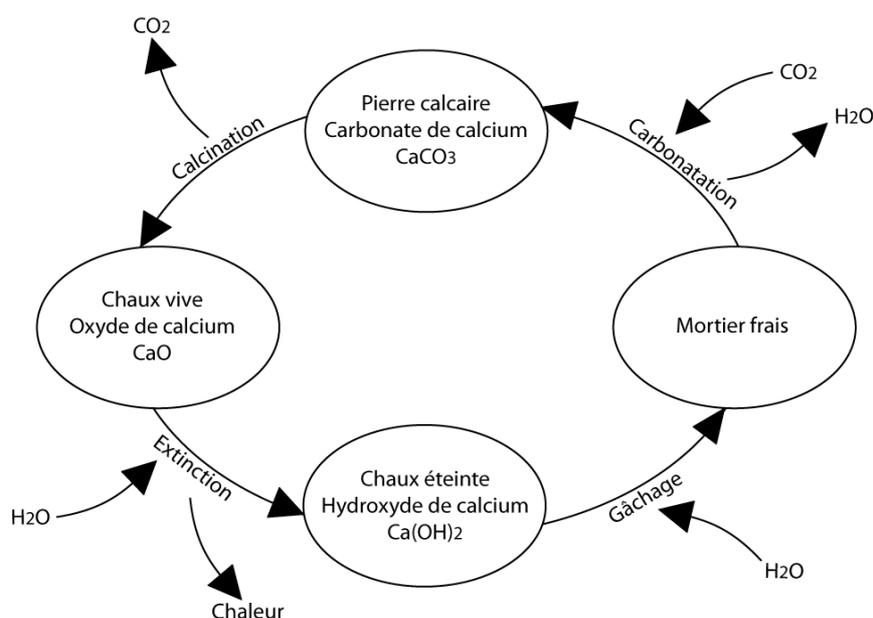
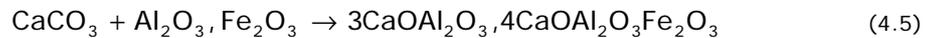
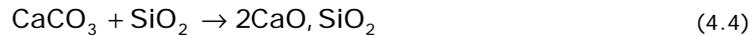


Figure 4.8 : Cycle de la chaux aérienne [4.34]

Dans la plupart des cas, toutefois, le calcaire employé n'est pas pur, mais contient diverses impuretés telles des marnes ou des argiles, riches avant tout en silicates, mais contenant également des extraits d'aluminium et de fer. La calcination d'un tel calcaire permet la fabrication d'une chaux dite **hydraulique**, dans laquelle le calcium se combine avec les impuretés pour former des silicates, des aluminates et des ferro-aluminates de calcium :



Au contact de l'eau, lors de l'extinction, mais surtout lors du gâchage, ces composés forment des hydrates insolubles qui confèrent au liant un caractère hydraulique. En ce qui concerne, les silicates de calcium, la réaction impliquée est la suivante :



Ainsi, alors qu'une part de l'oxyde de calcium résultant de la calcination est employée pour former ces hydrates insolubles, le restant réagit avec l'eau pour constituer de l'hydroxyde de calcium, de manière semblable aux processus décrits pour la prise aérienne. Le phénomène de prise hydraulique du mortier de chaux est donc toujours accompagné d'une réaction de prise aérienne plus ou moins importante.

Le taux d'impureté contenu dans le calcaire est donc corrélé avec la part de prise hydraulique du mortier. Plus cette dernière est importante par rapport à la part de prise aérienne, plus la résistance est élevée et le temps de prise faible. La part de prise hydraulique d'un mortier de chaux caractérise également sa capacité à faire prise sous l'eau.

En 1820, Vicat établit un indice dit d'hydraulicité des chaux permettant de classer ces dernières selon leur type de prise, sous la forme du rapport entre le taux d'impureté et le taux de chaux vive [4.34] :

$$i = \frac{\text{Impureté}}{\text{Chaux vive}} = \frac{\text{SiO}_2 + \text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Fe}_2\text{O}_3}{\text{CaO} + \text{MgO}} \quad (4.7)$$

Tableau 4.1 : Types de chaux [4.34]

Type de chaux	Pourcentage d'impureté	Indice d'hydraulicité	Temps de prise approximatif
Aérienne	0 - 5 %	0 - 0.1	Plusieurs années
Faiblement hydraulique	5 - 8 %	0.1 - 0.16	Plusieurs mois
Moyennement hydraulique	8 - 15 %	0.16 - 0.3	Plusieurs mois
Hydraulique	15 - 20 %	0.3 - 0.4	Quelques mois
Eminemment hydraulique	20 - 30 %	0.4 - 0.5	1 - 2 mois

La prise hydraulique de la chaux peut également être obtenue par l'ajout d'éléments dits pouzzolaniques qui, comme les argiles, sont riches en silice, alumine et oxydes de fer. Egalement connu depuis l'Antiquité, l'effet pouzzolanique était à l'origine obtenu par l'adjonction au mortier de chaux aérienne, de cendres volcaniques ou de brique finement pilée. Aujourd'hui, l'effet pouzzolanique est produit par l'ajout d'éléments artificiels riches en silice, alumine et oxyde de fer.

Le type et les proportions de sable employés comme agrégats ainsi que les quantités et la qualité de l'eau de gâchage, influencent également les propriétés mécaniques, le temps de prise et la durabilité du mortier obtenu. De nombreuses recherches sont aujourd'hui menées dans le but de mieux comprendre l'influence respective des divers composants d'un mortier, en vue d'établir la composition

d'un mortier la plus adaptée pour la restauration de maçonneries anciennes [4.35-4.50].

La calcination de la pierre calcaire à plus haute température (1450°C) provoque la formation de nodules vitrifiés qui rendent la pierre non réactive à l'eau. Le broyage de cette dernière est alors nécessaire pour activer la faculté de prise du matériau lorsqu'il est mis en contact avec l'eau, aucune extinction n'intervenant dans le processus. Ce matériau porte le nom de **ciment** naturel. Les mortiers réalisés avec ce type de liant présentent cependant un certain nombre d'inconvénients liés à leur forte rigidité et leur imperméabilité, induisant de nombreux problèmes de durabilité pour la maçonnerie. Ainsi, en dépit de caractéristiques mécaniques et de durabilité propres plus élevées que celles d'un mortier de chaux, l'utilisation des mortiers de ciment en restauration est aujourd'hui proscrite au profit de mortiers dits **mixtes** ou bâtards, dont le liant résulte d'un mélange de chaux hydraulique et de ciment. Les propriétés de tels mortiers dépendent évidemment des proportions relatives des composants. Globalement, les caractéristiques mécaniques et de durabilité du mortier obtenu sont considérablement améliorées sans pour autant que la rigidité et l'imperméabilité du mélange n'altèrent la maçonnerie.

#### **4.2.2.2. Caractéristiques mécaniques**

Globalement et par opposition aux mortiers de ciment, les mortiers à base de chaux sont essentiellement caractérisés par une forte porosité, de faibles propriétés mécaniques et une importante ductilité. Comme précédemment évoqué, les caractéristiques mécaniques des mortiers sont cependant fortement dépendantes de leur composition et sont généralement établies sur la base d'essais ou des indications des fabricants. En l'absence de tels renseignements, une évaluation de l'ordre de grandeur de la résistance en compression et du module d'élasticité des mortiers en fonction du type de liant employé est possible.

Néanmoins, outre l'incertitude des caractéristiques mécaniques liées à la composition du mélange, l'âge de ce dernier semble être un critère d'une importance capitale [4.50]. En raison des échanges avec l'atmosphère nécessaires pour la prise des mortiers de chaux aérienne, celle-ci peut s'étendre sur plusieurs mois, voire plusieurs années dans le cas d'un élément structurel épais [4.51]. Bien que plus rapide, la prise des mortiers hydrauliques ou pouzzolaniques nécessite encore plusieurs mois, tandis que celle des mortiers de ciment est plus rapide. Quant aux mortiers mixtes, le temps de prise dépend de la composition du mélange. Ainsi des valeurs de résistance en compression d'un mortier de chaux mesurées à 28 jours, comme c'est généralement le cas, ont toutes les chances de montrer une résistance inférieure à celle réellement associée à un mortier âgé de plusieurs siècles.

A l'image des essais effectués sur des échantillons de béton, l'effet de taille n'est pas négligeable. Ainsi, la fiabilité des essais effectués sur un mortier de chaux ne pourrait théoriquement être assurée que dans le cas d'échantillons prélevés sur site historique et d'une taille suffisante pour éviter les effets de bords liés à la mise en charge. Il va sans dire que de telles conditions ne se rencontrent pour ainsi dire jamais.

Par ailleurs, les conditions de coulage et de prise du mortier testé sont également très influentes. En effet, les moules métalliques dans lesquels sont généralement coulés les échantillons de mortier destinés à être testés ne permettent aucune évacuation de l'eau, comme c'est le cas dans une maçonnerie réelle. En outre, l'absorption d'une part de l'eau de gâchage par les unités est également négligée dans le cas d'échantillons moulés [4.52]. Le rapport eau / liant relatif à ces derniers est donc plus élevé que celui d'un mortier mis en œuvre dans une

maçonnerie, ce qui induit une réduction des qualités mécaniques et de la durabilité du mortier [4.53].

Si la rigidité du mortier est inférieure à celle de la pierre, comme ce devrait être le cas, l'expansion empêchée du mortier par les unités, dans le cas d'une maçonnerie bien appareillée, implique que ce dernier est en outre soumis à un état d'autocontrainte triaxial [4.54] (figure 4.9). Des essais de compression triaxiale effectués sur des échantillons de mortier ont révélé qu'un confinement latéral du matériau permettait de considérer une augmentation non négligeable de sa résistance en compression [4.55].

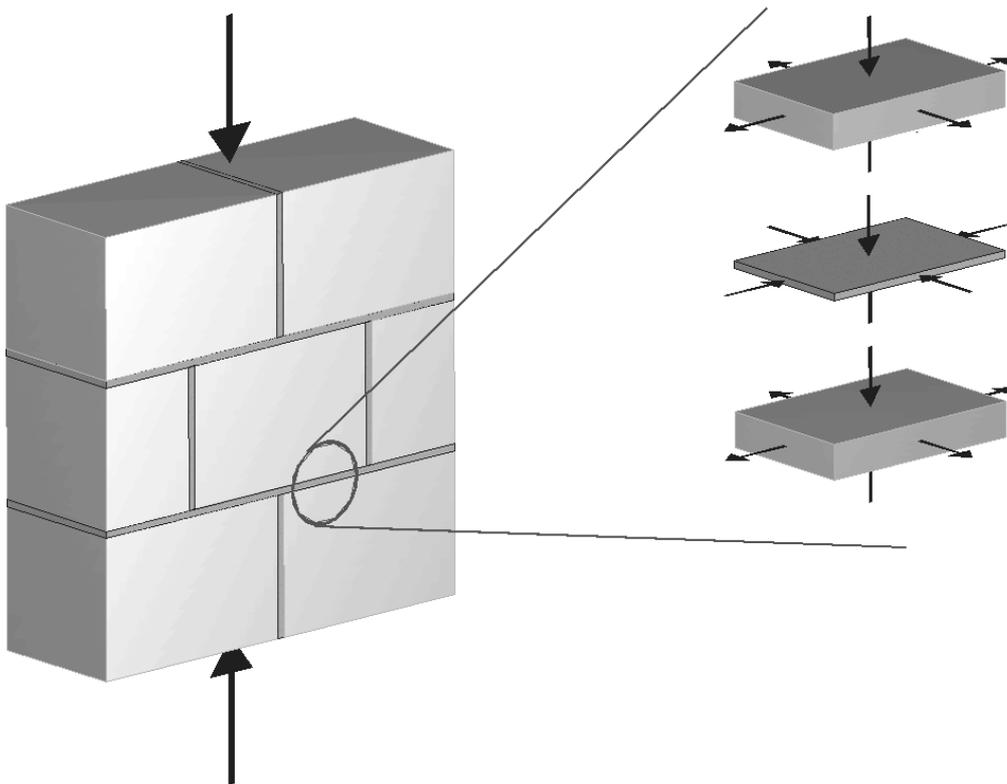


Figure 4.9 : *Etat de contrainte tridimensionnel dans une maçonnerie bien appareillée [4.54]*

Les conditions d'essais réalisés sur échantillons de mortier doivent donc être examinées et les valeurs obtenues prises avec un certain recul, voire corrigées empiriquement. Ainsi, Schubert [4.49] considère que la résistance en compression simple d'un mortier au sein d'une maçonnerie peut être admise comme étant 1.5 fois supérieure à celle mesurée sur échantillon.

Une certaine corrélation entre les valeurs de résistance en compression simple et celles du module d'élasticité peut logiquement être supposée et les considérations présentées ci-dessus pour la résistance en compression s'appliquent logiquement également au module d'élasticité.

Le tableau 4.2 présente les résistances en compression et en traction, ainsi que le module d'élasticité, évalués pour différents types de mortier, répertoriés selon le liant les composant. En raison des multiples paramètres influençant ces propriétés, les valeurs mentionnées ne peuvent être considérées que comme indicatives et moyennes.

Tableau 4.2 : Propriétés mécaniques indicatives des différents types de mortiers

Type de mortier	Résistance en compression [N/mm <sup>2</sup> ]	Résistance en traction [N/mm <sup>2</sup> ]	Module d'élasticité [N/mm <sup>2</sup> ]
Mortier de chaux aérienne	0.5 - 3	0.3 - 0.7	1000 - 3000
Mortier de chaux hydraulique	1 - 6	1 - 1.5	3000 - 5000
Mortier de chaux pouzzolanique	1 - 6	1 - 1.5	3000 - 5000
Mortir mixte	4 - 15	1 - 3	3000 - 8000
Mortier de ciment	10 - 20	2 - 4	6000 - 9000

### 4.2.3. La maçonnerie

#### 4.2.3.1. Définition

La maçonnerie est un matériau composite, formé d'un assemblage d'unités rigides et résistantes, les blocs de pierre, liées par une matrice aux propriétés mécaniques plus faibles.

Les unités assument la fonction d'éléments résistants. De par leur forte rigidité relativement au mortier, elles attirent la majeure partie des efforts. Bien que souvent considérés comme inertes, les blocs de pierre interagissent physiquement, voir chimiquement avec le mortier, ce qui peut influencer tant la durabilité que le comportement mécanique de la maçonnerie.

Le mortier mis en œuvre dans une maçonnerie, tout au moins en ce qui concerne les bons appareillages, ne devrait, à priori, pas assumer de fonction porteuse directe. Son rôle théorique se borne à assurer une liaison entre les unités et à éviter les concentrations de contraintes qui pourraient naître aux points de contact directs entre deux unités. Un mortier composé de manière adéquate est moins rigide que la pierre, ce qui lui permet d'absorber une partie des déformations imposées auxquelles sera soumise la maçonnerie. Il doit en outre être suffisamment perméable pour assurer l'évacuation de l'humidité éventuellement contenue dans la maçonnerie et qui, sinon, s'échapperait par les unités, entraînant de potentiels dommages pour ces dernières.

Une maçonnerie peut toutefois être montée « à sec », à savoir sans mortier, comme ce fut le cas pour de nombreux ouvrages antiques tels que l'Aqueduc de Ségovie ou le Pont du Gard. La réalisation d'une telle maçonnerie réclame cependant une taille parfaite des éléments et un soin particulier dans la mise en œuvre.

#### 4.2.3.2. Interface pierre – mortier

A l'échelle près, un parallèle peut être tiré entre le béton, formé de granulats noyés dans une matrice cimentaire, et la maçonnerie, constituée de blocs de pierre liés au mortier. Ainsi, les observations réalisées au sujet de l'interface entre les granulats et la matrice cimentaire d'un béton peuvent être extrapolées au cas de celle entre les unités et le mortier. Cette zone d'interface, large de quelques dizaines de microns dans le cas du béton, présente des propriétés affaiblies par rapport à l'ensemble de la matrice, en raison d'une porosité supérieure. Celle-ci est la conséquence de deux mécanismes distincts. En premier lieu, une couche d'eau se dépose à la surface des granulats qui sont généralement humidifiés avant leur mise en œuvre. Le rapport eau / liant ainsi augmenté altère localement les propriétés de la matrice en augmentant sa porosité [4.56]. Bien que les mécanismes de prise soit différents suivant le type de liant employé, il est généralement reconnu que le rapport eau / liant altère également les propriétés mécaniques d'un mortier de chaux [4.53]. Le second mécanisme d'altération de la zone d'interface, dans le cas du béton, implique

l'effet de mur créé par les granulats qui empêchent la croissance et l'enchevêtrement normaux des cristaux [4.56]. Cette observation s'applique également à la maçonnerie de pierre naturelle.

En raison de ses mauvaises caractéristiques, cette zone d'interface agit souvent comme un plan de faiblesse, siège de l'amorce des fissures [4.52]. Celles-ci vont ensuite se propager, d'une amorce à l'autre, de préférence en traversant le mortier, dont les propriétés mécaniques sont faibles par rapport à celles de la pierre. Néanmoins, on ne peut exclure la possibilité d'une fissuration de cette dernière, en raison d'une possible faiblesse locale de la pierre suite à un défaut ou à la configuration imposée par l'appareillage.

Les mécanismes de liaison entre deux matériaux comme la pierre et le mortier sont complexes, et constituent un point critique de toute modélisation du comportement de matériaux composites. Encore mal connue dans le cas de la maçonnerie de pierre naturelle, la résistance d'adhérence entre un mortier de chaux et de la brique est estimée entre 0.3 et 0.9 N/mm<sup>2</sup> [4.52]. Dans le cas de la pierre, cette adhérence serait d'ordre chimique, mais surtout mécanique [4.57].

Des essais ont révélés que la rugosité de la surface de l'unité était un paramètre important concernant la résistance d'adhérence : une surface lisse et polie facilite en effet la formation d'un film d'eau d'une part [4.56] et ne permet pas une bonne imbrication du mortier dans la pierre d'autre part [4.58]. Il a également été démontré que la résistance de liaison augmentait avec l'hydraulicité du mortier. Ainsi, un mortier de ciment offre une résistance d'adhérence bien meilleure qu'un mortier de chaux [4.59 ; 4.60]. En outre, une bonne ouvrabilité du mortier permet d'améliorer les caractéristiques de l'interface [4.61] et la qualité de la mise en œuvre est un point d'une importance cruciale.

### 4.2.3.3. Appareillage

L'appareillage d'une maçonnerie définit la manière dont les blocs sont assemblés et est, par conséquent, corrélé à la taille de ces derniers, à l'épaisseur des joints et à l'imbrication de l'assemblage. L'appareillage influe fortement sur les caractéristiques mécaniques de la maçonnerie et sa considération dans toute modélisation du matériau est primordiale. Une maçonnerie présentant les meilleures caractéristiques mécaniques est constituée de blocs précisément taillés et dont les joints perpendiculaires à l'effort principal de compression forment une assise continue, tandis que ceux qui y sont parallèles sont régulièrement décalés à chaque assise. Une telle maçonnerie présente des joints fins et est dite de pierre de taille (figure 4.10). Les maçonneries dites de blocage ou cyclopéennes (figure 4.11) sont constituées de blocs généralement non taillés, noyés dans une matrice de mortier et présentent de très faibles propriétés mécaniques. Entre ces deux cas extrêmes, tous les appareillages intermédiaires sont possibles.



Figure 4.10 : Exemple de maçonnerie de pierre de taille



Figure 4.11: Exemple de maçonnerie cyclopéenne

A l'exception des quelques termes communément admis précités, il n'existe à ce jour ni définition, ni terminologie universellement admises pour qualifier l'appareillage d'une maçonnerie. Celle adoptée dans la Recommandation suisse SIA V 178 [4.24] (voir également [4.62]) est indicative et figure en annexe 4.

L'établissement de critères plus précis pour la définition de l'appareillage d'une maçonnerie en vue d'une classification corrélable avec les propriétés mécaniques de la maçonnerie est néanmoins nécessaire. Le premier d'entre eux peut être la quantification du pourcentage relatif de surface apparente des matériaux constitutifs : une importante quantité de mortier implique des propriétés mécaniques affaiblies en raison de joints épais et d'une mauvaise imbrication des unités.

Un second critère de classification des appareillages peut être défini relativement à la continuité des assises. Il se rattache indirectement à la qualité de la taille des unités. Quatre catégories d'appareillages, corrélables avec les propriétés mécaniques de la maçonnerie, ont été définies selon ces deux critères. Elles figurent en annexe 5.

### **4.3. Modélisation numérique**

#### **4.3.1. Généralités**

Différentes stratégies de modélisation de la maçonnerie existent. Elles se distinguent d'une part, par leur niveau de complexité et d'autre part par l'objectif qu'elles visent à atteindre.

##### **Les macro-modèles**

Ce type de modèle considère la maçonnerie comme un matériau homogène anisotrope. Le mortier et la pierre ne sont pas distingués explicitement et des caractéristiques moyennes relatives au matériau, admis continu, sont estimées (figure 4.12 (b)).

Les macro-modèles consistent, par conséquent, en une simplification qui a pour implication de ne pas permettre de localiser une potentielle fissuration dans les zones de faiblesse connues de la maçonnerie. Ce type de modélisation présente toutefois les avantages d'une part, de permettre un calcul analytique et d'autre part, d'alléger les ressources informatiques nécessaires en cas de calcul numérique. De tels modèles ne peuvent par conséquent s'appliquer que dans le cas d'éléments structuraux à grande échelle, pour lesquels une représentation des effets de déformation, de concentration de contrainte et de fissuration locaux n'influent pas le comportement global de l'élément considéré. Les macro-modèles ont donc une orientation avant tout axée sur l'application aux ouvrages.

##### **Les micro-modèles détaillés**

A l'inverse, les micro-modèles dits détaillés représentent chacun des deux composants avec ses caractéristiques mécaniques et géométriques propres. Les zones d'interface entre les unités et le mortier de joint peuvent également être modélisées, en tant que plans de faiblesse potentiels (figure 4.12 (d)).

Ces modèles incarnent la manière la plus détaillée, et donc la plus compliquée, de reproduire la maçonnerie. Ils offrent l'avantage de permettre une représentation la plus exacte possible du matériau et sont l'outil adéquat pour en comprendre le comportement local. Ils offrent en outre la possibilité de modéliser précisément des portions d'éléments structuraux, pour lesquels les effets locaux liés aux matériaux distincts et à l'appareillage ne peuvent raisonnablement être négligés. Les inconvénients des micro-modèles sont essentiellement liés d'une part à la quantité de données initiales relatives aux matériaux constitutifs et à leur

interaction nécessaires pour un fonctionnement fiable du modèle, et d'autre part à la lourdeur informatique qui en découle.

### Les micro-modèles simplifiés

Une alternative permettant de modérer les inconvénients liés tant aux micro-modèles détaillés qu'aux macro-modèles a été trouvée sous la forme des micro-modèles dits simplifiés. Ces derniers ne représentent pas les joints de mortier, mais uniquement les unités séparées par des éléments d'interface, agissant comme plans de rupture préférentiels et lieu de concentration des non-linéarités. Les unités sont représentées avec un volume étendu de manière à respecter la géométrie de l'élément et sont souvent admises comme ayant un comportement élastique-linéaire (figure 4.12 (c)).

Ces modèles présentent une bonne alternative dans le cas d'une maçonnerie bien appareillée, pour laquelle le volume de mortier relativement à celui de la pierre est faible. L'approximation ainsi réalisée est acceptable, pour autant que les propriétés de l'interface soient correctement représentées et que la prise en compte des effets de l'appareillage sur le mode de rupture ne soit pas nécessaire. Leur avantage réside donc essentiellement dans leur demande restreinte en ressources informatiques. Aucune stratégie ne prime donc systématiquement sur les autres, la meilleure option dépendant des objectifs fixés et du cas étudié. La majorité des modèles présentés dans la littérature sont toutefois du type micro-modèle simplifié [4.63] ou macro-modèle [4.64 ; 4.65].

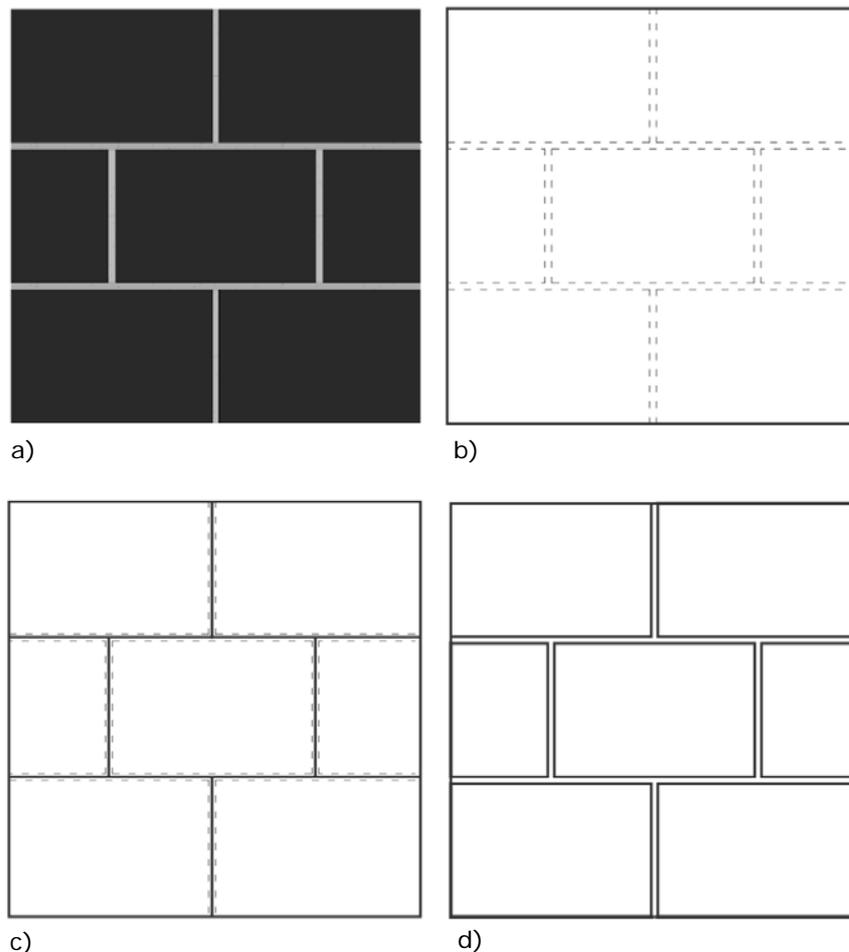


Figure 4.12 : a) Maçonnerie de pierre de taille, b) Macro-modèle, c) Micro-modèle simplifié, d) Micro-modèle détaillé [4.6]

### 4.3.2. Description du modèle utilisé

Le logiciel DIANA 9.2 possède un modèle développé par Lourenço et Rots [4.66] permettant de représenter la maçonnerie sous la forme d'unités élastiques linéaires et d'éléments d'interface spécialement conçus pour simuler l'interface brique – mortier (modèle « Combined Cracking – Shearing – Crushing » [4.67]). Ces éléments sont adaptés pour modéliser la fissuration, le glissement et l'écrasement survenant le long des interfaces entre le mortier et la brique [4.68], sous la forme d'un micro-modèle détaillé ou simplifié.

La modélisation des interfaces proposée nécessite cependant un grand nombre de données initiales relatives à l'interaction entre les matériaux en présence et dont la valeur est très difficilement appréciable a priori (énergie de rupture en traction et en compression, cohésion, angle de frottement interne, angle de dilatance, coefficient de frottement résiduel, contrainte de confinement pour une dilatance nulle, coefficient de dégradation, etc.) [4.67]. Bien qu'une étude de la littérature permette d'en obtenir l'ordre de grandeur, les indications récoltées concernant le plus souvent une maçonnerie de brique ne sont pas suffisantes pour mesurer la réelle influence des propriétés propres des deux matériaux constitutifs. En conséquence, une modélisation fiable repose sur la nécessité d'effectuer des essais préalables sur l'assemblage pierre – mortier concerné afin d'évaluer les caractéristiques nécessaires au fonctionnement du modèle [4.52]. Avec pour objectif l'évaluation de l'influence respective des matériaux en présence sur la loi constitutive, une telle campagne expérimentale serait considérable et sort du cadre de ce travail. Pour ces raisons, le modèle d'interface proposé par DIANA 9.2 a été abandonné.

Dans le but de mesurer l'importance réelle des éléments d'interface, un modèle représentant uniquement les unités et le mortier, modélisés de manière à pouvoir subir une fissuration en traction ou un écrasement en compression, a dans un premier temps été élaboré. Les résultats obtenus ont cependant rapidement montré que la modélisation des interfaces est nécessaire [4.69].

Un nouveau modèle a donc été élaboré. Notre choix s'est porté sur un micro-modèle détaillé, de manière à ce que son application soit valable pour différents types d'appareillage. Les unités et le mortier, modélisés par des éléments continus pouvant se fissurer en traction ou s'écraser sous un effort de compression, sont séparés par des éléments d'interface, résistant au frottement et susceptibles de se fissurer en traction.

Les paragraphes suivants décrivent la modélisation adoptée pour la pierre, le mortier et les interfaces.

#### 4.3.2.1. Pierre et mortier

Le modèle élaboré doit permettre à la fissuration amorcée dans les interfaces de se propager au travers des éléments adjacents. Dans la mesure où les éléments d'interface entourent les unités mais ne forment pas un réseau communiquant complet, la modélisation d'une potentielle fissuration dans les éléments continus est nécessaire. Une fissuration dans la pierre, bien que relativement rare, ne peut cependant être formellement exclue.

Les unités de pierre et le mortier ont donc été représentés selon un modèle prédéfini dans DIANA 9.2 et dénommé « Total Strain Crack Model ». Ce dernier permet la description du comportement en traction et en compression du matériau concerné sur la base de lois constitutives. Les relations contrainte - déformation sont alors évaluées dans la direction principale du vecteur déformation (« Coaxial Stress – Strain Concept »). Prévu pour s'appliquer aux analyses à l'état limite de service (ELS) et à l'état limite ultime (ELU) de cas où la rupture est essentiellement gouvernée par la fissuration ou l'écrasement du

matériau, ce modèle est connu pour sa bonne adaptation à l'étude des éléments en béton armé [4.67].

Les éléments choisis pour modéliser la pierre et le mortier sont quadrilatéraux à quatre nœuds, linéaires, en contraintes planes (« Q8MEM » [4.67]). Ils sont basés sur l'interpolation linéaire et sur l'intégration de Gauss.

Les caractéristiques relatives à la pierre et au mortier, nécessaires au fonctionnement du modèle numérique, sont présentées ci-dessous.

### Comportement en compression

Un certain nombre de courbes contrainte – déformation applicables au modèle Total Strain Crack et proposant différents types de comportement pré- et post-pic sont prédéfinies dans DIANA 9.2 [4.67]. La possibilité d'introduire la courbe voulue point par point est cependant retenue, tant pour la modélisation du mortier que pour celle de la pierre. Les résultats de nombreux essais de compression simple, menés sur des échantillons de pierre et de mortier, peuvent être consultés dans la littérature [4.70-4.78] (pierre) et [4.54 ; 4.79-4.86] (mortier). L'examen de ces sources nous a permis d'élaborer une courbe contrainte – déformation type pour chacun des deux matériaux concernés et pour laquelle il a été admis qu'elle peut être esquissée sur la base de quelques points, définis relativement à la résistance  $f_c$  et au module d'élasticité  $E$ .

Les caractéristiques admises pour le tracé de cette courbe, respectivement pour la pierre et le mortier, sont représentées sur la figure 4.13.

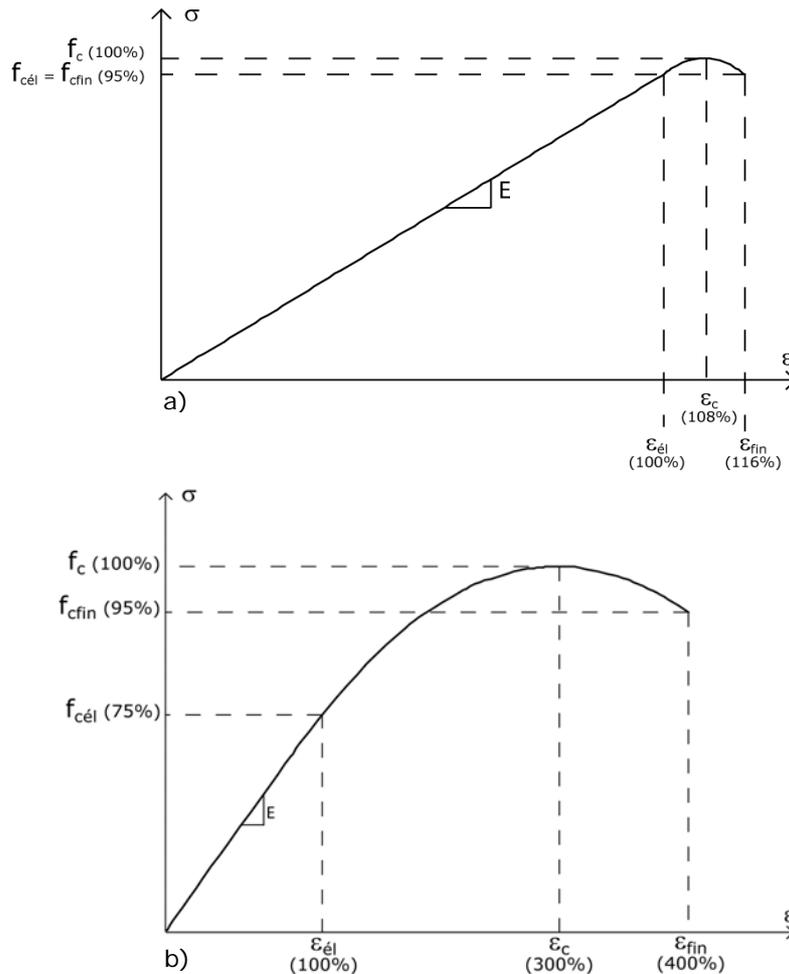


Figure 4.13 : Courbes contrainte – déformation types en compression, admises dans le modèle numérique – a) pour la pierre, b) pour le mortier

### Comportement en traction

Bien plus faible que la résistance en compression, la résistance en traction de la pierre et du mortier est néanmoins suffisante pour ne pas être négligée dans un modèle tel que celui considéré ici. Elle y est représentée, pour les deux matériaux concernés, par une courbe prédéfinie dans DIANA 9.2 [4.67], admettant un softening de forme exponentielle. Les paramètres à introduire, soit la résistance et l'énergie de rupture en traction, ont été établis sur la base d'une étude bibliographique des essais publiés [4.87-4.93]. La courbe contrainte – déformation type admise pour ces deux matériaux est représentée sur la figure 4.14.

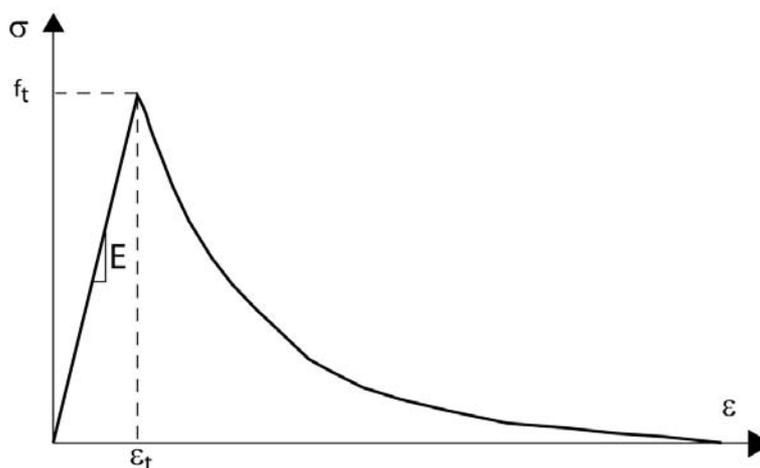


Figure 4.14 : Courbe contrainte – déformation type admise pour le comportement de la pierre et du mortier en traction [4.67]

### Autres paramètres

Aux caractéristiques de traction et de compression mentionnées ci-dessus et nécessaires au fonctionnement du modèle, s'ajoute le coefficient de Poisson, également évalué sur la base d'une recherche bibliographique [4.77 ; 4.81 ; 4.94-4.98].

Les caractéristiques mécaniques nécessaires à la modélisation de la pierre et du mortier sont résumées dans le tableau 4.3.

#### 4.3.2.2. Interfaces

En l'absence d'indications précises quand aux propriétés et comportement de l'interface, un simple modèle simulant le comportement en traction (rupture en mode I) et en cisaillement (rupture en mode II) de ces zones de faiblesse est employé. Il est admis que l'écrasement de l'interface en compression ne constitue pas un critère de rupture et est par conséquent ignoré.

DIANA 9.2 propose un modèle de comportement de l'interface basé sur le concept de la résistance au frottement de Coulomb et y intègre en outre un critère de fissuration en traction (modèle « Friction » [4.67]). Celle-ci apparaît par conséquent dès que la compression n'est plus suffisante pour empêcher un glissement ou dès que la résistance en traction de l'interface est dépassée. Cette dernière peut être évaluée sur la base de quelques essais figurant dans la littérature [4.47 ; 4.52 ; 4.58-4.59 ; 4.99-4.100], mais leur faible nombre laisse cependant planer une certaine incertitude quant à la précision des valeurs adoptées. La phase adoucissante du comportement de l'interface étant par ailleurs considérée comme peu prononcée, elle est négligée.

Les données à introduire dans le modèle comprennent la rigidité normale et tangentielle de l'interface. En l'absence d'indications concernant ces paramètres, les valeurs initiales proposées par Lourenço [4.66] peuvent être admises, et ce en

dépôt du fait qu'elles concernent une maçonnerie de brique. Un ajustement sera par conséquent nécessaire.

La cohésion de l'interface pierre – mortier dans une maçonnerie n'est encore que faiblement documentée. Les valeurs généralement considérées sont comprises entre 0 et 0.45 N/mm<sup>2</sup> [4.100-4.103]. Sur indication du manuel d'utilisation de DIANA 9.2 [4.67], une valeur de 0.35 N/mm<sup>2</sup> sera considérée ici.

Le coefficient de frottement interne est généralement admis égal à environ 0.6 dans le cas d'une interface brique – mortier [4.100-4.101]. Dans le cas d'une maçonnerie de pierre naturelle, la recommandation SIA V 178 [4.24] (voir également [4.62]) avance cependant la valeur de 0.72, qui sera adoptée ici.

Les informations quant à la tangente de l'angle de dilatance admissible dans ce genre de cas sont également relativement rares. Une valeur comprise entre 0 et 0.6 est habituellement admise [4.33 ; 4.66]. Cette dernière, considérée dans l'exemple du manuel d'utilisation de DIANA 9.2 [4.67], sera prise en compte ici.

Les caractéristiques relatives à l'interface nécessaires au fonctionnement du modèle sont résumées dans le tableau 4.3.

Tableau 4.3 : Caractéristiques nécessaires à la modélisation de la pierre, du mortier et des interfaces

Caractéristiques mécaniques nécessaires à la modélisation de la pierre et du mortier	Caractéristiques mécaniques nécessaires à la modélisation de l'interface
Courbe contrainte - déformation	Rigidité normale et tangentielle
Résistance à la traction	Résistance à la traction
Energie de rupture en traction	Cohésion
Coefficient de Poisson	Coefficient de frottement

Les éléments d'interface choisis (« L8IF » [4.67]) sont des éléments à deux fois deux nœuds, délimités par deux lignes dans une configuration bidimensionnelle. Ils sont basés sur une interpolation linéaire.

### 4.3.2.3. Modèle

Un modèle bidimensionnel a ainsi été élaboré. Les maillages considérés pour une maçonnerie de pierre de taille et une maçonnerie cyclopéenne sont représentés sur la figure 4.15. Ils sont ensuite soumis à un calcul statique non linéaire.

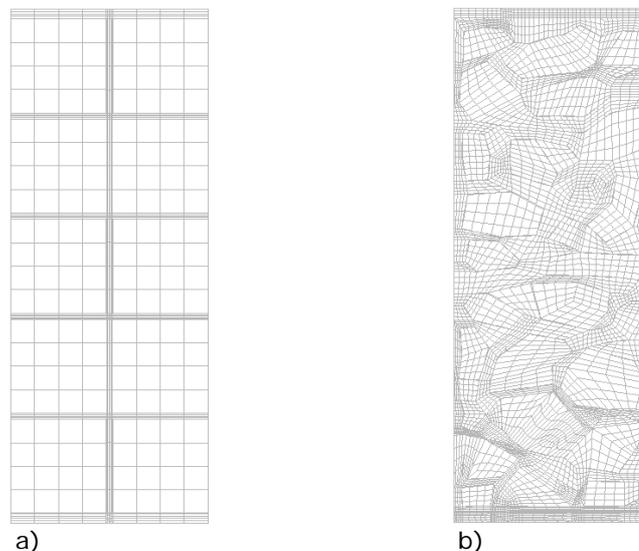


Figure 4.15 : Maillages pour des maçonneries – a) de pierre de taille, b) cyclopéenne

#### 4.3.2.4. Cas étudié

En vue de valider le modèle élaboré, une comparaison avec des résultats d'essais est indispensable. Les publications fournissant une courbe contrainte – déformation complète, avec comportement post-pic, sont cependant peu nombreuses [4.7-4.8]. Celle de Binda *et al.* [4.6] avait pour but de tester des éléments de murs à trois couches, soit présentant une maçonnerie de blocage contenue entre deux parement de pierre de taille (figure 4.16). Ces couches ont été testées séparément. La maçonnerie de blocage s'apparentant à une maçonnerie cyclopéenne, ces essais offrent l'avantage de représenter le comportement respectif de maçonneries réalisées avec les mêmes matériaux constitutifs, mais appareillées de manière totalement différente, l'une appartenant à la catégorie 1, la seconde à la catégorie 4, selon la classification précédemment établie (voir annexe 5). Les essais effectués par Binda *et al.* serviront par conséquent de cas d'étude en vue d'une calibration du modèle numérique.

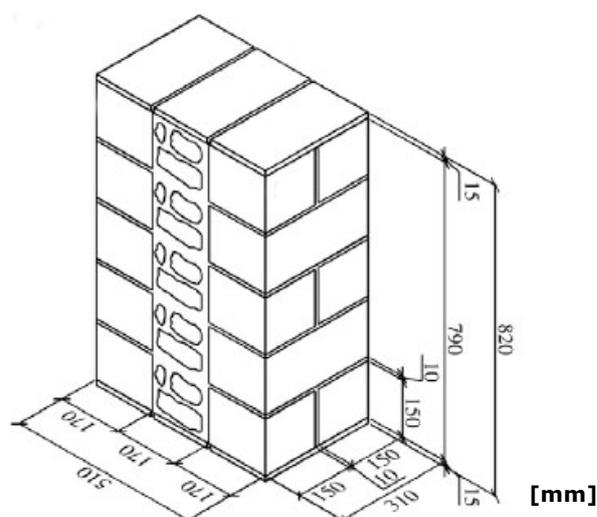


Figure 4.16 : Schémas des échantillons testés en couches séparées par Binda et al. [4.6]

Deux types de pierre ont été mis en œuvre dans les essais effectués par Binda *et al.* Il s'agit d'un grès et d'un calcaire, dont les propriétés mécaniques respectives ont été testées par les auteurs et permettent de placer ces matériaux respectivement dans les catégories 2 et 1, selon la classification précédemment établie (voir annexe 3).

Les maçonneries testées ont été liées au moyen d'un mortier de chaux hydraulique du commerce. Les essais de compression sur la maçonnerie ayant été effectués alors que le mortier était âgé de 75 à 172 jours, une résistance moyenne de ce dernier sur cette période de temps a été considérée. Notons cependant que dans le cas de la maçonnerie de pierre de taille, des caractéristiques mécaniques plus élevées ont été considérées pour le mortier, en raison du confinement que les unités appliquent aux joints.

La résistance en traction du mortier n'a pas été directement mesurée par Binda *et al.*, mais déduite de la résistance en flexion, admettant que la résistance face à ce type d'effort est généralement 1.5 fois plus élevée que celle face à une sollicitation de traction directe [4.6].

Les caractéristiques mécaniques des matériaux employés sont résumées dans le tableau 4.4. Certaines d'entre elles sont fournies par Binda *et al.* [4.6] (en blanc), alors que d'autres ont été extrapolées sur la base d'une étude bibliographique des propriétés mécaniques de matériaux semblables (en gris).

Tableau 4.4 : Propriétés mécaniques des matériaux utilisés par Binda et al. [4.6] ou admises

	Résistance en compression $f_c$ [N/mm <sup>2</sup> ]	Module d'élasticité $E$ [N/mm <sup>2</sup> ]	Coefficient de Poisson $\nu$ [-]	Résistance en traction $f_t$ [N/mm <sup>2</sup> ]	Energie de rupture en traction $G_f$ [J/m <sup>2</sup> ]
Calcaire	20.6	9475	0.1	1.8	30
Grès	104.2	18218	0.19	5.4	50
Mortier / Maçonnerie de pierre de taille	12	5000	0.13	1.5	300
Mortier / Maçonnerie cyclopéenne	9	4000	0.13	1.5	300

Les caractéristiques admises pour l'interface pierre mortier sont résumées dans le tableau 4.5.

Tableau 4.5 : Propriétés admises pour l'interface dans le modèle numérique

Cohésion $c$ [MPa]	Coefficient de frottement $\mu$ [-]	Tangente de l'angle de dilatance $\tan \phi_d$ [-]	Rigidité normale $k_n$ [N/mm <sup>3</sup> ]	Rigidité tangentielle $k_s$ [N/mm <sup>3</sup> ]
0.35	0.72	0.6	75	3000

Notons que s'il est possible de reproduire aisément et de manière précise l'appareillage d'une maçonnerie de pierre de taille, il n'en va pas de même en ce qui concerne une maçonnerie cyclopéenne. La modélisation des cas associés à cette dernière n'a donc pas pour vocation d'apporter un éclairage précis sur le comportement local de l'échantillon testé, puisqu'il n'y a aucune garantie que les deux cas comparés soient semblables.

Remarquons ensuite que les essais menés sur la maçonnerie de pierre de taille ne représentent pas exactement le cas d'une maçonnerie réelle dans laquelle la fissuration peut soit suivre le joint, soit traverser les unités. Or les échantillons testés par Binda *et al.* ne comprennent, sur deux des assises, qu'un seul et unique bloc, que la fissure verticale qui se développera suite à l'application de l'effort de compression devra obligatoirement traverser (figure 4.16). Le mode de rupture est ainsi « forcé » et n'est pas obligatoirement représentatif d'un cas réel.

Afin de diffuser la force appliquée le plus uniformément possible, des plaques métalliques ont été placées au-dessus et au-dessous des échantillons testés par Binda *et al.* Dans le but de minimiser le confinement apporté par ces plaques en tête et en pieds d'échantillon, une couche de téflon a été placée entre la maçonnerie et le métal [4.6]. Il est cependant raisonnable de considérer que l'efficacité de cette dernière est limitée et qu'une certaine entrave demeure. Ces éléments ont été incorporés dans le modèle numérique et la couche de téflon a été représentée par des éléments d'interface de frottement du même type que ceux employés pour simuler l'interface entre la pierre et le mortier.

Bien que le modèle élaboré soit bidimensionnel, les résultats qu'il fournira seront comparés à ceux obtenus suite à des essais évidemment tridimensionnels. Ce choix, dicté par la simplicité d'un modèle 2D, est admis comme valable en raison de la quasi absence d'imbrication des blocs transversalement au mur. Il est donc supposé que la majorité de la dégradation de l'élément surviendra dans le plan étudié.

### 4.3.3. Observations sur le comportement de la maçonnerie

#### 4.3.3.1. Distribution des efforts

##### Maçonnerie cyclopéenne

La modélisation numérique permet de suivre le cheminement préférentiel des contraintes de compression. On constate ainsi qu'elles tendent à s'orienter d'une manière la plus directe possible dans la direction de l'effort appliqué, tout en étant attirées par les plus gros blocs dont la rigidité est supérieure. Elle se concentre en outre préférentiellement aux angles vifs de ces derniers, voire sur leurs côtés, conformément aux observations de la mécanique de la rupture. Les zones de mortier reliant les angles vifs des blocs sont par conséquent également plus fortement sollicitées (figure 4.17).

Le transit des efforts de compression résulte donc de la répartition spatiale des blocs et implique des déviations locales au moyen d'efforts de traction transversaux. La figure 4.18 représente schématiquement ce même phénomène, observé au sein d'un béton. Pour une faible sollicitation, ces efforts de traction sont peu élevés et environ proportionnels aux efforts de compression. Ils augmentent avec la sollicitation appliquée et ont pour conséquence l'ouverture de fissures plus ou moins parallèles à la direction de l'effort appliqué. La diffusion spatiale de l'effort est dès lors entravée par ces ruptures successives, initiées aux interfaces mais qui se propagent rapidement au reste de l'élément.

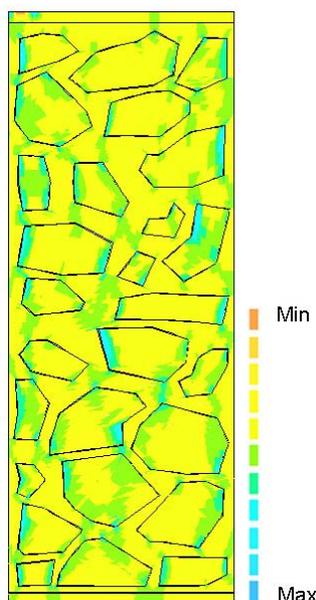


Figure 4.17 : Cheminement des contraintes de compression dans la maçonnerie cyclopéenne

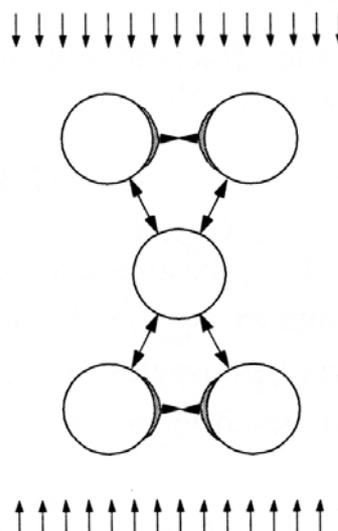


Figure 4.18 : Schéma des efforts de traction naissant entre les granulats d'un béton [4.104 ; 4.105]

##### Maçonnerie de pierre de taille

La continuité des matériaux permet une répartition des contraintes de compression plus uniforme que dans le cas de la maçonnerie cyclopéenne, témoin d'une meilleure utilisation des matériaux en présence. En raison de ses faibles caractéristiques mécaniques relativement à celles de la pierre, le mortier subit une importante déformation, qui se traduit rapidement par l'atteinte de sa résistance en compression.

La propagation d'une fissure centrale résultant de l'effort de traction transversal consécutif à l'application de la compression (effet Poisson) autorise une petite flexion des blocs autour du joint central. Cette dernière induit une concentration des efforts de compression dans la zone verticale centrale de l'échantillon (figure 4.19).

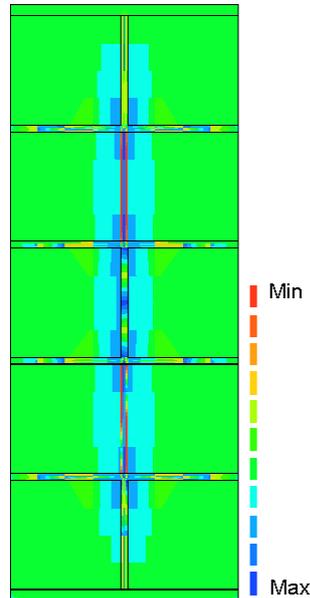


Figure 4.19 : Cheminement des contraintes de compression dans la maçonnerie de pierre de taille

### 4.3.3.2. Propagation de la fissuration

#### Maçonnerie cyclopéenne

L'étude de la propagation de la fissuration dans la maçonnerie cyclopéenne révèle le cheminement des efforts et peut être mise en parallèle, à l'échelle près, avec celui se mettant en place dans le béton.

Ainsi, à l'image de ce qui a été observé entre les agrégats et la matrice dans le béton, la zone d'interface entre les blocs de pierre et le mortier présente des propriétés mécaniques affaiblies ainsi qu'une microfissuration consécutive au retrait du mortier lors de la mise en œuvre d'une part, et à l'action des contraintes d'ordre thermique ou hydrique d'autre part [4.47 ; 4.104]. La zone d'interface est par conséquent la localisation préférentielle de l'amorce de la fissuration. Celle-ci résulte des efforts transversaux qui naissent suite à l'application de la sollicitation de compression. En raison de la forte rigidité des plus gros blocs, les interfaces entourant ces derniers sont les plus sollicitées et, comme le prédit la mécanique de la rupture, c'est aux angles vifs, sièges de concentrations de contraintes, qu'apparaît prioritairement la fissuration (figure 4.20). Elle tend ensuite à se propager par la jonction entre les différentes amorces et à s'orienter parallèlement dans la direction de l'effort appliqué.

Comme c'est le cas au sein du béton, les blocs de pierre assument également une fonction d'entrave à la fissuration. Un bloc est ainsi susceptible de stopper la propagation d'une fissure, ou tout au moins de la freiner en obligeant cette dernière à contourner ou à traverser l'élément rigide (figure 4.21). La survenance de l'un ou l'autre de ces scénarios dépend des propriétés de l'interface, elles-mêmes liées à celles des matériaux constitutifs, et de l'orientation du bloc par rapport à celle de la propagation de la fissure. Ainsi le premier cas (figure 4.21 (a)), rare pour une maçonnerie de pierre naturelle, n'est susceptible de se produire que si la fissure se développe perpendiculairement au bloc qu'elle rencontre et que ce dernier est parfaitement adhérent à la matrice qui l'entoure.

Quant à l'apparition du second (figure 4.21 (b)) ou troisième scénario (figure 4.21 (c)), elle dépend de l'énergie nécessaire à la propagation de la fissure, et donc de l'énergie requise pour vaincre la résistance d'adhérence entre le bloc et le mortier par rapport à celle exigée pour la rupture en traction de l'élément rigide. En outre, plus l'orientation de l'interface sera parallèle à la sollicitation de compression, plus l'effort de traction résultant contribuera à l'ouverture de l'interface, et donc au développement de la fissure contournant le bloc.

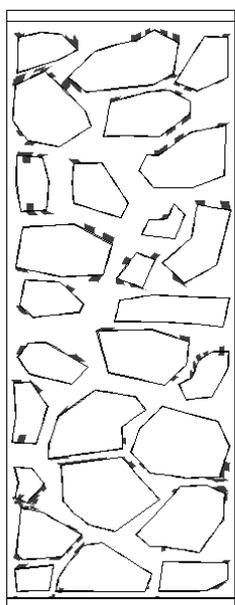


Figure 4.20 : Début de la fissuration dans la maçonnerie cyclopéenne

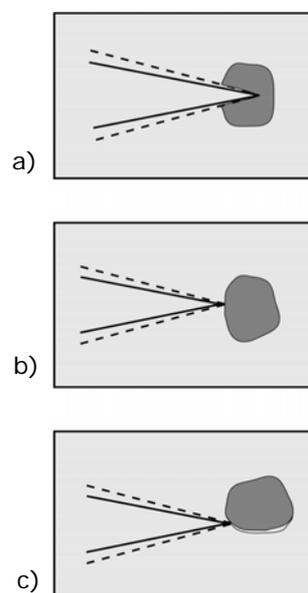


Figure 4.21: Influence d'un granulat sur la propagation de la fissuration au sein du béton [4.104]

Selon les observations effectuées sur le béton, la propagation de la fissuration doit conduire à la formation de lamelles verticales, dont la ruine successive est responsable du softening du matériau. Dans le cas présent, la rupture survient avant la formation complète de ces lamelles.

### Maçonnerie de pierre de taille

Conformément à ce qui a été décrit ci-dessus, la propagation de la fissuration dans une maçonnerie de pierre de taille peut soit traverser les unités, soit les contourner, selon les propriétés de l'interface et des constituants. Dans le cas présent, en raison de la présence de deux assises constituées chacune d'un unique bloc continu, la fissuration se voit forcée de traverser ceux-ci et la possibilité d'un mode de rupture impliquant une propagation de la fissure suivant alternativement les interfaces des joints verticaux et horizontaux est ignorée.

Les premières traces de fissuration apparaissent à l'interface entre les unités et le joint vertical central, là où le confinement dû à la présence des plaques métalliques placées en tête et en pied d'échantillon n'agit plus. La propagation se poursuit ensuite par les interfaces des autres joints verticaux, avant d'impliquer le mortier, puis les blocs de pierre. En raison de l'entrave due à la présence des plaques métalliques aux extrémités de l'échantillon, la fissuration n'est pas libre de se développer sur toute la hauteur de ce dernier, mais est stoppée à mi-hauteur des assises extrêmes (figure 4.22). L'augmentation de la charge provoque l'ouverture progressive de la fissure et par conséquent la concentration des contraintes de compression dans la partie centrale de l'échantillon.

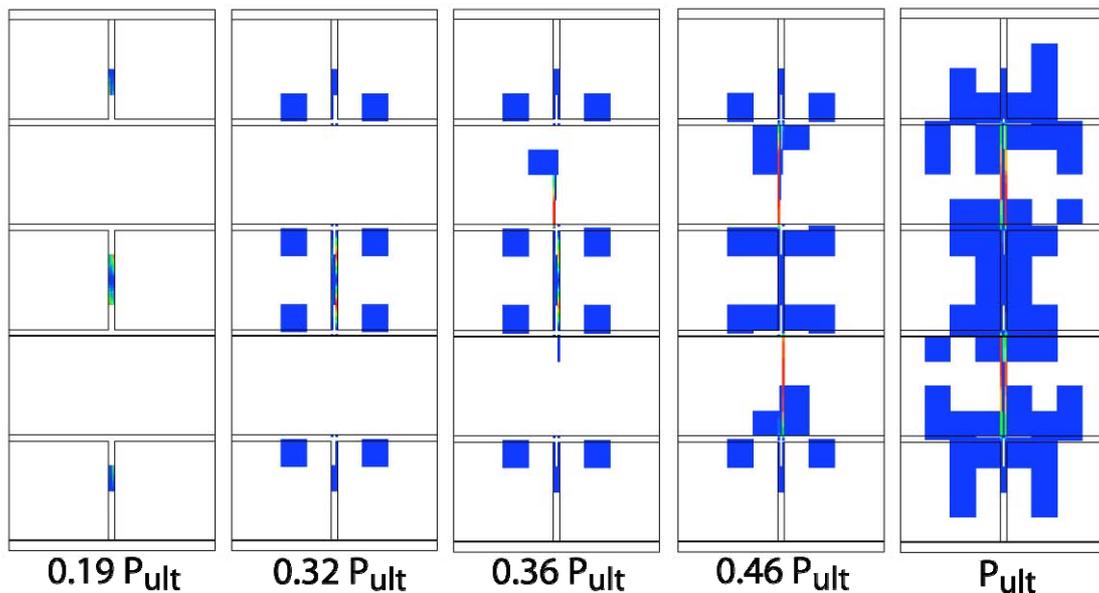


Figure 4.22 : Evolution de la propagation de la fissuration avec l'augmentation de la sollicitation dans l'échantillon de maçonnerie de pierre de taille

Dans le modèle numérique, l'introduction d'une rigidité tangentielle des interfaces relativement haute ( $3000 \text{ N/mm}^3$ ) est nécessaire afin de provoquer l'apparition de cette fissure continue, avant l'écrasement des matériaux en compression. Cette rigidité implique également l'apparition d'une certaine fissuration de la pierre dans les zones directement en contact avec les joints horizontaux, et ce de manière relativement précoce.

L'étude de la propagation de la fissuration permet de mesurer l'importance de l'appareillage et de confirmer la validité des critères choisis pour la caractérisation de ce dernier (annexe 5). D'une part, la présence d'assises continues assure la perpendicularité des joints par rapport à l'effort de compression principal, ce qui force soit le développement d'une rupture par cisaillement des interfaces horizontales, soit la propagation de la fissure à travers la pierre. Ces deux mécanismes réclament un apport d'énergie supérieur pour la propagation de la fissure à celui de l'ouverture de l'interface par traction. Les maçonneries présentant des assises continues fournissent par conséquent une entrave à la progression de la fissuration plus importante. D'autre part, une proportion de blocs de pierre importante par rapport à celle de mortier augmente la probabilité pour une fissure de se heurter à un élément rigide et accroît la part de rupture des interfaces en cisaillement par rapport à celle en traction, ce qui améliore ainsi les qualités mécaniques de la maçonnerie.

### 4.3.3.3. Modes de rupture

#### Maçonnerie cyclopéenne

Avec l'augmentation de la force appliquée et la propagation de la fissuration, l'échantillon de maçonnerie cyclopéenne atteint la ruine à la suite d'un écrasement local du mortier, entraînant le déséquilibre de l'élément (figure 4.23). Dans le cas de ce type de maçonnerie, la proportion de mortier est en effet suffisante pour qu'une rupture locale conduise à la ruine totale de l'échantillon. En d'autres termes, la taille des pierres ne leur permettant pas d'assurer l'équilibre de l'élément après avoir atteint l'inefficacité du mortier, ce dernier domine logiquement le comportement de l'échantillon.

Il est cependant probable que la considération d'un confinement latéral retarderait cet écrasement local et que le développement des lamelles observé dans le cas du béton serait alors possible, conduisant à une résistance et une ductilité supérieures.

Au vu du mode de rupture largement dominé par l'écrasement, et accessoirement par la fissuration du mortier, les caractéristiques de frottement et la rigidité tangentielle de l'interface n'ont qu'une influence négligeable sur le comportement de l'échantillon de maçonnerie cyclopéenne.

Le caractère local de la rupture implique en outre qu'une comparaison directe avec les essais menés par Binda *et al.* n'est pas possible. Ces derniers ont en effet observé une fissuration plus étendue, dont le développement a été possible grâce à l'absence d'écrasement local du mortier (figure 4.24). Le mode de ruine obtenu peut donc être qualifié de précoce en raison de la configuration des blocs à la base de l'échantillon.

La ruine d'une telle maçonnerie est donc très largement liée aux caractéristiques du mortier, mais n'implique que dans une moindre mesure celle de la pierre. Par conséquent, seule une faible résistance peut être considérée dans ce cas.

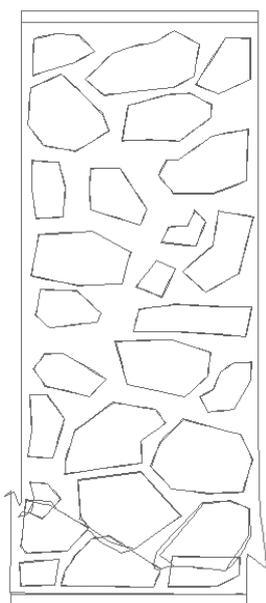


Figure 4.23 : Mode de ruine de l'échantillon de maçonnerie cyclopéenne

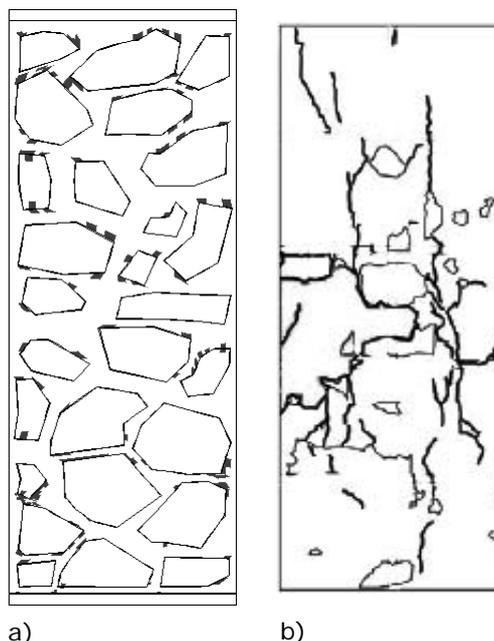


Figure 4.24 : Fissuration juste avant la ruine – a) selon le modèle numérique, b) expérimentalement [4.6]

### Maçonnerie de pierre de taille

La maçonnerie de pierre de taille présente des joints de mortier horizontaux et continus qui agissent comme une couche de faiblesse dans le modèle numérique. Ce dernier rapporte par conséquent une rupture prématurée de l'échantillon due à la ruine par écrasement des joints de mortier horizontaux et ce pour une valeur de résistance à la compression bien plus faible que celle attendue [4.24] (voir également [4.62]). Ce résultat équivaldrait à admettre que le comportement d'une maçonnerie de pierre de taille est entièrement gouverné par celui du mortier constituant les joints d'assise.

D'un point de vue physique, il semble cependant que la rupture en compression de cette couche n'implique pas celle d'une maçonnerie bien appareillée pour laquelle le bon positionnement des blocs maintient une position d'équilibre sans que le mortier ne soit nécessaire. On en veut pour preuve les maçonneries montées à sec, pour lesquelles la taille des blocs exigée est au moins aussi bonne que celle mise en œuvre dans les meilleurs appareillages, et où l'absence de

mortier n'altère pas la stabilité. Ces constatations confirment la fonction non porteuse du mortier dans les maçonneries de pierre de taille.

Il est par conséquent raisonnable d'admettre qu'après son écrasement en compression, le mortier se transforme en un matériau non cohésif, apparenté à un sable, que le confinement appliqué par les unités maintient dans sa position initiale. Ce nouveau matériau est dès lors capable de continuer à transmettre un effort de compression d'un bloc à un autre, ce qui permet à la maçonnerie de résister à une sollicitation bien supérieure à celle nécessaire à l'écrasement du mortier.

Une manière simple d'introduire ce phénomène dans le modèle numérique consiste à considérer qu'après son écrasement et son domaine adoucissant, soit au terme de la courbe contraintes – déformations admise, une seconde phase de comportement est considérée, sous la forme d'une courbe équivalente à celle d'un sable. Confiné, un tel matériau est capable de transmettre une force considérablement plus élevée qu'un mortier ou même que la pierre. Par conséquent, et par souci de simplicité, cette seconde courbe est ici modélisée par un comportement élastique linéaire, avec une rigidité équivalente à celle de la pierre mise en œuvre. La conséquence directe de cette modélisation est l'influence réduite de la première partie de la courbe qui ne conditionne que la déformation de l'échantillon modélisé et non sa résistance ultime. Le comportement complet admis pour le mortier est représenté sur la figure 4.25.

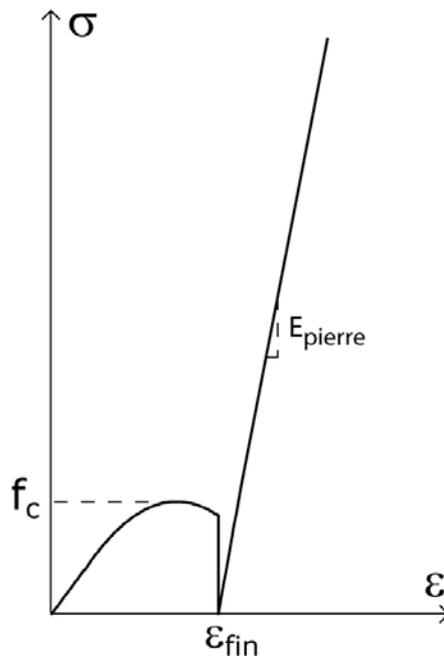


Figure 4.25 : Courbe contrainte – déformation fictive type admise pour le mortier mis en œuvre dans la maçonnerie de pierre de taille

Dans le cas d'une maçonnerie de pierre de taille idéalement (et illusoirement) parfaite, le mode de ruine ne devrait donc impliquer que les propriétés mécaniques de la pierre et la résistance à la compression de l'échantillon devrait par conséquent être équivalente à celle de la pierre. Néanmoins, divers facteurs influencent le comportement de la maçonnerie à l'approche de la ruine. En premier lieu, la fissuration implique une probable instabilité de l'échantillon qui surviendra plus ou moins rapidement, suivant les caractéristiques relatives des matériaux et leur interaction. En second lieu, la stabilité est également influencée par le confinement de la maçonnerie et par de probables ruptures locales de la pierre dont l'apparition pourrait altérer le confinement du mortier écrasé. En outre, le détachement de morceaux de pierre pourrait impliquer d'une part un

risque d'instabilité locale entraînant la ruine de la maçonnerie, et d'autre part une concentration de contraintes, elle-même responsable de nouvelles défaillances locales.

Ceci explique pourquoi la résistance en compression une maçonnerie de pierre de taille dont le comportement est pourtant quasiment entièrement dominé par celui des unités de pierre, n'atteint jamais la résistance à l'écrasement de cette dernière et plafonne ainsi, selon les résultats de la modélisation numérique et les valeurs trouvées dans la littérature, à un niveau égal à environ  $40 \text{ N/mm}^2$ . Mentionnons cependant qu'un appareillage soigné, mis en œuvre à l'époque, allait de pair avec le choix de matériaux de qualité, parmi lesquels les pierres endommagées ou présentant des défauts visibles n'étaient pas utilisées.

Ainsi, à l'inverse de ce que certains prétendent, le mortier n'a donc qu'une importance restreinte sur le comportement d'une maçonnerie de pierre de taille, dont la résistance est avant tout dominée par celle des blocs. Ce raisonnement suggère que les valeurs parfois présentées dans la littérature, liant la résistance en compression de la maçonnerie aux caractéristiques du mortier, sont exagérément conservatrices [4.23 ; 4.106-4.108]. Par ailleurs d'autres essais semblent ainsi confirmer une résistance plus importante de la maçonnerie de pierre de taille [4.12-4.13 ; 4.20 ; 4.94 ; 4.109-4.110]. L'influence de nombreux paramètres concernant notamment les conditions d'essais (élancement de l'échantillon par rapport à la taille des blocs, âge des échantillons, confinement) restent cependant floues et mériteraient des investigations plus approfondies.

En raison du mode de ruine impliquant la propagation d'une fissure verticale sur une grande partie de la hauteur de l'échantillon, l'effet d'une variation des caractéristiques de frottement de l'interface reste faible. Seule la rigidité tangentielle de l'interface est un paramètre influent, car elle conditionne l'apparition plus ou moins précoce de la fissure centrale, dont le développement doit être complet avant l'écrasement des matériaux.

Ainsi, en dépit d'une valeur de résistance non conforme, la fissuration obtenue avec le modèle numérique peut être considérée comme cohérente avec celle résultant des essais menés par Binda *et al.* (figure 4.26).

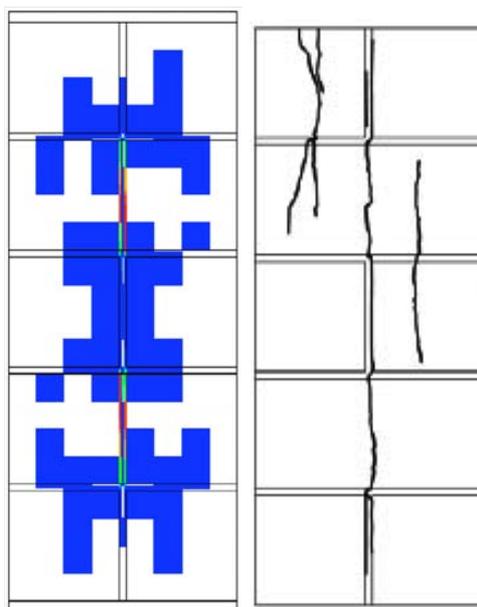


Figure 4.26 : Fissuration juste avant la ruine de la maçonnerie de pierre de taille – a) selon le modèle numérique, b) expérimentalement [4.6]

#### 4.3.3.4. Courbes contrainte – déformation

##### Maçonnerie cyclopéenne

La correspondance entre la rigidité obtenue numériquement et celle trouvée expérimentalement a été réalisée par un ajustement sur la rigidité normale de l'interface (voir les valeurs admises dans le tableau 4.5). L'influence capitale de ce paramètre sur le comportement global de la maçonnerie révèle l'importance de la modélisation de l'interface. Celle-ci est toutefois compliquée par l'absence d'informations quant aux valeurs à admettre pour caractériser les propriétés de cette zone.

Le comportement obtenu numériquement se révèle fragile et pratiquement linéaire jusqu'au pic, alors que les essais avaient montré un comportement fortement ductile et non linéaire à partir des deux tiers environ de la valeur de la charge de pic (figure 4.27). Une explication est à chercher dans la fissuration relativement peu développée que la modélisation numérique a révélé, ne permettant pas la formation de lamelles dont la ruine successive est généralement responsable du softening, et dans le mode de rupture par écrasement local survenu relativement tôt.

Le fait que la maçonnerie modélisée ne soit pas rigoureusement similaire à celle testée explique la différence entre les résultats obtenus, et ce d'autant plus que ce type de maçonnerie implique un mode de rupture local. L'ordre de grandeur de la résistance en compression obtenu numériquement est néanmoins cohérent avec celui révélé expérimentalement. Il semble pourtant qu'un mode de rupture précoce se soit produit et qu'une configuration différente des blocs à la base de l'échantillon modélisé aurait permis le développement d'une fissuration plus étendue et l'obtention d'une résistance en compression plus élevée.

La conservation d'une marge de sécurité importante est donc justifiée par l'incertitude liée à la localisation de l'écrasement local du mortier, responsable de la ruine de l'échantillon. En effet, suivant la configuration de la maçonnerie, la rupture peut se produire plus ou moins prématurément, témoignant d'une résistance en compression qui, bien que toujours faible, peut singulièrement varier, en dépit de la considération du même type d'appareillage et des mêmes matériaux constitutifs.

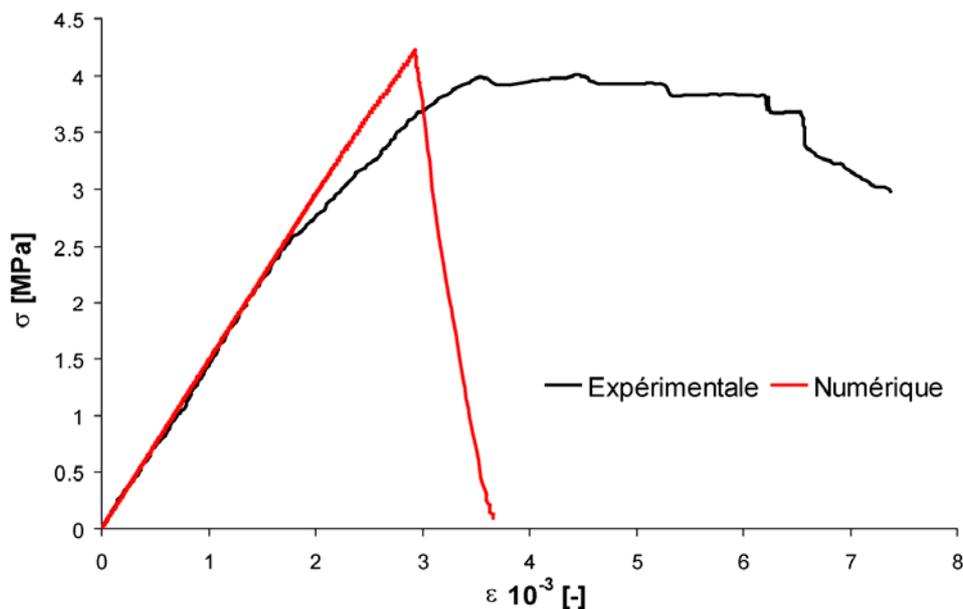


Figure 4.27 : Courbes contrainte – déformation expérimentale (noire) et numérique (rouge) pour la maçonnerie cyclopéenne

### Maçonnerie de pierre de taille

Comme dans le cas de la maçonnerie cyclopéenne, la correspondance entre les rigidités obtenues numériquement et expérimentalement a nécessité un ajustement au moyen de la valeur de la rigidité normale des interfaces (voir tableau 4.5).

Trop élevée, la valeur de la résistance en compression obtenue numériquement s'explique par l'absence de rupture, concentration de contrainte ou défaut local entraînant, dans des conditions réelles, la ruine prématurée de l'échantillon (figure 4.28). Une modélisation adéquate de la maçonnerie de pierre de taille devrait par conséquent impliquer l'introduction d'un défaut local. L'influence de la taille et de la localisation de ce dernier est cependant encore à étudier.

L'incertitude liée au réel mode de rupture de la maçonnerie de pierre de taille conforte la proposition qu'en dépit d'une forte résistance supposée, la prise en compte d'une marge de sécurité élevée pour ce type de matériau est nécessaire.

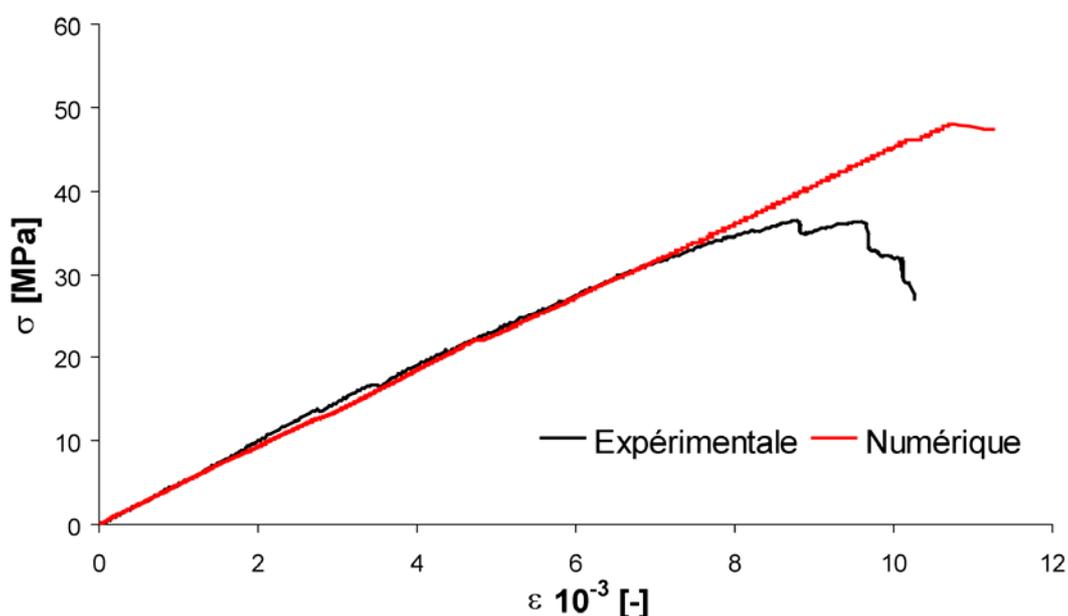


Figure 4.28 : Courbe contrainte - déformation expérimentale (noire) et numérique (rouge) pour la maçonnerie de pierre de taille

## 4.4. Conclusions

La maçonnerie est un matériau au comportement complexe, dont l'étude doit considérer tant le comportement propre des éléments constitutifs que la manière dont ces derniers sont assemblés.

Dans le cas de la maçonnerie cyclopéenne, la réponse du matériau sous une sollicitation de compression simple est dominée par le comportement du mortier dont l'écrasement conduit à la ruine complète de l'échantillon par instabilité, les caractéristiques mécaniques de la pierre n'ayant qu'une importance secondaire.

A l'inverse, les propriétés mécaniques de la pierre influencent grandement la réponse de la maçonnerie de pierre de taille et permettent à cette dernière d'atteindre une valeur de résistance à la compression s'approchant de celle de la pierre. L'influence du mortier est alors négligeable. La survenance d'une ruine prématurée liée à une rupture locale réduit cependant généralement la résistance en compression de la maçonnerie de pierre de taille. La reproduction d'un tel effet nécessiterait néanmoins une modélisation plus détaillée, incorporant l'introduction d'imperfections locales.

Dans les deux cas toutefois, la ruine, liée à un phénomène local, explique la grande variabilité des valeurs obtenues expérimentalement. Toutes sont par conséquent à considérer avec prudence, tout au moins, en attendant que l'influence des multiples paramètres entrant en compte soit mieux maîtrisée.

L'étude de deux types d'appareillages a ainsi révélé un comportement, et en particulier un mode de rupture, totalement différents, et ce en dépit de la similitude des matériaux employés. Ces deux types de maçonnerie, incarnant les deux bornes des matériaux englobés sous les termes « maçonnerie de pierre naturelle », sont donc à considérer de manière totalement différente.

L'appareillage est ainsi le critère dominant le comportement de la maçonnerie, son influence précédant largement celle des matériaux constitutifs.

## **4.5. Références**

- [4.1] Fanning P. J., Sobczak L. Boothby T. E., Solomoni v. (2005) *Load testing and model simulations for a stone arch bridge*, Bridge Structures: Assessment, Design and Construction, Vol. 1, Issue 4, pp. 367-378.
- [4.2] Boothby, T. E., Fanning, P. J. (2004) *Load Rating of Masonry Arch Bridges: Refinements*, J. Bridge Engrg., vol. 9, issue 3, pp. 304-307.
- [4.3] Page A. W. (1982) *An experimental investigation of the bi-axial strength of brick masonry*, 6<sup>th</sup> International Brick Masonry Conference, Rome.
- [4.4] Boothby T. E. (1995) *Collapse Mode of Masonry Arch Bridges*, Masonry International, vol. 9, n°2, pp. 62-69.
- [4.5] Boothby T.E., Domalik D., Dalal V. (1995) *Assessment of masonry arch bridges by service load testing*, Melbourne C. (eds.), Arch Bridges Proceedings of the First International Conference on Arch Bridges, Bolton, UK, pp. 345-354.
- [4.6] Binda L., Pina-Henriques J., Anzani A., Fontana A., Lourenço P. B. (2006) *A contribution for the understanding of load-transfer mechanisms in multi-leaf masonry walls: testing and modelling*, Engineering Structures, 28, pp. 1132-1148.
- [4.7] Faella G., Manfredi G., Realfonzo R. (1993) *Stress-strain relationships for tuff masonry: Experimental results and analytical formulations*, Masonry International, vol. 7, n°2, pp. 55-61.
- [4.8] Chiostrini S., Vignoli A. (1994) *In-situ Determination of the Strength Properties of Masonry Walls by Destructive Shear and Compression Tests*, Masonry International, vol. 7, n°3, pp.87-96.
- [4.9] Ramos L. F., Lourenço P. B. (2004) *Modeling and vulnerability of historical city centers in seismic areas: a case study in Lisbon*, Engineering Structures, vol. 26, issue 9, pp. 1295-1310.
- [4.10] Chiostrini S., Galano L., Vignoli A. (2003) *In situ shear and compression tests in ancient stone masonry walls of Tuscany, Italy*, Journal of testing and evaluation, vol. 31, n°4, pp. 289-303.
- [4.11] Corradi M., Borri A., Vignoli A. (2003) *Experimental study on the determination of strength of masonry walls*, Construction and Building Materials, vol. 17, issue 5, pp. 325-337.
- [4.12] Maurenbrecher A. H. P., Suter G. T., Trischuk K., Fontaine L. (1999) *Contribution to pointing mortar durability*, International RILEM Workshop on Historic Mortars: Characteristics and Tests, Paisley, Scotland, 12<sup>th</sup> – 14<sup>th</sup> May 1999, pp. 361-369.

- [4.13] Valluzzi M. R., da Porto F., Modena C. (2004) *Behavior and modeling of strengthened three-leaf stone masonry walls*, Materials and Structures, vol. 37, n°3, pp. 184-192.
- [4.14] Pina-Henriques J., Lourenço P. B., Binda L., Anzani A. (2005) *Testing and modelling of multiple-leaf masonry walls under shear and compression*, Structural Analysis fo Historical Constructions – Modena, Lourenço & Roca (eds.), pp. 299-310.
- [4.15] Sawko F., Rouf M. A. (1984) *On the stiffness properties of masonry*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part II, 77, pp. 1-12.
- [4.16] Binda L., Tiraboschi C., Baronio G. (2003) *On-site investigation on the remains of the Cathderal of Noto*, Construction and Building Materials, vol. 17, issue 8, pp. 543-555.
- [4.17] Romano, F., Ganduscio, S., Zingone, G. (1992) *Stability of masonry with nonlinear stress-strain relationship*, Masonry International, vol. 6, n°2, pp. 69-74.
- [4.18] Taylor N., Mallinder P. (1993) *Brittle hinge in masonry arch mechanisms*, Structural Engineer, vol. 71, n°20, pp. 359-366.
- [4.19] Binda L., Fontana A., Frigerio G. (1988) *Mechanical behaviour of brick masonries derived from unit and mortar characteristics*, Brick and Block Masonry (8th IBMAC) London, Elsevier Applied Science, vol. 1, pp. 205-216.
- [4.20] Oliveira, D. V., Lourenço, P. B. (2006) *Experimental behaviour of three-leaf stone masonry walls*, Conference and Brokerage Event, The Construction aspects of Built Heritage Protection, Dubrovnik, Croatia, 14 – 17 October, pp. 355-362.
- [4.21] Valluzzi M. R., da Porto F., Modena C. (2001) *Behaviour of multi-leaf stone masonry walls strengthened by different intervention techniques*, Historical Constructions, P. B. Lourenço, P. Roca (eds.), Guimarães, pp. 1023-1032.
- [4.22] Lourenço P. B. (1998) *Experimental and numerical issues in the modelling of the mechanical behaviour of masonry*, Structural Analysis of Historical Constructions II, P. Roca, J. L. González, E. Oñate and P. B. Lourenço (eds.), Barcelona, pp. 57-91.
- [4.23] Deutsches Institut für Normung (1990) *DIN 1053 Teil 1 : Rezeptmauerwerk. Berechnung und Ausführung*.
- [4.24] Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes (1996) *Recommandation SIA V 178 Maçonnerie de pierre*, 49 p.
- [4.25] Kaushik H. B., Rai D. C., Jain S. K. (2007) *Stress-Strain Characteristics of Clay Brick Masonry under Uniaxial Compression*, Journal of Materials in Civil Engineering, ASCE, vol. 19, issue 9, pp. 728-739.
- [4.26] Taylor N., Draper R., Broadhurst S., Mallinder P. A. (1994) *Static and kinematic limit states of masonry vaults*, Bridge Assessment Management and Design, B. I. G. Barr, H. R. Evans, H. E. Harding (eds.), pp. 181-186.
- [4.27] Paulay T., Priestley M. J. N. (1992) *Seismic Design of Concrete and Masonry Buildings*, John Wiley & Sons Inc., New York, 744 p.
- [4.28] Powell B., Hodgkinson H. R. (1976) *The Determination of Stress-Strain Relationship of Brickwork*, Proc. 4<sup>th</sup> Int. Brick Masonry Conf., Brugge, 2.a.5.1-2.a.5.6.

- [4.29] Turnsek V., Cacovic F. (1971) *Some experimental results on the strength of brick masonry walls*, Proc. of the 2<sup>nd</sup> Int. Brick Masonry Conference, Stoke on Trent, pp. 149-156.
- [4.30] Naraine K., Sinha S. (1989) *Behavior of Brick Masonry under Cyclic Compressive Loading*, J. Struct. Engrg., vol. 115, issue 6, pp. 1432-1445.
- [4.31] Taylor N., Mallinder P. A. (1987) *On the limit state properties of masonry*, Proc. Inst. of Civ. Engrs., Part 2, 83 (3), pp. 33-41.
- [4.32] Association romande des métiers de la pierre (2000 ?) *Charte d'éthique et de bienfaisance pour la réfection de monuments et de bâtiments*, Lausanne, 49 p.
- [4.33] Schweizerische Arbeitsgemeinschaft für den Naturstein (1995) *Pro Naturstein*, Berne.
- [4.34] Ecole d'Avignon (2007) *Techniques et pratique de la chaux*, Editions Eyrolles, Paris, 226 p.
- [4.35] Maravelaki-Kalaitzaki P., Bakolas A., Karatasios, I., Kilikoglou, V. (2005) *Hydraulic lime mortars for the restoration of historic masonry in Crete*, Cement and Concrete Research, 35, pp. 1577-1586.
- [4.36] British Geological Survey Natural Environment Research council, Mineral Planning Factsheet (2005) *Natural hydraulic limes*, 7 p.
- [4.37] Winnefeld F., Böttger K. G. (2006) *How clayey fines in aggregates influence the properties of lime mortars*, Materials and Structures, 3, pp. 433-443.
- [4.38] Tesch V., Middendorf B. (2006) *Occurrence of thaumasite in gypsum lime mortars for restoration*, Cement and Concrete Research, vol. 36, issue 8, pp. 1516-1522.
- [4.39] Tunçoku S. S., Caner-Saltik E. N. (2006) *Opal-A rich additives used in ancient lime mortars*, Cement and Concrete Research, vol. 36, issue 10, pp. 1886-1893.
- [4.40] Moropoulou A., Maravelaki-Kalaitzaki, P., Borboudakis, M., Bakolas, A., Michailidis, P., Chronopoulos, M. (1998) *Historic mortars technologies in Crete and guidelines for compatible restoration mortars*, PACT: Revue du groupe européen d'études pour les techniques physiques, chimiques, biologiques et mathématiques appliquées à l'archéologie, 55, pp. 55-72.
- [4.41] Moropoulou A., Bakolas A., Aggelakopoulou E., Odatzidou A., Teas C., Papageorgiou D. (2005) *Estimation of elastic constants of restoration mortars, used on historic masonries restoration interventions, via ultrasonic technique and correlation to their mechanical and microstructure parameters*, Materials Issues in Art and Archaeology, Materials Research Society Symposium, pp. 55-72.
- [4.42] Elert K., Rodriguez-Navarro C., Pardo E. S., Hansen E., Cazalla O. (2002) *Lime mortars for the conservation of historic buildings*, Studies in Conservation, vol. 47, n°1, pp. 62-75.
- [4.43] Stefanidou M., Papayianni I. (2005) *The role of aggregates on the structure and properties of lime mortars*, Cement and Concrete Composites, vol. 27, issues 9-10, pp. 914-919.
- [4.44] Ingo G. M., Fragala I., Bultrini G., de Caro T., Riccucci C., Chiozzini G. (2004) *Thermal and microchemical investigation of Phoenician-Punic mortars used for lining cisterns at Tharros*, Thermochimica Acta, vol. 418, issues 1-2, pp. 53-60.

- [4.45] D'Onfrio C. (1993) *Mechanical characteristics of pozzolanic mortars. Experimental results*, Sixth North American Masonry Conference, Philadelphia, pp. 311-322.
- [4.46] Waldum A. M. (1994) *Mortars for restoration of historical masonry buildings in severe climate*, 10th IB2MAC, Calgary, Canada, pp. 529-537.
- [4.47] Al-Saad Z., Abdel-Halim M. A. H. (2001) *Laboratory evaluation of various types of mortars for the conservation of Qasr al-Bint monument, Petra-Jordan*, Engineering Structures, 23, pp. 926-933.
- [4.48] Pia Riccardi M., Lezzerini M., Carò F., Franzini M., Messiga B. (2007) *Microtextural and microchemical studies of hydraulic ancient mortars: Two analytical approaches to understand pre-industrial technology processes*, Journal of Cultural Heritage, vol. 8, issue 4, pp. 350-360.
- [4.49] Schubert P. (1988) *The influence of mortar on the strength of masonry*, Brick and Block Masonry (8<sup>th</sup> IBMAC), London, Elsevier Applied Science, vol. 1, pp. 162-174.
- [4.50] Papayianni I., Konopissi St. (2005) *Study of hydration of binding systems in lime-based mortars for repairing historical structures*, International Building Lime Symposium, Orlando, Florida.
- [4.51] Moropoulou A., Bakolas A., Moundoulas P., Aggelakopoulou E., Anagnostopoulou S. (2005) *Strength development and lime reaction in mortars for repairing historic masonries*, Cement & Concrete Composites, 27, pp. 289-294.
- [4.52] Lourenço P. B. (1996) *Computational strategies for masonry structures*, PhD Thesis, Delft University, 210 p.
- [4.53] Werner A. M., Lange D. A. (1999) *Quantitative image analysis of masonry mortar microstructure*, J. Comp. in Civ. Engrg., vol. 13, issue 2, pp. 110-115.
- [4.54] Venkatarama Reddy B. V., Uday Vyas Ch. V. (2008) *Influence of shear bond strength on compressive strength and stress-strain characteristics of masonry*, Materials and Structures, vol. 41, n°10, pp. 1697-1712.
- [4.55] McNary W. S., Abrams D. P. (1985) *Mechanics of Masonry in Compression*, J. Struct. Engrg., vol. 111, issue 4, pp. 857-870.
- [4.56] Scrivener K. L., Pratt, P. L. (1996) *Characterisation of interfacial microstructure*, Interfacial Transition Zone in Concrete, J. C. Maso (eds.), pp. 3-17.
- [4.57] Mindess S. (1996) *Tests to determine the mechanical properties of the interfacial zone*, Interfacial Transition Zone in Concrete, J. C. Maso (eds.), pp. 47-63
- [4.58] Adami C.-E., Vintzileou, E. (2008) *Interventions to historic masonries: Investigation of the bond mechanism between stones or bricks and grouts*, Materials and Structures, 41, pp. 255-267.
- [4.59] Moropoulou A., Bakolas A. Bisbikou K. (2000) *Physico-chemical adhesion and cohesion bonds in joint mortars imparting durability to the historic structures*, Construction and Building Materials, 14, pp. 35-46.
- [4.60] Moropoulou A., Bakolas A., Anagnostopoulou S. (2005) *Composite materials in ancient structures*, Cement & Concrete Composites, 27, pp. 295-300.

- [4.61] Hanley R., Pavià S. (2008) *A study of the workability of natural hydraulic lime mortars and its influence on strength*, Materials and Structures, 41, pp.373-381.
- [4.62] Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes (2003) *Norme SIA 266 : Construction en maçonnerie*, 44 p.
- [4.63] Chiostrini S., Vignoli A. (1989) *Application of a numerical method to the study of masonry panels with various geometry under seismic loads*, Structural repair and maintenance of historical buildings, C. A. Brebbia (eds.), pp. 309-317.
- [4.64] Samarasinghe W., Hendry A. W., Page A. W. (1982) *A finite element model for the in-plane behaviour of brickwork*, Proc. Instn. Civ. Engrs., vol. 73, issue 1, Part 2, pp. 171-178.
- [4.65] Dhanasekar M., Page A. W. (1986) *The influence of brick masonry infill properties on the behaviour of infilled frames*, Proc. Instn. Civ. Engrs., vol. 81, Part 2, pp. 593-605.
- [4.66] Lourenço P. B., Rots J. G. (1997), *Multi-surface interface model for analysis of masonry structures*, J. Struct. Eng., ASCE, 123, 7, pp. 660-668.
- [4.67] de Witte F. C. (2007) *DIANA User's Manual - Release 9.2*, TNO DIANA.
- [4.68] Lourenço P. B. (1994) *Analysis of masonry structures with interface elements: Theory and application*, Delft University of Technology, Report n°0-21-22-0-01, 25 p.
- [4.69] Grandjean A. (2008) *Numerical masonry: a tool for establishing stress-strain relationship for natural-stone masonry*, 7th fib PhD Symposium in Stuttgart, Germany, pp. 23-32.
- [4.70] Wawersik W. R., Fairhurst C. (1970) *A study of brittle rock fracture in laboratory compression experiments*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, vol. 7, issue 5, pp. 561-564, IN7-IN14, 565-575.
- [4.71] Cook N. G. W. (1965) *The failure of rock*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, vol. 2, issue 4, pp. 389-403.
- [4.72] Fairhurst C. E., Hudson J. A. (1999) *Draft ISRM suggested method for the complete stress-strain curve for intact rock in uniaxial compression*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, vol. 36, issue 3, pp. 281-289.
- [4.73] Ofoegbu G. I., Curran J. H. (1992) *Deformability of Intact Rock*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, vol. 29, issue 1, pp. 35-48.
- [4.74] Mogi K. (1964) *Deformation and Fracture of rocks under confining pressure compression tests on dry rock sample*, Bulletin of the Earthquake Research Institute, vol. 42, pp. 491-514.
- [4.75] Fukui K., Okubo S., Terashima T. (2005) *Electromagnetic radiation from rock during uniaxial compression testing: The effects of rock characteristics and test conditions*, Rock Mechanics and Rock Engineering, vol. 38, n°5, pp. 411-423.
- [4.76] Andreev G. E. (1995) *Brittle Failure of Rock Materials. Test results and constitutive models*, Balkema, Rotterdam, 446 p.

- [4.77] Oliveira D. V. (2000) *Mechanical characterization of stone and brick masonry*, Report 00-DEC/E-4, 77 p.
- [4.78] Domède N., Pons G., Sellier A., Fritih A. (2009) *Mechanical behaviour of ancient masonry*, *Materials and Structures*, 42, pp. 123-133.
- [4.79] Arandigoyen M., Alvarez J. I. (2007) *Pore structure and mechanical properties of cement-lime mortars*, *Cement and Concrete Research*, vol. 37, issue 5, pp. 767-775.
- [4.80] Beck K., Al-Mukhtar M. (2008) *Formulation and characterization of an appropriate lime-based mortar for use with a porous limestone*, *Environmental Geology*, vol. 56, n°3-4, pp. 715-727.
- [4.81] Mohamad G., Lourenço, P. B., Roman, H. R. (2003) *Poisson behaviour of bedding mortar under multiaxial stress state*.
- [4.82] Binda L., Baronio G., Tedeschi C. (2000) *Experimental study on the mechanical role of thick mortar joints in reproduced byzantine masonry*, *International RILEM Workshop on Historic Mortars: Characteristics and Tests*, pp. 227-247.
- [4.83] Baronio G., Binda L., Saisi A. (2000) *Mechanical and physical behaviour of lime mortars reproduced after the characterization of historic mortar*, *International RILEM Workshop on Historic Mortars: Characteristics and Tests*, pp. 307-325.
- [4.84] Rosson B. T., Soyland K., Boothby T. E. (1998) *Inelastic behavior of sand-lime mortar joint masonry arches*, *Engineering Structures*, vol. 20, issues 1-2, pp. 14-24.
- [4.85] Hayen R., van Balen K., van Gemert D. (2005) *The mechanical behaviour of mortars in triaxial compression*, *Structural analysis of historical constructions*, Modena, Lourenço & Roca (eds.), pp. 611-617.
- [4.86] Venkatarama Reddy B. V., Gupta A. (2005) *Characteristics of cement-soil mortars*, *Materials and Structures*, vol. 38, n°6, pp. 639-650.
- [4.87] Budi Aulia T. (2000) *Strain localization and fracture energy of high-strength concrete under uniaxial compression*, *Leipzig Annual Civil Engineering Report, LACER No. 5*, pp. 221-240.
- [4.88] Cooper G. A. (1977) *Optimization of the three-point bend test for fracture energy measurement*, *Journal of Materials Science*, vol. 12, issue 2, pp. 277-289.
- [4.89] Hoagland R. G., Hahn G. T., Rosenfield A. R. (1973) *Influence of microstructure on fracture propagation in rock*, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, vol. 5, n°2, pp. 77-106.
- [4.90] Ohnaka M. (2003) *A constitutive scaling law and a unified comprehension for frictional slip failure, shear fracture of intact rock and earthquake rupture*, *Journal of Geophysical Research*, vol. 108, n° B2, ESE 6-1 – 6-21.
- [4.91] Bazant Z. P., Bai S.-P., Gettu R. (1993) *Fracture of rock: effect of loading rate*, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 45, n°3, pp. 393-398.
- [4.92] Lourenço P. B. (1996) *A user/programmer guide for the micro-modeling of masonry structures*, TU-DELFT report n° 03.21.1.31.35, TNO-BOUW report n° 96-NM-R1201, 46 p.
- [4.93] Brühwiler E., Saouma V. E. (1990) *Fracture testing of rock by the wedge splitting test*, *Rock Mechanics Contributions and Challenges*, Hustrulid & Johnson (eds.), Balkema, pp. 287-294.

- [4.94] Domède N. (2006) *Méthode de requalification des ponts en maçonnerie*, Thèse de Doctorat n°835, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 202 p.
- [4.95] Skoczylas F., Burlion N., Yurtdas I. (2007) *About drying effects and poro-mechanical behaviour of mortars*, Cement & Concrete Composites, 29, pp. 383–390.
- [4.96] Mohamad G., Lourenço P. B., Roman H. R. (2007) *Mechanics of hollow concrete concrete block masonry prisms under compression: Review and prospects*, Cement & Concrete Composites, 29, pp. 181-192.
- [4.97] Berto L., Saetta A., Scotta R., Vitaliani R. (2005) *Failure mechanism of masonry prism loaded in axial compression: computational aspects*, Materials and Structures, 38, pp. 249-256.
- [4.98] Gabor A., Ferrier E., Jacquelin E., Hamelin P. (2006) *Analysis and modelling of the in-plane shear behaviour of hollow brick masonry panels*, Construction and Building Materials, 20, pp. 308-321.
- [4.99] Sarangapani G. Venkatarama Reddy B. V., Jagadish K. S. (2005) *Brick-mortar bond and masonry compressive strength*, Journal of Materials in Civil Engineering, ASCE, vol. 17, issue 2, pp. 229-237.
- [4.100] Le Pape Y. Anthoine A., Pegon P. (2001) *Seismic assessment of masonry structures - Multi-scale numerical modelling*, Historical Constructions, P. B. Lourenço, P. Roca (eds.), Guimarães, pp. 963-972.
- [4.101] Milani G., Zuccarello F. A., Olivito R. S., Tralli A. (2007) *Heterogeneous upper-bound finite element limit analysis of masonry walls out-of-plane loaded*, Comput. Mech., 40, pp. 911-931.
- [4.102] Abdou L. Ami Saada, R., Meftah F., Mebarki A. (2006) *Experimental investigations of the joint-mortar behaviour*, Mechanics Research Communications, 33, pp. 370-384.
- [4.103] Dias J. L. M. (2007) *Cracking due to shear in masonry mortar joints and around the interface between masonry walls and reinforced concrete beams*, Construction and Building Materials, 21, pp. 446-457.
- [4.104] Schnetzer H. (2000) *Stochastische Baustoffmodelle für Beton*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 119 p.
- [4.105] Hsu T. T. C., Slate F. O., Sturmann G. M., Winter G. (1963) *Microcracking of Plain Concrete and the Shape of the Stress-Strain Curve*, Proceedings, Journal of the American Concrete Institute, vol. 60, n°2, pp. 209-224.
- [4.106] Funk P. (1981) *Mauerwerk ; Berechnung und Ausführung – DIN 1053 Blatt 1*, Mauerwerk-Kalender, pp. 437-476.
- [4.107] Mann W. (1983) *Druckfestigkeit von Mauerwerk. Eine statistische Auswertung von Versuchsergebnissen in geschlossener Darstellung mit Hilfe von Potenzfunktionen*, Mauerwerk-Kalender, pp. 687-699.
- [4.108] Kirtschig K., Kasten D. (1982) *Zur Ermittlung von Mauerwerksfestigkeitsklassen*, Proc. 6th Int. Brick Masonry Conf., Rome, 16 – 19 May, pp. 222-234.
- [4.109] Sabha A., Schöne I. (1994) *Untersuchungen zum Tragverhalten von Mauerwerk aus Elbesandstein*, Bautechnik 71, Heft 3, pp.161-166.
- [4.110] Venu Madhava Rao K., Venkatarama Reddy B. V., Jagadish K. S. (1997) *Strength characteristics of stone masonry*, Material and Structures, vol. 30, pp. 233-237.

- [4.111] Schweizerische Geotechnische Kommission (2006) *Die Mineralischen Rohstoffe der Schweiz*, Zürich, 522 p.
- [4.112] Haller P. (1943) *Natursteine, künstliche Steine, Leichtbaustoffe*, Polygraphischer Verlag A.-G., Zürich, 48 p.
- [4.113] Atkinson B. K. (1987) *Fracture Mechanics of Rock*, Academic Press, 534 p.
- [4.114] Schumann W. (2007) *Guide des pierres et minéraux, roches, gemmes et météorites*, Les Guides du Naturaliste, Delachaux et Niestlé (eds.), Paris, 383 p.

#### **4.6. Références complémentaires <sup>6</sup>**

- [4.115] Adam J.-P. (2008) *La construction romaine : matériaux et techniques*, Picard (eds.), Paris, 367 p.
- [4.116] Almeida J. C., Lourenço P. B., Barros J. A. (2002) *Characterization of brick and brick-mortar interface under uniaxial tension*, VII International Seminar on Structural Masonry for Developing countries, Belo Horizonte, Brazil.
- [4.117] Attard M. M., Nappi A., Tin-Loi F. (2007) *Modeling fracture in masonry*, Journal of Structural Engineering, ASCE, vol. 133, issue 10, pp. 1385-1392.
- [4.118] Baggio C., Trovalusci P. (1998) *Limit analysis for no-tension and frictional three dimensional discrete systems*, Mechanics Based Design of Structures and Machines, 26:3, pp. 287-304.
- [4.119] Bangert F., Grasberger S., Kuhl D., Meschke G. (2003), *Environmentally induced deterioration of concrete: Physical motivation and numerical modeling*, Engineering Fracture Mechanics, vol. 70, issue 7-8, pp. 891-910.
- [4.120] Bell A. J., Al-Jolahy A. M., Kulaib M. (2002) *Compressive strength of natural stone masonry*, Proceedings of the British Masonry Society, pp. 23-27.
- [4.121] Böke H., Cizer Ö., Ipekoglu B., Ugurlu E., Serifaki K., Toprak G. (2008) *Characteristics of lime produced from limestone containing diatoms*, Construction and Building Materials, vol. 22, issue 5, pp. 886-874.
- [4.122] Bollin R. (1996) *Pierres naturelles à Fribourg*, Editions Méandre, Fribourg, 109 p.
- [4.123] Burnett S., Gilbert M., Molyneaux T., Beattie G., Hobbs B. (2007) *The performance of unreinforced masonry walls subjected to low-velocity impacts: Finite element analysis*, International Journal of Impact Engineering, vol. 34, issue 8, pp. 1433-1450.
- [4.124] Chaimoon K., Attard M. M. (2007) *Modeling of unreinforced masonry walls under shear and compression*, Engineering Structures, vol. 29, issue 9, pp. 2056-2068.
- [4.125] Chandra Kishen J. M., Saouma V. E. (2004) *Fracture of rock-concrete interfaces: laboratory tests and applications*, ACI Structural Journal, vol. 101, issue 3, pp. 325-331.

---

<sup>6</sup> Bien que non citées dans le texte, les références dites complémentaires sont susceptibles d'apporter un supplément d'information au lecteur.

- [4.126] Chelidze T., Reuschlé T., Guéguen Y. (1994), *A theoretical investigation of the fracture energy of heterogeneous brittle materials*, I. Phys.: Condens. Matter., 6, pp. 1857-1868.
- [4.127] Committee on Conservation of Historic Stone Buildings and Monuments (1982) *Conservation of Historic Stone Buildings and Monuments*, Proceedings of the Conference, Washington, 365 p.
- [4.128] Devaux M. (2008) *Seismic Vulnerability of Cultural Heritage Buildings in Switzerland*, PhD Thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 431 p.
- [4.129] Elsen J. (2006) *Microscopy of historic mortars – a review*, Cement and Concrete Research, vol. 36, issue 8, pp. 1416-1424.
- [4.130] El-Turki A., Ball R. J., Allen G. C. (2007) *The influence of relative humidity on structural and chemical changes during carbonation of hydraulic lime*, Cement and Concrete Research, vol. 37, issue 8, pp. 1233-1340.
- [4.131] Giambanco G., Rizzo S., Spallino R. (2001) *Numerical analysis of masonry structures via interface models*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190, issues 49-50, pp. 6493-6511.
- [4.132] van Hees R. P. J., Binda L., Papayianni I., Toumbakari E. (2004) *Characterisation and damage analysis of old mortars*, Materials and Structures, vol. 37, n°9, pp. 644-648.
- [4.133] Hornbostel C. (1991) *Construction materials: types, uses and applications*, Wiley (eds.), New York, 1023 p.
- [4.134] Jordan J. W., Brookes C. L. (?) *The conservation and strengthening of masonry structures*.
- [4.135] Lotfi H. R., Shing P. B. (1994) *Interface Model Applied to Fracture of Masonry Structures*, Journal of Structural Engineering, vol. 120, n°1, pp. 63-80.
- [4.136] Lourenço P. B., Rots J. G., Blaauwendraad J. (1998) *Continuum Model for Masonry: Parameter Estimation and Validation*, J. Struct. Engrg., vol. 124, issue 6, pp. 642-652.
- [4.137] Lourenço P. B., Barros J. O., Oliveira J. T. (2004) *Shear testing of stack bonded masonry*, Construction and Building Materials, vol. 18, issue 2, p. 125-132.
- [4.138] Lourenço P. B., Ramos L. F. (2004) *Characterization of cyclic behavior of Dry Masonry Joints*, J. Struct. Engrg., vol. 130, issue 5, pp. 779-786.
- [4.139] Lourenço P. B. (2005) *From fracture mechanics to case studies: the issue of cultural heritage*, Anales de Mecànica de la Fractura, vol. 22, pp. 10-17.
- [4.140] Lourenço P. B., Pina-Henriques J. (2006) *Validation of analytical and continuum numerical methods for estimating the compressive strength of masonry*, Computers and Structures, 84, pp. 1977–1989.
- [4.141] Maier J. (2002) *Handbuch Historisches Mauerwerk. Untersuchungsmethoden und Instandsetzungsverfahren*, Bau Handbuch, Birkhäuser, Basel, 325 p.
- [4.142] Marques S. F., Ribeiro R. A., Silva L. M., Ferreira V. M., Labrincha J. A. (2006) *Study of rehabilitation mortars: Construction of a knowledge correlation matrix*, Cement and Concrete Research, vol. 36, issue 10, pp. 1894-1902.

- [4.143] Moropoulou A., Biscontin G., Bakolas A., Bisbikou K. (1997) *Technology and behaviour of rubble masonry mortars*, Constr. Build. Mater., vol. 11, n°2, pp. 119-129.
- [4.144] Moropoulou A., Cakmak A. S., Biscontin G., Bakolas A., Zendri E. (2002) *Advanced Byzantine cement based composites resisting earthquake stresses: the crushed brick-lime mortars of Justinian's Hagia Sophia*, Construction and Building Materials, vol. 16, issue 8, pp. 543-552.
- [4.145] Neville A. M. (2000) *Propriétés des bétons*, Centre de Recherche Interuniversitaire sur le Béton (CRIB), Editions Eyrolles, Paris, 806 p.
- [4.146] Olivito R. S., Stumpo P. (2001) *Fracture mechanics in the characterisation of brick masonry structures*, Materials and Structures, vol. 34, pp. 217-223.
- [4.147] Papayianni I., Stefanidou M. (2006) *Strength-porosity relationships in lime-pozzolan mortars*, Construction and Building Materials, vol. 20, issue 9, pp. 700-705.
- [4.148] Papayianni I., Stefanidou M. (2007) *Durability aspects of ancient mortars of the archaeological site of Olynthos*, Journal of Cultural Heritage, vol. 8, issue 2, pp. 193-196.
- [4.149] Philipp P. C., Rosendo Yunes P., Fernandes C. P., Magnani F. S. (1994) *The microstructure of porous building materials: Study of a cement and lime mortar*, Transport in Porous Media, vol. 14, n°3, pp. 219-245.
- [4.150] Phillips M. W. (1974) *SPNEA – APT Conference on mortar*, Boston, March 15-16, Bulletin of the Association for Preservation Technology, vol. 6, n°1, pp. 9-39.
- [4.151] Pina-Henriques J., Lourenço, P. B. (2006) *Masonry compression: a numerical investigation at the meso-level*, Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, vol. 23, n°4, pp. 382-407.
- [4.152] Proske D., Lieberwirth P., van Gelder P. (2006) *Sicherheitsbeurteilung historischer Bogenbrücken*, Sonderdruck zum 16. Dresdner Brückenbausymposium, Dirk Proske Verlag, Dresden, 310 p.
- [4.153] de Quervain F., Gschwind M. (1934) *Die nutzbaren Gesteine der Schweiz*, Huber (eds.), Berne, 456 p.
- [4.154] Roelfstra P. E., Sadouki H. (1985) *Total fracture energy of composite materials*, Vorträge der 17. Sitzung des Arbeitskreises Bruchvorgänge, Ed. Deutscher Verband für Materialprüfung, Berlin, pp. 357-371.
- [4.155] Schmid E. (1973) *Gesteine der Schweiz*, Schück, Rüschlikon, 40 p.
- [4.156] Smith M. R. (1999) *Stone: building stone, rock fill and armourstone in construction*, Geological Society, London, 478 p.
- [4.157] Senthivel R., Lourenço P. B., Vasconcelos G. (2006) *Numerical modelling of deformation behaviour of dry-stack stone masonry*, International Masonry Conference 7, London, British Masonry Society.
- [4.158] Senthivel R., Lourenço, P. B., Vasconcelos, G. (2006) *Analytical modeling of dry stone masonry wall under monotonic and reversed cyclic loading*, Structural Analysis of Historical Constructions: Proceedings of the International Conference of Structural Analysis of Historical Constructions, New Delhi, pp. 1005-1011.
- [4.159] Sowden A. M. (1990) *The Maintenance of Brick and Stone Masonry Structures*, E. & F. N. Spon (eds.), 372 p.

- [4.160] Sugo H. O., Page A. W., Lawrence S. J. (2001) *The development of mortar/unit bond*, 9<sup>th</sup> Canadian Masonry Symposium.
- [4.161] Sutcliffe D. J., Yu, H. S., Page A. W. (2001) *Lower bound limit analysis of unreinforced masonry shear walls*, Computers & Structures, vol. 79, issue 14, pp. 1295-1312.
- [4.162] Taha M. M. R., Shrive N. G. (2001) *The use of pozzolans to improve bond and bond strength*, 9<sup>th</sup> Canadian Masonry Symposium.
- [4.163] Tan D. M., Tschegg E. K., Rotter H., Kirchner H. O. K. (1995) *Cracks at mortar-stone interfaces*, Acta Metallurgica et Materialia, Vol. 43, Issue 10, pp. 3701-3707.
- [4.164] Tang C. A., Kou S. Q. (1998) *Crack propagation and coalescence in brittle materials under compression*, Engineering Fracture Mechanics, vol. 61, issues 3-4, pp. 311-324.
- [4.165] Tschegg E. K., Jamek M., Schouenborg B. (2008) *Fracture properties of marble-mortar compounds*, Bulletin of Engineering Geology and the Environment, vol. 67, n°2, pp. 199-208.
- [4.166] Trovalusci P., Baggio C. (2003) *An optimisation algorithm for the collapse detection of stone masonry structures*, Advances in architectures series, vol. 15, pp. 473-481.
- [4.167] Tschegg E. K., Rotter H. M., Roelfstra P. E., Bourgund, U., Jussel, P. (1995) *Fracture mechanical behavior of aggregate-cement matrix interfaces*, Journal of Materials in Civil Engineering, vol. 7, issue 4, pp. 199-203.
- [4.168] Verband Schweizerischer Steinbruchbetriebe (?) *Die Schweizerischen Natursteine und ihre Verwendungsarten*, Zürich, 60 p.
- [4.169] Vermeltoort A. T., Martens D. R. W., van Zijl G. P. A. G. (2007) *Brick-mortar interface effects on masonry under compression*, Can. J. Civ. Eng., 34, pp. 1475-1485.
- [4.170] Vitruve (2005) *Les dix livres d'architecture : De architectura*, Traduction de Claude Perrault, Editions Errance, Paris, 159 p.
- [4.171] Walter R., Ostergaard L., Olesen J. F., Stang H. (2005) *Wedge splitting test for a steel-concrete interface*, Engineering Fracture Mechanics, vol. 72, issue 17, pp. 2565-2583.
- [4.172] Weber H., Zinsmeister K. (1991) *Conservation of natural stone. Guidelines to Consolidation, Restoration and Preservation*, Expert-Verlag, Ehningen, 168 p.
- [4.173] Xu S., Zhu Y. (2007) *Experiment studies on fracture energy of cement paste and mortar*, Key Engineering Materials, vols. 348-349, pp. 169-172.
- [4.174] Yang S., Song L. Liao H., Huang S. (2006) *Experimental Investigation on Fracture Parameters of Interface Crack for Rock/Concrete and Rock/Mortar*, Soil and Rock Behavior and Modeling, Proceedings of Sessions of GeoShanghai, pp. 220-227.
- [4.175] Zaitsev Y. B., Wittmann F. H. (1981) *Simulation of crack propagation and failure of concrete*, Materials and Structures, vol. 14, n°5, pp. 357-365.
- [4.176] van Zijl G. P. A. (2004) *Modeling Masonry Shear-Compression: Role of Dilatancy Highlighted*, J. Engrg. Mech., vol. 130, issue 11, pp. 1289-1296.



## 5. Etude au méso-niveau – Conditions de formation de la rotule

Un arc en maçonnerie est une structure hyperstatique dont la ruine est, grâce aux redistributions plastiques, consécutive à la plastification d'un nombre de sections égal au degré d'hyperstaticité plus un. Le présent chapitre est consacré à l'étude du mode de plastification d'une section d'un élément structural en maçonnerie de pierre naturelle soumis à un effort de flexion composée, tel que l'est un arc.

### 5.1. Mécanisme de formation de la rotule

En s'appuyant les uns sur les autres, les voussoirs constituant un arc y font naître un effort normal de compression. La forme de l'élément structural étant fixée par la taille des voussoirs le constituant, les sollicitations appliquées y font également naître des efforts de flexion. La section d'un arc est par conséquent essentiellement soumise à un effort de flexion composée, soit à une interaction effort normal de compression – moment de flexion, qui peut être avantageusement représentée par un effort normal excentré (figure 5.1). En l'absence de capacité de reprise d'un effort de traction, la résistance de la section considérée face à une sollicitation de flexion est dépendante de l'effort normal de compression appliqué.

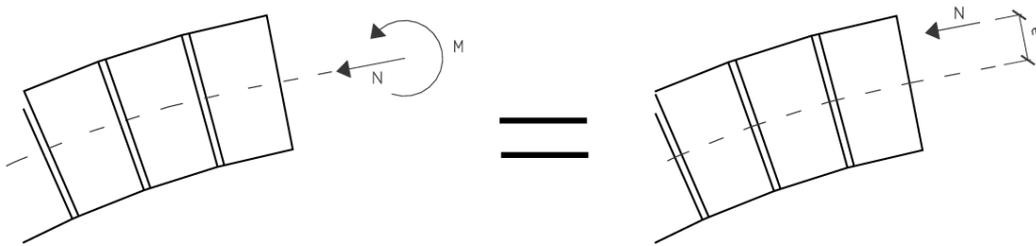


Figure 5.1 : Interaction effort normal – moment de flexion dans une section d'arc

En lieu et place des habituels diagrammes de l'effort normal et du moment de flexion, la sollicitation dans un arc peut être idéalement représentée au moyen de la ligne des pressions. Cette dernière relie les points d'application de l'effort normal excentré en chaque section de l'arc et illustre ainsi simultanément l'effet des deux types d'efforts considérés (figure 5.2).

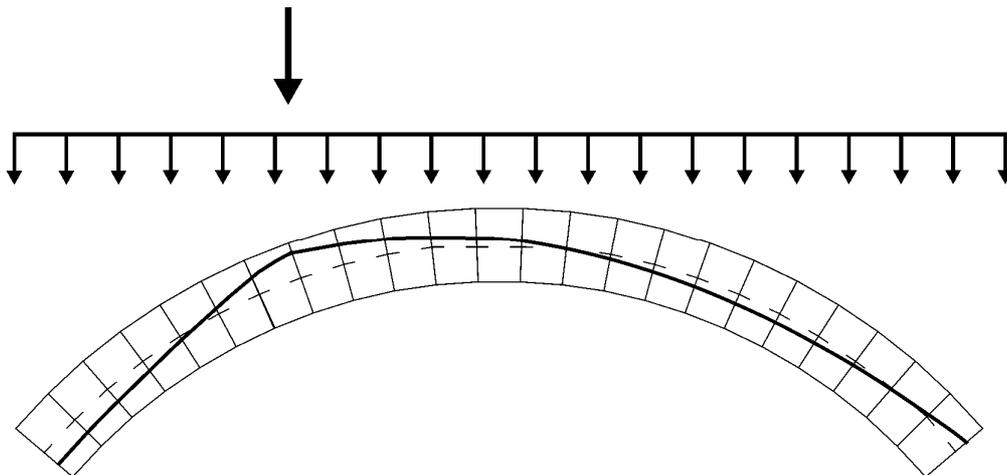


Figure 5.2 : Ligne des pressions dans un arc

Si l'application d'une charge uniformément répartie a pour effet d'augmenter simultanément les efforts de flexion et normal, il n'en est pas de même en ce qui concerne une sollicitation non uniforme, dont l'effet sera une amplification locale du moment de flexion, proportionnellement plus importante que celle de l'effort normal correspondant. Ainsi, une augmentation de la charge non uniforme implique par conséquent une excentricité de l'effort normal localement plus marquée.

Comme précédemment mentionné, il est admis que la maçonnerie ne possède aucune résistance face à un effort de traction, en raison de l'affaiblissement de la zone d'interface entre le mortier et la pierre (voir chapitre 4). Cette hypothèse, bien que conservatrice, reste acceptable dans le cadre d'une vérification structurale. Ainsi, l'application d'un moment de flexion suffisant pour faire naître un effort de traction dans la section implique l'ouverture immédiate d'une fissure. Cette dernière s'accompagne d'une diminution graduelle de la section efficace permettant de reprendre l'effort de compression, au fur et à mesure de l'augmentation de l'effort de flexion.

La connaissance de la courbe contrainte – déformation pour la maçonnerie considérée permet d'appréhender le comportement de la section lorsqu'elle est soumise à ce type de sollicitation. En raison du domaine post-pic admis, la plastification complète de la section n'est pas atteinte lorsque la fibre extrême est sollicitée par la contrainte maximale en compression, mais lorsqu'elle atteint la déformation maximale. A ce stade ultime, la section a donc subi une fissuration dans la zone tendue et un écrasement en compression. De forme plus ou moins triangulaire, la zone écrasée est constituée de matériau émiétté dont le maintien est assuré grâce au confinement. Il est alors admis qu'à l'image d'un matériau non cohésif, tel un sable, le matériau écrasé peut transmettre un effort de compression considérable.

La dimension de la zone écrasée dépend de l'effort normal appliqué et donc par extension de l'interaction d'efforts. La contrainte de compression sollicitant un arc étant cependant très faible – de l'ordre de 1 à 2 N/mm<sup>2</sup> – [5.1], la zone écrasée restera généralement de faibles dimensions. Seuls des arcs très surbaissés peuvent être soumis à un effort normal plus important.

Cet état d'endommagement du matériau permet alors la formation d'une rotule dont la constitution complète est admise coïncidant avec l'atteinte de la déformation maximale à la fibre extrême. De telles rotules ont pu être identifiées tant sur des ouvrages existants (figure 5.3) qu'expérimentalement en laboratoire (figure 5.4).

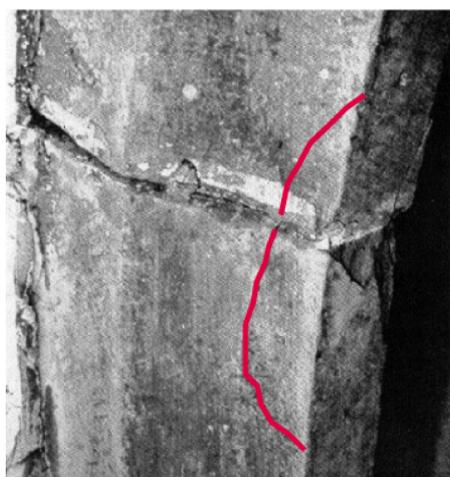


Figure 5.3 : Formation d'une rotule dans un arc de maçonnerie [5.2]

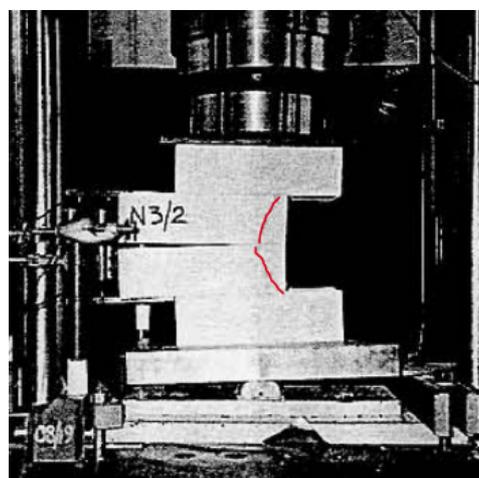


Figure 5.4 : Simulation en laboratoire de la formation d'une rotule [5.3]

Nous considérons dans cette étude qu'une telle articulation est équivalente à une rotule mécanique, autorisant une rotation illimitée entre les deux portions d'arc admises rigides qu'elle délimite, le centre de rotation étant situé à la pointe du triangle formée par la zone écrasée (figure 5.5 (a)). Il est admis que la section ainsi transformée n'offre plus aucune résistance à l'imposition d'un moment de flexion supplémentaire. L'existence même de la rotule reste néanmoins subordonnée à l'application permanente d'un couple moment de flexion – effort normal suffisant pour provoquer tant l'écrasement du matériau en compression que l'ouverture d'une fissure par traction. Un déchargement de la structure impliquant une diminution des efforts de compression et de flexion imposés, il aura, à l'inverse, pour conséquence la fermeture de la fissure ouverte. Ainsi, en raison de la faiblesse de l'effort de compression impliqué, et de la petite dimension de la zone écrasée qui en résulte, le mécanisme de formation de la rotule peut être considéré comme pratiquement réversible. Il découlera de l'application d'une nouvelle sollicitation, accompagnée de l'ouverture d'une fissure et de l'apparition consécutive d'une rotule, qui, suivant la position du chargement, est libre de se produire au niveau d'une autre section de l'arc.

Les hypothèses concernant le mécanisme de formation des rotules émises ci-dessus peuvent être avantageusement illustrées et validées par l'observation du comportement d'un modèle réduit d'arc, dont une portion est représentée sur la figure 5.5 (b) (voir § 6.1 et 10.2.1.1). Les voussoirs formant l'élément structurel sont constitués par des blocs rigides de bois, non liés les uns aux autres. Chaque joint est composé d'une double couche de mousse susceptible de s'écraser en compression et maintenant un coefficient de frottement suffisant pour éviter le glissement relatif d'un voussoir par rapport à l'autre.

Suite à l'application conjointe d'un effort normal et d'un moment de flexion d'une amplitude suffisante, une ou plusieurs rotules apparaissent sous la forme de l'écrasement de la zone comprimée et de l'ouverture de la portion de joint soumise à une traction. Un déchargement de la structure implique alors le retour de l'arc dans sa configuration initiale.

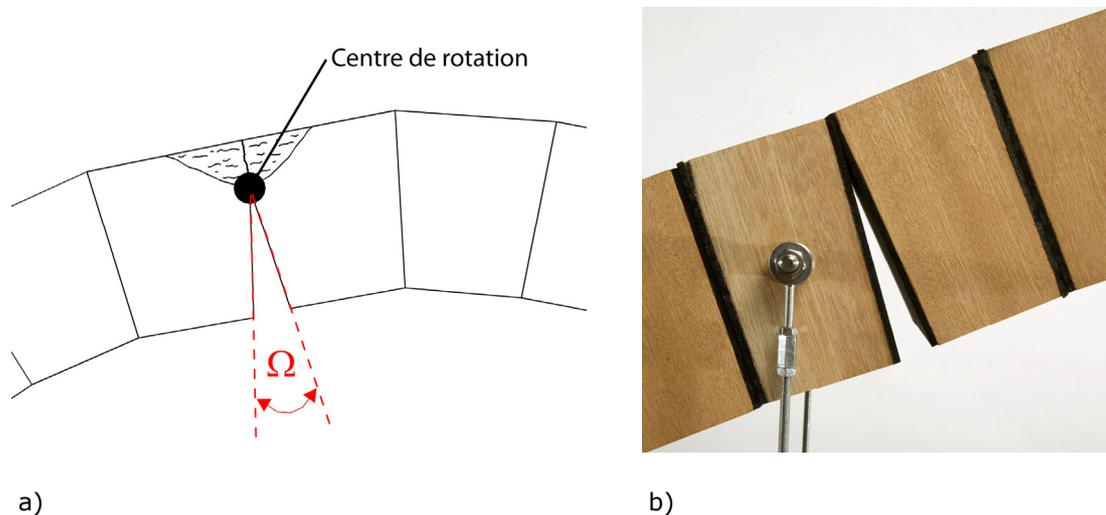


Figure 5.5 : a) Schéma de la rotule formée, b) Modélisation de la rotule sur maquette

## 5.2. Calcul des efforts intérieurs

### 5.2.1. Courbe contrainte – déformation admise

Comme démontré au chapitre 4, les facteurs influençant l'allure de la courbe contrainte – déformation de la maçonnerie, admise homogène, sont nombreux et l'établissement d'une loi constitutive appropriée pour le type de matériau

considéré nécessite soit une modélisation numérique détaillée, soit l'extrapolation de courbes contrainte – déformation existantes.

Quelle que soit la manière choisie pour l'établir, la loi constitutive représentant le comportement de la maçonnerie doit pouvoir être exprimée par une relation simple, facilitant ainsi le calcul intégral nécessaire à l'analyse des efforts sollicitant la section. Il est ici admis que les courbes contrainte – déformation représentatives du comportement des différents types de maçonnerie peuvent être approximées par une équation parabolique telle que :

$$\sigma = \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon \quad (5.1)$$

Le terme constant de la parabole est d'emblée considéré comme nul, la courbe passant nécessairement par l'origine. Sur la base de résultats proposés dans la littérature pour la maçonnerie de brique [5.4] et d'observations effectuées sur le béton, il est en outre admis que la courbe se prolonge dans la phase post-pic jusqu'à une déformation égale à 1.5 fois la déformation correspondant à la contrainte maximale (figure 5.6).

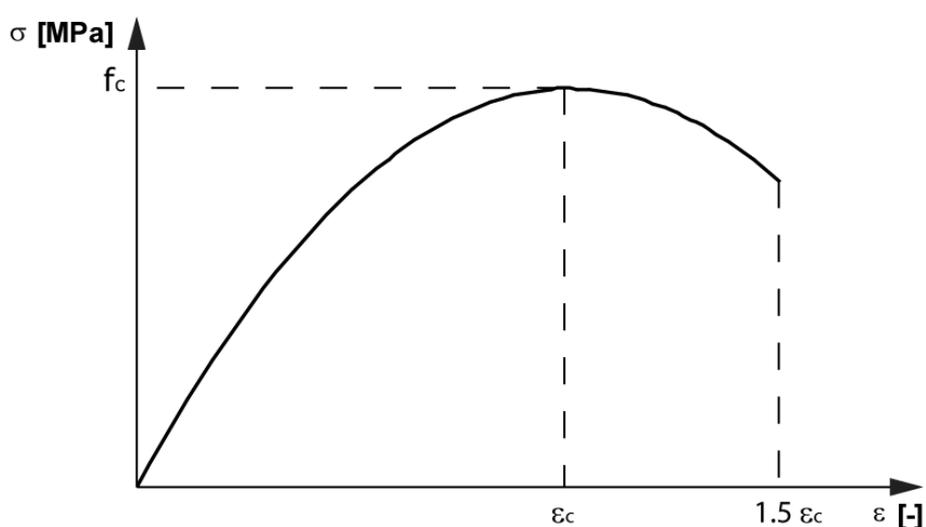


Figure 5.6 : Courbe contrainte – déformation type admise

### 5.2.2. Etat de contrainte lors de la formation de la rotule

La connaissance de la loi constitutive pour la maçonnerie en compression simple permet la déduction de l'ensemble des états de contrainte satisfaisant les conditions de résistance imposées par le matériau et la géométrie de la section. Une telle opération nécessite néanmoins l'admission de l'hypothèse de linéarité des déformations sur la section (hypothèse de Navier – Bernoulli), dont la validité n'est pas reconnue pour des éléments fortement courbés. Ce postulat est donc sujet à caution dans le cas d'arcs dont le tracé d'intrados s'approche de celui du plein cintre. Il peut cependant être admis que l'influence de l'imprécision induite sur le résultat final, soit les conditions de formation de la rotule, reste faible, et l'hypothèse de Navier – Bernoulli est par conséquent conservée, dans tous les cas.

Il est par ailleurs admis que la résistance en traction de la maçonnerie est nulle. Les développements présentés dans ce chapitre s'inspirent de ceux publiés par Taylor & Mallinder pour une maçonnerie de brique [5.4].

Deux cas sont à distinguer, selon que la section est fissurée suite à l'application d'une sollicitation impliquant la naissance d'efforts de traction, ou que la section

est encore entièrement comprimée. Par souci de clarté, le développement des calculs n'est pas présenté ici mais peut être consulté en annexe 6.

Remarquons enfin que le respect des conditions de signe implique que les contraintes et déformations de compression sont **négatives**.

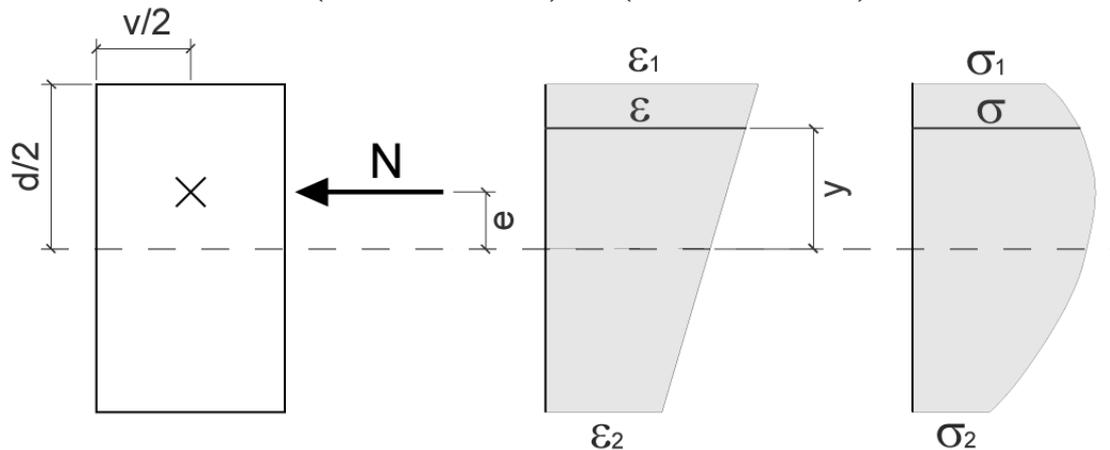
**Section non fissurée**

Soit une section de maçonnerie rectangulaire de dimensions  $v$  sur  $d$ , sollicitée par un effort de flexion composée, équivalent à un effort normal  $N$  excentré d'une distance  $e$  par rapport à l'axe de la section.

Il résulte de cette sollicitation un état de contrainte et de déformation représenté respectivement par les variables  $\varepsilon$  et  $\sigma$ ,  $y$  désignant la position de la contrainte ou déformation considérée par rapport à l'axe de la section. Relativement au moment de flexion, l'effort normal appliqué est suffisant pour maintenir la section entièrement en compression et par conséquent non fissurée. Les déformations et contraintes aux fibres extrêmes sont désignées par  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\sigma_1, \sigma_2$  (figure 5.7).

La première étape du raisonnement consiste en la réécriture de la loi constitutive, initialement exprimée par rapport à la déformation  $\varepsilon$ , en fonction des déformations extrêmes  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , et de la géométrie de la section.

$$\sigma = \alpha \left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{y(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{d} \right)^2 + \beta \left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{y(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{d} \right) \tag{5.2}$$



$d$	[m]	Hauteur de la section
$v$	[m]	Largeur de la section
$N$	[kN]	Effort normal
$\varepsilon$	[-]	Déformation
$\varepsilon_1$	[-]	Déformation à la fibre extrême supérieure
$\varepsilon_2$	[-]	Déformation à la fibre extrême inférieure
$\sigma_1$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Contrainte à la fibre extrême supérieure
$\sigma_2$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Contrainte à la fibre extrême inférieure
$y$	[m]	Distance séparant la variable considérée de l'axe central de la section

Figure 5.7 : Etat de contrainte et de déformation dans la section non fissurée

Les déformations aux fibres extrêmes de la section,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , sont bornées d'une part par la déformation limite du matériau ( $1.5 \varepsilon_c$ , figure 5.6) et d'autre part par le fait qu'elles doivent rester négatives. Par ailleurs, suite au sens du moment de flexion admis, la déformation  $\varepsilon_2$  doit demeurer inférieure à  $\varepsilon_1$ , en valeur absolue.

$$\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 \geq 1.5 \varepsilon_c \tag{5.3}$$

$$0 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 \tag{5.4}$$

L'intégration sur la hauteur de la section, de l'expression de la contrainte établie ci-dessus (équation (5.2)), puis de cette dernière multipliée par la distance  $y$ , fournit les relations permettant de calculer les couples effort normal – moment de flexion admissibles pour une telle section non fissurée, et réalisée dans une maçonnerie dont le comportement en compression est exprimé par la loi constitutive initialement admise.

$$N = \int_{-d/2}^{d/2} \sigma(y) v dy = \frac{1}{6} vd (2\alpha\varepsilon_1^2 + 3\beta\varepsilon_1 + 2\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2 + 3\beta\varepsilon_2 + 2\alpha\varepsilon_2^2) \quad (5.5)$$

$$M = \int_{-d/2}^{d/2} \sigma(y) y v dy = \frac{1}{12} vd^2 (\alpha\varepsilon_1^2 - \alpha\varepsilon_2^2 + \beta\varepsilon_1 - \beta\varepsilon_2) \quad (5.6)$$

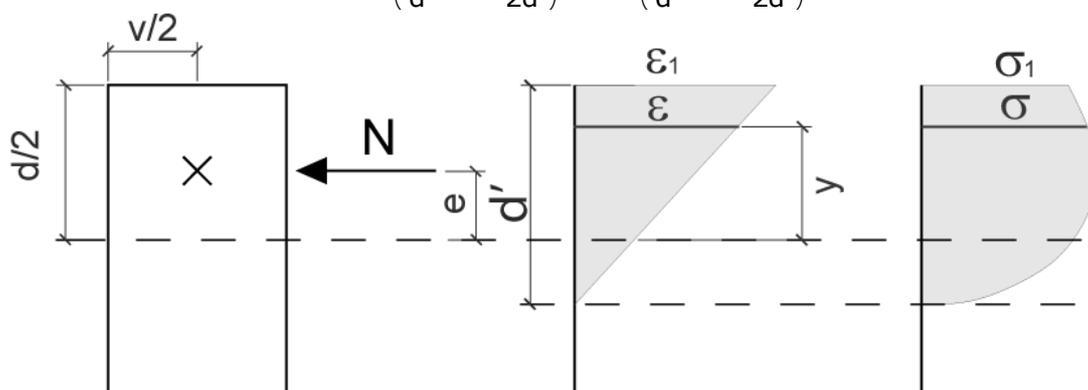
### Section fissurée

Soit la même section de maçonnerie, toujours sollicitée par un effort de flexion composée, équivalent à un effort normal  $N$  excentré d'une distance  $e$  par rapport à l'axe de la section.

Il résulte de cette sollicitation un nouvel état de contrainte et de déformation représenté respectivement par les variables  $\sigma$  et  $\varepsilon$ ,  $y$  désignant la position de la contrainte ou déformation considérée par rapport à l'axe de la section. Relativement au moment de flexion, l'effort normal appliqué est, cette fois, insuffisant pour maintenir la section entièrement en compression et cette dernière est partiellement fissurée. Les déformation et contrainte de compression à la fibre extrême sont toujours désignées respectivement par  $\varepsilon_1$  et  $\sigma_1$ , tandis que la hauteur résiduelle de la section est dénommée  $d'$  (figure 5.8).

La loi constitutive peut être réécrite, mais en fonction de  $\varepsilon_1$ ,  $d'$  et de la géométrie de la section, cette fois.

$$\sigma = \alpha\varepsilon_1^2 \left( \frac{y}{d'} + 1 - \frac{d}{2d'} \right)^2 + \beta\varepsilon_1 \left( \frac{y}{d'} + 1 - \frac{d}{2d'} \right) \quad (5.7)$$



$d$	[m]	Hauteur de la section
$v$	[m]	Largeur de la section
$N$	[kN]	Effort normal
$\varepsilon$	[-]	Déformation
$\varepsilon_1$	[-]	Déformation à la fibre extrême supérieure
$\varepsilon_2$	[-]	Déformation à la fibre extrême inférieure
$\sigma_1$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Contrainte à la fibre extrême supérieure
$d'$	[m]	Hauteur de la section résiduelle
$y$	[m]	Distance séparant la variable considérée de l'axe central de la section

Figure 5.8 : État de contrainte et de déformation dans la section fissurée

La déformation à la fibre extrême,  $\varepsilon_1$ , est bornée par la déformation limite du matériau ( $1.5 \varepsilon_c$ , figure 5.6) et par le fait qu'elle doit rester négative, tandis que la hauteur résiduelle  $d'$  est limitée par la hauteur initiale de la section et par le fait qu'elle doit demeurer positive.

$$0 \geq \varepsilon_1 \geq 1.5 \varepsilon_c \quad (5.8)$$

$$0 \leq d' \leq d \quad (5.9)$$

L'intégration sur la hauteur résiduelle de l'expression de la contrainte établie ci-dessus (équation (5.7)), puis de cette dernière multipliée par la distance  $y$ , fournit les relations permettant de calculer les couples effort normal – moment de flexion admissibles pour une telle section fissurée, et réalisée dans une maçonnerie dont le comportement en compression est exprimé par la loi constitutive initialement admise.

$$N = \int_{d/2-d'}^{d/2} \sigma(y) v dy = \frac{1}{6} v \varepsilon_1 d' (2\alpha \varepsilon_1 + 3\beta) \quad (5.10)$$

$$M = \int_{d/2-d'}^{d/2} \sigma(y) y v dy = \frac{1}{12} v \varepsilon_1 d' (2\alpha \varepsilon_1 d + 3d\beta - \alpha \varepsilon_1 d' - 2\beta d') \quad (5.11)$$

**Remarque concernant la convention de signe**

Comme précédemment mentionné, les contraintes de compression représentées ici sont, selon la convention usuelle en mécanique des structures, admises négatives. Dans les équations (5.6) et (5.11), la multiplication de cette contrainte négative par la distance  $y$ , positive selon les figures 5.7 et 5.8, conduit à la détermination d'un moment de flexion qui serait alors de signe négatif. Or, selon la convention de signe usuelle (figure 5.9 (a)), un tel moment, appliqué sur une face dite positive, devrait être de signe positif ! Les hypothèses émises impliquent par conséquent de modifier la convention de signe habituellement admise en inversant le sens du moment considéré comme positif (figure 5.9 (b)).

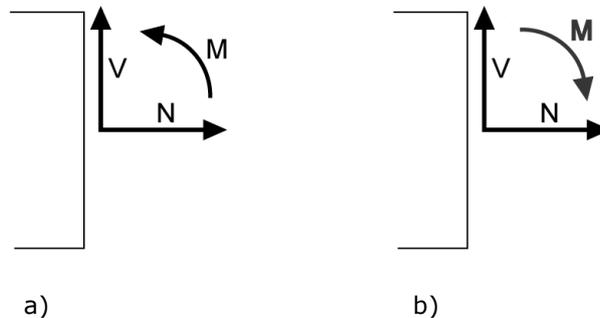


Figure 5.9 : a) Convention de signe usuelle, b) Convention de signe adoptée ici

**5.2.3. Diagramme d'interaction**

Ainsi, chaque couple  $(\varepsilon_1; \varepsilon_2)$ , respectivement  $(\varepsilon_1; d')$ , induit un couple effort normal  $N$  - moment de flexion  $M$  auquel la section donnée, réalisée dans le matériau considéré, peut être soumise sans que les conditions limites de résistance ne soient violées. Il existe une infinité de ces couples qui, lorsqu'ils sont représentés dans un diagramme d'interaction  $M - N$ , forment une surface telle que celle représentée sur la figure 5.10. Les points marqués par de petits traits bleus y représentent le domaine des couples satisfaisant les conditions de résistance de la section dans le domaine non fissuré, alors que les carrés orange sont ceux correspondant au domaine fissuré.

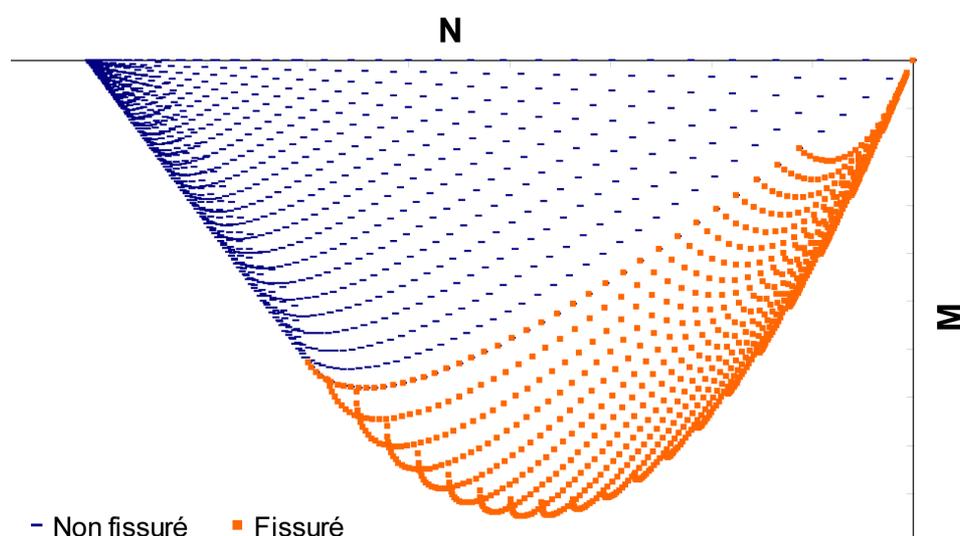


Figure 5.10 : Diagramme d'interaction  $M - N$  type pour une section rectangulaire de maçonnerie. Les traits bleus représentent des couples  $M - N$  relatifs à une section non fissurée, alors que les carrés orange correspondent à une section fissurée.

L'application rigoureuse des formules développées ci-dessus conduit cependant à quelques incohérences. La phase post-pic du comportement du matériau implique en effet une diminution de la contrainte  $\sigma_1$  après que celle-ci a atteint la résistance maximale du matériau, et ce alors que la déformation continue d'augmenter. A l'extrême, cette diminution peut être suffisante pour que la contrainte  $\sigma_1$  devienne inférieure à  $\sigma_2$ , en valeur absolue. Cette situation est exclue par hypothèse, car elle impliquerait une inversion du signe du moment de flexion. Les quelques points correspondant à ce cas, et s'affichant avec un moment de flexion de signe opposé aux autres, ont par conséquent été retirés du diagramme d'interaction présenté à la figure 5.10.

Une seconde incohérence, également due à la phase post-pic de la courbe contrainte - déformation, est visible sous la forme de quelques points, établis sur la base des formules pour le domaine fissuré, qui se retrouvent dans la zone graphique du domaine non fissuré. Il va sans dire qu'une diminution de la contrainte, bien que permettant une fermeture de la fissure, ne peut faire repasser une section fissurée dans le domaine non fissuré. Les points correspondant ont par conséquent été supprimés du diagramme d'interaction présenté à la figure 5.10.

L'enveloppe des points de la surface d'interaction représente les couples  $M - N$  limites pour lesquels les conditions de résistance pour la section et le matériau considérés sont encore satisfaites. Cette enveloppe, désormais dénommée courbe d'interaction, peut être décrite par deux équations, relatives respectivement aux domaines non fissuré et fissuré. Ces relations peuvent être obtenues en effectuant dans un premier temps un changement de variable, permettant d'éliminer par exemple  $\varepsilon_1$ , respectivement  $\varepsilon_2$  pour la section fissurée, et d'établir une unique équation liant  $M$ ,  $N$  et la variable restante (équations (5.12) et (5.14)). La dérivation de cette relation par rapport à la variable restante permet ensuite d'obtenir une équation liant  $M$  et  $N$  lorsque la variable est maximale, ce qui correspond aux cas limites cherchés (équations (5.13) et (5.15)).

Par souci de lisibilité, le développement des calculs n'est pas présenté ici, mais peut être consultés en annexe 7.

Section non fissurée :

$$\left. \begin{aligned} N = \text{fct}(\varepsilon_1; \varepsilon_2) &\Rightarrow \varepsilon_1 = \text{fct}(N; \varepsilon_2) \\ M = \text{fct}(\varepsilon_1; \varepsilon_2) &\end{aligned} \right\} M = \text{fct}(N; \varepsilon_2) \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_2} = 0 \Rightarrow M = \text{fct}(N) \quad (5.13)$$

Section fissurée :

$$\left. \begin{aligned} N = \text{fct}(\varepsilon_1; d') &\Rightarrow d' = \text{fct}(N; \varepsilon_1) \\ M = \text{fct}(\varepsilon_1; d') &\end{aligned} \right\} M = \text{fct}(N; \varepsilon_1) \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_1} = 0 \Rightarrow M = \text{fct}(N) \quad (5.15)$$

Dans le cas de la section non fissurée, le changement de variable proposé n'est qu'indicatif et l'isolement de la variable  $\varepsilon_1$  au lieu de  $\varepsilon_2$  conduit au même résultat. La solution proposée est cependant celle offrant le plus de facilité. Dans le cas d'une section fissurée, par contre, le changement de variable inverse à celui proposé conduit à une singularité et à l'impossibilité de poursuivre le calcul.

Les expressions finales obtenues pour la courbe d'interaction sont résumées ci-dessous, respectivement pour une section non fissurée (équation (5.16)) et fissurée (équation (5.17)). Comme prévu, elles permettent de tracer l'enveloppe des points représentant les couples  $M - N$  respectant les conditions de résistance pour la section et le matériau considérés (figure 5.11).

Section non fissurée :

$$M = \frac{-1}{24} 3^{1/2} d \frac{4\alpha N + d v \beta^2}{\alpha} \quad (5.16)$$

Section fissurée :

$$M = \frac{1}{2} N \frac{-3d\beta^2 v + 3^{1/2}\beta^2 d v - 2\alpha N - 2 \cdot 3^{1/2} \alpha N}{\beta^2 v (-3 + 3^{1/2})} \quad (5.17)$$

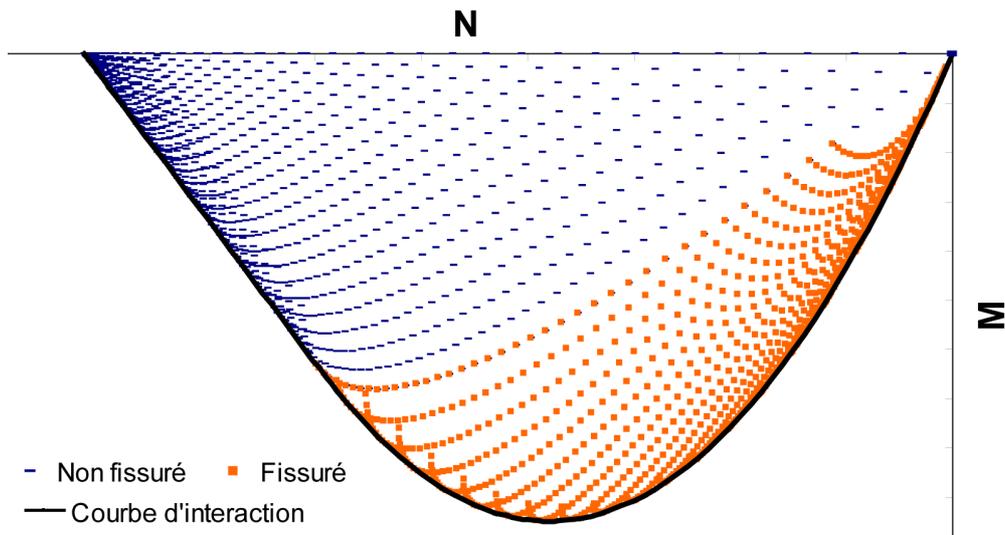


Figure 5.11 : Courbe d'interaction type pour une section rectangulaire de maçonnerie

Un diagramme symétrique par rapport à l'axe horizontal, correspondant à l'application d'un moment de flexion de signe inverse peut être tracé de la même manière. Suivant les applications, il peut en outre être judicieux de normaliser le

digramme d'interaction par rapport à l'effort normal et au moment de flexion maximums.

### 5.2.4. Points caractéristiques de la courbe d'interaction

La courbe d'interaction précédemment définie comprend, outre l'origine, trois points caractéristiques, dont les coordonnées peuvent être déterminées analytiquement.

Toujours par souci de clarté, le détail des calculs n'est pas présenté ici, mais peut être consulté en annexe 8.

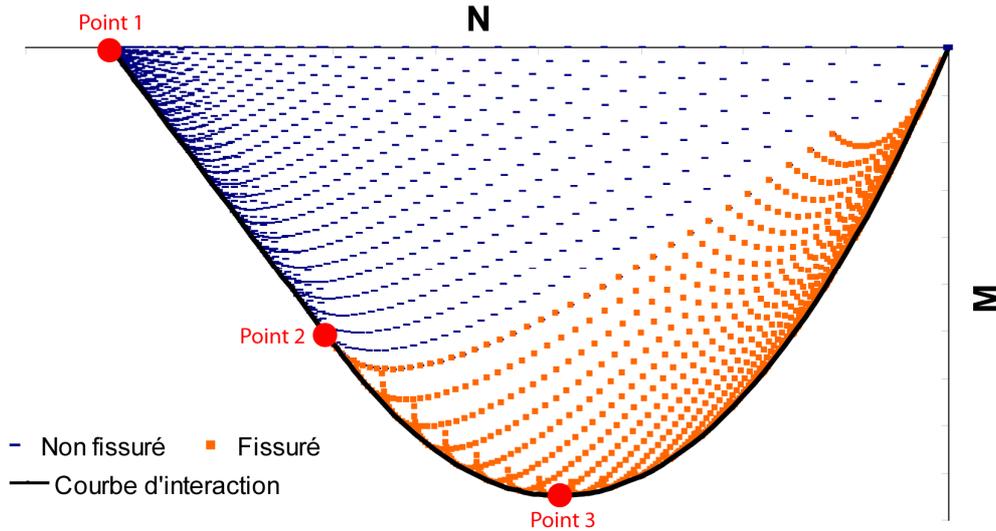


Figure 5.12 : Points caractéristiques de la courbe d'interaction

Le premier point caractéristique étudié (figure 5.12) correspond à l'effort normal maximal que la section peut supporter, soit correspondant à l'application d'un moment de flexion nul. La valeur de cet effort normal peut être déterminée grâce à la relation liant  $M$  et  $N$  pour une section non fissurée développée précédemment (équation (5.16)) et en admettant un moment de flexion égal à zéro (annexe 8).

$$N = -\frac{dv\beta^2}{4\alpha} \quad (5.18)$$

Le second point caractéristique examiné (figure 5.12) est celui délimitant les domaines fissuré et non fissuré de la courbe d'interaction. Dans un premier temps, la courbe séparant ces deux domaines peut être établie, en posant  $\varepsilon_2 = 0$  dans les équations permettant d'établir l'effort normal (équation (5.10)) et le moment de flexion (équation (5.11)) pour une section fissurée, puis en éliminant la variable  $\varepsilon_1$  (annexe 8).

$$M = \frac{1}{96}d \frac{3vd\beta^2 - \beta(9d^2v^2\beta^2 + 48dv\alpha N)^{1/2} + 24\alpha N}{\alpha} \quad (5.19)$$

L'intersection de cette courbe avec la courbe d'interaction (domaine fissuré (équation (5.16)) ou non fissuré (équation (5.17))) précédemment déterminée donne le point cherché (annexe 8).

$$N = \frac{-1}{4}dv\beta^2 \frac{-1 + 3^{1/2}}{\alpha} \quad (5.20)$$

$$M = \frac{1}{24}d^2v\beta^2(-2 + 3^{1/2})\frac{3^{1/2}}{\alpha} \quad (5.21)$$

Le troisième point caractéristique examiné (figure 5.12) correspond au sommet de la courbe d'interaction et représente le moment de flexion maximal qui peut être repris par la section. La formulation de ce dernier peut être obtenue par dérivation par rapport à  $N$  de l'équation de la courbe d'interaction pour le domaine fissuré (équation (5.17)) (annexe 8).

$$N = \frac{1}{4} v d \beta^2 \frac{-3 + 3^{1/2}}{\alpha (1 + 3^{1/2})} \quad (5.22)$$

$$M = \frac{1}{16} (-3 + 3^{1/2}) \beta^2 v \frac{d^2}{(1 + 3^{1/2}) \alpha} \quad (5.23)$$

Les valeurs du moment de flexion et de l'effort normal maximums ainsi déterminés permettent de normaliser respectivement les axes des ordonnées et des abscisses du diagramme d'interaction.

### 5.2.5. Comparaison avec d'autres modèles de comportement du matériau

La représentation sous forme de diagramme d'interaction permet de comparer les incidences de la considération de modèles de comportement simplifiés sur les efforts admissibles par la section étudiée. Deux de ces modèles sont encore fréquemment utilisés pour caractériser la maçonnerie. Il s'agit de la prise en compte d'un comportement élastique linéaire du matériau dans un premier cas et rigide plastique, associé à un stress-block en compression, dans un second cas.

#### 5.2.5.1. Comportement élastique linéaire

La considération d'un comportement élastique linéaire pour la maçonnerie, limité par une valeur de résistance en compression,  $f_c$  (figure 5.13), implique une rupture de la section déterminée par l'écrasement en compression de la fibre extrême. L'allure des déformations et contraintes sur la section est triangulaire (figure 5.14). Selon l'importance du moment de flexion par rapport à l'effort normal, la section peut avoir été soumise à une traction, et donc être partiellement fissurée, ou à l'inverse demeurer intacte.

Le développement complet des calculs peut être consulté en annexe 9.

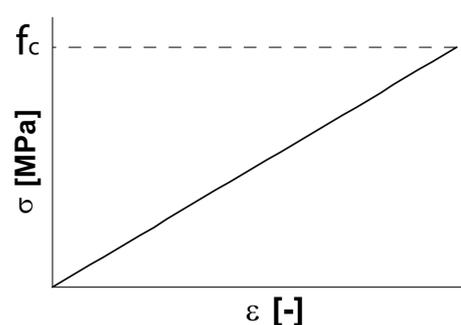


Figure 5.13 : Courbe contrainte – déformation élastique linéaire type

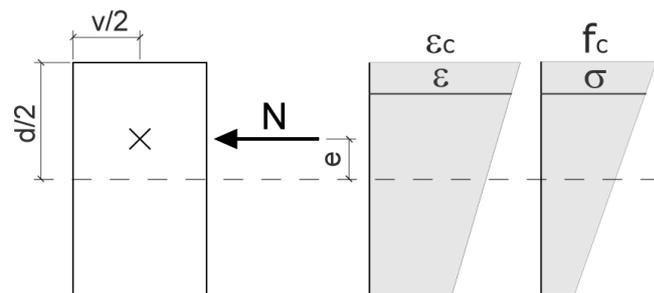


Figure 5.14 : Etat de contrainte et de déformation élastique linéaire

Une relation liant le moment de flexion à l'effort normal peut être établie sur la base de l'expression de la contrainte de compression maximale, résultant de la superposition de la sollicitation due à l'effort normal et de celle due au moment de flexion, égalée à la résistance en compression du matériau (annexe 9).

$$M = \frac{(f_c v d - N) d}{6} \quad (5.24)$$

Le domaine non fissuré est alors limité d'un côté par l'effort normal correspondant à l'application d'un moment de flexion nul, situation équivalente au cas précédemment évoqué (équation (5.18)), et, de l'autre côté, par l'effort normal correspondant à une contrainte  $\sigma_2$  égale à zéro et à la règle du tiers central. Les coordonnées du point limitant les portions fissurée et non fissurée de la courbe d'interaction peuvent ainsi être déterminées.

$$N = \frac{f_c v d}{2} \quad (5.25)$$

$$M = \frac{f_c v d}{6} \quad (5.26)$$

Un raisonnement similaire à celui conduisant à l'équation (5.24) peut être appliqué au cas fissuré, en tenant compte d'une hauteur de section efficace réduite. Ainsi, comme précédemment, la superposition des contraintes dues à l'effort normal et au moment de flexion, égalée à la résistance en compression, fournit une relation liant les deux types d'effort sollicitant la section (annexe 9).

$$M = \frac{dN}{2} - \frac{2N^2}{3v f_c} \quad (5.27)$$

Les coordonnées du sommet de la courbe d'interaction peuvent être obtenues par la dérivation de l'expression ci-dessus (équation (5.27)) par rapport à l'effort normal  $N$ .

$$N = \frac{3d v f_c}{8} \quad (5.28)$$

$$M = \frac{3d^2 v f_c}{32} \quad (5.29)$$

La représentation graphique de la courbe d'interaction est illustrée sur la figure 5.17.

### 5.2.5.2. Comportement rigide plastique avec stress-block

Le comportement de la maçonnerie est parfois représenté par une loi constitutive du type rigide plastique (figure 5.15), associée à un stress-block en compression (figure 5.16).

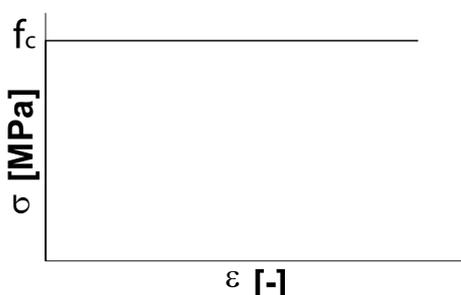


Figure 5.15 : Courbe contrainte – déformation rigide plastique type pour la maçonnerie en compression

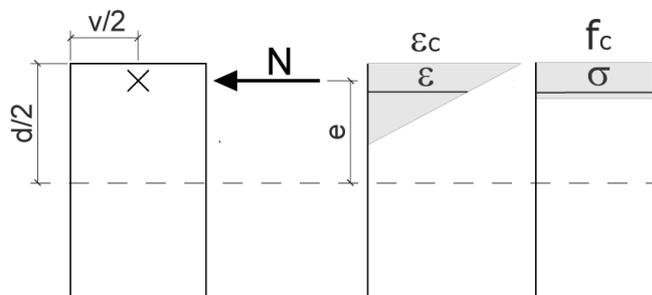


Figure 5.16 : Etat de contrainte et de déformation avec stress-block en compression

Cette représentation n'implique plus de distinction entre les domaines fissuré et non fissuré, la position de l'effort normal excentré dictant seule le moment de flexion auquel la section peut résister (annexe 9).

$$M = N \left( \frac{d}{2} - \frac{N}{2f_c v} \right) \quad (5.30)$$

Cette courbe indique, pour toute valeur de l'effort normal  $N$ , le moment de flexion limite auquel la section considérée est apte à résister. Les coordonnées de son sommet peuvent être déterminées par la dérivation de l'expression ci-dessus (équation (5.30)) par rapport à  $N$ .

$$N = \frac{d v f_c}{2} \quad (5.31)$$

$$M = \frac{d^2 v f_c}{8} \quad (5.32)$$

La représentation graphique de cette relation est illustrée sur la figure 5.17. Cette dernière permet d'évaluer l'influence du comportement du matériau admis sur la résistance en section calculée. Elle révèle que la considération d'un comportement élastique linéaire pour la maçonnerie conduit à un résultat beaucoup trop pessimiste, alors que la prise en compte d'une loi constitutive rigide-plastique, associée à un stress-block en compression surestime la résistance en section. Située entre ces deux cas extrêmes, la courbe résultant du comportement de la maçonnerie admis dans cette étude offre la possibilité de considérer au mieux les propriétés réelles du matériau.

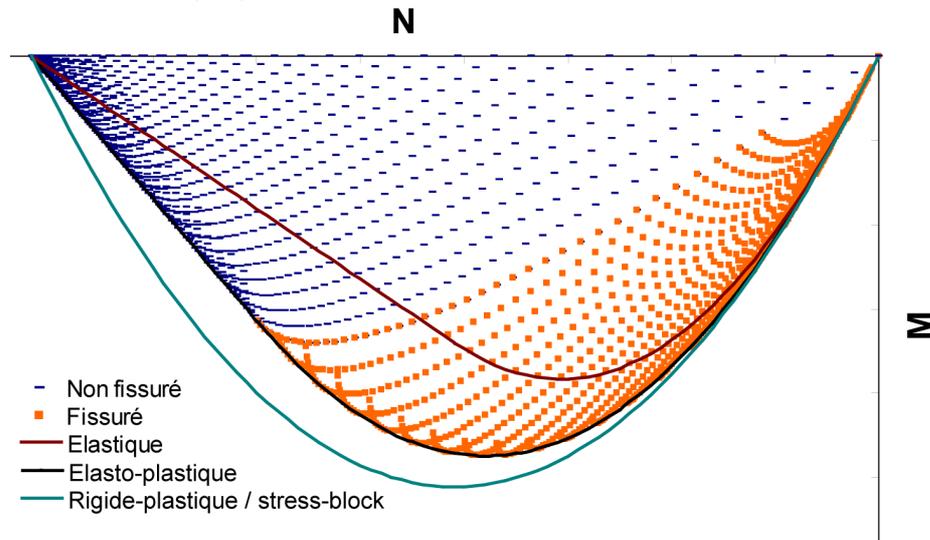


Figure 5.17 : Comparaison des courbes d'interaction obtenues avec différents modèles de comportement du matériau

### 5.3. Conclusions

L'arc est une structure hyperstatique dont la ruine nécessite la plastification locale de plusieurs sections. Dans le cas d'un arc en maçonnerie de pierre naturelle, une telle plastification prend la forme d'une rotule, qui naît suite à l'apparition conjointe d'une fissure de traction et d'une zone écrasée en compression. Cette rotule agit alors structurellement comme une articulation parfaite et ne présente ainsi plus aucune aptitude à la reprise d'un effort de flexion, tout en offrant une capacité de rotation admise illimitée. Un déchargement de la structure, impliquant en particulier une diminution de l'effort de flexion, induit la fermeture

de la fissure et la formation de la rotule peut ainsi être considérée comme pratiquement réversible.

La connaissance de la courbe contrainte – déformation pour la maçonnerie, considérée comme un matériau homogène, permet de déterminer l'ensemble des états de contrainte et de déformation provoquant la ruine d'une section donnée, et d'ainsi en déduire la courbe d'interaction moment de flexion – effort normal correspondante. Cette dernière représente la résistance d'une section donnée et permet de cerner l'influence des hypothèses émises concernant le comportement du matériau.

#### **5.4. Références**

- [5.1] Heyman J. (1969) *The safety of masonry arches*, Int. J. Mech. Sci., vol. 11, pp. 363-385.
- [5.2] Jagfeld M., Barthel R. (2004) *Zur Gelenkbildung in historischen Tragsystemen aus Mauerwerk*, Bautechnik 81, Heft 2, pp. 96-102.
- [5.3] Taylor N., Mallinder P. (1993) *The brittle hinge in masonry arch mechanisms*, The structural Engineer, vol. 71, n° 20, pp. 359-366.
- [5.4] Taylor N., Mallinder P. A. (1987) *On the limit state properties of masonry*, Proc. Instn. Civ. Engrs, Part 2, 83, pp. 33-41.

#### **5.5. Références complémentaires <sup>7</sup>**

- [5.5] Heyman J. (1966) *The stone skeleton*, Int. J. Solids Structures, vol. 2, pp. 269-279.
- [5.6] Heyman J. (1982) *The masonry arch*, Ellis Horwood Series in Engineering Science, Chichester, 117 p.
- [5.7] Heyman J. (1993) *The Collapse of Stone Vaulting*, Structural Repair and Maintenance of Historical Buildings III, C.A. Brebbia and R.J.B. Frewer Ed. Southampton: computational mechanics publications, pp. 327-338.
- [5.8] Huerta S. (2005) *The use of simple models in the teaching of the essentials of masonry arch behaviour*, International Seminar, Theory and practice of construction: knowledge, means, models, Didactic and research experiences, vol. 2, Mochi (ed.), pp. 747-761.
- [5.9] Ochsendorf J. A. (2006) *The masonry arch on spreading supports*, The Structural Engineer, vol. 84, n°2 pp. 29-35.

---

<sup>7</sup> Bien que non citées dans le texte, les références dites complémentaires sont susceptibles d'apporter un supplément d'information au lecteur.

## 6. Etude au macro-niveau – Capacité portante de l'arc

L'étude au macro-niveau présentée dans ce chapitre s'attache à la compréhension de l'arc en maçonnerie de pierre naturelle, en tant qu'élément structurel dont le matériau constitutif et la ruine locale ont été examinés respectivement aux chapitres concernant le micro- et le méso-niveau. Basé sur le théorème cinématique de la plasticité, le modèle suggéré ici considère le mode de ruine le plus probable de l'arc et exploite les principes de l'équilibre afin d'en déduire la capacité portante.

Ce chapitre débute par l'énoncé des hypothèses nécessaires à l'application du modèle considéré. Il se poursuit par quelques indications relatives au relevé de la géométrie de la structure, puis expose le développement des calculs préliminaires nécessaires, concernant notamment les charges permanentes et la poussée latérale exercée par le matériau de remplissage. Viennent ensuite la présentation du modèle de charge admis, puis celle des conclusions concernant la capacité portante de l'arc que le modèle permet d'établir.

### 6.1. Principe et hypothèses

L'énoncé d'un certain nombre d'hypothèses est nécessaire à l'application du modèle développé ici. En premier lieu, il est admis que l'arc est un élément structurel bi-encasté, présentant par conséquent un degré d'hyperstaticité égal à trois (figure 6.1). Bien qu'apparemment évidente, cette hypothèse est fréquemment remise en question, notamment par Heyman [6.1 ; 6.2], qui considère qu'en raison d'un inévitable mouvement latéral des appuis suite à la poussée horizontale générée subitement lors du décintrement, l'arc peut être considéré comme une structure tri-articulée et donc isostatique. Un tel système statique est sans aucun doute justifié dans le cas d'un arc mis en œuvre dans un bâtiment, où l'élanement des appuis autorise un déplacement non négligeable des naissances. Ainsi, les arcs couvrant la nef et les bas-côtés, ou encore ceux dits formerets d'une église, présentent souvent une rotule, dont l'ouverture à l'intrados est visible aux alentours de la clé de voûte (figure 6.2 (a)). Lorsqu'ils agissent en tant qu'éléments porteurs au sein d'un pont, les arcs sont, par contre, supportés par des culées massives qui offrent une résistance à la poussée horizontale bien meilleure que celle présentée par les supports d'un arc de bâtiment (figure 6.2 (b)). Ainsi, bien qu'un certain mouvement de l'arc lors du décintrement ne puisse être totalement exclu, il est postulé que dans le cas des ponts, celui-ci ne provoquera qu'une fissuration locale et non l'apparition complète de rotules, qui par ailleurs serait accompagnée d'une déformation non négligeable de l'arc et donc forcément détectable à l'œil nu (voir chapitre 10). Il est dès lors admis que l'état naturel d'un pont à considérer pour l'analyse structurelle est celui correspondant à un système statique bi-encasté, une fissuration étant considérée comme un dommage local, dont il sera tenu compte dans les développements exposés au chapitre 9.

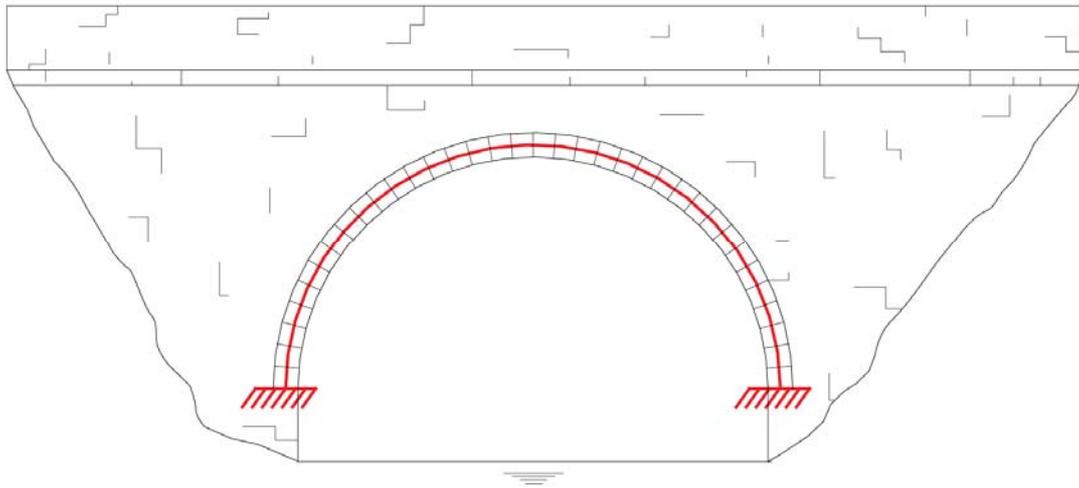
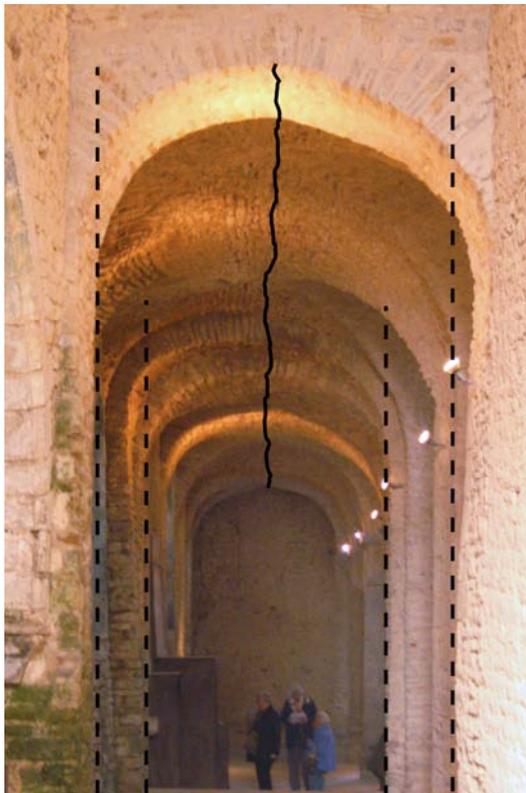
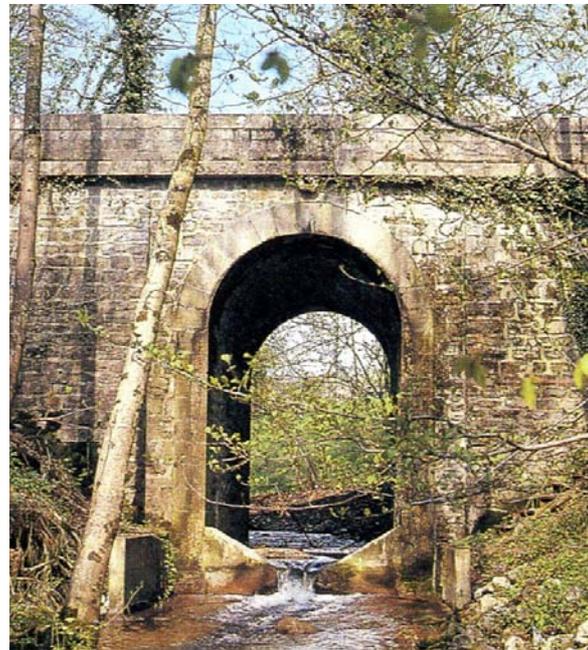


Figure 6.1 : Système statique admis



a)



b)

Figure 6.2 : a) Arc déformé suite au déplacement de ses appuis dans une église, b) Arc de pont, non déformé [6.3]

Souvent observée, tant en laboratoire [6.4] que lors d'essais sur des ouvrages existant [6.5], la ruine de l'arc par la formation d'un mécanisme à quatre rotules est l'unique mode de rupture considéré dans le modèle présenté ici (figure 6.3). Il est en outre admis que seul l'établissement d'un état de sollicitation représenté sur la courbe d'interaction établie lors de l'étude au méso-niveau et correspondant à la section et au matériau considéré, permet la formation d'une rotule.

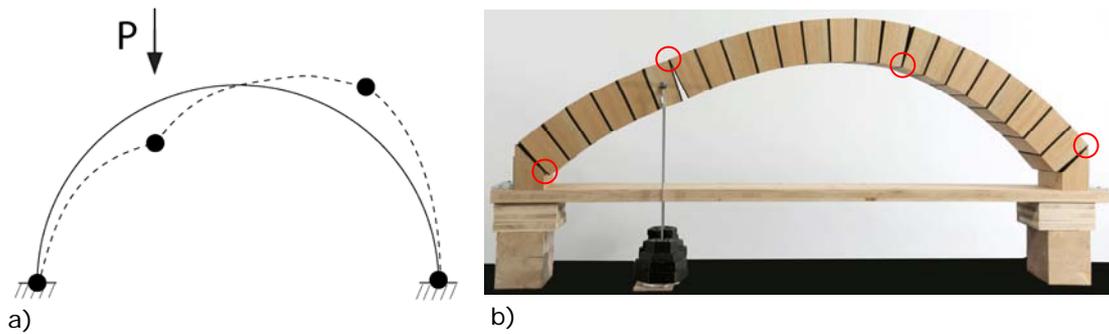


Figure 6.3 : a) Mécanisme de ruine à quatre rotules schématisé, b) Mécanisme de ruine à quatre rotules illustré sur une maquette

Au vu du faible effort normal impliqué dans ce type de structures, une rupture par compression peut être d'emblée exclue. Un mode de rupture alternatif, dénommé « snap-through » en anglais impliquant une rupture brutale après la formation de trois rotules doit être envisagé et vérifié par une analyse complémentaire, mais n'est cependant possible que dans le cas d'arcs fortement surbaissés (voir chapitre 3).

Comme l'avait déjà noté Coulomb dans son mémoire sur la statique [6.6], la possibilité d'une rupture de l'arc suite à un glissement des voussoirs les uns par rapport aux autres est très peu probable et n'a, à notre connaissance, jamais été clairement identifiée dans le cas de la ruine de l'arc d'un pont. Ainsi, l'hypothèse stipulant que le frottement à l'interface entre les voussoirs ou entre un voussoir et un joint de mortier est suffisant pour empêcher tout glissement a été fréquemment adoptée depuis Coulomb. Il est par conséquent admis ici que la vérification de la résistance au cisaillement d'un arc peut s'effectuer simplement par l'attestation que le frottement de Coulomb mobilisé par la rugosité de l'interface bloc – mortier et par l'effort normal sollicitant l'arc est suffisant [6.7]. Cette vérification étant facilement effectuable de manière indépendante, elle n'est pas incorporée dans le modèle présenté ici.

Outre les modes de rupture impliquant uniquement l'arc présentés ci-dessus, une ruine induite par la rupture d'un autre élément du pont, tel que les culées, les piles ou encore les tympans, doit évidemment être examinée.

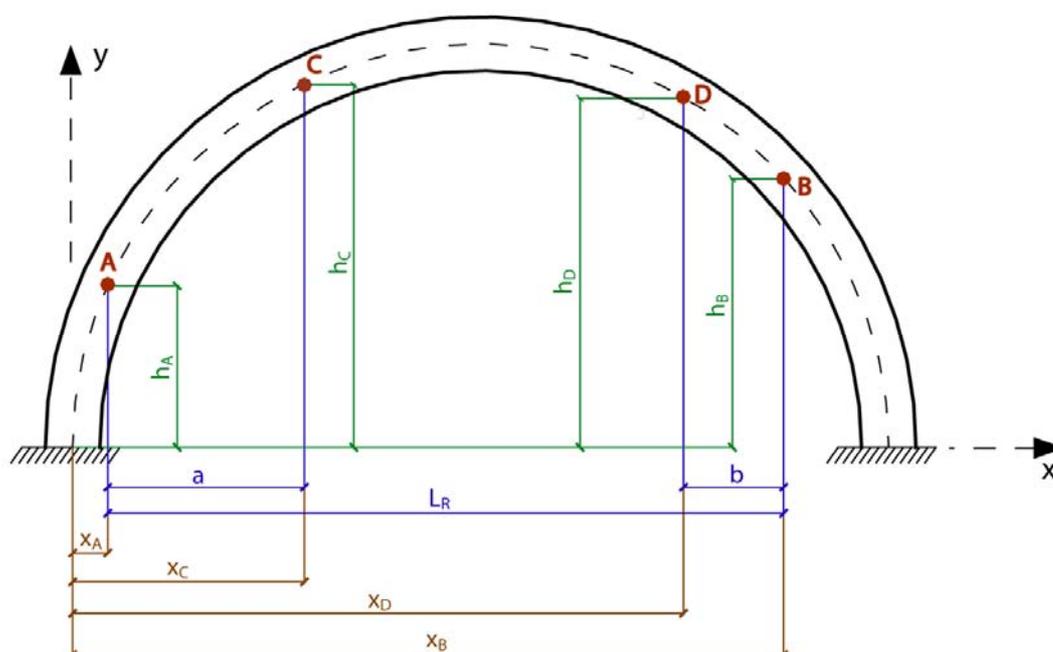
Finalement, l'hypothèse, habituelle en mécanique des structures, stipulant que les déplacements restent faibles est adoptée. Ainsi, en dépit du fait qu'il est reconnu qu'une certaine déformation de l'élément de structure est nécessaire à la formation complète du mécanisme de ruine (voir chapitre 10), ce postulat permet de considérer que la configuration déformée de l'arc à la ruine est égale à sa configuration initiale. Une comparaison des résultats obtenus avec un modèle tenant compte des grands déplacements permettrait néanmoins de confirmer cette hypothèse.

Il est donc admis que la ruine d'un arc en maçonnerie de pierre naturelle survient suite à l'apparition successive de rotules, conjointement avec l'augmentation de la charge, et ce jusqu'au nombre de quatre. Ces dernières se répartissent plus ou moins régulièrement le long de l'arc. Si l'ordre d'apparition de chacune d'entre elles semble dépendre de paramètres non maîtrisés à ce jour et diffère selon les cas référencés dans la littérature, il est cependant acquis que la première rotule se forme systématiquement sous la charge la plus ponctuelle [6.4 ; 6.7-6.9]. Remarquons que le cas théorique de l'apparition de cinq rotules à la ruine et correspondant à une structure et un chargement parfaitement symétriques est considéré comme totalement improbable dans un monde réel et par conséquent ignoré ici.

Le modèle présenté dans cette étude considère un arc bidimensionnel sur le point de se ruiner, comportant trois rotules  $A$ ,  $B$  et  $C$ , déjà formées et dont la position

est initialement admise et repérée par les coordonnées  $(x_i ; h_i)$  par rapport à la naissance gauche de l'arc, au niveau de son axe central (figure 6.4). De simples considérations d'équilibre sur la structure ainsi rendue isostatique permettent d'établir quelle sollicitation induira l'apparition de la quatrième rotule  $D$  et donc la ruine de l'élément structurel. Exprimée au moyen d'un multiplicateur des charges utiles, cette sollicitation représente une borne supérieure de la capacité portante de l'arc. Une itération sur la position des rotules permet de déterminer la valeur minimale, et donc critique, de ce multiplicateur.

Dans le cadre de cette étude, il sera en outre admis que la dernière rotule, synonyme de ruine de la structure, apparaît au rein opposé au chargement, appliqué au droit de la rotule  $C$ . Les rotules  $A$  et  $B$  ne se forment pas forcément exactement aux naissances, les portions d'arc séparant respectivement la naissance gauche de la rotule  $A$  et la rotule  $B$  de la naissance droite peuvent être ignorées au stade ultime car elles n'interviennent pas dans le mécanisme de ruine de la structure [6.10]. La distance séparant les rotules  $A$  et  $B$  est par conséquent dénommée « ouverture active » ( $L_R$ ) et remplace l'ouverture réelle dans les relations d'équilibre conduisant au calcul de la capacité portante de l'arc (figure 6.4).



A, B, C, D	[-]	Rotules
$x_A, h_A$	[m]	Coordonnées de la position de la rotule A
$x_C, h_C$	[m]	Coordonnées de la position de la rotule C
$x_D, h_D$	[m]	Coordonnées de la position de la rotule D
$x_B, h_B$	[m]	Coordonnées de la position de la rotule B
a	[m]	Distance séparant les rotules A et C
b	[m]	Distance séparant les rotules D et B
$L_R$	[m]	Ouverture active de l'arc

Figure 6.4 : Dénomination de la position des rotules

Par souci de simplification des calculs, il est considéré, dans l'étude au macro-niveau présentée ici, que les rotules se forment à l'axe de l'arc, et non pas alternativement à l'intrados et à l'extrados. La conséquence de cette simplification est la négligence d'une distance égale à la projection verticale de la demi-épaisseur de l'arc dans l'évaluation des différents bras de levier. Au regard des dimensions globales de l'arc, cette grandeur peut toutefois être considérée

comme faible et n'affectant par conséquent pas notablement les résultats obtenus.

Il est généralement reconnu que la présence des tympans apporte un effet positif sur la capacité portante de l'arc [6.11-6.13]. Toutefois, la poussée latérale exercée par le matériau de remplissage chargé a pour effet de désolidariser la partie centrale de l'arc de ses bords surmontés des tympans. Il en résulte la présence d'une ou deux fissures longitudinales que l'on peut fréquemment observer à l'intrados des arcs de ponts anciens (voir § 9.1). Il apparaît par conséquent raisonnable de négliger l'effet positif induit par la présence des tympans, et ce d'autant plus que sa considération nécessiterait un modèle tridimensionnel [6.14-6.17].

Le mécanisme de ruine par formation de quatre rotules, tel que celui présenté ci-dessus ne s'applique qu'au cas d'un arc rigidement fixé sur ses appuis. Cette hypothèse restreint strictement son application au cas des ponts à portée unique, puisque dans le cas des ouvrages multi-portées, l'élançement des piles ne permet pas d'exclure un mécanisme de ruine impliquant les portées adjacentes à celle étudiée.

## 6.2. Géométrie de l'arc

L'application du modèle développé ici nécessite le relevé de la géométrie de l'arc dont l'épaisseur  $d$  – équivalente à la hauteur de section utilisée lors de l'étude au méso-niveau – est admise constante. Le tracé d'intrados de l'arc, relevé au niveau de son axe central, peut être exprimé mathématiquement, le repère étant fixé à la naissance gauche de l'arc (figure 6.5). De manière à maintenir une précision suffisante tout en facilitant le calcul différentiel et intégral qui sera ultérieurement nécessaire, une équation polynomiale de degré quatre est adoptée.

$$y = fx^4 + jx^3 + kx^2 + rx + u \quad (6.1)$$

$f$ ,  $j$ ,  $k$ ,  $r$  et  $u$  sont les paramètres de l'équation polynomiale représentant la géométrie de l'arc. Cinq points aux coordonnées connues sont nécessaires pour exprimer numériquement ces paramètres. Suite au choix de la position de l'origine du repère, le paramètre  $u$  peut être d'emblée considéré comme nul.

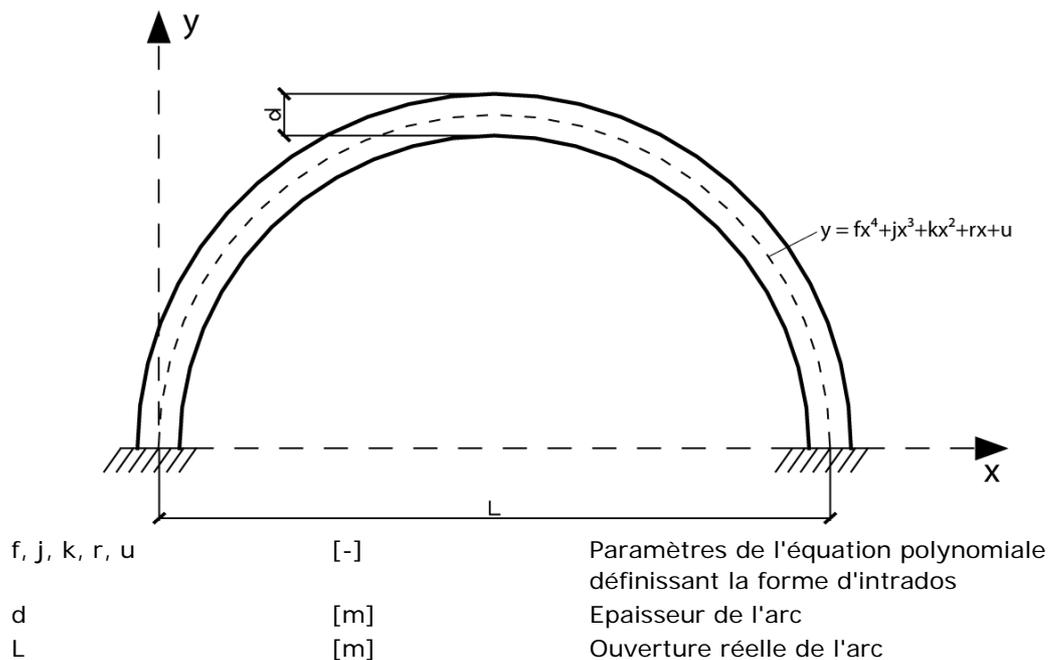


Figure 6.5 : Géométrie de l'arc

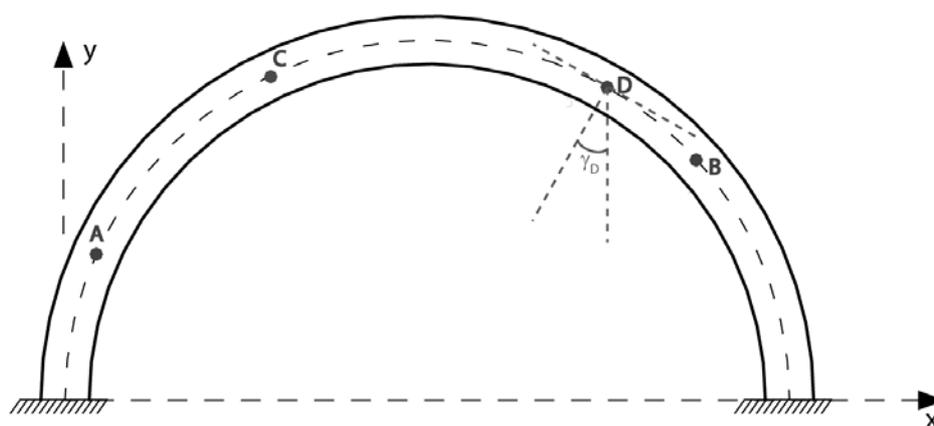
## 6.3. Calculs préliminaires

L'application du modèle décrit dans ce chapitre nécessite la détermination d'un certain nombre de grandeurs détaillées ci-dessous. Il s'agit en premier lieu de l'angle déterminé par la verticale et la perpendiculaire à la tangente à l'axe de l'arc en  $D$ , puis ensuite du calcul des charges permanentes exercées sur différentes portions de l'arc ainsi que du moment qu'elles induisent par rapport aux rotules.

### 6.3.1. Angle $\gamma_D$

La perpendiculaire à la tangente à l'arc en la rotule  $D$  détermine un angle  $\gamma_D$  par rapport à la verticale (figure 6.6). Celui-ci peut être déterminé via la dérivée de l'équation polynomiale représentative du tracé d'intrados (voir annexe 10).

$$\gamma_D = \tan^{-1}(4fx_D^3 + 3jx_D^2 + 2kx_D + r) \quad (6.2)$$



$\gamma_D$  [°] Angle déterminé par la perpendiculaire à la tangente à l'axe de l'arc en  $D$  et la verticale

Figure 6.6 : Définition de l'angle  $\gamma_D$

### 6.3.2. Charges permanentes

Rappel concernant la convention de signe : La convention de signe relative aux efforts intérieurs diffère de celle généralement adoptée par le sens du moment positif admis (figure 6.7) (voir § 5.2.2).

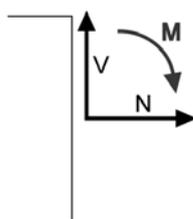
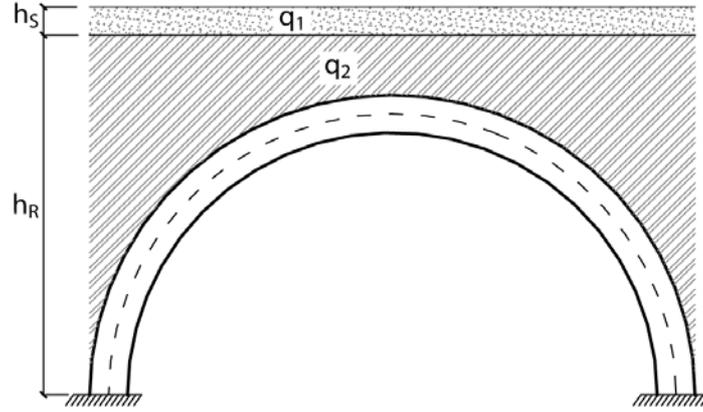


Figure 6.7 : Convention de signe adoptée

La considération du poids propre de l'arc dans le modèle nécessiterait l'intégration sur l'ouverture active de la projection verticale du poids de chaque section infinitésimale de l'arc.

La détermination de ces projections, sur la base de l'équation polynomiale du tracé d'intrados, impliquerait la nécessité de connaître l'angle que forme chaque

section infinitésimale de l'arc avec la verticale, ce qui compliquerait singulièrement le calcul intégral et poserait d'inévitables problèmes de singularité aux naissances de l'arc. Il a par conséquent été décidé de négliger le poids propre de l'arc dans cette étude et de ne considérer que les charges permanentes induites par le matériau de remplissage ( $q_2$ ) et la voie de roulement ( $q_1$ ). La première est fonction de la position  $x$  considérée, tandis que la seconde est uniforme. Leur somme représente la charge permanente totale  $q(x)$  (figure 6.8).



$q(x)$	[kN/m <sup>2</sup> ]	Charge permanente totale
$q_1$	[kN/m <sup>2</sup> ]	Part uniforme de la charge permanente totale
$q_2(x)$	[kN/m <sup>2</sup> ]	Part non uniforme de la charge permanente totale
$v$	[m]	Largeur efficace de l'arc (voir § 6.5)
$PP_S$	[kN/m <sup>3</sup> ]	Poids propre de la superstructure
$PP_R$	[kN/m <sup>3</sup> ]	Poids propre du matériau de remplissage
$h_s$	[m]	Hauteur équivalente de la voie de roulement
$h_R$	[m]	Hauteur du remplissage à la naissance de l'arc

Figure 6.8 : Grandeurs nécessaires à la détermination des charges permanentes appliquées sur l'arc

Par souci de clarté, le développement des calculs n'est pas présenté ici, mais peut être consulté en annexe 11.

La grandeur  $\eta$  représente la résultante des charges permanentes sur l'ouverture active de l'arc (figure 6.9).

$$\eta = \int_{L_R} vq(x)dx = \quad (6.3)$$

$$= v \left[ PP_S h_s L_R + PP_R \left( h_R L_R - f \frac{(x_B^5 - x_A^5)}{5} - j \frac{(x_B^4 - x_A^4)}{4} - k \frac{(x_B^3 - x_A^3)}{3} - r \frac{(x_B^2 - x_A^2)}{2} \right) \right]$$

Le moment de flexion induit par la charge  $\eta$  par rapport à la rotule  $B$  est exprimé par la grandeur  $\eta w$  (figure 6.9).

$$\eta w = \int_{L_R} vq(x)(x_B - x)dx = \quad (6.4)$$

$$= v \left[ PP_S h_s \frac{L_R^2}{2} + PP_R \left( h_R \frac{L_R^2}{2} - f \frac{x_B^6}{30} - j \frac{x_B^5}{20} - k \frac{x_B^4}{12} - r \frac{x_B^3}{6} - f \frac{x_B^6}{6} - j \frac{x_B^5}{5} + f \frac{x_B^5 x_B}{5} + \right. \right.$$

$$\left. \left. - k \frac{x_B^4}{4} + j \frac{x_A^4 x_B}{4} - r \frac{x_A^3}{3} + k \frac{x_A^3 x_B}{3} + r \frac{x_A^2 x_B}{2} \right) \right]$$

La grandeur  $\phi$  représente la résultante des charges permanentes sollicitant la portion d'arc comprise entre les rotules A et C (figure 6.9).

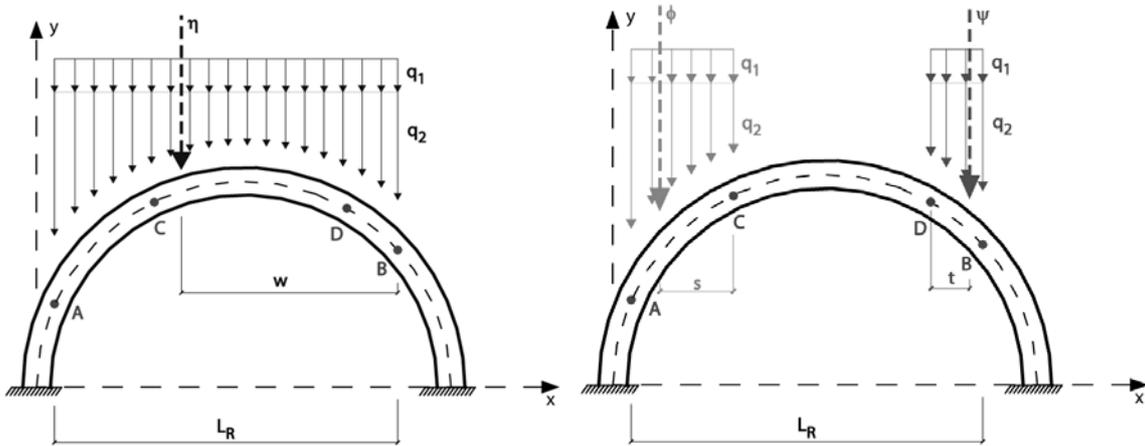
$$\phi = \int_a vq(x)dx = \tag{6.5}$$

$$= v \left[ PP_S h_S a + PP_R \left( h_R a - f \frac{(x_C^5 - x_A^5)}{5} - j \frac{(x_C^4 - x_A^4)}{4} - k \frac{(x_C^3 - x_A^3)}{3} - r \frac{(x_C^2 - x_A^2)}{2} \right) \right]$$

Le moment de flexion induit par la force  $\phi$  par rapport à la rotule C est exprimé par la grandeur  $\phi s$  (figure 6.9).

$$\phi s = \int_{L_R} vq(x)(x_C - x)dx = \tag{6.6}$$

$$= v \left[ PP_S h_S \frac{a^2}{2} + PP_R \left( h_R \frac{a^2}{2} - f \frac{x_C^6}{30} - j \frac{x_C^5}{20} - k \frac{x_C^4}{12} - r \frac{x_C^3}{6} - f \frac{x_A^6}{6} - j \frac{x_A^5}{5} + f \frac{x_A^5 x_C}{5} - k \frac{x_A^4}{4} + j \frac{x_A^4 x_C}{4} - r \frac{x_A^3}{3} + k \frac{x_A^3 x_C}{3} + r \frac{x_A^2 x_C}{2} \right) \right]$$



a)		
$\eta$	[kN]	
$\eta w$	[kNm]	
$\phi$	[kN]	Résultante de la charge permanente appliquée sur la portion d'arc comprise entre les rotules A et C
$\phi s$	[kNm]	Moment de flexion induit par la résultante de la charge permanente appliquée sur la portion d'arc comprise entre les rotules A et C, par rapport à C
$\psi$	[kN]	Résultante de la charge permanente appliquée sur la portion d'arc comprise entre les rotules D et B
$\psi t$	[kNm]	Moment de flexion induit par la résultante de la charge permanente appliquée sur la portion d'arc comprise entre les rotules D et B, par rapport à D

Figure 6.9 : Résultantes de la charge permanente appliquée sur l'arc - a) totale ( $\eta$ ) b) partielles ( $\phi$  et  $\psi$ )

La grandeur  $\psi$  représente la résultante des charges permanentes sollicitant la portion d'arc comprise entre les rotules  $D$  et  $B$  (figure 6.9).

$$\psi = \int_b vq(x)dx = \quad (6.7)$$

$$= v \left[ PP_S h_S b + PP_R \left( h_R b - f \frac{(x_B^5 - x_D^5)}{5} - j \frac{(x_B^4 - x_D^4)}{4} - k \frac{(x_B^3 - x_D^3)}{3} - r \frac{(x_B^2 - x_D^2)}{2} \right) \right]$$

Le moment de flexion induit par la force  $\psi$  par rapport à la rotule  $D$  est exprimé par la grandeur  $\psi t$  (figure 6.9).

$$\psi t = \int_b vq(x)(x - x_D)dx = \quad (6.8)$$

$$= v \left[ PP_S h_S \frac{b^2}{2} + PP_R \left( h_R \frac{b^2}{2} - f \frac{x_D^6}{30} - j \frac{x_D^5}{20} - k \frac{x_D^4}{12} - r \frac{x_D^3}{6} - f \frac{x_B^6}{6} - j \frac{x_B^5}{5} + f \frac{x_B^5 x_D}{5} - k \frac{x_B^4}{4} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + j \frac{x_B^4 x_D}{4} - r \frac{x_B^3}{3} + k \frac{x_B^3 x_D}{3} + r \frac{x_B^2 x_D}{2} \right) \right]$$

#### 6.4. Effet du remplissage

Le matériau de remplissage disposé sur l'arc et contenu par les tympans peut être de différente composition, selon les ressources, l'époque de construction et l'importance de l'ouvrage entrepris. Dans la majorité des cas cependant, il se compose de tout-venant, et parfois d'une maçonnerie de blocage. La première hypothèse sera retenue ici. Elle implique qu'avec la déformation de l'arc liée à l'apparition successive des rotules, le remplissage applique sur la portion de l'élément structural située entre les rotules  $D$  et  $B$ , une poussée passive semblable à celle qu'exerce un sol sur un mur de soutènement qui se déplace en direction du massif.

Parfois ignorée dans l'analyse des ponts en arc en maçonnerie, cette poussée apporte cependant un effet positif non négligeable en entravant la déformation de l'élément structural et permet à des arcs dont le tracé s'éloigne de la chaînette de résister à des sollicitations plus importantes [6.11 ; 6.12 ; 6.18-6.20].

Les quelques essais effectués en vue de mesurer l'ampleur de la poussée du remplissage mobilisée lorsque l'arc se déforme n'ont, à notre connaissance, pas permis d'identifier, à ce jour, une méthode fiable en vue d'estimer l'amplitude de cette force [6.7 ; 6.22 ; 6.23]. A défaut de renseignements complémentaires, la méthode d'évaluation de la poussée des terres selon Rankine sera retenue ici. Selon les recommandations fournies dans la littérature [6.24], cette modélisation de la poussée passive est acceptable pour autant que des facteurs de correction permettant de tenir compte de la forme incurvée de l'écran ( $m_p$  et  $m_{pc}$ ) soient incorporés au calcul de la force horizontale (voir également [6.18]). Évaluée de manière totalement empirique, la valeur de ces paramètres peut être appréciée selon les indications fournies dans la référence précédemment mentionnée [6.24].

Les paramètres additionnels nécessaires à l'application de la méthode de Rankine, à savoir l'angle de frottement interne et la cohésion du remplissage, sont à évaluer au cas par cas, selon la qualité, connue ou supposée, du matériau. Dans le cas d'un remplissage constitué de tout-venant, l'angle de frottement interne est généralement admis environ égal à  $30^\circ$  [6.25 ; 6.26], tandis que la cohésion est négligée [6.24].

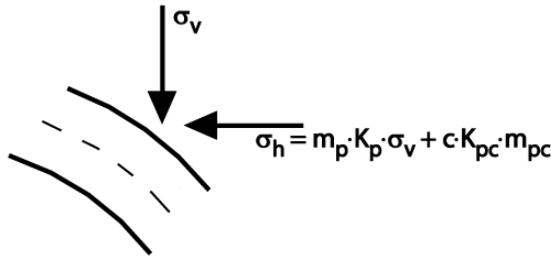
La contrainte horizontale due au remplissage et agissant sur l'arc lorsque ce dernier se déforme peut par conséquent être évaluée en fonction de la charge

verticale appliquée, selon Rankine (figure 6.10). Il est ici admis que la contrainte verticale ne résulte que des charges permanentes et que les charges utiles n'ont pas d'influence sur la portion d'arc sollicitée par la poussée horizontale du remplissage.

$$\sigma_h = m_p K_p \sigma_v + c K_{pc} m_{pc} \quad (6.9)$$

$$K_p = \frac{1 + \sin \phi_f}{1 - \sin \phi_f} = \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\phi_f}{2} \right) \quad (6.10)$$

$$K_{pc} = 2\sqrt{K_c} \quad (6.11)$$



$\sigma_v$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Contrainte verticale sur l'arc
$\sigma_h$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Contrainte horizontale sur l'arc
$K_p$	[-]	Coefficient de poussée des terres
$m_p$	[-]	Facteur de correction
$c$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Cohésion
$K_{pc}$	[-]	Coefficient de poussée des terres
$m_{pc}$	[-]	Facteur de correction
$\phi_f$	[°]	Angle de frottement interne

Figure 6.10 : Calcul de la poussée passive sur l'arc

Le détail des calculs, dont les résultats sont présentés dans cette section, peut être consulté en annexe 12.

Suite à la formation du mécanisme, seule la partie de l'arc comprise entre les rotules  $B$  et  $D$  subit un déplacement en direction du remplissage. La poussée latérale que ce dernier exerce alors sur cette portion d'arc peut être évaluée en intégrant la force horizontale  $q_h$  sur la hauteur considérée (figure 6.11).

$$R = \int_{h_B}^{h_D} v q_h dh = \quad (6.12)$$

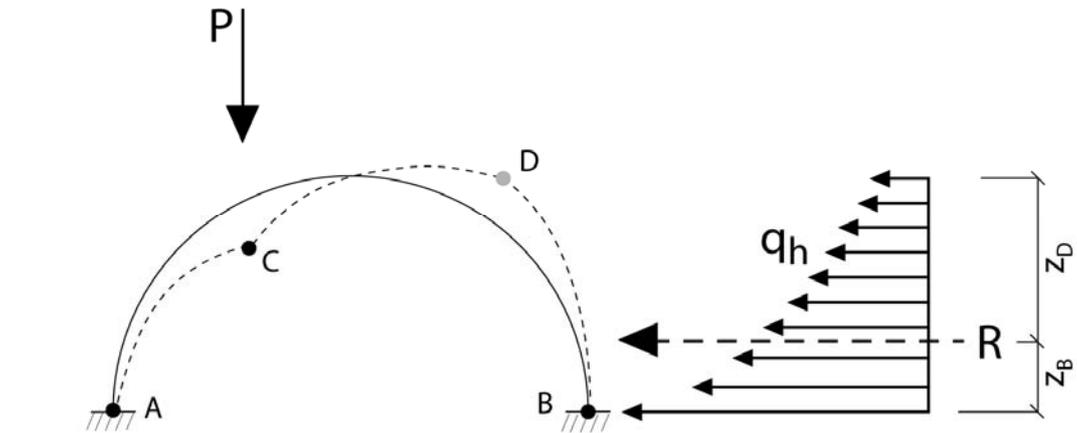
$$= v \left[ K_p m_p \left[ h_s P P_s (h_D - h_B) + P P_R h_R (h_D - h_B) - P P_R \left( \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} \right) \right] + c m_{pc} K_{pc} (h_D - h_B) \right]$$

Le moment de flexion induit par la résultante  $R$  par rapport à la rotule  $B$  est exprimé par la grandeur  $Rz_B$ .

$$\begin{aligned}
 RZ_B &= \int_{h_B}^{h_D} vq_h(h-h_B)dh = & (6.13) \\
 &= v \left[ K_p m_p \left[ h_s P P_s \left[ \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} - h_B(h_D - h_B) \right] + P P_R \left[ h_R \left( \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} \right) - h_R h_B(h_D - h_B) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \frac{h_D^3}{3} + \frac{h_B^3}{3} + h_B \left( \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} \right) \right] \right] + c m_{pc} K_{pc} \left[ \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} - h_B(h_D - h_B) \right] \right]
 \end{aligned}$$

Le moment de flexion induit par la résultante  $R$  par rapport à la rotule  $D$  est exprimé par la grandeur  $Rz_D$ .

$$\begin{aligned}
 Rz_D &= \int_{h_B}^{h_D} vq_h(h_D-h)dh = & (6.14) \\
 &= v \left[ K_p m_p \left[ h_s P P_s \left[ h_D(h_D - h_B) - \frac{h_D^2}{2} + \frac{h_B^2}{2} \right] + P P_R \left[ h_R h_D(h_D - h_B) - h_R \left( \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} \right) - h_D \left( \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} \right) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{h_D^3}{3} - \frac{h_B^3}{3} \right] \right] + c m_{pc} K_{pc} \left[ h_D(h_D - h_B) - \frac{h_D^2}{2} + \frac{h_B^2}{2} \right] \right]
 \end{aligned}$$



$q_h$	[kN/m <sup>2</sup> ]	Force horizontale appliquée sur l'arc
$R$	[kN]	Résultante de la force horizontale appliquée sur l'arc
$Rz_B$	[kNm]	Moment de flexion induit par la résultante de la force horizontale par rapport à la rotule B
$Rz_D$	[kNm]	Moment de flexion induit par la résultante de la force horizontale par rapport à la rotule D
$P$	[kN]	Représentation de la charge de trafic

Figure 6.11 : Poussée passive s'appliquant sur l'arc entre les rotules D et B

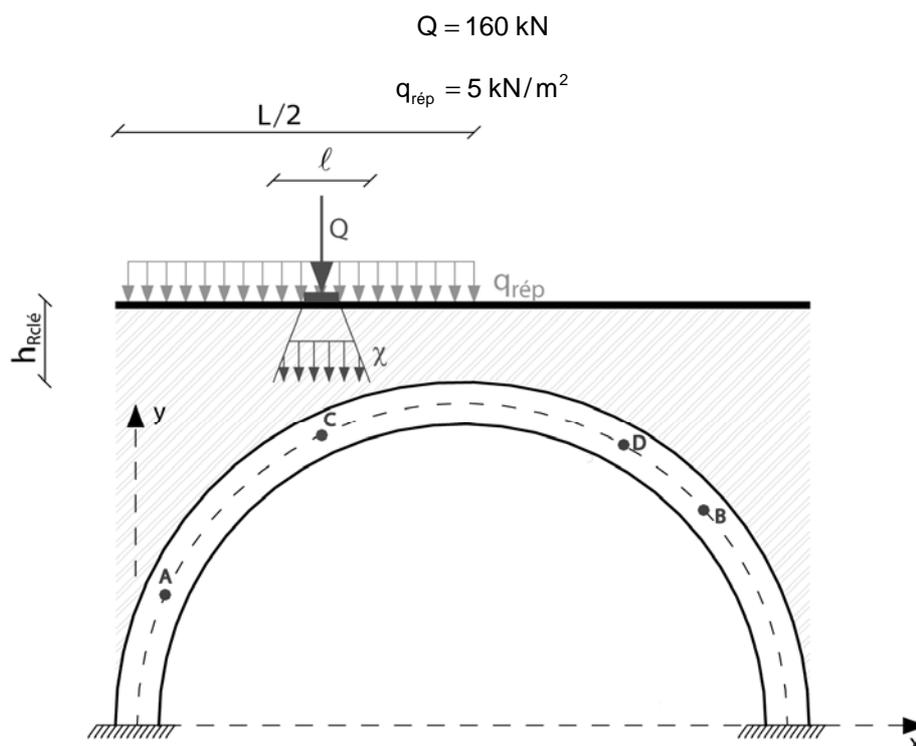
L'une des hypothèses nécessaires à l'application de la théorie de Rankine pour l'évaluation de la poussée passive exercée par un sol sur un écran est que le déplacement de ce dernier doit être suffisamment conséquent pour que l'on puisse admettre que l'entier de la force est mobilisé [6.27]. Dans le cas présent, il a toutefois été postulé que les déplacements de l'arc restaient faibles, ce qui contredit, à priori, l'utilisation de la méthode de Rankine et impliquerait une analyse par grands déplacements. Il est néanmoins possible d'admettre que le remplissage, compacté par des années, voire des siècles, de trafic, est apte à mobiliser une force équivalente, alors que les déplacements-mêmes de l'arc

restent faibles. Il est par conséquent accepté que les charges de trafic imposées par les normes actuelles induisent un déplacement de l'élément structural suffisant pour que l'entier de la poussée passive selon Rankine puisse être considéré [6.7].

Au vu de sa faible valeur en regard de celle de la poussée passive, la poussée active que le matériau de remplissage exerce sur le rein opposé est négligée dans le modèle développé ici [6.7]. Une comparaison des résultats obtenus avec ceux fournis par l'application d'un modèle tenant compte de cette poussée serait néanmoins nécessaire afin de valider de manière rigoureuse cette hypothèse, par ailleurs non conservatrice.

## 6.5. Modèle de charge

Ayant la propriété d'introduire localement dans l'arc un fort moment de flexion pour un effort normal réduit, une charge ponctuelle, considérée seule, incarne le type de sollicitation le plus défavorable pour ce genre d'élément structural. Le modèle de trafic routier actualisé considéré se base sur celui de Ludescher & Brühwiler [6.28], auquel est ajoutée la prise en compte d'une charge uniformément répartie. D'autres modèles d'actualisation existent et peuvent également être choisis [6.29]. Le modèle de charge admis comprend ainsi un essieu simple ( $Q$ ), composé de deux roues, avec une surface d'application de 0.4 m sur 0.4 m. Placée au droit de la rotule  $C$ , cette sollicitation s'accompagne d'une charge uniformément répartie  $q_{\text{rép}}$  appliquée sur la moitié de l'ouverture active de l'arc déjà sollicitée par la charge ponctuelle.



$q_{\text{rép}}$	[kN/m <sup>2</sup> ]	Charge de trafic uniformément répartie
$Q$	[kN]	Charge de trafic ponctuelle
$\chi$	[kN/m <sup>2</sup> ]	Charge de trafic ponctuelle après diffusion transversalement et longitudinalement
$h_{\text{Rclé}}$	[m]	Hauteur de remplissage sur la clé de voûte

Figure 6.12 : Modèle de charge de trafic considéré, longitudinalement

Une diffusion transversale et longitudinale de la charge utile au travers du matériau de remplissage peut être considérée. Dans le but de simplifier les calculs tout en garantissant le conservatisme de la solution trouvée, la profondeur de diffusion des efforts est restreinte à la hauteur de remplissage au droit de la clé de voûte. Dans le cas d'un remplissage constitué de tout-venant, l'angle de diffusion peut être admis égal à  $30^\circ$  [6.7 ; 6.11 ; 6.30]. Plus faible dans le cas d'une maçonnerie de blocage, sa valeur est à examiner au cas par cas, selon le type de remplissage supposé. Un angle de diffusion égal est admis pour la diffusion à travers la voie de roulement.

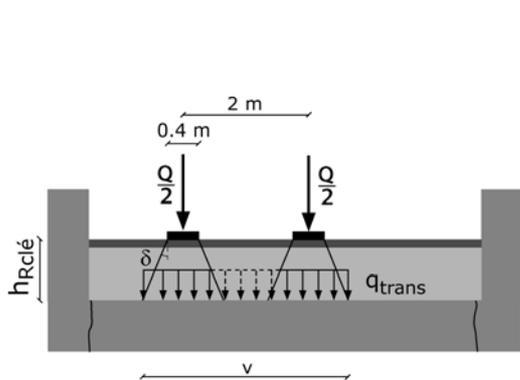
Transversalement, la largeur participante de l'arc,  $v$ , dépend de la hauteur de remplissage sur la clé,  $h_{Rclé}$  (figure 6.13). Deux cas sont à distinguer. Dans le premier, la hauteur de remplissage au-dessus de la clé de voûte n'est pas suffisante pour que la diffusion permette l'application d'une charge uniformément répartie et continue. Dans ce cas, la largeur participante est calculée comme la distance entre les deux extrémités du faisceau de diffusion des deux demi-charges  $Q/2$  (figure 6.13) à la hauteur de la clé de voûte. La répartition transversale de la charge  $Q$  sur la largeur participante ainsi calculée est ensuite admise uniforme et continue ( $q_{trans}$ ).

La largeur participante  $v$  considérée est ainsi plus longue que celle réellement présente, ce qui implique la prise en compte d'une charge uniforme potentiellement moindre que celle véritablement appliquée. Néanmoins, la considération d'une charge continue ainsi que la négligence de la diffusion de la charge au-dessous du niveau de la clé de voûte compense cette hypothèse non conservatrice.

Dans le second cas, la hauteur de remplissage sur la clé de voûte est supérieure à celle nécessaire pour obtenir une charge continue dans le faisceau de diffusion formé par les deux demi-charges  $Q/2$ . Dans cette configuration, la largeur participante  $v$  est admise égale à 4 mètres. La possibilité d'une diffusion supplémentaire est négligée car elle impliquerait un chevauchement des charges induites par les deux roues.

**Cas 1**

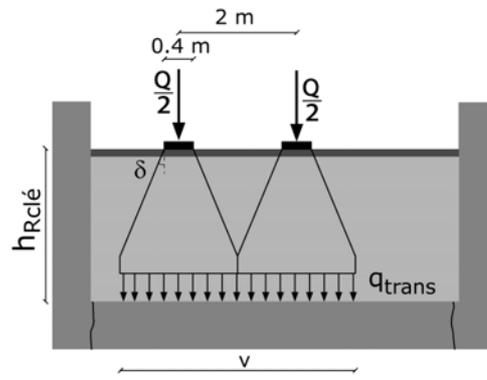
La hauteur de remplissage sur la clé de voûte est plus faible que celle nécessaire pour obtenir une charge uniformément répartie et continue sur l'arc



$$h_{Rclé} < \frac{0.8 \text{ m}}{\tan \delta}$$

**Cas 2**

La hauteur de remplissage sur la clé de voûte est supérieure à celle nécessaire pour obtenir une charge uniformément répartie et continue sur l'arc



$$h_{Rclé} \geq \frac{0.8 \text{ m}}{\tan \delta}$$

Figure 6.13 : Modèle de charge considéré, transversalement

Dans les deux cas, la charge uniformément répartie est déterminée par la diffusion de la charge d'essieu sur la largeur participante de l'arc précédemment déterminée,  $v$ .

$$q_{\text{trans}} = \frac{Q}{v} \quad (6.15)$$

Longitudinalement, la diffusion de la charge est également fonction de la hauteur de remplissage à la clé (figure 6.12). Elle s'effectue sur une longueur d'application  $\ell$  limitée par la longueur de l'arc actif.

$$\ell = 0.4 \text{ m} + 2 \cdot h_{\text{Rclé}} \tan \delta \quad (6.16)$$

$$\frac{\ell}{2} \leq a \quad (6.17)$$

La charge surfacique uniformément répartie  $\chi$  s'obtient par la diffusion longitudinale de la charge linéaire uniformément répartie transversalement  $q_{\text{trans}}$  précédemment déterminée.

$$\chi = \frac{q_{\text{trans}}}{\ell} \quad (6.18)$$

Le cas d'un véhicule placé contre le parapet n'est pas examiné ici, car il implique qu'une partie de la charge est reprise directement par le parapet et ne sollicite par conséquent pas l'arc, qui s'en trouve soulagé. Cette hypothèse met en évidence la nécessité de vérifier la sécurité structurale des tympans, sous l'effet de cette charge et de la poussée exercée par le matériau de remplissage. L'examen de ces éléments n'est pas présenté ici, mais peut être effectué selon les principes préconisés pour la vérification d'un mur de soutènement en maçonnerie [6.31].

Un raisonnement similaire à celui présenté ci-dessus pourrait être appliqué à un trafic ferroviaire. Selon la norme SIA 269/1 [6.29], le modèle à considérer comprendrait alors quatre essieux dont la charge actualisée est fonction de la classe de ligne. Grâce à la diffusion à travers les traverses, le ballast et le remplissage, une charge uniformément répartie peut en général être considérée. Sa configuration critique serait alors à déterminer, en fonction de l'ouverture de l'arc étudié.

Par opposition aux ponts modernes, le rapport entre la charge utile et les charges permanentes relatif aux ponts en maçonnerie est extrêmement faible. Il en résulte l'aspect particulièrement massif de ce genre d'ouvrage et il est par conséquent admis que la considération d'un facteur dynamique, amplificateur de la charge ponctuelle, est superflue [6.32].

## 6.6. Développement du modèle

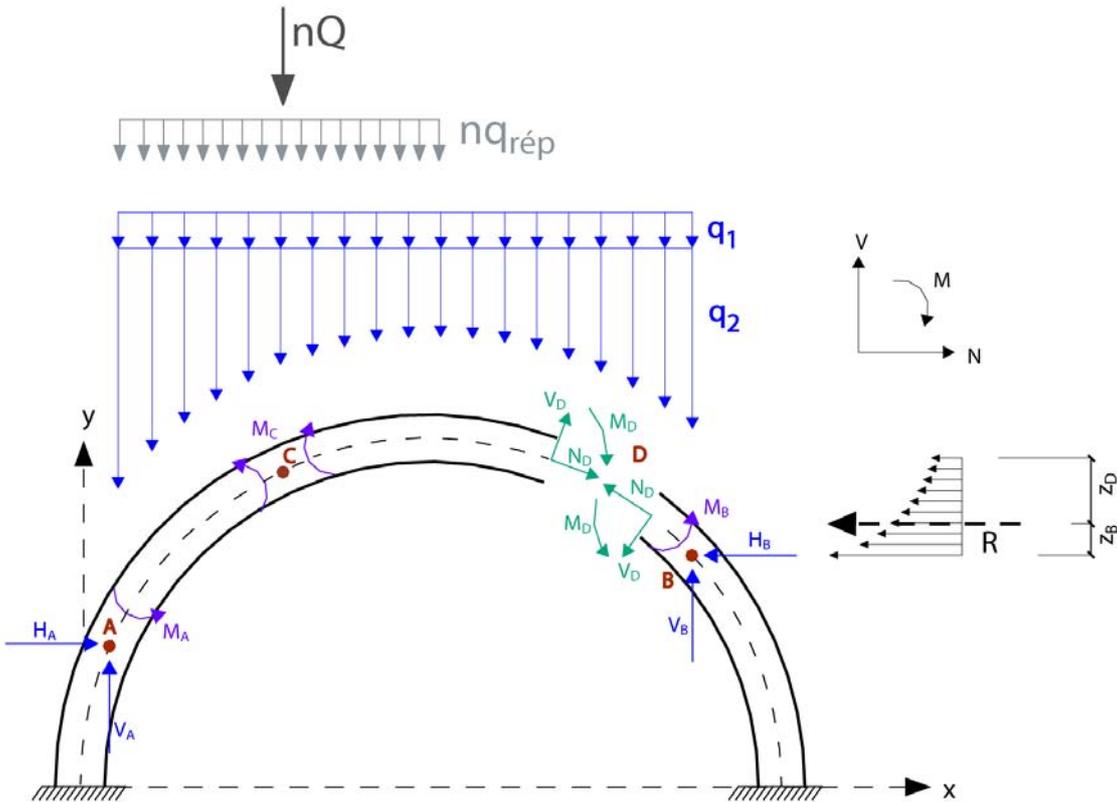
Les formules développées dans cette partie s'appliquent à tout arc de section rectangulaire, dont le tracé d'intrados peut être exprimé par une équation polynomiale de degré quatre et dont la maçonnerie présente un comportement qui peut être représenté par une courbe contrainte – déformation parabolique. Par souci de clarté, les différents développements évoqués ne sont toutefois pas présentés en détail ici, mais peuvent être consultés en annexe 13.

Le modèle considéré dans cette étude s'applique à un arc bi-encasté comprenant trois rotules  $A$ ,  $B$ ,  $C$  déjà totalement formées. Celles-ci sont modélisées comme des articulations mécaniques parfaites sur lesquelles agit un moment de flexion, appliqué extérieurement, nécessaire à leur existence-même. La charge utile considérée répond aux prescriptions du modèle admis, et présenté ci-dessus, et est multipliée par un facteur  $n$ , permettant son amplification jusqu'à un niveau

suffisant pour provoquer la ruine de la structure (figure 6.14). Ce multiplicateur des charges utiles  $n$  est par conséquent l'inconnue du problème posé.

La position des trois rotules déjà formées ainsi que celle de la futur quatrième articulation, est initialement admise arbitrairement, dans une configuration cependant logique.

De simples considérations d'équilibre sur l'arc ainsi défini et rendu isostatique permettent de déterminer les efforts intérieurs et d'en déduire, à terme, le multiplicateur de la charge utile impliquant une sollicitation suffisante pour provoquer l'apparition de la quatrième rotule, synonyme de ruine de la structure [6.33 ; 6.34].



$M_A, M_B, M_C$	[kNm]	Moments de flexion admis dans les rotules A, B et C
$N_D, V_D, M_D$	[kN]	Efforts intérieurs dans la rotule D
$H_A, V_A$	[kN]	Efforts horizontal et vertical à la rotule A
$H_B, V_B$	[kN]	Efforts horizontal et vertical à la rotule B

Figure 6.14 : Résumé des charges et efforts intérieurs

Une première étape consiste en la détermination des efforts horizontaux et verticaux agissant aux rotules A et B, soit aux extrémités de l'arc actif.

$$H_A = \frac{1}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right] + nq_{rép} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + \right. \right. \quad (6.19)$$

$$\left. \left. + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a (\eta w + M_A + M_B + Rz) - L_R (M_A + M_C + \phi s) \right]$$

$$\begin{aligned}
 V_A = n\chi & \left[ \frac{v\ell^2}{8a} + \frac{(h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right]}{a [a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)]} \right] + \\
 & + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{av}{2} + \frac{(h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a [a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)]} \right] + \frac{M_A + M_C + \phi s}{a} + \\
 & + \frac{(h_C - h_A) [a (\eta w + M_A + M_B + Rz) - L_R (M_A + M_C + \phi s)]}{a [a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)]}
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}
 H_B = \frac{1}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} & \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a (\eta w + M_A + M_B + Rz) - L_R (M_A + M_C + \phi s) \right] - R
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned}
 V_B = n\chi & \left[ \ell v - \frac{v\ell^2}{8a} - \frac{(h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right]}{a [a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)]} \right] + nq_{\text{rép}} \left[ \left( \frac{L}{2} - x_A \right) v - \frac{av}{2} + \right. \\
 & \left. - \frac{(h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a [a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)]} \right] + \eta - \frac{M_A + M_C + \phi s}{a} + \\
 & - \frac{(h_C - h_A) [a (\eta w + M_A + M_B + Rz) - L_R (M_A + M_C + \phi s)]}{a [a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)]}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

L'équilibre permet ensuite d'établir les équations déterminant l'effort normal  $N_D$  et le moment de flexion  $M_D$  agissant dans la section correspondant à la future quatrième rotule,  $D$ . L'unique inconnue, par ailleurs commune aux deux équations ci-dessous, est alors le multiplicateur de la charge utile  $n$ .

$$\begin{aligned}
 M_D = n\chi & \left[ \frac{\left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right]}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \left( \frac{b (h_C - h_A)}{a} + h_D - h_B \right) - b\ell v + \frac{bv\ell^2}{8a} \right] + \quad (6.23) \\
 & + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{\left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \left( \frac{b (h_C - h_A)}{a} + h_D - h_B \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{bav}{2} - bv \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \right] - b\eta + \frac{b (M_A + M_C + \phi s)}{a} + \\
 & + \frac{a (\eta w + M_A + M_B + Rz) - L_R (M_A + M_C + \phi s)}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \cdot \left( \frac{b (h_C - h_A)}{a} + h_D - h_B \right) + \\
 & - R(h_D - h_B - z) - M_B + \psi t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_D = n\chi & \left[ \frac{-L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a)}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \left( -\cos(\gamma_D) + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)}{a} \right) + \quad (6.24) \right. \\
 & \left. + \sin(\gamma_D)\ell v \left( \frac{\ell}{8a} - 1 \right) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{-L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right)}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \left( -\cos(\gamma_D) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)}{a} \right) + v \sin(\gamma_D) \left( \frac{a}{2} - \frac{L}{2} + x_A \right) \right] + \\
 & + \frac{a (\eta w + M_A + M_B + Rz) - L_R (M_A + M_C + \phi s)}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \left( -\cos(\gamma_D) + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)}{a} \right) + \\
 & + \sin(\gamma_D) \left( \psi - \eta + \frac{M_A + M_C + \phi s}{a} \right)
 \end{aligned}$$

A ce stade, un changement de variable permet d'alléger considérablement les calculs. Les efforts intérieurs en  $D$  précédemment déterminés peuvent alors être exprimés sous la forme :

$$M_D = nE + F \quad (6.25)$$

$$N_D = nG + H \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned}
 E = & \chi \left[ \frac{\left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a \ell v (L_R - a) \right]}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \left( \frac{b (h_C - h_A)}{a} + h_D - h_B \right) - b \ell v + \frac{b v \ell^2}{8a} \right] + \\
 & + q_{\text{rép}} \left[ \frac{\left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + a v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \left( \frac{b (h_C - h_A)}{a} + h_D - h_B \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{b a v}{2} - b v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \right]
 \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned}
 F = & -b \eta + \frac{b (M_A + M_C + \phi S)}{a} + \frac{a (\eta w + M_A + M_B + R_z) - L_R (M_A + M_C + \phi S)}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \cdot \left( \frac{b (h_C - h_A)}{a} + \right. \\
 & \left. + h_D - h_B \right) - R (h_D - h_B) - M_B + \psi t + R_z
 \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned}
 G = & \chi \left[ \frac{-L_R v \frac{\ell^2}{8} + a \ell v (L_R - a)}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \left( -\cos(\gamma_D) + \frac{\sin(\gamma_D) (h_C - h_A)}{a} \right) + \sin(\gamma_D) \ell v \left( \frac{\ell}{8a} - 1 \right) \right] + \\
 & + q_{\text{rép}} \left[ \frac{-L_R v \frac{a^2}{2} + a v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right)}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \left( -\cos(\gamma_D) + \frac{\sin(\gamma_D) (h_C - h_A)}{a} \right) + \right. \\
 & \left. + v \sin(\gamma_D) \left( \frac{a}{2} - \frac{L}{2} + x_A \right) \right]
 \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{a (\eta w + M_A + M_B + R_z) - L_R (M_A + M_C + \phi S)}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \left( -\cos(\gamma_D) + \frac{\sin(\gamma_D) (h_C - h_A)}{a} \right) + \\
 & + \sin(\gamma_D) \left( \psi - \eta + \frac{M_A + M_C + \phi S}{a} \right)
 \end{aligned} \quad (6.30)$$

L'équation de la courbe d'interaction pour la section et le matériau considérés, déterminée par l'étude au méso-niveau (équation 5.17), permet de relier le moment de flexion et l'effort normal sollicitant l'arc dans le cas limite de l'apparition de la quatrième rotule. En raison du faible effort normal sollicitant les arcs en maçonnerie, seule l'équation de la portion de la courbe d'interaction relative au domaine fissuré est considérée.

$$M_D = \frac{1}{2} N_D \frac{-3d\beta^2 v + 3^{1/2} \beta^2 d v - 2\alpha N_D - 2 \cdot 3^{1/2} \alpha N_D}{\beta^2 v (-3 + 3^{1/2})} \quad (6.31)$$

Il est ensuite possible d'en déduire la relation permettant de déterminer le multiplicateur de la charge utile  $n$  cherché.

$$n = \frac{1}{2(6G^2\alpha + 4 \cdot 3^{1/2} \cdot G^2\alpha)} \left[ -3Gd\beta^2v - 12G\alpha H - 8 \cdot 3^{1/2} \cdot G\alpha H - 6E\beta^2v + \right. \quad (6.32)$$

$$+ (9G^2d^2\beta^4v^2 + 36Gd\beta^4v^2E + 144G\alpha HE\beta^2v + 96G\alpha H3^{1/2}E\beta^2v + 36E^2\beta^4v^2 +$$

$$\left. - 144G^2\alpha F\beta^2v - 96G^2\alpha 3^{1/2}F\beta^2v)^{1/2} \right]$$

En vertu du théorème cinématique de la plasticité, la valeur du multiplicateur des charges utiles  $n$  ainsi obtenue est une borne supérieure de sa valeur réelle. Une itération sur la position des rotules est alors nécessaire afin de déterminer le mécanisme critique et la valeur du multiplicateur limite des charges utiles.

La position de la charge ponctuelle étant liée à celle de la rotule  $C$ , un raisonnement du type étude de la ligne d'influence n'est pas nécessaire, la position critique de la charge ponctuelle étant automatiquement déterminée.

Les équations (6.19) à (6.32) peuvent, par exemple, être implémentées dans un tableur Excel. Le solveur de ce logiciel permet alors de minimiser la valeur du multiplicateur de la charge utile  $n$  en fonction de la position des rotules, exprimées par leur coordonnée  $x_A$ ,  $x_B$ ,  $x_C$  et  $x_D$ , la coordonnée selon l'axe  $y$  en découlant directement grâce à l'équation polynomiale représentant le tracé d'intrados de l'arc.

En dépit du fait que les trois rotules  $A$ ,  $C$  et  $B$ , admises comme déjà formées suivant le principe décrit lors de l'étude au méso-niveau, ne disposent d'aucune capacité de reprise d'effort de flexion, le maintien d'un moment extérieurement appliqué est nécessaire. En effet, comme mentionné au chapitre 5, un déchargement de la structure induit un relâchement du moment de flexion dans les rotules développées et donc la disparition de celles-ci. La structure redevient alors hyperstatique et l'application du modèle présenté ci-dessus n'a plus de sens.

La valeur du moment de flexion à appliquer extérieurement nécessite cependant la formulation d'importantes hypothèses. La sollicitation à considérer dans la rotule résulte de l'application des charges permanentes et utiles, ainsi que de la poussée exercée par le remplissage. Elle est admise équivalente à celle responsable de l'apparition de l'articulation, soit correspondant à un couple moment de flexion – effort normal situé sur la courbe d'interaction définie pour la section et le matériau considéré. Dépendant de l'historique de chargement, ce couple d'efforts n'est pas connu et il a été décidé de l'admettre a priori. Par souci de simplicité, il a en outre été admis égal dans chacune des trois rotules  $A$ ,  $C$  et  $B$ , l'influence de cette hypothèse étant discutée dans l'étude paramétrique présentée au chapitre 8.

La seule indication nous permettant d'évaluer l'ordre de grandeur de ces efforts résulte dans le fait que l'effort normal sollicitant généralement les arcs en maçonnerie est faible [6.35]. L'application du modèle à différents cas a permis de constater que l'admission d'une valeur unique et constante de cet effort normal et de son moment de flexion correspondant selon le diagramme d'interaction, permettait d'obtenir une bonne approximation de la capacité portante de l'arc dans la majorité des arcs présentant une géométrie et des dimensions usuelles. La considération de cette grandeur, égale à 1250 kN, ne s'appuyant sur aucune justification physique, il est supposé que son influence sur la résistance ultime de l'arc n'est pas très importante. Cette affirmation sera discutée plus en détail lors de l'étude paramétrique présentée au chapitre 8.

L'annexe 14 récapitule les formules nécessaires et suggère une configuration pour le fichier Excel permettant de déterminer le multiplicateur limite des charges utiles.

## 6.7. Conclusions

Se fondant sur les raisonnements précédemment élaborés aux micro- et méso-niveaux, le présent chapitre s'attache à l'analyse au macro-niveau et présente l'étude de l'arc en maçonnerie en tant qu'élément structurel. Basé sur le théorème cinématique de la plasticité, le modèle proposé ici tient compte du comportement plastique de l'élément structurel et du matériau le constituant et permet d'évaluer la capacité portante de l'arc sous la forme d'un multiplicateur limite des charges utiles, via un processus itératif. L'évaluation ainsi obtenue présente les avantages de résulter de l'application d'un modèle analytique simple, fiable et transparent.

Quelques améliorations du modèle pourraient néanmoins être envisagées, notamment en ce qui concerne l'évaluation de la poussée latérale du remplissage et la considération des moments sollicitant les rotules. Mentionnons enfin qu'une analyse complète d'un pont en maçonnerie requière évidemment la vérification d'autres éléments structurels, comme les culées ou les tympans, ainsi que celle liée à l'occurrence d'un autre mode de rupture, tel le snap-through, dans le cas d'arcs dont la configuration laisserait supposer que ce mode de ruine serait critique.

## 6.8. Références

- [6.1] Heyman J. (1969) *The safety of masonry arches*, Int. J. Mech. Sci., vol. 11, pp. 363-385.
- [6.2] Heyman J. (1966) *The stone skeleton*, Int. J. Solids Structures, vol. 2, pp. 269-279.
- [6.3] Delacrétaz P. (1991) *Vieux ponts du pays de Vaud*, Ketty & Alexandre Editeurs, Chapelle-sur-Moudon, 143 p.
- [6.4] Kumar P., Bhandari N. M. (2005) *Non-linear Finite Element Analysis of Masonry Arches for Prediction of Collapse Load*, Structural Engineering International, 3, pp. 166-174.
- [6.5] Page J. (1987) *Load tests to collapse on two arch bridges at Preston, Shropshire and Prestwood, Staffordshire*, Transport and Road Research Laboratory, TRRL Research Report 110, 25 p.
- [6.6] Heyman J. (1972) *Coulomb's Memoir on Statics. An Essay in the History of Civil Engineering*, Imperial College Press, 212 p.
- [6.7] Gilbert M. (1993) *The behaviour of masonry arch bridges containing defects*, PhD Thesis, Bolton Institute of Higher Education, 278 p.
- [6.8] Page J. (1988) *Load tests to collapse on two arch bridges at Torksey and Shinafoot*, Research Report 159, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 22 p.
- [6.9] Page J. (1987) *Load tests to collapse on two arch bridges at Preston, Shropshire and Prestwood, Staffordshire*, Research Report 110, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 25 p.
- [6.10] Smith F. W., Harvey W. J., Vardy A. E. (1990) *Three-hinge analysis of masonry arches*, The structural Engineer, vol. 68, n°11, pp. 203-213.
- [6.11] Royles R., Hendry A. W. (1991) *Model tests on masonry arches*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 91, pp. 299-321.

- [6.12] Begimgil M. *Behaviour of restrained 1.25 m span model masonry arch bridge*, Proceedings of the First International Conference on Arch Bridges held at Bolton, UK, pp. 321-325.
- [6.13] Melbourne C., Gilbert M. (1994) *The application of limit analysis techniques to masonry arch bridges*, Bridge Assessment Management and Design Conference, pp. 193-198.
- [6.14] Page J. (1995) *Load tests to collapse on masonry arch bridges*, Proceedings of the First International Conference on Arch Bridges, pp. 289-298.
- [6.15] León J., Espejo S. R. (2007) *Load test to collapse on the masonry arch bridge at Urnieta*, Proceedings of the 5th International Conference on Arch Bridges, pp. 969-976.
- [6.16] Cavicchi A., Gambarotta L. (2005) *Collapse analysis of masonry bridges taking into account arch-fill interaction*, Engineering Structures, 27, pp. 605-615.
- [6.17] Page J. (1989) *Load tests to collapse on two arch bridges at Strathmashie and Barlae*, Research Report 201, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 17 p.
- [6.18] Hendry A. W., Criesfield M. A., Melbourne C., McIlwaine D. (1988) *Discussion on "Application of the mechanism analysis to masonry arches"* by W. J. Harvey, The Structural Engineer, vol. 66, n°20, pp. 331-339.
- [6.19] Choo B. S., Coutie M. G., Gong N. G. (1991) *Finite-element analysis of masonry arch bridges using tapered elements*, Porc. Instn. Civ. Engrs., 91, pp. 755-770.
- [6.20] Melbourne c., Walker P. J. (1988) *Load test to collapse of model brickwork masonry arches*, Brick and Block masonry, vol. 2, John W. DeCourcy (ed.), Elsevier Applied Science, New York, pp. 991-1002.
- [6.21] Melbourne C., Walker P. J. (1990) *Load test to collapse of a 6 m span brickwork arch bridges*, Research Report 189, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport.
- [6.22] Hendry A. W., Davies S. R., Royles R., Ponniah D. A., Forde M. C., Komeyli-Birjhandi F. (1986) *Load test to collapse on a masonry arch bridge at Bargower, Strathclyde*, Contractor Report 26, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 107 p.
- [6.23] Hughes T. G., Davies M. C. R., Taunton P. R. (1998) *The influence of soil and masonry type on the strength of masonry arch bridges*, Arch Bridges, Sinopoli (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 321-330.
- [6.24] RING 2.0. (2007) *Theory & Modelling Guide*. Limitstate Ltd, 85 p.
- [6.25] Ng K.-H., Fairfield C. A. (2004) *Modifying the mechanism method of masonry arch bridge analysis*, Construction and Building Materials, 18, pp. 91-97.
- [6.26] Crisfield M. A., Packham A. J. (1987) *A mechanism program for computing the strength of masonry arch bridges*, Research Report 124, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 20 p.
- [6.27] Hughes T. G., Blackler M. J. (1997) *A review of the UK masonry arch assessment methods*, Proc. Instn. Civ. Engrs. Structs. & Bldgs, 122, pp. 305-315.

- [6.28] Ludescher H., Brühwiler E. (2004) *Vergrößerungsfaktoren für die Wirkung von Strassenverkehr auf bestehende Brücken*, Rapport Office Fédéral des Routes (OFROU) n°571, 187 p.
- [6.29] Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes (2009) *Norme SIA 269/1 Maintenance des structures porteuses – Action (Projet de consultation)*, 20 p.
- [6.30] Martin-Caro Alamo, J. A., Martinez Martinez, J. L., Leon Gonzalez J. (2000) *Structural Meaning of Backfill in Masonry Arch Bridges*, Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Brick and Block Masonry Conference, Madrid, vol. 2, pp. 1169-1186.
- [6.31] Grandjean A., Brühwiler E. (2006) *Murs de soutènement en maçonnerie de pierre naturelle. Directive pour l'évaluation de l'état et les concepts d'intervention*, Rapport interne EPFL-MCS n° 05.11, 41 p.
- [6.32] Brühwiler E. (2009) *Sanneviadukt Gümmenen, Verformungsmessungen – Interpretation der Ergebnisse*, Rapport interne EPFL-MCS n° 230805.1, 21 p.
- [6.33] Grandjean A., Brühwiler E. (2009) *Advanced examination of historical masonry bridges for future traffic demands*, Proceedings of the Third International Congress on Construction History, Cottbus, pp. 737-743.
- [6.34] Grandjean A., Brühwiler E. (2009) *Load-bearing capacity of masonry arch bridges using a plastic model*, Proceedings of the International Conference on Protection of Historical Buildings, Prohitech 09, Rome, Italy, pp. 195-200.
- [6.35] Hughes T. G., Pritchard R. (1998) *In situ measurement of dead and live load stresses in a masonry arch*, Engineering Structures, vol. 20, n°1-2, pp. 5-13.

## **6.9. Références complémentaires <sup>8</sup>**

- [6.36] Aoki T., Sabia D., Rivella D., Komiyama T. (2007) *Structural characterization of a stone arch bridge by experimental tests and numerical model updating*, Internal journal of Architectural Heritage, vol. 1, pp. 227-250.
- [6.37] Ashour A. F., Garrity S. W. (1998) *An upper bound analysis for the strength assessment of masonry arch bridges*, Arch bridges: history, analysis, assessment, maintenance and repair, Proceedings of the Second International Arch Bridge Conference, pp. 139-146.
- [6.38] Audenaert A., Peremans H., Reniers G. (2006) *An analytical model to determine the ultimate load on masonry arch bridges*, Journal of Engineering Mathematics, vol. 59, n°3, pp. 323-336.
- [6.39] Blasi C., Foraboschi P. (1994) *Analytical Approach to Collapse Mechanisms of Circular Masonry Arch*, Journal of Structural Engineering, vol. 120, issue 8, pp. 2288-2309.
- [6.40] Boothby T. E. (1992) *Collapse modes of masonry arch bridges*, Masonry International. vol. 9, n° 2, pp. 62-69.
- [6.41] Boothby T. E. (1995) *Assessment of masonry arch bridges by service load testing*, Arch Bridges, Proceedings of the First International Conference on Arch Bridges, pp. 345-354.

---

<sup>8</sup> Bien que non citées dans le texte, les références dites complémentaires sont susceptibles d'apporter un supplément d'information au lecteur.

- [6.42] Boothby T. E. (1998) *Service load response of masonry arch bridges*, Journal of Structural Engineering, vol. 124, n°1, pp. 17-23.
- [6.43] Boothby T. E. (2001) *Load Rating of Masonry Arch Bridges*, Journal of Bridge Engineering, vol. 6, issue 2, pp. 79-86.
- [6.44] Boothby T. E. (2004) *Load Rating of Masonry Arch Bridges: Refinements*, Journal of Bridge Engineering, vol. 9, n°3, pp. 304-307.
- [6.45] Brencich A., De Francesco U. (2004) *Assessment of Multispan masonry Arch Bridges. I: Simplified Approach*, Journal of Bridge Engineering, ASCE, vol. 9, issue 6, pp. 582-590.
- [6.46] Brencich A., De Francesco U. (2004) *Assessment of Multispan masonry Arch Bridges. II: Examples and Applications*, Journal of Bridge Engineering, ASCE, vol. 9, issue 6, pp. 591-598.
- [6.47] Cavicchi A., Gambarotta L. (2007) *Lower bound limit analysis of masonry bridges including arch-fill interaction*, Engineering Structures, vol. 29, issue 11, pp. 3002-3014.
- [6.48] Clemente P., Occhiuzzi A., Raithel A. (1995) *Limit behavior of stone arch bridges*, Journal of Structural Engineering, vol. 121, issue 7, pp. 1045-1050.
- [6.49] Como, M. (1998) *Minimum and maximum thrust states in Statics of ancient masonry bridges*, Arch bridges: history, analysis, assessment, maintenance and repair, Proceedings of the Second International Arch Bridge Conference, pp. 133-137.
- [6.50] Cooke N. (1987) *Instability of masonry arches*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 83, pp. 497-515.
- [6.51] Crisfield M. A. (1985) *Finite element and mechanism methods for the analysis of masonry and brickwork arches*, Research Report 19, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 23 p.
- [6.52] Drosopoulos G. A., Stavroulakis G. E., Massalas C. V. (2006) *Limit analysis of a single span masonry bridge with unilateral frictional contact interfaces*, Engineering Structures, 28, pp. 1864-1873.
- [6.53] Fanning P. J., Sobczak L., Boothby T. E., salomoni V. (2005) *Load testing and model simulations for a stone arch bridge*, Bridge Structures, vol. 1, n°4, pp. 367-378.
- [6.54] Gilbert M., Melbourne C. (1994) *Rigid-block analysis of masonry structures*, The Structural Engineer, vol. 72, n°21, pp. 356-361.
- [6.55] Harvey W. J. (1991) *Stability, strength, elasticity and thrustlines in masonry structures*, The Structural Engineer, vol. 69, n°9, pp. 191-184.
- [6.56] Harvey W. J., Smith F. W. (1991) *The behaviour and assessment of multispan arches*, The Structural Engineer, vol. 69, n°24, pp. 411-417.
- [6.57] Harvey W. J. (1995) *Assessment of masonry Arch Bridges using Stability Analysis*, Proc. 13th Structures Congress, Part 1, pp. 996-999.
- [6.58] Harvey W. J. (1998) *Some notes on system behaviour in arch bridges*, Arch bridges: history, analysis, assessment, maintenance and repair, Proceedings of the Second International Arch Bridge Conference, pp. 315-319.
- [6.59] Hendry A. W., Davies S. R., Royles R. (1985) *Test on stone masonry arch at Bridgemill – Girvan*, Contractor Report 7, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 63 p.

- [6.60] Heyman J. (1982) *The masonry arch*, Ellis Horwood Series in Engineering Science, Chichester, 117 p.
- [6.61] Heyman J. (2001) *Why ancient cathedrals stand up*, Ingenia Magazine, issue 10, pp. 19-23.
- [6.62] Kumar A. (1998) *Interactive assessment of masonry arch bridges*, Arch bridges: history, analysis, assessment, maintenance and repair, Proceedings of the Second International Arch Bridge Conference, pp. 205-211.
- [6.63] Kumar A. (2006) *Mechanism based assessment of masonry arch bridges*, Structural Engineering International, 3, pp. 226-234.
- [6.64] Livesley R. K. (1978) *Limit analysis of structures formed from rigid blocks*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 12, pp. 1853-1871.
- [6.65] Livesley R. K. (1982) *The Collapse Analysis of Masonry Arch Bridges*, Proc. Conf. Applied Solid Mechanics, pp. 261-274.
- [6.66] Loo Y.-C., Yang Y. (1991) *Cracking and failure analysis of masonry arch bridges*, Journal of Structural Engineering, vol. 117, n°6, pp. 1641-1659.
- [6.67] Loo Y.-C. (1995) *Collapse Load Analysis of Masonry Arch Bridges*, Arch Bridges, Proceedings of the First International Conference on Arch Bridges, pp. 167-173.
- [6.68] Martin-Caro J. A., Martinez J. L., Leon J. (2004) *A First Level Structural Analysis Tool for the Spanish Railways Masonry Arch Bridges*, Proceedings of Arch Bridge IV, Advances in assessment, structural design and construction.
- [6.69] Melbourne C., Wang J. (1995) *The 3-dimensional behaviour of masonry arches*, Arch Bridges, Proceedings of the First International Conference on Arch Bridges, pp. 121-128.
- [6.70] Molins C., Roca P. (1998) *Load capacity of multi-arch masonry bridges*, Arch bridges: history, analysis, assessment, maintenance and repair, Proceedings of the Second International Arch Bridge Conference, pp. 213-222.
- [6.71] Ochsendorf J. A. (2006) *The masonry arch on spreading supports*, The Structural Engineer, vol. 84, n°2 pp. 29-35.
- [6.72] Orban, Z. (2004) *Assessment, reliability and maintenance of masonry arch railway bridges in Europe*, Proceedings of Arch Bridge IV, Advances in assessment, structural design and construction.
- [6.73] Proske D., Lieberwirth P., van Gelder P. (2007) *Sicherheitsbeurteilung historischer Steinbogenbrücken*, Mauerwerk 11, Heft 4, pp. 186-189.
- [6.74] Schlegel R., Will J., Popp J. (2003) *Neue Wege zur realistischen Standsicherheitsbewertung gemauerter Brückenviadukte und Gewölbe unter Berücksichtigung der Normung mit ANSYS*, International Congress on FEM Technology.
- [6.75] Tomor A. K., Melbourne C. (2006) *Study of masonry arch bridge limit states with acoustic emission techniques*, Proceedings of the IABMAS06 Conference.

## 7. Validation

Trois cas d'étude ont été choisis en vue de valider le modèle précédemment présenté. Pour chacun d'entre eux, les caractéristiques géométriques et mécaniques nécessaires ont été relevées, puis implémentées dans le modèle représenté sous la forme d'un tableau Excel, tel que celui proposé à l'annexe 14.

Les deux premiers exemples examinés sont respectivement un ouvrage aujourd'hui piétonnier situé dans le canton de Berne et un pont romain, placé sur le tracé de l'ancienne Via Domitia, aux abords du village de Lurs, dans les Alpes de Haute Provence. Le modèle développé a permis le calcul de leur multiplicateur limite des charges utiles respectif dont la valeur a ensuite été comparée à celle fournie par le logiciel RING 2.0.

Le troisième cas traité fait partie de l'ensemble des ponts existants testés jusqu'à la ruine par le Transport and Road Research Laboratory (Crowthorn, UK) dans les années 80. Le Shinafoot Bridge est un ouvrage à portée unique et a été choisi en raison de son mode de rupture conforme à celui admis dans le modèle élaboré dans cette étude [7.1].

### 7.1. *Schwarzwasserbrücke*

Le Schwarzwasserbrücke est un pont droit, supporté par un arc, d'une ouverture égale à 17.6 m. Aujourd'hui piétonnier, il est situé sur l'ancienne route cantonale entre Mittelhäusern et Aekenmatt, dans le canton de Berne. Erigé en 1832, son unique arc, au tracé d'intrados surbaissé suivant un arc de cercle, est constitué d'une maçonnerie de tuf calcaire soigneusement appareillée, que l'on peut légitimement supposer liée au mortier de chaux aérienne ou hydraulique (figure 7.1).



Figure 7.1 : *Le Schwarzwasserbrücke*

Des vues en plan, en élévation et en coupe du Schwarzwasserbrücke peuvent être consultées en annexe 15.

### 7.1.1. Micro-niveau : Loi constitutive adoptée

Les caractéristiques mécaniques indicatives du tuf calcaire sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Tableau 1 : Caractéristiques mécaniques indicatives du tuf calcaire

Résistance en compression	40 MPa
Module d'élasticité	25000 MPa
Résistance en traction	9 MPa
Energie de rupture en traction	32 J/m <sup>2</sup>

L'appareillage peut être qualifié de type G4 (Maçonnerie à assises régulières, en moellons équarris), selon la Recommandation SIA V 178 [7.2] (voir également [7.3]).

L'importance réduite des caractéristiques mécaniques du mortier pour ce genre d'appareillage (voir chapitre 4) implique qu'il ne semble pas nécessaire de leur attacher de valeur ici. Il s'agit visuellement, et conformément aux principes de construction de l'époque, d'un mortier de chaux, peu rigide, qui ne perturbera donc pas le comportement habituel de la maçonnerie.

Les considérations formulées précédemment au chapitre 4 permettent d'établir une loi constitutive indicative du comportement de ce type de maçonnerie. Celle-ci peut être formulée sur la base des caractéristiques mécaniques de la pierre et de l'appareillage observé, puis approximée par une équation parabolique (figure 7.2), telle celle-présentée ci-dessous :

$$\sigma = 0.726\varepsilon^2 + 6.095\varepsilon \quad (7.1)$$

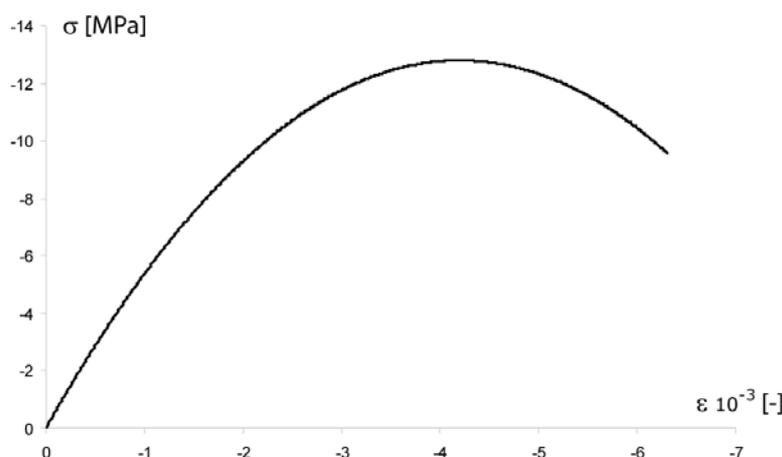


Figure 7.2 : Loi constitutive adoptée pour la maçonnerie du Schwarzwasserbrücke

### 7.1.2. Méso-niveau : Conditions de formation de la rotule

La section d'arc considérée est rectangulaire, telle que représentée sur la figure 7.3.

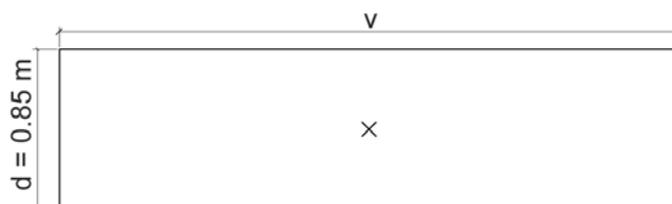


Figure 7.3 : Section admise pour l'arc du Schwarzwasserbrücke

La largeur efficace  $v$  de la section considérée est dépendante de la charge appliquée et de sa diffusion dans le remplissage (voir § 6.5). Elle n'est par conséquent pas chiffrée à ce stade de l'étude.

En admettant toutefois une valeur pour ce paramètre, un diagramme d'interaction similaire à ceux établis au chapitre 5 pourrait être tracé. Il permettrait de représenter graphiquement la résistance effective de la section considérée. Son élaboration n'étant cependant pas strictement nécessaire à l'application du modèle, elle ne sera pas effectuée ici.

### 7.1.3. Macro-niveau : Capacité portante de l'arc

#### 7.1.3.1. Géométrie de l'arc

L'étape suivante consiste en le relevé de la géométrie de l'arc et en l'expression du tracé d'intrados sous la forme d'une équation polynomiale de degré 4 (figure 7.4).

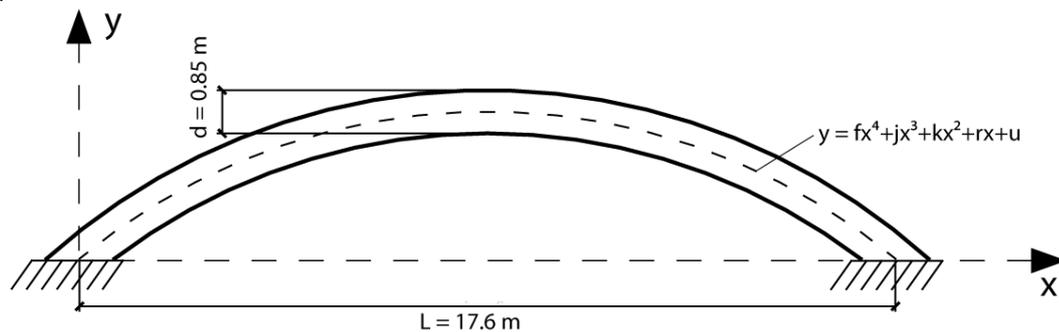


Figure 7.4 : Relevé de la géométrie de l'arc

En l'occurrence, le tracé d'intrados du Schwarzwasserbrücke à l'axe peut être approximé de manière optimale par l'équation suivante (figure 7.5):

$$y = -8.3 \cdot 10^{-14} x^4 + 2.8 \cdot 10^{-9} x^3 - 7.1 \cdot 10^{-5} x^2 + 0.836x \quad (7.2)$$

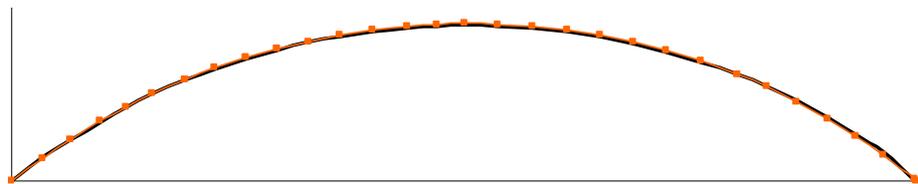


Figure 7.5 : Approximation polynomiale du tracé d'intrados de l'arc à l'axe. Le tracé original est en noir, tandis que le tracé approximé est représenté par des petits carrés orange.

#### 7.1.3.2. Charges permanentes

Les caractéristiques du matériau de remplissage et de la voie de roulement (hauteurs et poids propres) relevées sont résumées sur la figure 7.6.

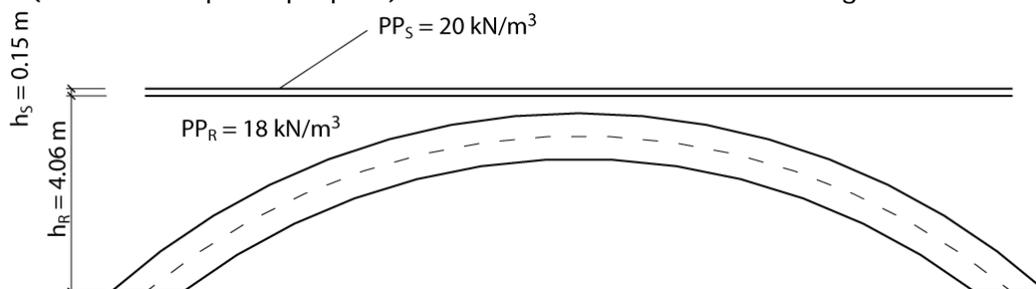


Figure 7.6 : Caractéristiques du matériau de remplissage et de la voie de roulement

Les équations (6.3) à (6.8) permettent alors d'évaluer les forces et moments résultants exercés par les charges permanentes sur les différentes portions de l'arc.

### 7.1.3.3. Effet du remplissage

Les paramètres et caractéristiques mécaniques du matériau de remplissage nécessaires à l'évaluation de la poussée latérale exercée suite à la déformation de l'arc sont résumés ci-dessous.

Tableau 7.2 : Caractéristiques du matériau de remplissage

$\varphi$	[°]	30
$c$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0
$m_p$	[-]	0.33
$m_{pc}$	[-]	0.01

Ces caractéristiques permettent de calculer la résultante de l'effort horizontal appliqué par le remplissage sur l'arc, ainsi que le moment de flexion induit par cette dernière par rapport aux rotules  $B$  et  $D$ , respectivement selon les équations (6.12) à (6.14).

### 7.1.3.4. Modèle de charge

Le modèle de charge considéré est celui décrit au paragraphe 6.5. Les charges ponctuelle et répartie, la hauteur de remplissage, ainsi que l'angle de diffusion à travers ce dernier, pris en considération sont résumés ci-dessous.

Tableau 7.3 : Caractéristiques du modèle de charge

$\delta$	[°]	30
$h_{Rclé}$	[m]	1.03
$Q$	[kN]	160
$q_{rép}$	[kN/m <sup>2</sup> ]	5

### 7.1.3.5. Application du modèle

Les diverses caractéristiques énumérées ci-dessus ainsi que les différentes équations d'équilibre permettant d'établir les réactions aux extrémités de la partie active de l'arc, les efforts intérieurs dans la section correspondant à la rotule  $D$  et le multiplicateur limite de la charge utile (équations (6.19) à (6.32)) peuvent ensuite être implémentées dans un tableau Excel, tel que celui présenté à l'annexe 14.

## 7.1.4. Résultats obtenus et validation

Une visualisation du fichier Excel mentionné ci-dessus, faisant apparaître le résultat souhaité, est présentée en annexe 16. En admettant un moment de flexion dans les rotules  $A$ ,  $B$  et  $C$  unique et constant, correspondant, selon le diagramme d'interaction, à un effort normal égal à 1250 kN (voir § 6.6), le multiplicateur limite des charges utiles obtenu après itération sur la position des rotules est égal à :

$$n = 3.85$$

Selon le modèle présenté ici, l'arc du Schwarzwasserbrücke est donc à même de supporter une charge presque quatre fois supérieure à celle préconisée.

Le logiciel RING 2.0 a été développé spécialement pour l'évaluation de la capacité portante des arcs en maçonnerie [7.4]. Se basant sur la méthode du mécanisme de Heyman [7.5], le programme établit l'équilibre de chaque interface de contact

entre les voussoirs en considérant les possibilités d'écrasement, de glissement et de formation d'une rotule. Un algorithme de programmation linéaire permet ensuite de déterminer le multiplicateur limite des charges utiles. Se restreignant à une modélisation bidimensionnelle, RING 2.0 ignore l'effet positif des tympans, mais prend en compte la poussée passive du remplissage, évaluée selon la théorie de Rankine, à laquelle est toutefois ajouté un facteur de réduction, tel que celui adopté dans le modèle développé ici. Des indications plus détaillées quant aux hypothèses émises et aux paramètres considérés peuvent être consultées dans le guide du programme [7.4]. RING 2.0 a été validé par la comparaison des résultats obtenus avec des valeurs expérimentales [7.4 ; 7.6-7.8] et constitue depuis l'un des outils informatiques les plus communément utilisés pour l'évaluation de la capacité portante des ponts en maçonnerie.

Des hypothèses conformes à celles admises dans le modèle considéré ici ont été acceptées pour la modélisation avec RING 2.0.

Le multiplicateur limite des charges utiles obtenu avec RING 2.0 est le suivant :

$$n = 4.24$$

Le modèle présenté dans ce travail est donc capable de fournir une réponse proche de celle donnée par un logiciel informatique dont la validité est reconnue, puisqu'une différence inférieure à 10 % a été obtenue. Notons encore que la valeur résultant de l'application du modèle analytique est conservatrice par rapport à celle fournie par RING 2.0.

Le modèle testé fournit également la position critique des rotules obtenue à la ruine. Celle-ci peut être représentée graphiquement, comme suggéré dans l'annexe 16, puis comparée avec celle résultant de l'analyse effectuée avec le logiciel RING 2.0. Une très bonne correspondance de la configuration des rotules peut alors être constatée (figure 7.7).

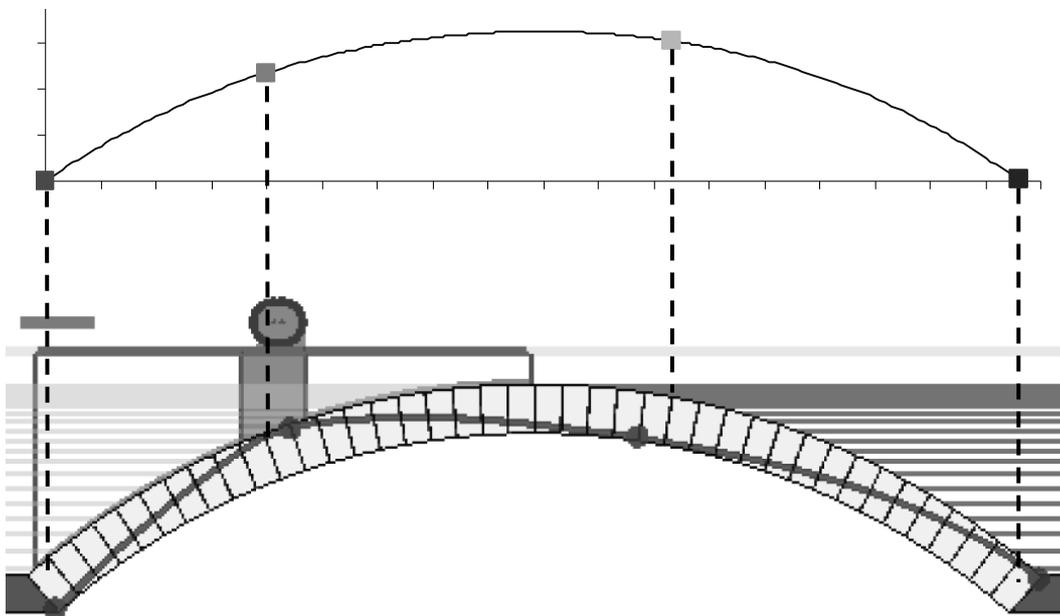


Figure 7.7 : Comparaison de la position des rotules déterminée avec le modèle et avec RING 2.0

## 7.2. Pont romain sur le ravin du Buès

Datant du II<sup>ème</sup> siècle de notre ère, le Pont romain franchissant le ravin du Buès, près de Lurs, est long d'environ 30 m. L'unique arc en plein cintre supportant la chaussée franchit une ouverture de 8.50 m. Il est constitué d'une maçonnerie de pierre calcaire, dont le mortier a pratiquement disparu en surface. L'appareillage du bandeau n'est pas révélateur de celui constituant l'arc, dont la facture est moins soignée (figure 7.8).

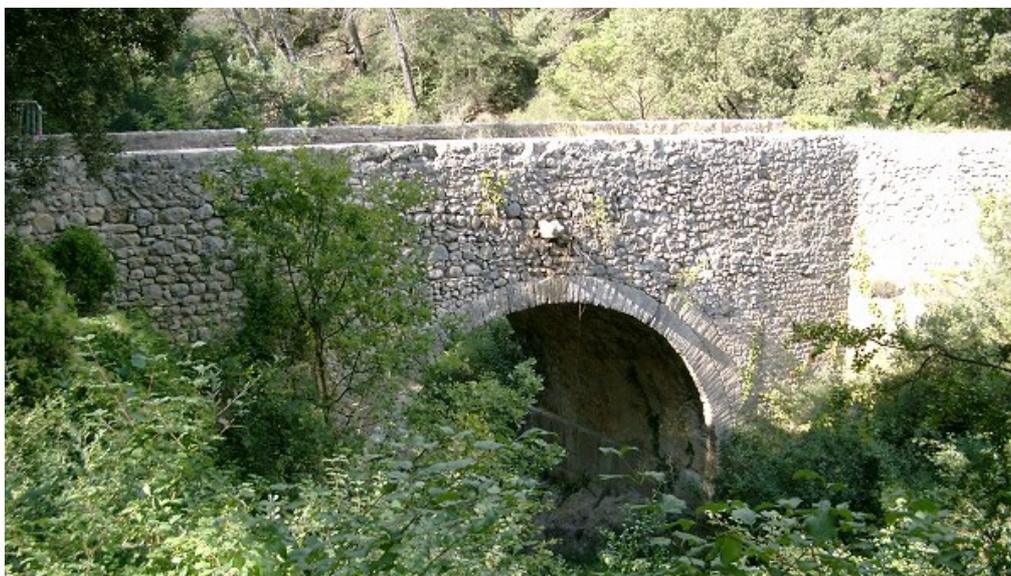


Figure 7.8 : Le Pont romain sur le ravin du Buès (Photo : Nicolas Janberg, [www.structurae.de](http://www.structurae.de))

Une vue en élévation de cet ouvrage peut être consultée en annexe 17, nous ne disposons pas de vue en plan, ni de coupe. Il est néanmoins mentionné dans la littérature que la largeur du Pont romain entre ses parapets est égale à 6 m [7.9].

### 7.2.1. Micro-niveau : Loi constitutive adoptée

Les caractéristiques mécaniques indicatives de la pierre calcaire utilisée pour l'élaboration de la maçonnerie du Pont romain sur le ravin du Buès sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Tableau 4 : Caractéristiques mécaniques indicatives du calcaire

Résistance en compression	125 N/mm <sup>2</sup>
Module d'élasticité	48000 N/mm <sup>2</sup>
Résistance en traction	12 N/mm <sup>2</sup>
Energie de rupture en traction	3 J/m <sup>2</sup>

L'appareillage de l'arc peut être qualifié de type B3 (Maçonnerie à assises irrégulières continues, en moellons bruts), selon la Recommandation SIA V 178 [7.2] (voir également [7.3]).

La maçonnerie est vraisemblablement liée par un mortier de chaux, peu rigide et à faible résistance.

Ainsi, sur la base des considérations précédemment établies au chapitre 4 et des indications relatives à la pierre employée et au type d'appareillage mis en place, une loi constitutive indicative pour le comportement de ce type de maçonnerie peut être formulée et approximée par l'équation parabolique suivante (figure 7.9) :

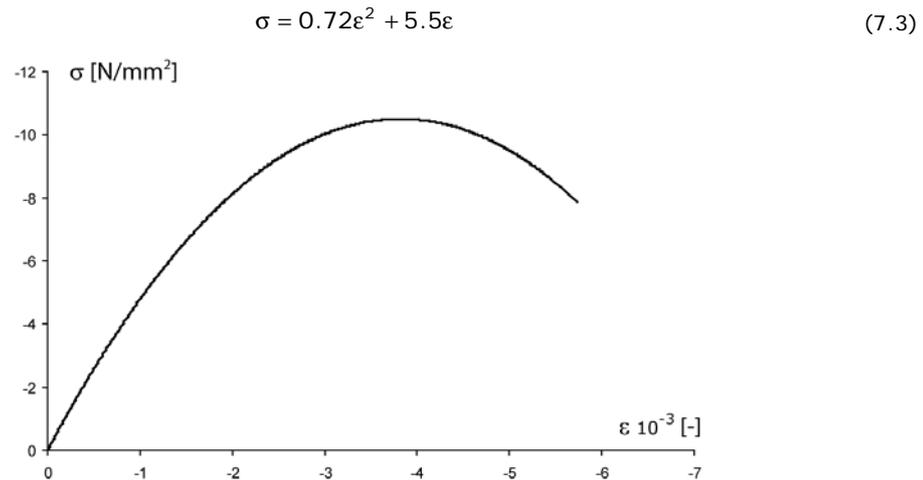


Figure 7.9 : Loi constitutive adoptée pour la maçonnerie du Pont romain sur le ravin du Buès

## 7.2.2. Méso-niveau : Conditions de formation de la rotule

La section d'arc considérée est rectangulaire, telle que représentée sur la figure 7.10.

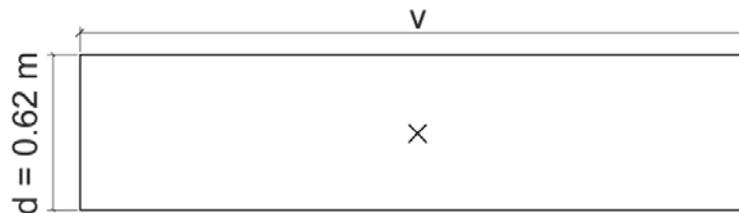


Figure 7.10 : Section admise pour l'arc du Pont romain sur le ravin du Buès

La largeur efficace  $v$  de cette section, fonction de la charge appliquée et de sa diffusion dans le remplissage (voir § 6.5), n'est pas quantifiée à ce stade de l'étude.

En admettant toutefois une valeur pour ce paramètre, un diagramme d'interaction similaire à ceux établis au chapitre 5 pourrait être tracé. Il permettrait de représenter graphiquement la résistance effective de la section considérée. Son élaboration n'étant cependant pas strictement nécessaire à l'application du modèle, elle ne sera pas effectuée ici.

## 7.2.3. Macro-niveau : Capacité portante de l'arc

### 7.2.3.1. Géométrie de l'arc

L'étape suivante consiste en le relevé de la géométrie de l'arc et en l'expression du tracé d'intrados sous la forme d'une équation polynomiale de degré 4 (figure 7.11). Comme déjà mentionné au § 2.1.1, il peut être considéré que, dans la majorité des cas d'arcs en plein cintre, ces derniers peuvent en réalité être associés à une valeur de surbaissement inférieure, grâce à la présence d'un remplissage rigide fréquemment placé au-dessus des naissances des arcs. Dans le but d'élargir la validation du modèle développé dans ce travail aux cas potentiels d'arcs présentant un tracé d'intrados effectivement en plein cintre complet, la présente application ne tient pas compte d'un tel effet. Cette hypothèse est en outre étayée par l'absence d'information quant à la nature du remplissage du Pont romain sur le ravin du Buès.

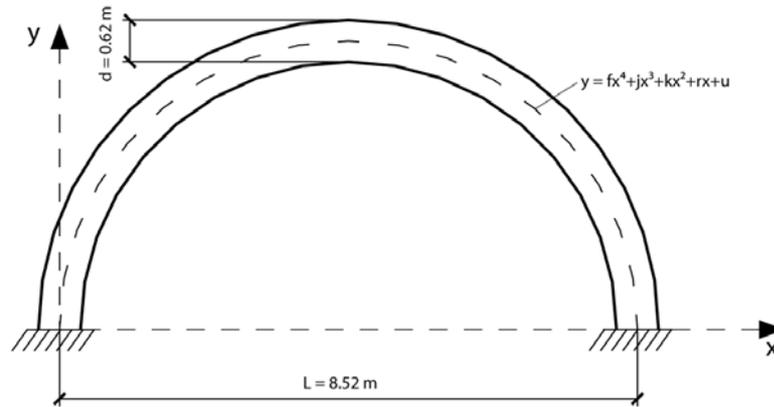


Figure 7.11 : Relevé de la géométrie de l'arc

Le tracé d'intrados à l'axe de ce pont peut être approximé par l'équation suivante (figure 7.12) :

$$y = -8 \cdot 10^{-12} x^4 + 1.36 \cdot 10^{-7} x^3 - 9.61 \cdot 10^{-4} x^2 + 3.24x \quad (7.4)$$

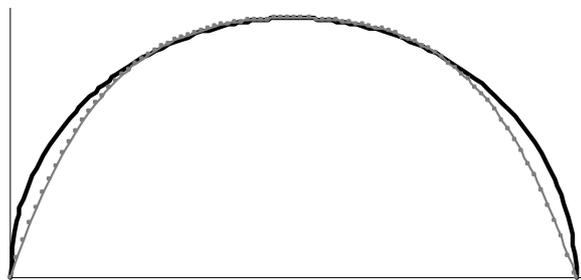


Figure 7.12 : Approximation polynomiale du tracé d'intrados de l'arc à l'axe. Le tracé original est figuré par un trait épais, tandis que le tracé approximé est représenté par un trait fin, surmonté de petits carrés.

Alors que l'approximation du tracé d'intrados par une équation polynomiale de degré quatre était optimale dans le cas d'un arc surbaissé, la corrélation obtenue dans pour un arc en plein cintre est moins bonne. Elle reste néanmoins jugée suffisante pour l'application du modèle considéré.

### 7.2.3.2. Charges permanentes

Les caractéristiques du matériau de remplissage et de la voie de roulement (hauteurs et poids propres) relevées sont résumées sur la figure 7.13.

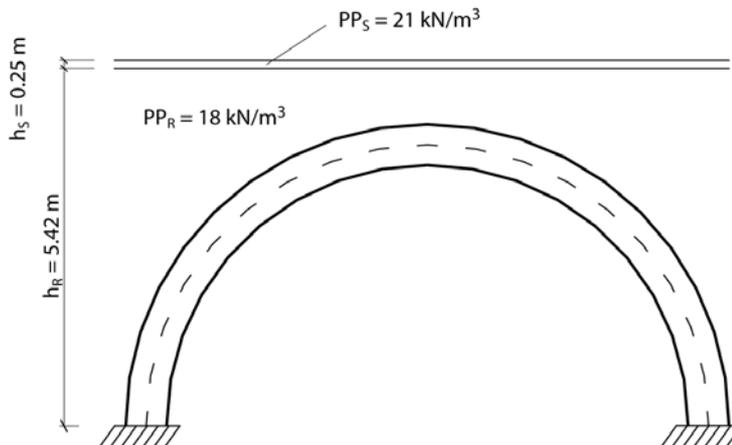


Figure 7.13 : Caractéristiques du matériau de remplissage et de la voie de roulement

Les équations (6.3) à (6.8) permettent alors d'évaluer les forces et moments résultants exercés par les charges permanentes sur les différentes portions de l'arc.

### 7.2.3.3. Effet du remplissage

Les paramètres et caractéristiques mécaniques du matériau de remplissage nécessaires à l'évaluation de la poussée latérale exercée suite à la déformation de l'arc sont résumés dans le tableau 7.5.

Tableau 7.5 : Caractéristiques du matériau de remplissage

$\varphi$	[°]	30
$c$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0
$m_p$	[-]	0.33
$m_{pc}$	[-]	0.01

Ces caractéristiques permettent de calculer la résultante de l'effort horizontal exercé par le remplissage sur l'arc, ainsi que le moment de flexion induit par cette dernière par rapport aux rotules  $B$  et  $D$ , respectivement selon les équations (6.12) à (6.14).

### 7.2.3.4. Modèle de charge

Le modèle de charge considéré est celui décrit au paragraphe 6.5. Les charges ponctuelle et répartie, la hauteur de remplissage à la clé ainsi que l'angle de diffusion à travers ce dernier pris en considération sont résumés dans le tableau 7.6.

Tableau 7.6 : Caractéristiques du modèle de charge

$\delta$	[°]	30
$h_{Rclé}$	[m]	0.93
$Q$	[kN]	160
$q_{rép}$	[kN/m <sup>2</sup> ]	5

### 7.2.3.5. Application du modèle

Les différentes caractéristiques énumérées ci-dessus ainsi que les diverses équations d'équilibre permettant d'établir les réactions aux extrémités de la partie active de l'arc, les efforts intérieurs dans la section correspondant à la rotule  $D$  et le multiplicateur limite des charges utiles (équations (6.19) à (6.32)) ont ensuite été implémentées dans un tableau Excel, tel que celui présenté à l'annexe 14.

## 7.2.4. Résultats obtenus et validation

Une visualisation du fichier Excel mentionné ci-dessus est disponible en annexe 18. En admettant un moment de flexion responsable de l'apparition des rotules  $A$ ,  $C$  et  $B$  fixe et correspondant, selon le diagramme d'interaction, à un effort normal égal à 1250 kN (voir § 6.6), le multiplicateur limite des charges utiles obtenu, après itérations sur la position des rotules, est égal à :

$$n = 6.69$$

L'application du modèle développé dans cette étude à cet ouvrage illustre la grande capacité portante dont dispose ce dernier, pourtant âgé de près de 19 siècles. Cette réserve de portance s'explique néanmoins aisément par l'épaisseur de l'arc, conséquente au regard de l'ouverture de l'élément structurel.

En vue d'une comparaison avec le résultat présenté ci-dessus, la capacité portante du Pont romain sur le ravin du Buès a été évaluée au moyen du logiciel

RING 2.0. En respectant des hypothèses identiques à celles émises ci-dessus, le multiplicateur limite des charges utiles obtenu est le suivant :

$$n = 6.09$$

Ce résultat confirme, une nouvelle fois, la fiabilité du modèle développé ici, puisqu'une valeur du multiplicateur limite des charges utiles en excès de seulement 9 % par rapport à celle fournie par RING 2.0 a été obtenue. Remarquons néanmoins que, dans ce cas, si l'on en croit le logiciel, l'évaluation de la capacité portante de l'arc au moyen du modèle n'est pas conservatrice. La très faible différence constatée ne permet cependant pas de se prononcer avec exactitude sur ce point.

Le modèle élaboré fournit également la position critique des rotules obtenue à la ruine. Celle-ci est représentée graphiquement en vue d'une comparaison avec celle proposée par RING 2.0. A nouveau, une très bonne correspondance de la configuration des rotules peut être constatée (figure 7.14).

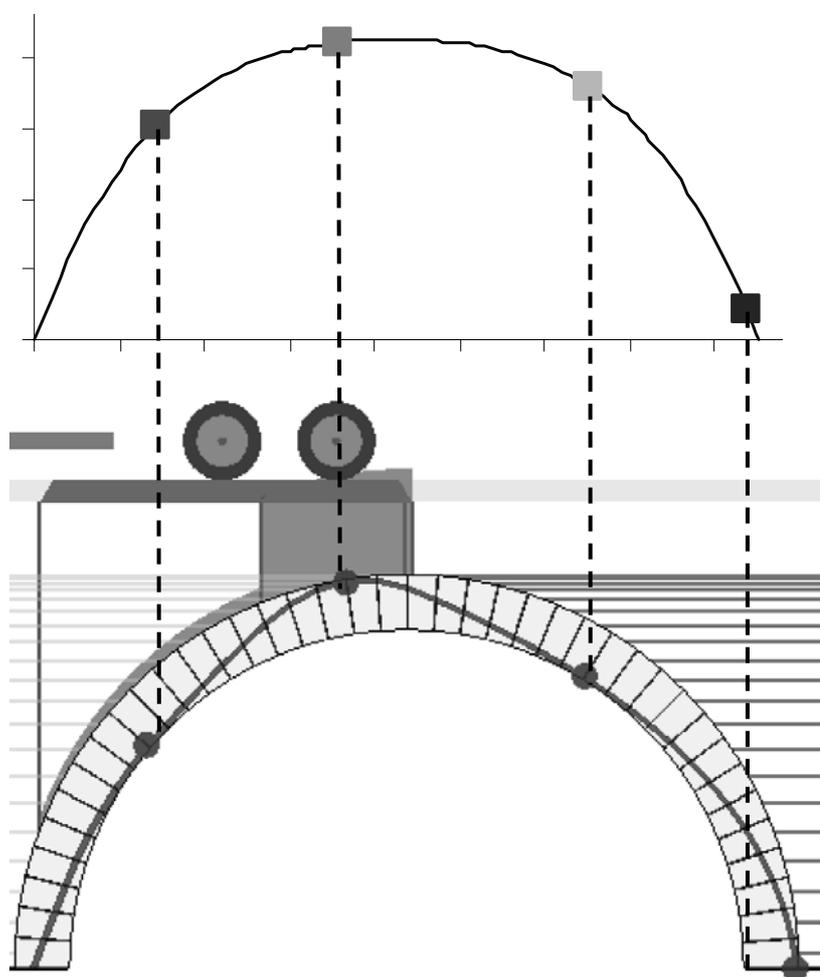


Figure 7.14 : Comparaison de la position des rotules déterminée avec le modèle et avec RING 2.0

### 7.2.5. Remarque concernant le mode de rupture

Le modèle développé dans cette étude admet comme mode de ruine exclusif un mécanisme à quatre rotules, celle d'entre elles dénommée C se trouvant sous la charge appliquée la plus ponctuelle. Le logiciel RING 2.0 se base quant à lui sur une hypothèse identique, à la différence qu'il n'y a pas de restriction quant à la rotule apparaissant au droit de la charge. Il a ainsi pu parfois être observé que, dans le cas d'un arc en plein cintre, le logiciel RING 2.0 proposait un mode de

ruine différent de celui admis par hypothèse dans le modèle, la charge se trouvant alors au droit de la rotule *D* au lieu de la *C* (figure 7.15). Le multiplicateur limite des charges utiles évalué dans ces conditions par RING 2.0 est alors inférieur à celui obtenu grâce au modèle.

Un tel mode de ruine implique une inversion du sens de déformation de l'arc, et par conséquent la nécessité de prendre en compte la poussée latérale exercée par le remplissage sur le rein chargé. Le modèle développé dans cette étude ne permettant pas la considération de cette inversion, il est inapte à reproduire un tel mode de ruine et à évaluer la capacité portante de l'arc correspondante.

Remarquons néanmoins qu'une telle configuration ne nous semble pouvoir se produire qu'en cas d'arcs d'une épaisseur très fine par rapport à l'ouverture. Les conditions d'apparition exacte d'un tel mode n'ayant pu être identifiées dans ce travail, une étude complémentaire permettant de les cerner avec précision serait nécessaire.

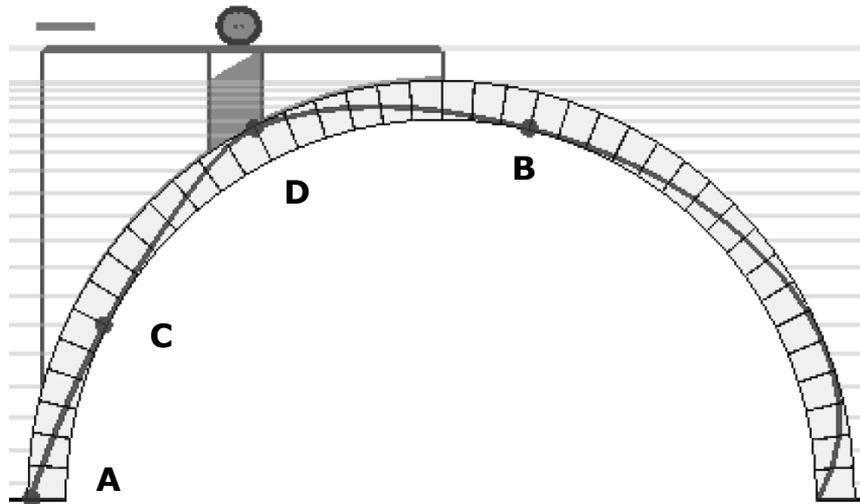


Figure 7.15 : Mode de ruine parfois proposé par le logiciel RING 2.0 pour un arc en plein cintre de faible épaisseur

### 7.3. Shinafoot Bridge

Dans les années 1980, le Transport and Road Research Laboratory de Crowthorne (UK) a entrepris une série d'essais de charge sur des ponts en arc en maçonnerie existants. Menés jusqu'à la ruine des ouvrages, ces essais avaient pour but de réexaminer la validité de la méthode MEXE [7.1].

Le Shinafoot Bridge est un pont droit à portée unique (figure 7.16), qui fut chargé de manière incrémentale jusqu'à la ruine, le 13 mai 1987. Selon les indications fournies dans le rapport d'essai du TRRL [7.1], il était constitué d'une maçonnerie de blocage élaborée avec divers types de pierre, que l'on suppose liées au mortier de chaux aérienne ou hydraulique. Le matériau de remplissage était composé de tout venant et la voie de roulement supportée par un arc surbaissé dont le tracé d'intrados suivait un arc de cercle. Supporté par un arc d'une ouverture de 6.16 m, le Shinafoot Bridge était, selon le TRRL, dans un état jugé bon avant l'essai. Le relevé effectué alors mentionne cependant un léger déplacement vers l'extérieur de la tête du tympan est, entre la clé de voûte et la naissance nord-est, ainsi qu'une fissure longitudinale située à l'intrados de l'arc, au droit du tympan est [7.1].



Figure 7.16 : Le Shinafoot Bridge [7.1]

Suite au chargement incrémental appliqué au quart de l'ouverture de l'arc, le pont s'est ruiné par la formation d'un mécanisme à quatre rotules (figure 7.17).

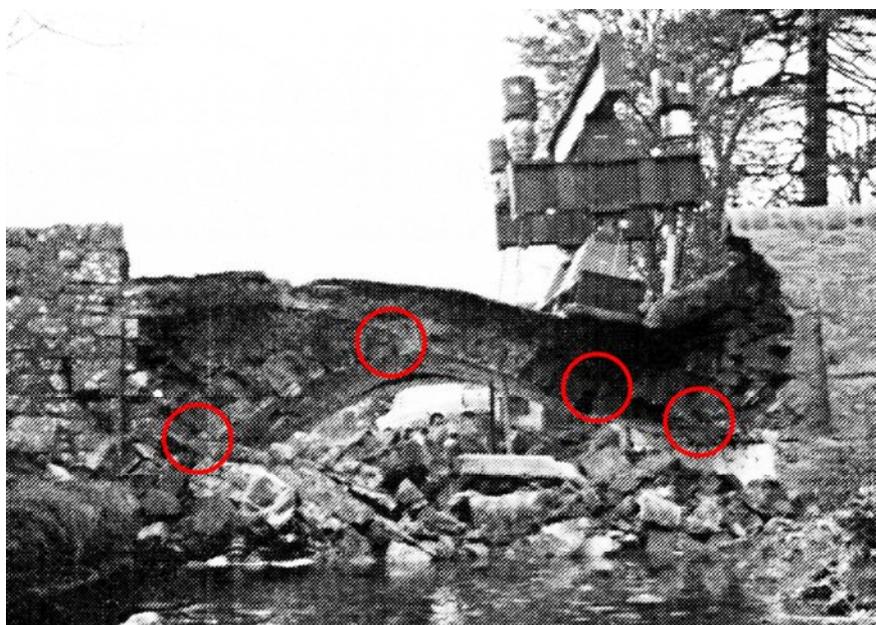


Figure 7.17 : Le Shinafoot Bridge, juste avant sa ruine [7.1]

Des vues en plan et en élévation du Shinafoot Bridge peuvent être consultées en annexe 19.

### 7.3.1. Micro-niveau : Loi constitutive adoptée

En l'absence d'indications précises quant aux divers types de pierre employés lors de la mise en œuvre de la maçonnerie du Shinafoot Bridge, la courbe contrainte – déformation admise est élaborée sur la base des quelques renseignements fournis par le rapport d'essai, à savoir que la maçonnerie considérée est une maçonnerie de blocage, soit de type B1 (Maçonnerie cyclopéenne, en moellons bruts) selon la Recommandation SIA V 178 [7.2] (voir également [7.3]), dont la résistance maximale a été admise égale à 5 MPa [7.1]. Une loi constitutive indicative pour le comportement du type de maçonnerie concerné peut ainsi être élaborée, puis approximée par une équation parabolique (figure 7.18).

$$\sigma = 3e^2 + 7.8e \quad (7.5)$$

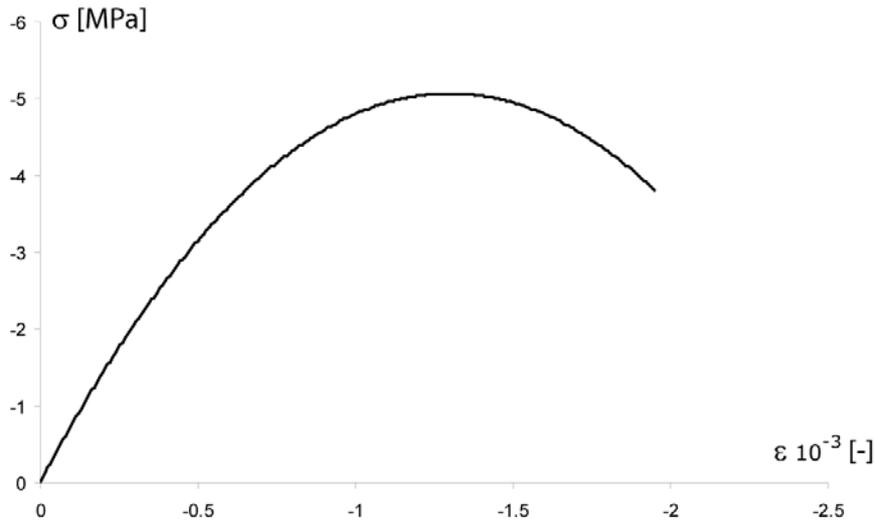


Figure 7.18 : Loi constitutive adoptée pour la maçonnerie du Shinafoot Bridge

Notons que la qualité des photographies reproduites dans la publication mentionnée ci-dessus ne permet pas de se faire une opinion personnelle objective de la qualité des matériaux mis en place ou encore de l'état de conservation de l'ouvrage.

### 7.3.2. Méso-niveau : Conditions de formation de la rotule

Selon le rapport d'essais du TRRL [7.1], l'épaisseur de l'arc du Shinafoot Bridge varie entre 390 et 770 mm. On admet ici une épaisseur moyenne  $d$ .

$$d = 580 \text{ mm}$$

La section d'arc considérée est rectangulaire, telle que représentée sur la figure 7.19. Dans le modèle initial, la largeur efficace  $v$  considérée est fonction de la charge appliquée. Toutefois, lors de l'essai sur le Shinafoot Bridge, le chargement a été exercé sur toute la largeur de la voie de roulement (voir § 7.3.3.4). La largeur efficace considérée est par conséquent fixée et égale à :

$$v = 6655 \text{ mm}$$

Le diagramme d'interaction correspondant à cette section et au matériau précédemment décrit pourrait être tracé, permettant ainsi de représenter graphiquement la résistance effective de la section considérée. Son élaboration n'étant cependant pas strictement nécessaire à l'application du modèle, elle ne sera pas effectuée ici.

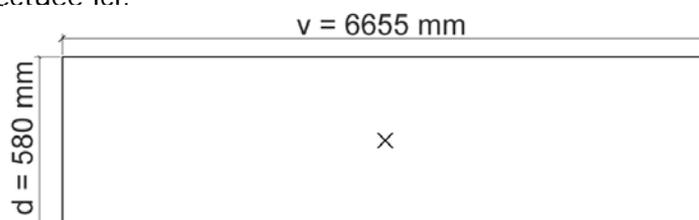


Figure 7.19 : Section admise pour le Shinafoot Bridge

### 7.3.3. Macro-niveau : Capacité portante de l'arc

#### 7.3.3.1. Géométrie de l'arc

L'étape suivante consiste en le relevé de la géométrie de l'arc et en l'expression du tracé d'intrados sous la forme d'une équation polynomiale de degré 4 (figure 7.20).

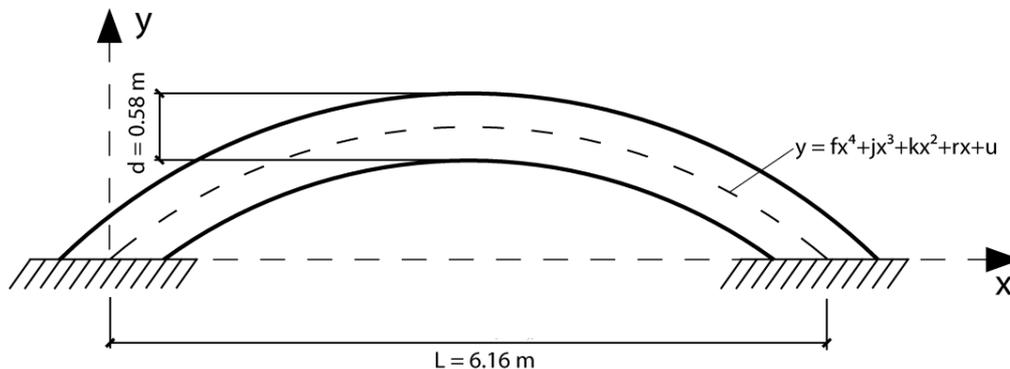


Figure 7.20 : Relevé de la géométrie de l'arc

Le tracé d'intrados du Shinafoot Bridge à l'axe peut être approximé de manière optimale par l'équation suivante (figure 7.21):

$$y = -1.55 \cdot 10^{-12} x^4 + 2 \cdot 10^{-8} x^3 - 2 \cdot 10^{-4} x^2 + 0.8374x \quad (7.6)$$



Figure 7.21 : Approximation polynomiale du tracé d'intrados de l'arc à l'axe. Le tracé original est en noir, tandis que le tracé approximé est représenté par de petits carrés orange.

#### 7.3.3.2. Charges permanentes

Les hauteurs et poids propres du matériau de remplissage et de la voie de roulement, selon le rapport du TRRL [7.1], sont résumés sur la figure 7.22.

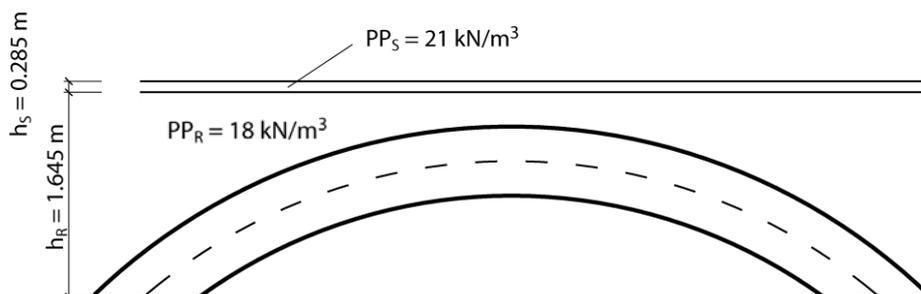


Figure 7.22 : Caractéristiques du matériau de remplissage et de la voie de roulement

Les équations (6.3) à (6.8) permettent d'évaluer les forces et moments de flexion résultants exercés par les charges permanentes sur les différentes portions de l'arc.

### 7.3.3.3. Effet du remplissage

Les paramètres et caractéristiques mécaniques du matériau de remplissage nécessaires à l'évaluation de la poussée latérale exercée suite à la déformation de l'arc sont résumés ci-dessous.

Tableau 7.7 : Caractéristiques du matériau de remplissage

$\varphi$	[°]	30
$c$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0
$m_p$	[-]	0.33
$m_{pc}$	[-]	0.01

Ces caractéristiques permettent de calculer la résultante de l'effort horizontal appliqué par le remplissage sur l'arc, ainsi que le moment que cette dernière exerce par rapport aux rotules  $B$  et  $D$ , respectivement selon les équations (6.12) à (6.14).

### 7.3.3.4. Modèle de charge

Le chargement du Shinafoot Bridge a été effectué au moyen de quatre vérins hydrauliques. Ces derniers ont appliqués une charge surfacique uniformément répartie sur bande d'une largeur de 750 mm et d'une longueur égale à la distance séparant les tympans (figure 7.23).

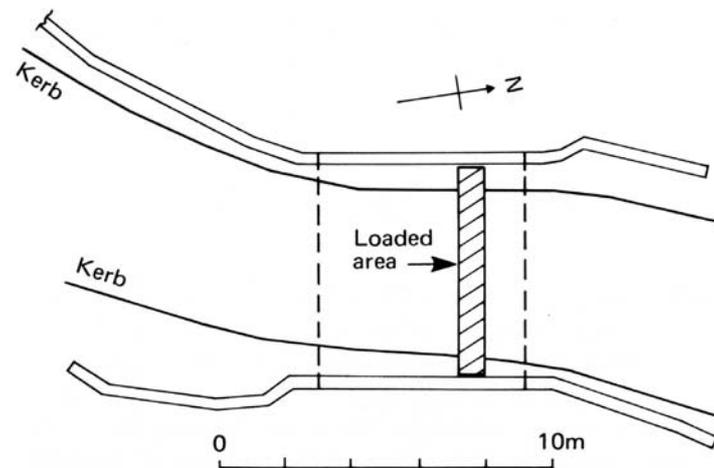


Figure 7.23 : Zone de chargement du Shinafoot Bridge [7.1]

L'intégration de la charge dans le modèle a par conséquent dû être modifiée pour tenir compte de la sollicitation réellement appliquée lors de l'essai. La charge uniformément répartie sur la moitié de l'ouverture de l'arc initialement considérée est donc admise nulle. La sollicitation appliquée par les vérins n'est représentée que sous la forme d'une charge ponctuelle, fixée arbitrairement à 1000 kN. Cette dernière est diffusée d'une part sur la largeur efficace  $v$ , égale ici à la distance séparant les tympans, et d'autre part sur une distance longitudinale au pont  $\ell$ , fonction de la largeur d'application de la charge en surface et de l'angle de diffusion considéré (figure 7.24).

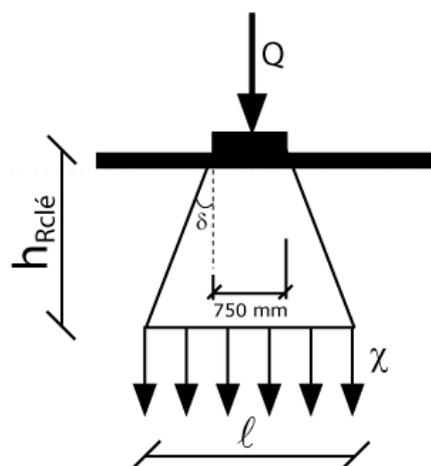


Figure 7.24 : Modèle de charge considéré dans le cas du Shinafoot Bridge

La charge ponctuelle, la hauteur de remplissage, ainsi que l'angle de diffusion à travers ce dernier admis, sont résumés ci-dessous.

Tableau 7.8 : Caractéristiques du modèle de charge

$\delta$	[°]	30
$h_{Rclé}$	[mm]	805
$Q$	[kN]	1000

### 7.3.3.5. Application du modèle

Les différentes caractéristiques énumérées ci-dessus ainsi que les diverses équations d'équilibre permettant d'établir les réactions aux extrémités de la partie active de l'arc, les efforts intérieurs dans la section correspondant à la rotule  $D$  et le multiplicateur limite de la charge utile (équations (6.19) à (6.32)) peuvent ensuite être implémentées dans un tableau Excel, semblable à celui présenté à l'annexe 14.

Dans le but de se conformer le plus précisément possible au cas testé, le point d'application de la charge doit être fixé au quart de l'ouverture de l'arc. Dans la mesure où il est admis que cette position correspond à celle de la rotule  $C$ , la distance  $x_C$  définissant cette dernière doit être retirée des variables d'itération considérées pour définir la configuration critique des rotules.

### 7.3.4. Résultats obtenus et validation

Une visualisation du fichier Excel mentionné ci-dessus, faisant apparaître le résultat souhaité, est présentée en annexe 20. En admettant un moment de flexion dans les rotules  $A$ ,  $B$  et  $C$  constant et correspondant, selon le diagramme d'interaction, à un effort normal égal à 1250 kN (voir § 6.6), le multiplicateur limite des charges utiles obtenu, après itération sur la position des rotules  $A$ ,  $B$  et  $D$ , est égal à :

$$n = 2.45$$

Sachant que l'unique charge utile considérée était de 1000 kN, il en résulte que la capacité portante du Shinafoot Bridge selon le modèle présenté ici est égale à :

$$Q_{ult\_mod} = 2450 \text{ kN}$$

Lors de l'essai de charge mené le 13 mai 1987, la charge ultime suivante avait été obtenue :

$$Q_{ult\_exp} = 2524 \text{ kN}$$

Cette application prouve une nouvelle fois la validité du modèle développé dans cette étude, puisqu'une erreur inférieure à 3 % par rapport à la charge ultime

déterminée expérimentalement a pu être obtenue. Ce résultat illustre, par ailleurs, que le modèle fournit une solution légèrement conservatrice.

Comme pour l'exemple précédent, la position des rotules peut être représentée graphiquement, puis comparée avec celle relevée lors de l'essai de charge [7.1]. On constate une très bonne correspondance entre la configuration des rotules obtenue avec le modèle développé ici et celle déterminée expérimentalement (figure 7.25).

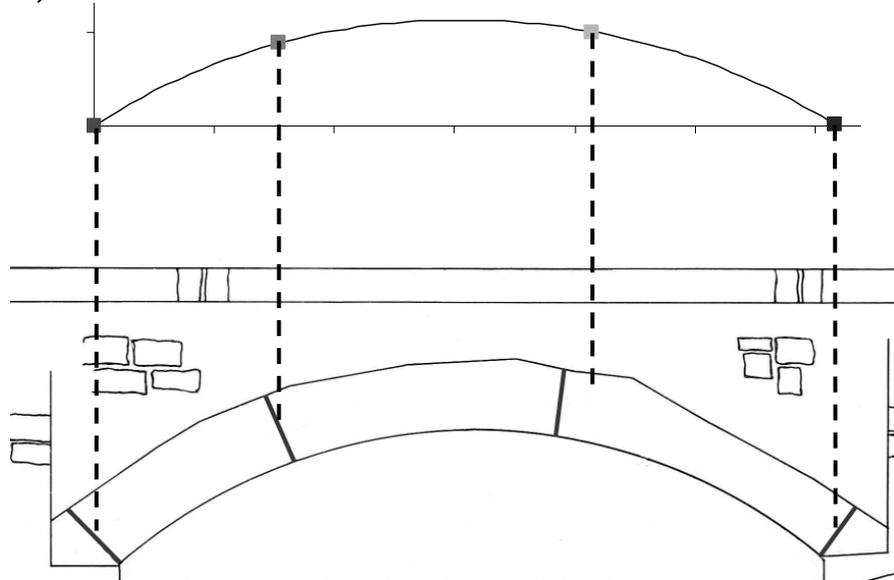


Figure 7.25 : Comparaison de la position des rotules déterminée avec le modèle et expérimentalement [7.1]

## 7.4. Conclusions

Les trois applications présentées ici prouvent la validité du modèle développé dans cette étude. Celui-ci est d'une part capable de prédire avec précision la capacité portante d'un arc de pont en maçonnerie et d'autre part de fournir une bonne appréciation de la position des rotules.

Transparent, simple d'application et de compréhension, le modèle proposé se base uniquement sur des conditions d'équilibre et sur une bonne appréhension du matériau et de la mécanique des arcs en maçonnerie. Il ne fait appel à aucun logiciel autre qu'un simple tableur de calcul, tel Excel, dont l'unique apport est de faciliter le calcul itératif nécessaire pour trouver la valeur minimale de la solution obtenue via le théorème cinématique de la plasticité.

## 7.5. Références

- [7.1] Page J. (1988) *Load tests to collapse on two arch bridges at Torksey and Shinafoot*, Research Report 159, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 22 p.
- [7.2] Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes (1996) *Recommandation SIA V 178 Maçonnerie de pierre*, 49 p.
- [7.3] Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes (2008) *Norme SIA 266/2 Maçonnerie en pierre naturelle (Projet de consultation)*, 60 p.
- [7.4] RING 2.0. (2007) *Theory & Modelling Guide*. Limistate Ltd, 85 p.
- [7.5] Heyman J. (1982) *The masonry arch*, Ellis Horwood Series in Engineering Science, Chichester, 117 p.

- [7.6] Gilbert M., Melbourne C. (1994) *Rigid-clock analysis of masonry structures*, *The Structural Engineer*, 72, pp. 356-360.
- [7.7] Melbourne C., Gilbert M., Wagstaff M. (1997) *The collapse behaviour of multi-span brickwork arch bridges*, *The Structural Engineer*, 75 (17), pp. 297-305.
- [7.8] Melbourne C., Gilbert M. (1995) *The behaviour of multiring brickwork arch bridges*, *The Structural Engineer*, 73, pp. 39-47.
- [7.9] Prade M. (1986) *Les ponts monuments historiques, inventaire, description, histoire*, Editions Errance, Paris, Editions Brissaud, Poitiers, 430 p.

## 8. Etude paramétrique

### 8.1. Choix des paramètres

Le modèle présenté dans cette étude fait intervenir une multitude de paramètres dont l'influence sur la capacité portante de l'arc est, parfois, difficilement évaluable. L'estimation de certains d'entre eux se base en outre sur des hypothèses, dont la validité est plus ou moins fondée et pour lesquelles une étude de sensibilité permettrait de cerner l'importance de l'incertitude que leur affirmation entraîne.

Un grand nombre des paramètres impliqués dans le modèle sont par ailleurs interdépendants, la variation de l'un entraînant implicitement celle d'une ou plusieurs autres grandeurs. Une étude paramétrique complète nécessiterait ainsi l'analyse de la variabilité de différents couples, voire triplets de paramètres, dont l'incertitude, ainsi démultipliée, pénaliserait la vraisemblance des résultats. Nous nous contenterons par conséquent de l'analyse de l'effet de la variation des principales caractéristiques, l'éviction de celles qui seront jugées secondaires étant justifiée qualitativement.

L'étude paramétrique présentée ici consiste donc en l'évaluation de l'influence de la variation successive de divers paramètres, ou couples de paramètres, sur la capacité portante de l'arc, établie par l'application du modèle développé. Le cas de base choisi est le Schwarzwasserbrücke, déjà présenté au chapitre 7. Dans chaque cas, le ou les seuls paramètres variés sont ceux mentionnés, tous les autres étant maintenus égaux à ceux établis pour le cas du Schwarzwasserbrücke. Dans certains cas toutefois, une étude complémentaire a été effectuée, sous la forme d'une analyse paramétrique similaire, réalisée avec le logiciel RING 2.0, et ce dans le but de confirmer certains résultats.

Globalement, l'étude paramétrique touche essentiellement aux grandeurs suivantes (figure 8.1):

- Le tracé d'intrados de l'arc, exprimé par son surbaissement,  $S = h_{L/2} / L$
- Les caractéristiques géométriques de l'arc, soit son ouverture,  $L$  et son épaisseur,  $d$
- Les efforts admis responsables de la formation, puis du maintien, des rotules  $A$ ,  $C$  et  $B$
- Les caractéristiques du matériau de remplissage, dont les effets se répercutent sur le calcul de la charge permanente et de la poussée latérale
- Les caractéristiques mécaniques de la maçonnerie en compression, exprimées par la courbe contrainte – déformation admise

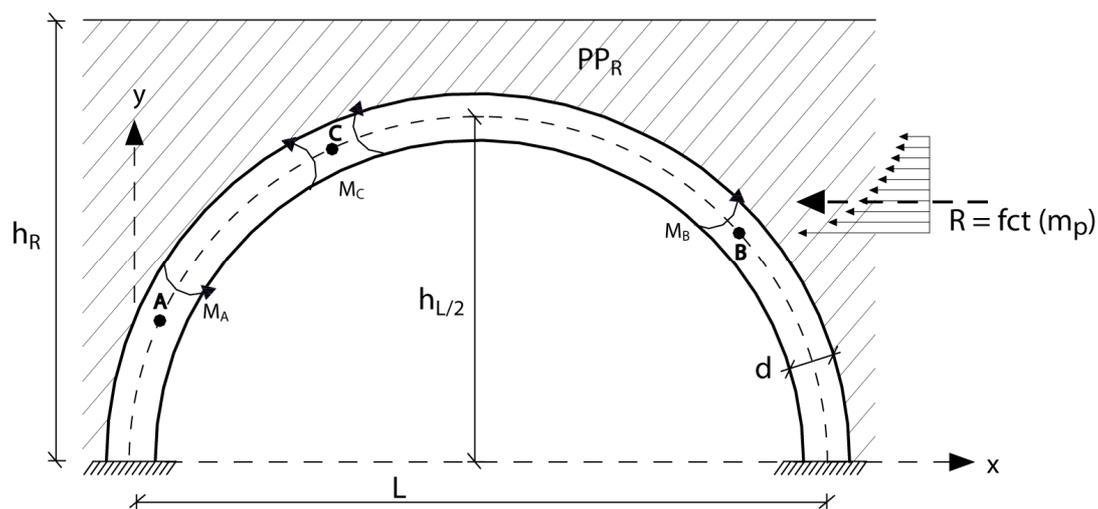


Figure 8.1 : Variables de l'étude paramétrique

## 8.2. Tracé d'intrados

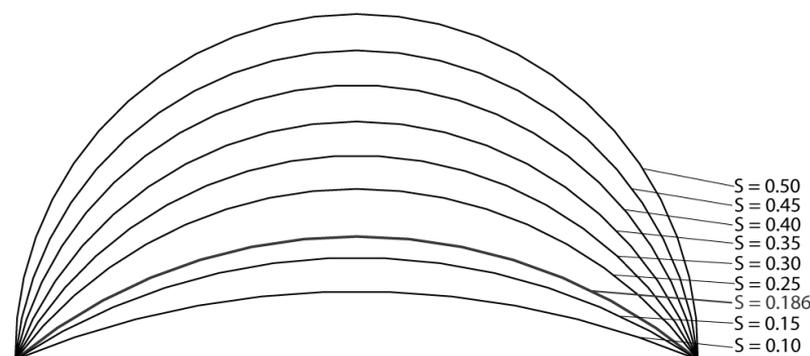
Le tracé d'intrados d'un arc est l'une des principales caractéristiques définissant ce dernier. Choisi pendant des siècles uniquement sur la base de principes constructifs, il fut peu à peu, dès le XVII<sup>ème</sup> siècle, établi pour correspondre au mieux au tracé de la ligne des pressions sous charges permanentes, l'épaisseur de l'arc assurant la sécurité nécessaire à l'application des charges utiles. Quantitativement, le tracé d'intrados d'un arc peut être évalué sur la base de son surbaissement, défini par le rapport entre la flèche de l'arc et son ouverture :

$$S = \frac{h_{L/2}}{L} \quad (8.1)$$

Il nous semble important de rappeler, à ce stade, la signification du terme « surbaissement », tel qu'il est défini par l'équation (8.1). Cette dernière implique un paradoxe qu'il est important de relever : plus le tracé d'intrados d'un arc est plat, soit plus il est « surbaissé » visuellement, plus la valeur de son surbaissement est faible !

L'interaction du surbaissement avec d'autres paramètres est multiple, ce qui rend l'influence de sa variation sur la capacité portante difficilement évaluable a priori. Une étude paramétrique concernant la variation de cette grandeur s'impose donc.

Les différentes valeurs de surbaissement choisies sont représentées sur la figure 8.2. Elles couvrent tous les cas de surbaissement possibles, à l'exception des arcs en ogive. Afin de conserver la planéité de la chaussée, une variation cohérente de la hauteur de remplissage  $h_R$  considérée a également dû être admise.


 Figure 8.2 : Surbaissements considérés dans l'étude paramétrique. La valeur de  $S = 0.186$  correspond au surbaissement réel du Schwarzwasserbrücke.

L'évolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction du surbaissement de l'arc, déterminée à l'aide du modèle élaboré, est illustrée par la courbe noire sur la figure 8.3. Elle révèle que la capacité portante minimale est obtenue pour le surbaissement réel du Schwarzwasserbrücke (trait interrompu sur la figure 8.3), une très légère augmentation étant observée lorsque ce dernier passe de 0.2 à 0.45. Une tendance à la diminution du multiplicateur limite des charges utiles peut être observée pour un arc en plein cintre, alors qu'une augmentation de ce multiplicateur a été relevée pour les valeurs de surbaissement les plus faibles.

Il est cependant primordial de signaler que pour de si faibles valeurs de surbaissement, la probabilité d'occurrence d'un mode de ruine par snap-through augmente considérablement. Ce mode de rupture n'étant pas considéré dans cette étude, les arcs présentant un surbaissement très faible sortent du domaine d'application du modèle et la valeur de la capacité portante obtenue dans ces cas est à considérer avec retenue. Remarquons en outre que plus le tracé d'intrados se rapproche du plein cintre, moins l'approximation polynomiale de degré quatre est apte à reproduire précisément la forme exacte de l'élément structurel, cette inexactitude se reportant inévitablement sur les résultats finaux obtenus.

Remarquons, enfin, que l'épaisseur de l'arc du Schwarzwasserbrücke, alliée à la poussée latérale et la charge permanente exercées par le remplissage, sont suffisants pour garantir un multiplicateur limite des charges utiles supérieur à trois, quel que soit le surbaissement considéré.

La variation de la courbe obtenue, difficilement explicable intuitivement, résulte de la conjonction des multiples paramètres impliqués dans le modèle et pour lesquels une variation du surbaissement a une influence.

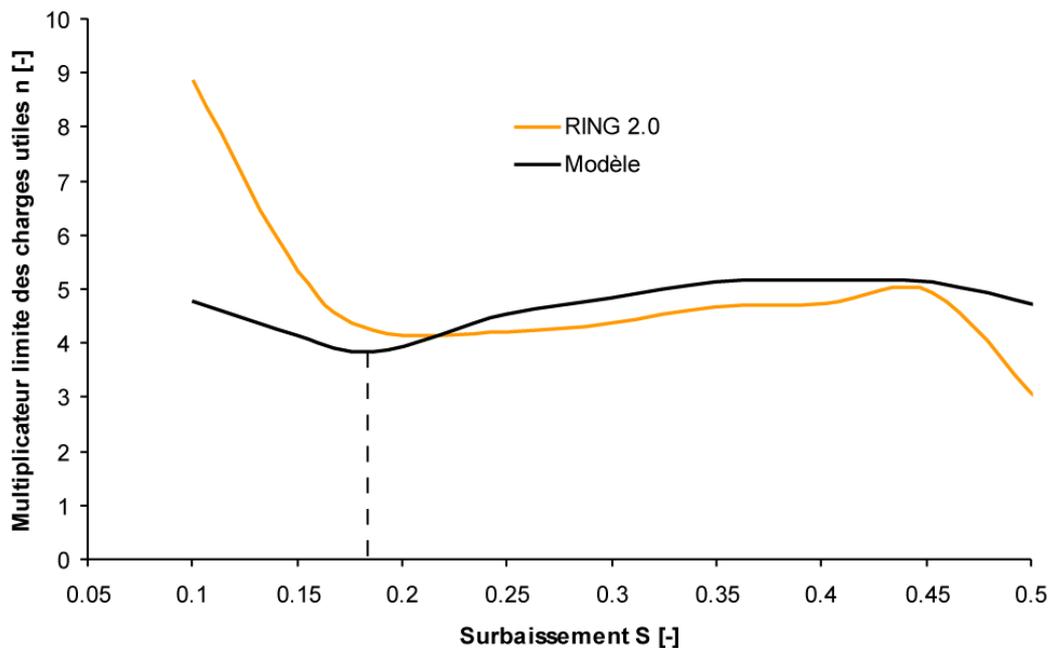


Figure 8.3 : Evolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction du surbaissement de l'arc

La position exacte de la ligne des pressions réelle résultant de l'application des charges permanentes, mais également de celle des charges utiles et de la poussée latérale exercée par le remplissage, est inconnue. Or, un arc dont le surbaissement ne serait pas optimal s'éloigne de cette ligne, ce qui induit une augmentation des efforts et donc une diminution de la capacité portante.

En d'autres termes, et de manière plus détaillée, la courbe obtenue s'explique donc par la conjonction des faits suivants :

- En atténuant l'influence d'une charge ponctuelle ou asymétrique sur l'arc, les charges permanentes ont un effet stabilisateur. L'ampleur de ce dernier dépend cependant de la forme du tracé d'intrados de l'arc.
- Une diminution de la valeur du surbaissement a pour effet un accroissement de la poussée horizontale et donc de l'effort normal sollicitant l'arc, impliquant ainsi un changement dans les conditions de formation des rotules.
- La poussée latérale exercée par le remplissage est reconnue comme induisant un effet capital, en s'opposant à la déformation de l'arc et en augmentant ainsi sa capacité portante. Son amplitude dépend cependant de la surface d'application disponible et par conséquent du surbaissement de l'arc.

L'allure de la courbe obtenue ne pouvant être justifiée avec certitude par la réflexion, une étude paramétrique identique a été menée avec le logiciel RING 2.0. Les résultats obtenus, représentés par la courbe orange sur la figure 8.3, révèlent une tendance globale identique, sous la forme d'un pseudo-plateau pour des valeurs de surbaissement comprises entre 0.2 et 0.45, entouré par une brusque augmentation de la capacité portante pour de très faibles valeurs de surbaissement et une légère diminution du multiplicateur limite des charges utiles lorsque le tracé d'intrados se rapproche du plein cintre.

La différence observée pour une valeur de surbaissement égale à 0.5 s'explique toutefois par le mode de rupture différent adopté par RING 2.0 dans certains cas d'arcs en plein cintre, comme par exemple ici (voir § 7.2.5). L'application du modèle au Pont romain sur le ravin du Buès (voir § 7.2) a cependant montré que ce n'était pas le cas de tous les arcs en plein cintre, mais probablement seulement celui de ceux présentant une faible épaisseur. Par ailleurs, il est à remarquer que le cas d'un arc réellement en plein cintre peut être considéré comme relativement rare en raison du remplissage rigide souvent mis en place au-dessus de la naissance des arcs (voir § 2.1.1). Ainsi, bon nombre d'arc dont l'apparence extérieure montre un tracé d'intrados en plein cintre, peuvent, d'un point de vue structurel, être associés à une valeur de surbaissement supérieure, à évaluer de cas en cas. La différence de capacité portante observée dans le cas d'un arc en plein cintre entre les résultats obtenus avec RING 2.0 et ceux fournis par le modèle peut ainsi être considérée comme non significative dans la majorité des cas et n'altère par conséquent pas la confiance que l'on a dans la fiabilité du modèle.

Cette partie de l'étude paramétrique permet de conclure, en premier lieu, que le modèle développé fournit une réponse fiable de la capacité portante de l'arc pour des valeurs de surbaissements comprises entre 0.17 et 0.5, cet intervalle couvrant la majorité des arcs, à l'exception des tracés d'intrados très fortement surbaissés ou en ogive. Il peut, en second lieu, être déduit de cette étude que la capacité portante de l'arc, dans ce même domaine, est très peu sensible à la valeur du surbaissement de l'élément structurel.

### **8.3. Caractéristiques géométriques**

Outre son tracé d'intrados, un arc est généralement caractérisé par les deux grandeurs géométriques que sont son ouverture,  $L$ , et son épaisseur,  $d$ . Une augmentation de la première impliquant logiquement un accroissement des efforts sollicitant l'arc, il en résulte la nécessité d'un épaississement de l'arc pour y résister. Expérimenté déjà par les premiers constructeurs d'arcs, ce principe est à l'origine des règles empiriques permettant le dimensionnement de l'épaisseur

de l'élément structurel (voir § 3.1), comme une fonction de l'ouverture de ce dernier. Ces deux paramètres étant donc tous deux liés aux efforts sollicitant l'arc, il a été décidé de concentrer l'étude paramétrique uniquement sur l'épaisseur de l'arc  $d$ , l'effet d'une variation de l'ouverture  $L$  étant implicitement considéré.

Le rôle de l'épaisseur de l'arc étant d'offrir une résistance suffisante aux efforts appliqués, une variation de ce paramètre conjointement à une modification du surbaissement se justifie dans la mesure où, comme précédemment mentionné, les efforts s'établissant au sein de l'arc sont fonction, entre autres, du tracé d'intrados de ce dernier.

L'évolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction de l'épaisseur et du surbaissement de l'arc  $S$  est illustrée sur la figure 8.4. Alors que la variation de la capacité portante de l'arc semble évoluer linéairement avec la diminution de l'épaisseur de ce dernier, lorsque le tracé d'intrados s'approche de celui du plein cintre, une non linéarité apparaît pour de faibles valeurs du surbaissement. Cet effet s'explique probablement par le même type de conjonction de paramètres que celle relatée dans le paragraphe précédent.

Intervenant de manière directe dans l'établissement du diagramme d'interaction, et donc dans l'évaluation de la résistance en section de l'arc, l'épaisseur de ce dernier a une influence capitale sur sa capacité portante.

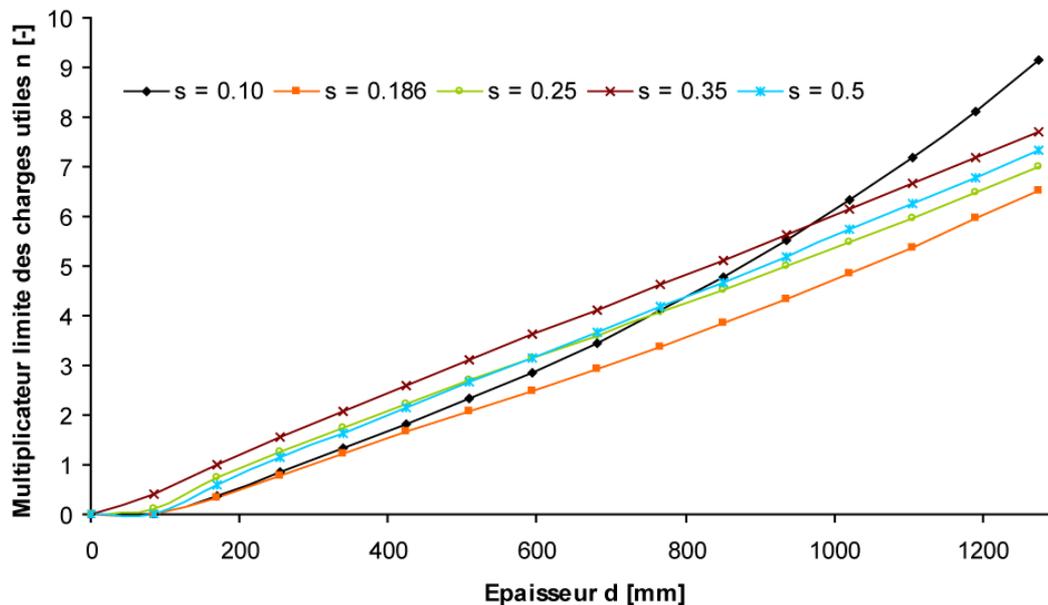


Figure 8.4 : Evolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction de l'épaisseur et du surbaissement de l'arc

#### 8.4. Efforts admis dans les rotules A, C et B

Le modèle présenté dans cette étude nécessite la considération de moments de flexion à appliquer extérieurement sur les rotules A, C et B. Ces derniers représentent la sollicitation qui a été nécessaire à l'apparition, puis au maintien, de ces articulations.

Pour rappel, ces moments de flexion, considérés égaux dans chacune des trois rotules A, C et B, ont été définis via la courbe d'interaction, sur la base d'un effort normal constant, choisi a priori. Cette hypothèse ne se fondant sur aucun principe statique, mais uniquement sur une observation empirique, il est primordial d'évaluer son influence sur la capacité portante de l'arc.

Comme précédemment mentionné, les efforts naissant au sein de l'arc sont fonction d'une part de sa géométrie et d'autre part des charges utiles et permanentes appliquées. Au vu de la très forte proportion de ces dernières par rapport aux charges variables, dans le cas d'un pont en maçonnerie, il est postulé que celles-ci n'ont qu'une influence limitée sur l'effort normal s'établissant dans l'arc au moment de la formation de la rotule. Par ailleurs, la poussée latérale due au matériau de remplissage ne s'appliquant, en théorie, qu'en cas d'une déformation suffisante de l'élément structural (voir § 6.4), il peut également être admis que celle-ci n'est atteinte qu'à l'approche de la ruine, lorsqu'au moins trois rotules sont déjà formées et que par conséquent, elle n'intervient que de manière négligeable dans la valeur des efforts à admettre dans les rotules *A*, *C* et *B*. Il peut ainsi être supposé que la valeur des efforts intérieurs à considérer dans ces articulations est essentiellement liée à la charge permanente et du surbaissément de l'arc.

La courbe noire représentée sur la figure 8.5 retrace l'évolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction de l'effort normal admis en cas de variation simultanée des efforts dans les trois rotules *A*, *C* et *B*. Les trois autres courbes illustrent l'effet de cette même variation, considérée indépendamment dans chacune des articulations.

Les efforts normaux, et par extension les moments de flexion, admis dans les rotules *A*, *C* et *B* sont indicatifs de la résistance de l'arc, leur augmentation impliquant un gain de capacité portante. La figure 8.5 révèle en outre que ce dernier évolue linéairement avec l'augmentation de l'effort normal admis.

Une variation simultanée de  $\pm 30\%$  de l'effort normal admis dans chacune des trois rotules implique une différence de  $\pm 19\%$  sur le multiplicateur limite des charges utiles obtenu. Une modification de cet effort individuellement dans chaque rotule se révèle avoir une influence limitée sur la capacité portante de l'arc, l'effet le plus marqué correspondant au cas d'une variation de la sollicitation appliquée à l'articulation *C*. Cet aspect s'explique par le fait que les caractéristiques relatives aux deux rotules positionnées aux reins de l'arc (*C* et *D*) sont plus influentes que celles liées aux rotules extrêmes (*A* et *B*), constatation que confirmera également l'étude de la capacité portante des arcs endommagés présentée au chapitre 9.

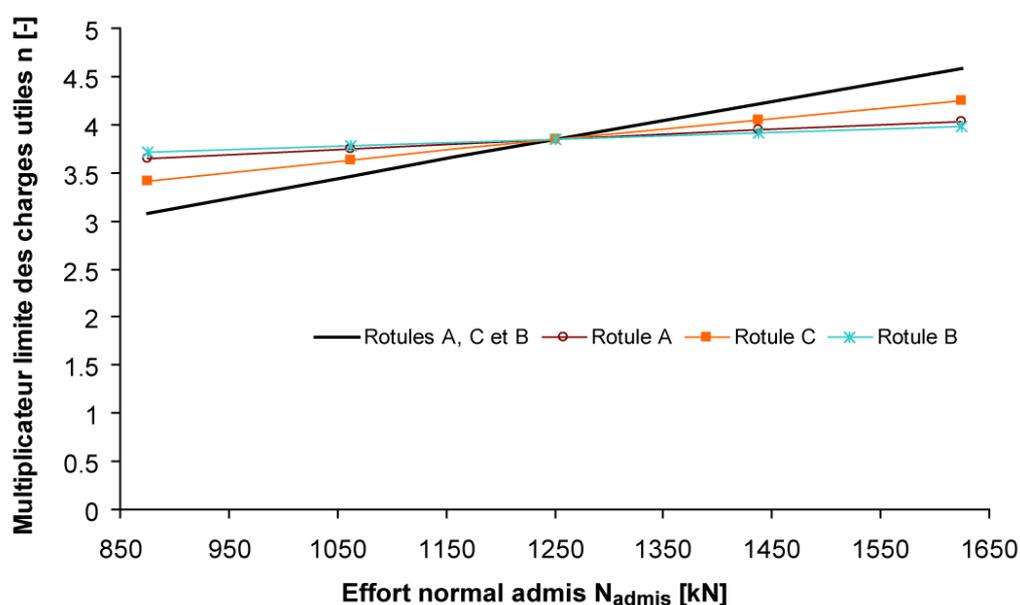


Figure 8.5 : Evolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction de l'effort normal admis dans les rotules *A*, *C* et *B*

La figure 8.6 illustre les résultats obtenus dans le cas d'une variation simultanée de l'effort normal admis en deux rotules, cette fois. Conformément aux remarques émises ci-dessus quant à l'implication de la position des rotules, une modification simultanée de l'effort admis dans les articulations *A* et *B* n'a qu'un effet modéré sur la capacité portante de l'arc. Les deux autres cas considérés présentent une évolution très semblable, une variation de la sollicitation conjointement dans les trois rotules demeurant le cas le plus influent.

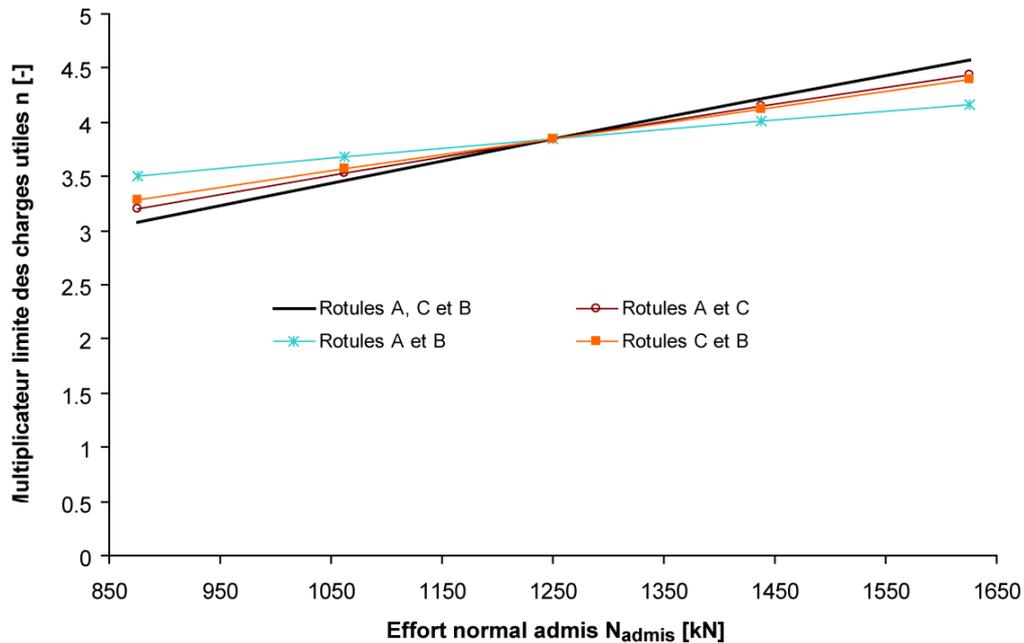


Figure 8.6 : Evolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction de l'effort normal considéré dans les rotules *A*, *C* et *B*

Les résultats présentés ci-dessus illustrent le fait que, bien que discernable, la différence de capacité portante induite par une variation des efforts considérés dans les rotules reste néanmoins faible. Une étude plus poussée concernant notamment l'influence de la charge permanente sur la valeur de ce paramètre, et permettant de délimiter le domaine de validité de l'hypothèse émise, serait cependant nécessaire.

Dans le cas d'arcs affichant une valeur de surbaissement comprise environ entre 0.2 et 0.45, les résultats présentés sur la figure 8.3 permettent néanmoins de constater que l'effet d'une variation de ce paramètre reste très modéré, puisqu'un multiplicateur limite des charges utiles pratiquement constant a pu être obtenu dans cet intervalle, en admettant la même valeur de l'effort normal agissant dans les rotules *A*, *C* et *B*, quel que soit le surbaissement. La courbe obtenue à l'aide du logiciel RING 2.0, et également représentée sur la figure 8.3, offre néanmoins la possibilité d'évaluer quel serait l'effort normal à admettre pour corrélérer les valeurs de la capacité portante obtenue avec le modèle avec celle fournie par le logiciel. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau 8.1 et sur la figure 8.7.

Tableau 8.1 : Calibration de l'effort normal nécessaire pour corrélérer la courbe fournie par RING 2.0 et celle obtenue avec le modèle développé

Surbaissement S [-]	Effort normal admis $N_{\text{admis}}$ [kN]
0.10	3388
0.15	1825
0.186	1450
0.25	1088
0.30	1038
0.35	1050
0.40	1075
0.45	1175
0.51	538

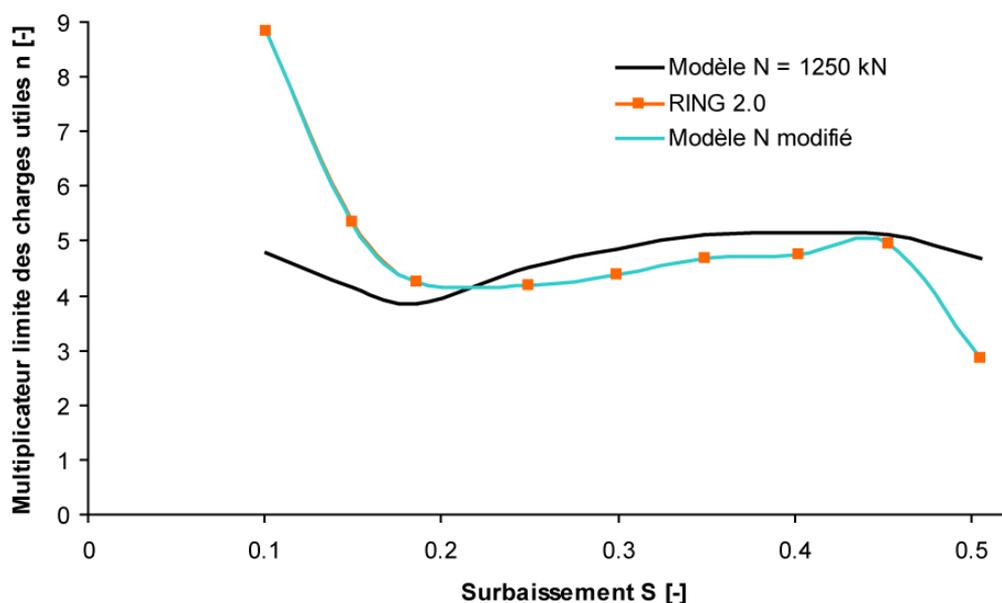


Figure 8.7 : Evolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction du surbaissement, avec calibrage de l'effort normal dans les rotules A, C et B

Le calibrage ainsi effectué permet d'obtenir une correspondance quasi parfaite entre les résultats fournis par le logiciel RING 2.0 et ceux résultant de l'application du modèle élaboré dans ce travail. Il permet en outre de confirmer que l'adoption a priori d'une valeur de l'effort normal constante et identique pour chacune des trois rotules A, C et B, permet d'obtenir une évaluation suffisamment fiable de la capacité portante d'arcs dont le surbaissement se situe entre 0.17 et 0.45.

Conformément à l'analyse effectuée au paragraphe 8.1, le choix des efforts intérieurs à admettre dans le cas d'un très faible surbaissement devrait se porter sur des valeurs beaucoup plus importantes. Néanmoins, le risque d'une ruine suivant un mode de rupture non conforme à celui admis par hypothèse rend toute conclusion hasardeuse dans ce cas.

## 8.5. Caractéristiques du matériau de remplissage

Les caractéristiques du matériau de remplissage interviennent à plusieurs niveaux dans l'évaluation de la capacité portante de l'arc. Parmi celles-ci, seuls le poids volumique du remplissage et la poussée latérale que ce dernier exerce lorsque

l'arc se déforme seront traitées en détail, en raison de leur influence prédominante supposée sur la capacité portante de l'arc.

L'angle de diffusion à travers le remplissage  $\delta$  est une caractéristique intrinsèque au matériau, dont l'influence est de permettre une distribution plus ou moins étendue des charges ponctuelles appliquées. Induisant un moment de flexion localement important, ces dernières sont reconnues comme étant plus dommageable pour la sécurité de l'arc que ne le sont les charges uniformément réparties. Une ouverture supplémentaire de cet angle de diffusion  $\delta$  aura donc pour conséquence une augmentation importante du multiplicateur limite des charges utiles. Facilement appréhendable intuitivement, cette influence n'est pas détaillée ici.

Il en est de même d'une augmentation de la hauteur de remplissage  $h_R$  qui, en permettant une distribution de la charge ponctuelle plus étendue, aura un effet bénéfique sur la capacité portante de l'arc. Une telle élévation aura cependant pour conséquence annexe une augmentation du poids total appliqué sur l'arc, dont l'influence sera similaire à celle d'un accroissement du poids volumique du matériau de remplissage, traité ci-dessous.

### **8.5.1. Poids volumique du matériau de remplissage**

La charge permanente induite par le matériau de remplissage a pour effet d'introduire un effort de compression important dans l'arc.

Le tracé d'intrados considéré influence la répartition des efforts intérieurs résultant de l'application de cette charge, la capacité portante de l'arc variant consécutivement. Dissimulé par la maçonnerie et la voie de roulement, le type de matériau de remplissage n'est que rarement connu avec précision. Une étude paramétrique impliquant donc une variation du poids volumique de ce matériau, conjointement à une modification du surbaissement, permettra de cerner quelle est l'influence sur la capacité portante de l'arc d'une imprécision quant à l'évaluation de ce paramètre.

Il a précédemment été mentionné que, bien qu'évalué empiriquement jusqu'alors, la valeur de l'effort normal à admettre dans les rotules  $A$ ,  $C$  et  $B$  dépendait logiquement de la charge permanente induite par le matériau de remplissage. Une variation de cette dernière doit donc logiquement se répercuter sur l'effort normal considéré dans ces trois rotules. En l'absence d'une étude plus poussée dans le domaine, il est ici admis que la valeur de cet effort varie proportionnellement à la charge permanente totale appliquée sur l'ouverture active de l'arc, exprimée par le paramètre  $\eta$ .

Distribuée équitablement sur les deux reins de l'arc, la charge permanente n'induit en elle-même pas de risque structurel, mais contribue à la capacité portante de la structure en augmentant l'effort normal agissant dans l'arc, et par conséquent sa résistance en section face à l'interaction d'efforts  $M - N$ , nécessaire pour la reprise des sollicitations induites par les charges utiles.

La figure 8.8 illustre l'évolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction du poids volumique du matériau de remplissage et du surbaissement de l'arc. Les courbes représentées révèlent que la capacité portante de l'arc diminue linéairement avec la réduction du poids volumique du matériau de remplissage, le surbaissement n'ayant qu'une très faible influence. Un tracé d'intrados se rapprochant du plein cintre montre une différence de capacité portante entre les deux extrêmes à peine plus prononcée. Cet aspect s'explique probablement par le fait que la poussée latérale du remplissage a un effet prédominant dans le cas des arcs à forte valeur de surbaissement, l'effet gravitaire étant comparativement marginal.

La variation du poids volumique du matériau de remplissage, dans un domaine logique, compris entre  $16 \text{ kN/m}^3$  et  $22 \text{ kN/m}^3$ , n'implique qu'un changement relativement faible du multiplicateur limite des charges utiles, équivalent à une augmentation maximale de 30 % entre les deux situations extrêmes.

A l'inverse de la proportion habituellement rencontrée dans les ponts modernes, la part de charges permanentes dans un ouvrage en maçonnerie est, proportionnellement à celle des charges utiles, beaucoup plus importante. Les courbes tracées sur la figure 8.8 permettent de constater que dans le cas présent, la charge permanente induite par le poids du remplissage est suffisante pour éviter que l'influence des charges utiles ne deviennent prédominante, et ce quel que soit le poids volumique considéré.

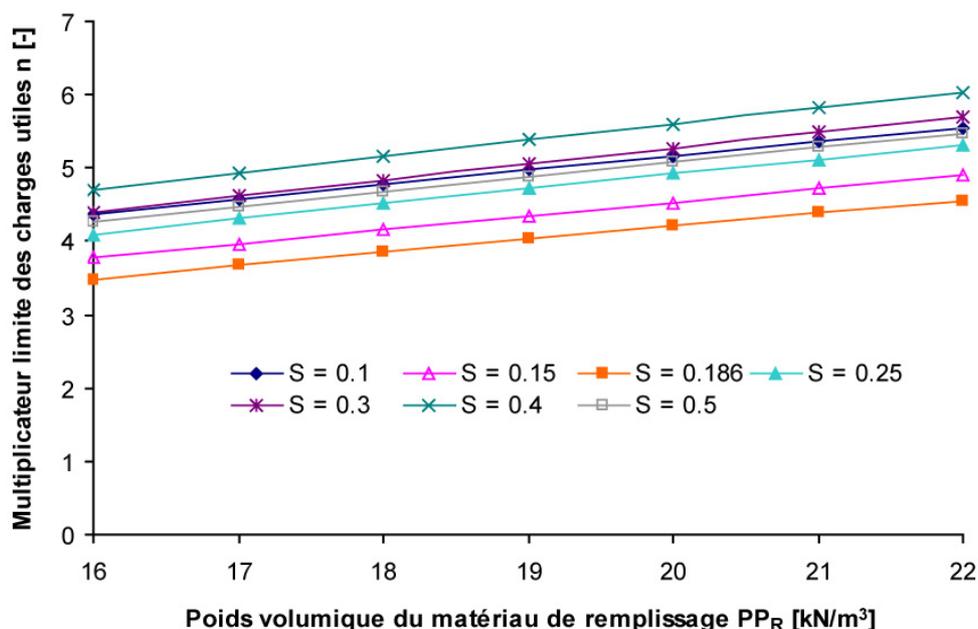


Figure 8.8 : Evolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction du poids volumique du matériau de remplissage et du surbaissement de l'arc

En vue de valider l'hypothèse émise quant à la proportionnalité entre l'effort normal admis dans les rotules  $A$ ,  $C$  et  $B$  et la charge permanente totale  $\eta$ , le calcul précédemment présenté a été effectué une nouvelle fois avec le logiciel RING 2.0 pour deux valeurs de surbaissements (0.186 et 0.4). La figure 8.9 illustre la comparaison entre les résultats fournis par le logiciel et ceux obtenus grâce au modèle. Le parfait parallélisme obtenu entre les courbes confirme la validité de l'hypothèse émise.

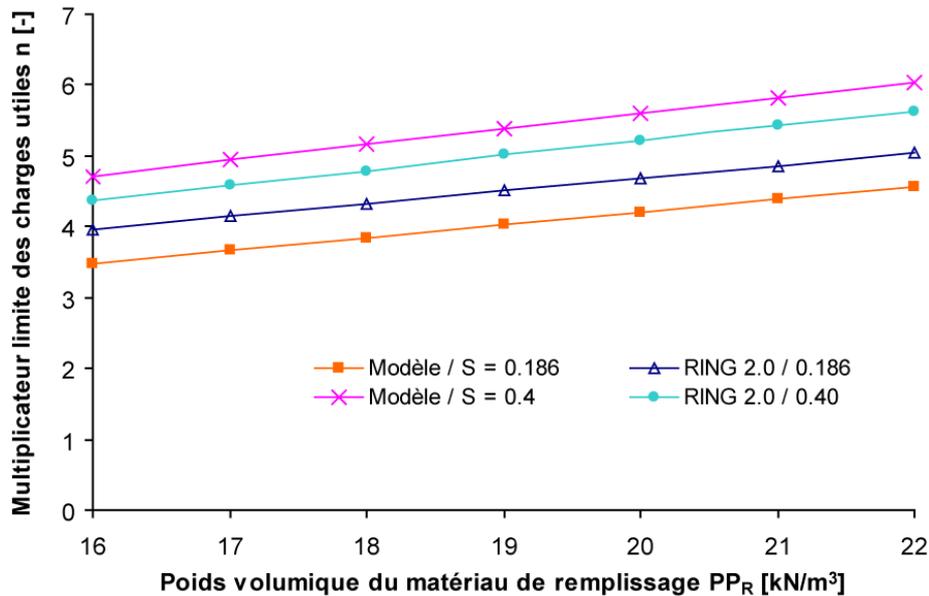


Figure 8.9 : Evolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction du poids volumique du matériau de remplissage et du surbaissement de l'arc. Comparaison entre les résultats obtenus avec le modèle et avec le logiciel RING 2.0.

### 8.5.2. Poussée latérale exercée par le remplissage

Comme déjà mentionné au paragraphe 6.4, la poussée latérale exercée par le matériau de remplissage lorsque l'arc se déforme est un paramètre dont l'apport peut être crucial pour la stabilité de l'élément structurel, mais dont la valeur est encore mal connue et difficile à évaluer. Le modèle développé dans cette étude offre la possibilité de mesurer l'influence de cet effort sur la capacité portante de l'arc.

Dans la mesure où ce travail n'a pas la prétention d'entrer dans le domaine de la mécanique des sols et sachant que les conditions de stabilité de l'arc restent l'objet central de cette étude, nous ne nous attacherons pas à mesurer l'effet d'une variation des caractéristiques intrinsèques au matériau de remplissage, mais uniquement à cerner l'effet d'une variation globale de la poussée latérale, sans se préoccuper de la cause de cette modification. En admettant une cohésion nulle, l'étude paramétrique réalisée se focalise par conséquent sur la variation du facteur  $m_p$ , multipliant la poussée latérale calculée, initialement dans le but de tenir compte de la courbure de l'écran sur lequel la force s'applique.

L'importance de l'apport positif de la poussée exercée par le remplissage dépend évidemment de l'ampleur de la surface sur laquelle elle peut s'exercer et est par conséquent fonction du tracé d'intrados considéré. Le surbaissement est donc un paramètre variable à adjoindre à la présente étude.

La figure 8.10 présente l'évolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction du surbaissement de l'arc et du facteur  $m_p$ , dont la valeur a été successivement modifiée entre 0, correspondant à l'absence de poussée latérale, et 1, équivalent à une poussée totale du sol sur un écran plan, selon la théorie de Rankine.

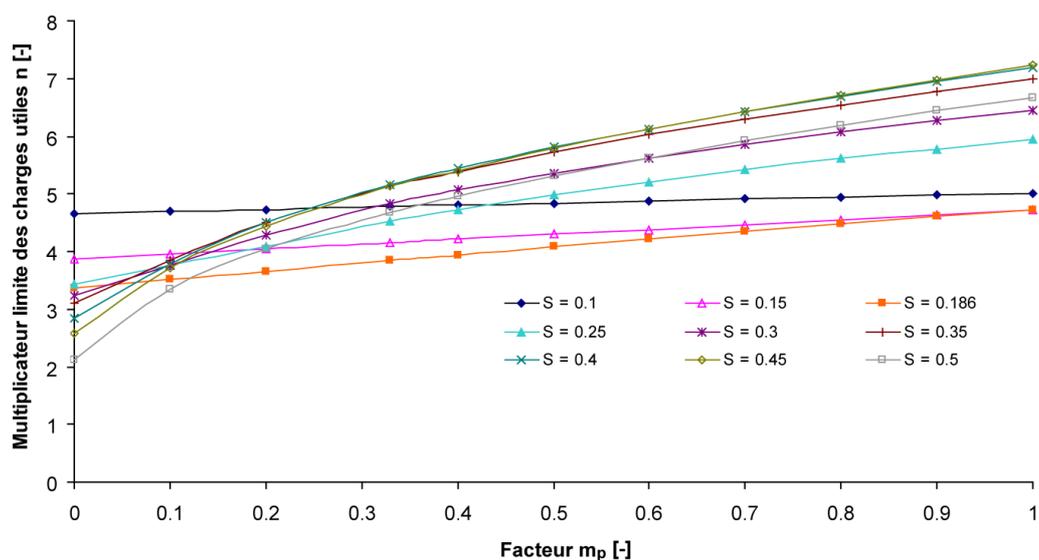


Figure 8.10 : Evolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction du facteur  $m_p$  et du surbaissement de l'arc

Les résultats obtenus révèlent que, comme présumé, l'influence de la poussée latérale du remplissage décroît avec la valeur du surbaissement de l'arc, jusqu'à en devenir insignifiante dans le cas des tracés d'intrados les plus surbaissés.

Il a été admis, dans l'élaboration du modèle précédemment présenté, qu'il était nécessaire de réduire la poussée latérale considérée au tiers de sa valeur calculée selon la théorie de Rankine, et ce afin de tenir compte de la forme incurvée de l'écran formé par l'arc (voir § 6.4). Les résultats de l'étude paramétrique révèlent qu'ignorer l'effet de la poussée latérale du remplissage induirait une diminution maximale de la capacité portante de l'arc égale à 50 % par rapport à la valeur considérée dans le modèle de base, cette réduction correspondant au cas d'un arc dont le surbaissement serait égal à 0.45. En dépit de cette forte diminution du multiplicateur limite des charges utiles, la négligence de l'influence de cette poussée ne mettrait pas explicitement la sécurité de l'arc en danger.

Les résultats obtenus confirment ainsi que la prise en compte de l'influence de la poussée exercée par le matériau de remplissage sur la capacité portante de l'arc relève d'une importance particulière dans le cas d'arcs dont le tracé d'intrados se rapproche de celui du plein cintre.

## 8.6. Loi constitutive

Les méthodes d'évaluation de la capacité portante des arcs en maçonnerie basées sur le mécanisme à quatre rotules postulent généralement que la résistance en compression du matériau constitutif de l'arc n'a qu'une influence très restreinte sur la capacité portante de ce dernier, à tel point qu'elle a même souvent été admise infinie [8.1-8.2]. Le modèle développé dans cette étude offre la possibilité d'évaluer quantitativement l'influence réelle des caractéristiques mécaniques de la maçonnerie en compression considérées.

Quatre courbes contrainte – déformation, établies sur la base des essais effectués par Binda *et al.* [8.3], ont été considérées comme paramètre variable. Elles sont représentées sur la figure 8.11 et correspondent aux caractéristiques résumées dans le tableau 8.2.

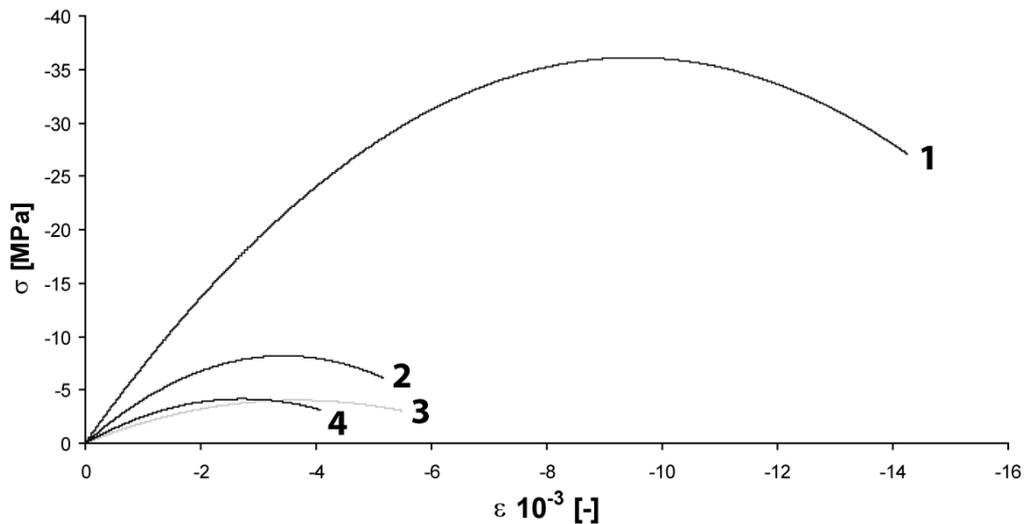


Figure 8.11 : Courbes contrainte – déformation considérées dans l'étude paramétrique

En raison de l'évolution supposée des efforts dans l'arc en fonction du surbaissement, ce dernier est intégré à l'étude paramétrique en tant que variable conjointe aux caractéristiques mécaniques de la maçonnerie en compression.

Tableau 8.2 : Caractéristiques des courbes contrainte – déformation considérées dans l'étude paramétrique

Courbe 1	Maçonnerie de pierre de taille, grès, mortier de chaux hydraulique
Courbe 2	Maçonnerie de pierre de taille, calcaire, mortier de chaux hydraulique
Courbe 3	Maçonnerie de blocage, grès, mortier de chaux hydraulique
Courbe 4	Maçonnerie de blocage, calcaire, mortier de chaux hydraulique

L'évolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction du surbaissement de l'arc et des caractéristiques mécaniques de la maçonnerie, représentées ici par la résistance en compression, est illustrée sur la figure 8.12. Les résultats obtenus confirment globalement la faible dépendance de la capacité portante de l'arc face à une variation des caractéristiques mécaniques de la maçonnerie. Dans le cas d'un surbaissement supérieur à 0.2, une différence de capacité portante inférieure à 18 % a été relevée pour une variation de la résistance en compression considérée entre les deux valeurs extrêmes que sont 4 et 36 N/mm<sup>2</sup>. Face à une amélioration des caractéristiques mécaniques de la maçonnerie, une augmentation plus importante du multiplicateur limite des charges utiles a pu cependant être observée dans le cas des surbaissements les plus faibles, avec une différence maximale de capacité portante équivalente à 34 %.

En dépit de ce qui semble révéler la figure 8.12, le faible nombre de courbes contrainte – déformation testées ne permet pas de se prononcer quant à la linéarité de l'évolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction de la résistance en compression de la maçonnerie (traits interrompus sur la figure 8.12).

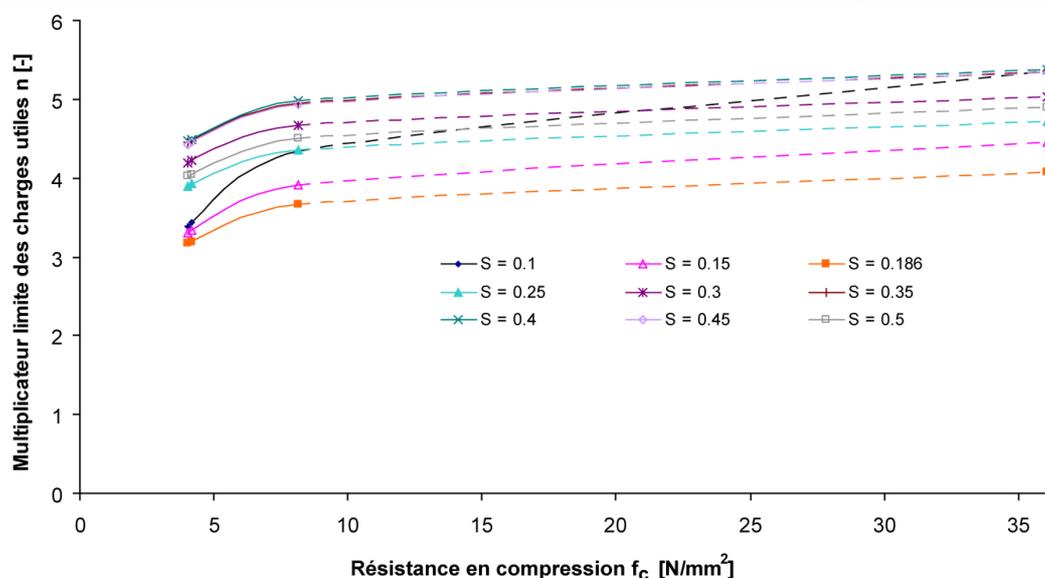


Figure 8.12 : Evolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction du surbaissement de l'arc et des caractéristiques mécaniques de la maçonnerie, représentées par la résistance en compression

Le modèle développé dans cette étude a donc permis de confirmer l'une des principales hypothèses des méthodes d'évaluation de la capacité portante des arcs en maçonnerie basées sur le mécanisme à quatre rotules. Il est ainsi attesté que, pour des valeurs de surbaissement usuelles, à savoir comprises entre 0.2 et 0.5, la capacité portante de l'arc ne dépend que de manière marginale des caractéristiques mécaniques adoptées pour la maçonnerie en compression. Les résultats obtenus valident en outre la considération d'un comportement de la maçonnerie simplifié, tel, par exemple, qu'exprimé par une loi constitutive élastique linéaire ou rigide plastique avec stress-block (voir § 5.2.5), l'imprécision reportée sur la capacité portante de l'arc pouvant être considérée comme mineure.

## 8.7. Conclusions

L'étude paramétrique effectuée et présentée dans ce chapitre a permis de cerner l'influence sur la capacité portante de l'arc des principaux paramètres intervenant dans le modèle développé dans ce travail. Leur interdépendance empêche cependant parfois une interprétation absolue des résultats obtenus.

L'influence d'une variation du surbaissement de l'arc sur la valeur du multiplicateur limite des charges utiles est difficile à appréhender intuitivement. L'étude menée ici a permis de montrer que la capacité portante de l'arc pouvait être considérée comme quasi constante pour des valeurs de surbaissement comprises entre 0.17 et 0.45. Le cas d'un arc dont le tracé d'intrados serait plus plat implique une prédominance probable d'un mode de rupture par snap-through et une vérification adéquate devrait être entreprise. A l'exception des tracés d'intrados en ogive, un surbaissement supérieur à 0.45 peut être considéré comme rare, le cas d'arcs apparemment en plein cintre pouvant généralement être associé à une valeur de surbaissement plus faible en raison du remplissage rigides surmontant le plus souvent les naissances.

L'étude paramétrique concernant les principales caractéristiques géométriques de l'arc peut être réduite à la considération de l'effet d'une variation de l'épaisseur de ce dernier. Celle-ci se révèle être le paramètre le plus influent sur la valeur du multiplicateur limite des charges utiles.

Il a également été démontré que le choix d'un effort normal sollicitant les rotules sur la base de considérations empiriques, était justifié pour des valeurs de surbaissement comprises entre 0.17 et 0.45. La considération de cet effort

permet ensuite, via le diagramme d'interaction, d'évaluer le moment de flexion responsable de l'apparition, puis du maintien des rotules *A*, *C* et *B*.

Bien que n'ayant pas de fonction porteuse directe, le matériau de remplissage influence de manière non négligeable la valeur du multiplicateur limite des charges utiles. Il a ainsi pu être prouvé que la considération de la poussée latérale exercée par ce matériau lorsque l'arc se déforme permettait un gain de capacité portante considérable dans le cas d'arcs dont le tracé d'intrados se rapproche de celui du plein cintre.

En revanche, une variation du poids volumique du matériau de remplissage s'est révélée n'avoir qu'une influence relativement faible sur la capacité portante de l'arc.

Enfin, cette étude paramétrique a confirmé la faible dépendance du multiplicateur limite des charges utiles face à un changement des caractéristiques mécaniques de la maçonnerie en compression, en particulier dans le cas de valeurs de surbaississement supérieures à 0.1.

## **8.8. Références**

- [8.1] Heyman J. (1969) *The safety of masonry arches*, Int. J. Mech. Sci., vol. 11, pp. 363-385.
- [8.2] Heyman J. (1966) *The stone skeleton*, Int. J. Solids Structures, vol. 2, pp. 269-279.
- [8.3] Binda L., Pina-Henriques J., Anzani A., Fontana A., Lourenço P. B. (2006) *A contribution for the understanding of load-transfer mechanisms in multi-leaf masonry walls: testing and modelling*, Engineering Structures, 28, pp. 1132-1148.



## 9. Extension du modèle aux arcs endommagés

Consécutivement aux affres du temps, et bien souvent également à un manque d'entretien, les ponts anciens souffrent fréquemment d'endommagement dont l'influence sur la capacité portante est particulièrement difficile à évaluer. Associé à une méconnaissance du comportement effectif de ce type de ponts, cette incertitude conduit souvent à renforcer inutilement, voire inefficacement, des ouvrages dont la valeur patrimoniale et historique s'en trouve fortement diminuée.

Dans le cas d'ouvrages en béton armé, la présence d'une armature permet de répartir les fissures qui naîtraient suite à l'application d'une contrainte de traction sur la section. L'ouverture de ces dernières, et par extension la déformation apparente de la structure, restent ainsi limitées. La quasi absence de résistance en traction de la maçonnerie de pierre naturelle implique, quant à elle, l'apparition précoce de fissures très localisées, dont l'ouverture augmente avec l'application de la sollicitation et peut fréquemment atteindre une ouverture de plusieurs millimètres, voire centimètres. Cette propriété présente l'avantage d'offrir une ductilité importante aux structures hyperstatiques en maçonnerie de pierre naturelle, mais elle implique la présence de fissures d'une ouverture inhabituelle pour l'œil de l'ingénieur peu familier de ce type d'ouvrages. Bien que l'importance de ces dernières ne doivent pas être négligée, la compréhension du mécanisme responsable de leur apparition est nécessaire afin de mesurer précisément quelle est leur influence sur la capacité portante de l'arc. Cette procédure doit permettre d'éviter la mise en œuvre d'un renforcement inutile et préjudiciable à la valeur patrimoniale de la structure.

Trois types d'endommagement, fréquemment rencontrés sur les ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle, ont été sélectionnés. Le présent chapitre décrit les causes conduisant à leur apparition ainsi que leur influence sur le comportement structurel de l'ouvrage. Leur intégration dans le modèle précédemment élaboré est ensuite développée, en vue d'obtenir une évaluation de l'influence des dommages considérés sur la capacité portante d'un pont en maçonnerie. Bien que pris en compte chacun indépendamment dans cette étude, la survenance conjointe des trois cas d'endommagement examinés est néanmoins possible et pourrait être appréhendée en implémentant simultanément les modifications apportées au modèle pour les différentes situations étudiées.

### 9.1. Cas d'endommagement n°1 – Fissures longitudinales à l'intrados

#### 9.1.1. Description

Le premier cas d'endommagement considéré a déjà été précédemment évoqué et s'illustre par l'apparition d'une ou deux fissures longitudinales à l'intrados de l'arc. Ces dernières surviennent généralement plus ou moins au droit de la face intérieure des tympans, mais peuvent cependant dévier vers l'intérieur de l'arc, en fonction du type d'appareillage mis en œuvre et des faiblesses locales de l'élément structurel (figure 9.1).

L'apparition de ces fissures résulte essentiellement de la poussée latérale exercée sur les tympans par le matériau de remplissage chargé par le trafic. La présence de ce type d'endommagement se détecte aisément lors du relevé de l'état.

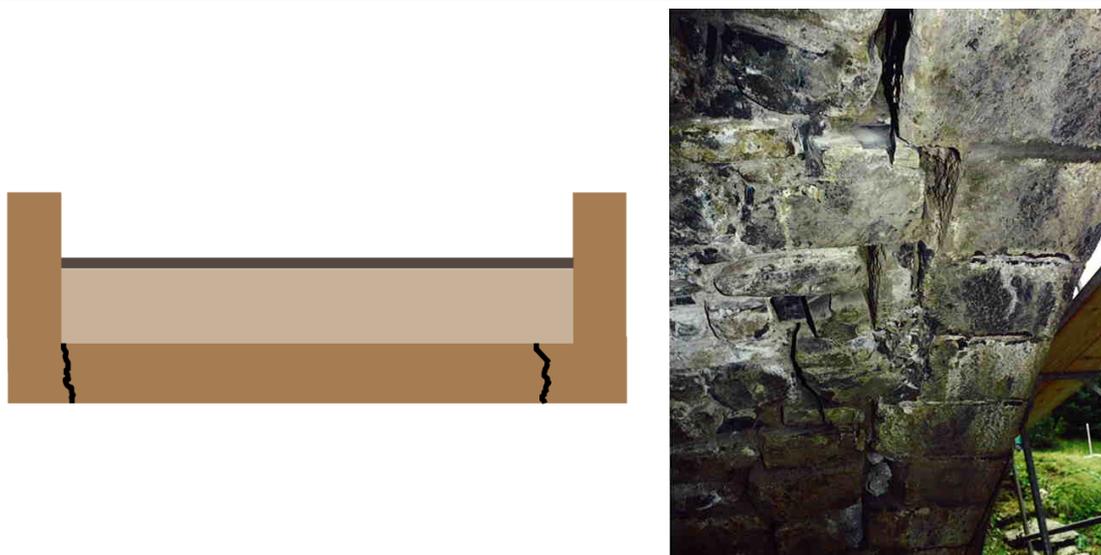


Figure 9.1 : Cas d'endommagement n°1 – Fissures longitudinales à l'intrados

L'influence de cet endommagement sur la capacité portante se révèle par deux aspects principaux. En premier lieu, la ou les fissures, situées généralement plus ou moins au droit de la face interne des tympans, séparent ces derniers du reste de l'arc porteur. L'apport de rigidité, et donc de capacité portante, généré par la présence des tympans [9.1-9.4] ne peut dès lors plus être considéré.

La seconde conséquence relative à la capacité portante de l'arc est une réduction potentielle de la largeur efficace de ce dernier, impliquant l'application d'une charge distribuée transversalement plus élevée (figure 9.2). Pour que cet effet ait une influence, il faut cependant que la largeur réduite,  $v_{réduit}$ , soit inférieure à la largeur nécessaire à la distribution de la charge transversalement en l'absence d'endommagement,  $v$  (voir § 6.5). Or, cet état ne peut se produire que dans le cas d'ouvrages très étroits, ou disposant d'une importante hauteur de remplissage à la clé.

Selon cette modélisation, il est implicitement considéré que seule la partie centrale, délimitée par les deux fissures, est porteuse. Dans un cas réel, toutefois, l'engrainage résultant de l'imbrication de la maçonnerie permet une certaine transmission de la contrainte, tant qu'une ouverture limite de la fissure n'est pas atteinte. Associé à la capacité portante propre des parties latérales de l'arc, ceci implique que la sollicitation considérée pour la partie centrale est plus importante que celle réellement appliquée est que la vérification ainsi réalisée est conservatrice.

Suite à l'apparition de ce défaut, la situation de risque la plus probable devient alors la rupture du tympan, désolidarisé de l'arc par la fissure, consécutivement à l'action de la poussée du remplissage. Ce cas doit alors impérativement être vérifié, le tympan pouvant être assimilé à un mur de soutènement en maçonnerie [9.5].

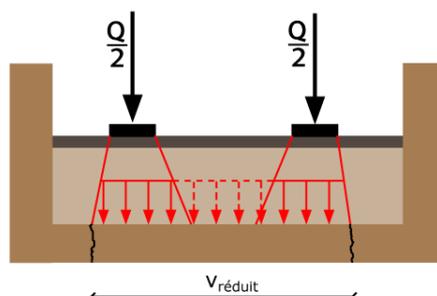


Figure 9.2 : Réduction de la largeur efficace de l'arc suite à l'apparition des fissures longitudinales

### 9.1.2. Modifications du modèle

Dans la mesure où l'effet positif sur la rigidité globale de l'arc induit par la présence des tympans n'a pas été considéré dans la version initiale du modèle (voir § 6.1), le détachement de ces derniers n'a par conséquent aucune implication sur le calcul de la capacité portante.

La réduction de la largeur efficace peut, quant à elle, être introduite dans le modèle en considérant la valeur minimale entre celle préconisée dans le modèle initial,  $v_{initial}$ , ( $v$  sur la figure 6.10) et celle mesurée entre les fissures visibles à l'intrados,  $v_{réduit}$  (figure 9.2).

Une représentation du tableau Excel correspondant au modèle modifié pour tenir compte du cas d'endommagement n°2 peut être consultée en annexe 21.

### 9.1.3. Conséquences de l'endommagement

Il est possible d'illustrer l'influence de l'endommagement décrit ci-dessus sur la capacité portante de l'arc par l'application du modèle au cas du Schwarzwasserbrücke (voir § 7.1). La largeur initiale de cet ouvrage entre les tympans a été évaluée à 5.15 m, alors que la largeur efficace sans défaut est égale à 2.07 m (voir annexe 16). Il faudrait par conséquent que la largeur résiduelle entre les fissures soit inférieure à 2.07 m pour que le dommage ait une influence sur la capacité portante du pont.

La figure 9.3 illustre l'évolution de la capacité portante de l'arc en fonction du pourcentage de réduction de la largeur efficace, dans le cas du Schwarzwasserbrücke. Il peut être constaté que les premiers signes de diminution de la capacité portante de l'arc ne surviennent que pour une réduction égale à 60 % de la largeur réelle du pont entre les tympans. En raison de la portance propre des parties latérales, ignorée dans cette modélisation, le conservatisme de cette dernière augmente lorsque la largeur réduite considérée diminue. Il en résulte que, dans l'exemple étudié ici, une diminution de la capacité portante de l'arc suite à ce défaut peut être considérée comme insignifiante.

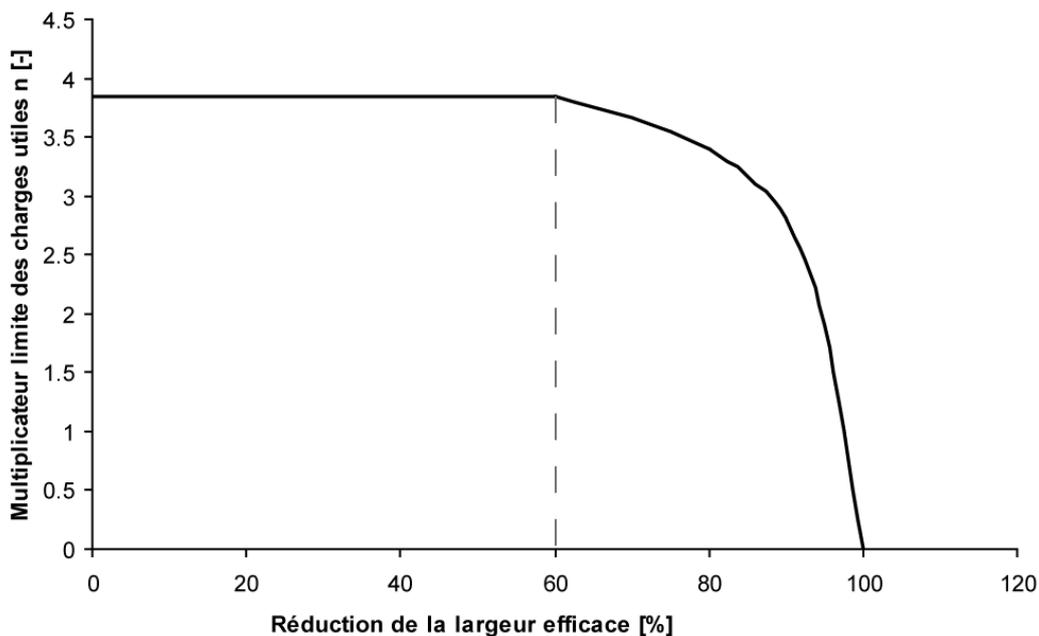


Figure 9.3 : Evolution de la capacité portante en fonction de l'ampleur de l'endommagement

La limite à partir de laquelle une diminution de la largeur efficace de l'arc suite à l'endommagement influence la capacité portante est évidemment également liée à la hauteur de remplissage sur la clé. Plus cette dernière est importante, plus l'endommagement risque d'influencer la largeur efficace à considérer, et donc la capacité portante déterminée avec le modèle. Néanmoins, une grande hauteur de remplissage permet une meilleure diffusion de la charge, ce qui implique une sollicitation moins ponctuelle et donc moins préjudiciable pour l'arc.

L'influence du cas d'endommagement n°1 sur la capacité portante de l'arc est par conséquent extrêmement faible et peut, dans la grande majorité des cas, être considérée comme insignifiante. Le risque d'un déversement du tympan reste néanmoins à considérer et doit être vérifié.

## 9.2. Cas d'endommagement n°2 – Mouvement des appuis

### 9.2.1. Description

Les ouvrages du génie civil sont fréquemment soumis aux conséquences d'un mouvement de leurs appuis. Dans le cas d'un pont en maçonnerie, il peut s'agir d'un déplacement vertical dû à un tassement du sol de fondation, mais également d'un mouvement horizontal consécutif à la poussée exercée soit par l'arc chargé, soit par le massif de culée. Cette situation tend à soumettre l'arc à un état de déformation que ce type d'élément structurel n'est pas à même de supporter. Il s'ensuit un relâchement des degrés d'hyperstaticité de la structure, jusqu'à rendre cette dernière isostatique, et donc insensible à un mouvement ultérieur de ses appuis (figure 9.4). Rappelons que ces considérations sont soumises à l'hypothèse de linéarité géométrique et que par conséquent, les déplacements constatés doivent rester suffisamment petits pour que la structure puisse être considérée dans sa configuration non déformée.

Dans le cas d'un arc en maçonnerie, la quasi absence de résistance en traction du matériau alliée à la forme de l'élément structurel impliquent qu'un faible mouvement des appuis suffit à induire l'apparition de trois rotules [9.6-9.9]. Trop faible pour être facilement quantifiable, ce mouvement est cependant visuellement détectable, par l'apparition des rotules. Dans un cas de symétrie idéale, deux d'entre elles se forment proches des naissances de l'arc alors que la troisième apparaît à la clé de voûte. Toutefois, en raison de tassements différentiels et des imperfections propres à la structure, la configuration des rotules n'est généralement pas exactement celle présentée ci-dessus. Cette dernière n'est, par ailleurs, pas définitive une fois les rotules formées et une évolution du chargement ou du déplacement des appuis induit une modification du positionnement des articulations.

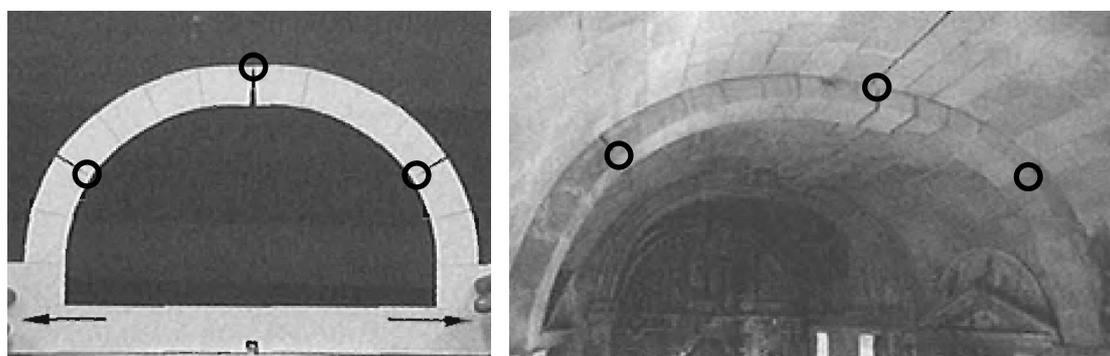


Figure 9.4 : Cas d'endommagement n°2 – Mouvement des appuis, observable sur maquette et sur un arc réel [9.8]

Considérons tout d'abord un potentiel déplacement uniquement horizontal des appuis. Suivant le mouvement relatif de l'un des appuis par rapport à l'autre, deux configurations sont à distinguer. Ces dernières sont révélatrices non seulement de l'allure de l'arc déformé, mais également du sens de rotation des rotules et donc de celui du moment de flexion responsable de leur apparition. Dans le premier cas, correspondant globalement à un éloignement des appuis l'un par rapport à l'autre, les deux rotules extrêmes se forment à l'intrados, tandis que l'articulation centrale apparaît à l'extrados de l'arc (figure 9.5 (a)). Dans le second cas, reflétant un mouvement global de rapprochement relatif des appuis, les deux rotules extrêmes se forment à l'extrados et l'articulation centrale à l'intrados (figure 9.5 (b)). Sachant que pour des questions de compatibilité cinématique, les rotules apparaissent toujours alternativement à l'intrados et à l'extrados le long de l'arc, les deux configurations précitées sont les seules possibles, en matière de sens de rotation dans les rotules et ce, que le mouvement des appuis soit vertical, horizontal ou, comme c'est plus généralement le cas, mixte. Rappelons que ces considérations ne sont valables que sous réserve de l'hypothèse de linéarité géométrique et que par conséquent, les déplacements constatés doivent rester faibles. Il est en outre postulé que ces derniers se produisent exclusivement dans le plan de l'arc. Des cas de déplacement d'appuis impliquant un mouvement différentiel sur la largeur de l'arc peuvent en effet faire naître des dommages, et en particulier des fissures diagonales, dont l'effet sur la capacité portante de la structure sort du cadre de cette étude.

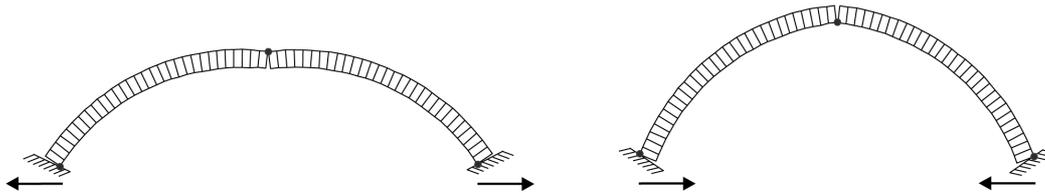


Figure 9.5 : Cas d'endommagement n°2 - a) Ecartement des appuis, b) Rapprochement des appuis

Résultant de l'application de la poussée latérale induite par l'arc lors du décentrement, conjuguée à une rigidité ou une résistance insuffisante des culées, le cas d'un écartement des appuis est de loin le plus fréquemment rencontré. L'arc isostatique ainsi créé est par conséquent considéré par certains, dont notamment le professeur Heyman, comme l'état naturel de tout arc, à prendre en compte comme système statique de base dans l'analyse structurelle [9.10 ; 9.11]. Nous admettons cependant ici que ce type d'endommagement n'est de loin pas aussi fréquent dans le cas d'arcs de ponts que dans celui de bâtiments, dont les appuis sont généralement nettement plus élancés (voir § 6.1). Par ailleurs, la présence des rotules associées à cette situation est détectable lors de l'inspection, d'une part par l'ouverture de la ou des fissures apparaissant à l'intrados et d'autre part, par l'inévitable déformation de l'arc induite par la formation des articulations (voir chapitre 10). Nous considérons par conséquent qu'il n'est pas justifié d'admettre un système statique tri-articulé, à moins que ce dernier n'ait été constaté lors du relevé de l'état de l'ouvrage.

Comme précédemment mentionné, la survenance d'un déplacement des appuis implique la transformation de l'arc en une structure isostatique insensible à un mouvement ultérieur des appuis. Cette constatation implique que le dommage considéré ne peut, en lui-même, en aucun cas conduire la structure à la ruine, tout au moins tant que l'hypothèse de linéarité géométrique (petits déplacements) reste valable.

Toutefois, bien que l'application d'une charge extérieure soit par conséquent nécessaire pour mener l'arc endommagé à la rupture, la réserve de portance dont

dispose ce dernier est inévitablement altérée par le relâchement des trois degrés d'hyperstaticité correspondant à la formation des trois rotules. La prise en compte de ce dommage pour l'évaluation de la capacité portante de l'arc est donc primordiale.

### 9.2.2. Modifications du modèle

Deux situations sont à distinguer, selon que l'on considère un écartement ou rapprochement des appuis (figure 9.5), le cas d'un tassement n'influençant pas le sens de rotation des articulations, mais uniquement leur position, dont la configuration critique sera déterminée par itération, comme c'est le cas dans le modèle initial.

Rappelons qu'en dépit de la considération évidente d'un déplacement des appuis, l'hypothèse de linéarité géométrique (petits déplacements) reste affirmée et que si cette dernière se trouvait invalidée, une étude adéquate, soit considérant les grands déplacements, devrait alors être menée. Le domaine de validité de cette hypothèse, ou en d'autres termes, l'écartement limite pour lequel cette dernière peut être acceptée, dépend d'un grand nombre de paramètres, parmi lesquels, l'épaisseur de l'arc, le surbaissement ou encore la hauteur de remplissage. Son évaluation numérique réclamerait par conséquent une étude détaillée. Il est cependant postulé ici que l'occurrence d'un déplacement des appuis suffisant pour mettre en péril la stabilité de l'arc, invalidant ainsi l'hypothèse des petits déplacements, peut être détectée lors du relevé de l'état. Dans la majorité des cas toutefois, le déplacement constaté, bien que responsable de l'apparition de trois rotules, ne sera pas suffisant pour impliquer en lui-même le déséquilibre de la structure.

La prise en compte de ce type de dommage dans le modèle précédemment établi nécessite la superposition de deux états de sollicitations. Une première étape consiste à examiner l'arc sous poids propre uniquement (figure 9.6). En raison du déplacement des appuis, trois rotules sont déjà créées, préalablement à l'application des charges utiles, et il est alors possible d'évaluer les efforts en  $D$  résultants. Il est admis ici que la poussée n'agit qu'en présence de la charge de trafic et n'est par conséquent pas prise en compte dans le calcul à ce stade.

La seconde étape consiste à évaluer l'état de contrainte sous l'effet de la charge utile uniquement (figure 9.7). La structure est alors isostatique en raison des trois rotules déjà formées, mais aucun moment extérieur ne leur est appliqué. Il est alors possible de calculer l'état de contrainte en  $D$ , résultant uniquement de l'application des charges utiles.

En vertu du principe de superposition, l'état de sollicitation total en  $D$  peut ensuite être obtenu en sommant (avec leur signe) les sollicitations obtenues dans les deux cas. Selon le même principe que pour le modèle initial, le multiplicateur limite des charges utiles responsable de l'apparition de la quatrième rotule en  $D$  peut ensuite être déterminé.

L'application du principe de superposition ne peut être considérée que sous réserve des hypothèses de linéarité géométrique et matérielle. Alors que la première est acceptée comme hypothèse générale à l'application du modèle, la seconde n'est pas vérifiée car, comme l'ont montré les analyses au micro- et méso-niveaux, la considération d'un comportement non-linéaire pour la maçonnerie est nécessaire. Toutefois, dans la mesure où aucune déformation n'est déduite du calcul, il est admis que ce principe peut néanmoins être appliqué.

Cette procédure permet de tenir compte du fait que la charge utile n'est pas responsable de la formation des trois premières rotules et que la structure est initialement affaiblie, sous la forme d'un relâchement de ses trois degrés d'hyperstaticité, et ce avant l'application de toute charge extérieure.

### 9.2.2.1. Ecartement des appuis

La figure 9.6 présente l'état de sollicitation à considérer dans la première phase du calcul, dans le cas d'un écartement relatif des appuis. Les seules sollicitations appliquées sont les charges permanentes et les moments exercés sur les trois rotules déjà formées.

Bien que sous cet état de sollicitation, les rotules se trouvent, comme précédemment mentionné, plus ou moins à la clé de voûte et aux naissances, leur position est admise correspondant à celle intervenant sous charges utiles. Les systèmes statiques identiques considérés dans les deux phases permettront alors ultérieurement la superposition des deux états de sollicitation.

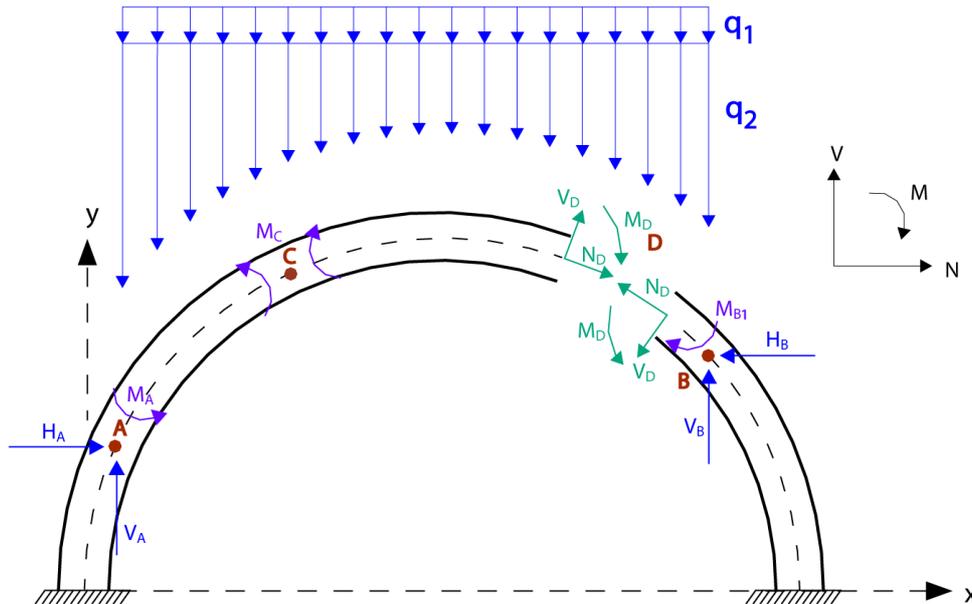


Figure 9.6 : Premier état de sollicitation, sous charges permanentes uniquement, dans le cas d'un écartement des appuis

Suite à l'application des charges utiles dans la seconde phase du calcul, la rotule déjà formée, et se situant initialement aux environs de la clé de voûte, va se déplacer pour se trouver sous le chargement le plus ponctuel (figure 9.7). La compatibilité cinématique implique, par conséquent, que l'établissement du mécanisme de ruine nécessite un changement du sens de rotation de la rotule  $B$ . Se pose alors la question de la valeur du moment de flexion à admettre dans cette rotule après inversion du sens de rotation de cette dernière. Il semble raisonnable de considérer qu'en raison de l'endommagement provoqué par l'écrasement partiel de la section en compression, un moment  $M_{B2}$  réduit doit être pris en compte dans cette rotule.

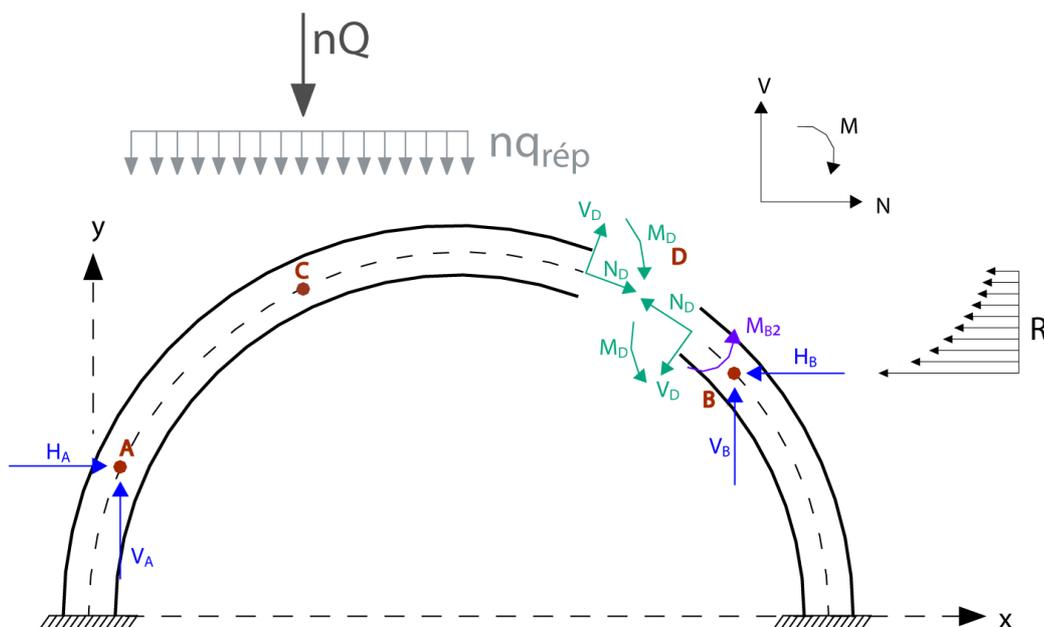


Figure 9.7 : Second état de sollicitation, sous charges utiles, dans le cas d'un écartement des appuis

Le développement détaillé des relations permettant d'arriver à l'expression du multiplicateur limite des charges utiles pour un écartement des appuis peut être consulté en annexe 22, tandis qu'une représentation du tableau Excel correspondant figure en annexe 23.

$$n = \frac{1}{2(6G_T^2\alpha + 4 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T^2\alpha)} \left[ -3G_T d\beta^2 v - 12G_T \alpha H_T - 8 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T \alpha H_T - 6E_T \beta^2 v + \right. \quad (9.1)$$

$$+ (9G_T^2 d^2 \beta^4 v^2 + 36G_T d\beta^4 v^2 E_T + 144G_T \alpha H_T E_T \beta^2 v + 96G_T \alpha H_T 3^{1/2} E_T \beta^2 v + 36E_T^2 \beta^4 v^2 +$$

$$\left. - 144G_T^2 \alpha F_T \beta^2 v - 96G_T^2 \alpha 3^{1/2} F_T \beta^2 v)^{1/2} \right]$$

### 9.2.2.2. Rapprochement des appuis

La figure 9.8 présente l'état de sollicitation à considérer dans la première phase du calcul, dans le cas d'un rapprochement des appuis.

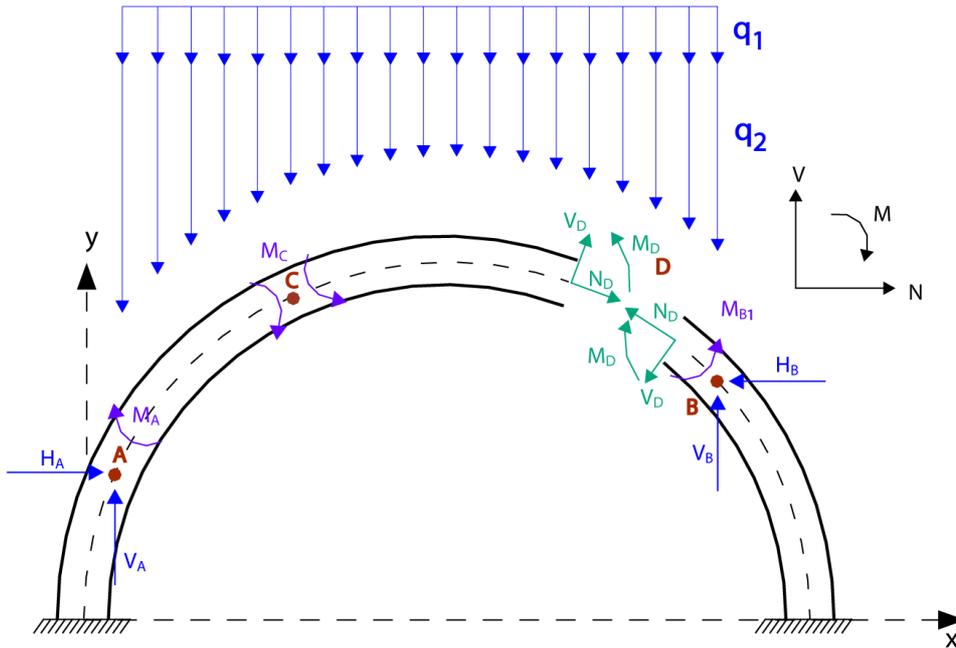


Figure 9.8 : Premier état de sollicitation, sous charges permanentes, dans le cas d'un rapprochement des appuis

L'application des charges utiles limites va transformer l'arc tri-articulé préexistant en un mécanisme à quatre rotules, et ce en minimisant l'énergie nécessaire. Cette constatation implique que le sens de rotation de chaque rotule doit, dans la mesure du possible, rester le même que dans la configuration sous charges permanentes. Il est dès lors admis que la rotule située initialement aux abords de la clé se déplace vers le point C, tandis que les charges utiles sont appliquées au droit de la rotule D, cette fois. Cette configuration n'implique, par conséquent, une inversion du moment que dans la rotule B (figure 9.9).

Le sens de déformation de l'arc étant alors inversé, il est nécessaire de considérer la poussée horizontale due au remplissage comme agissant, cette fois, entre les rotules A et C, tandis que la condition de limitation de la diffusion de la charge ponctuelle est fonction de la distance  $b$  (voir § 6.5).

$$\frac{\ell}{2} \leq b \tag{9.2}$$

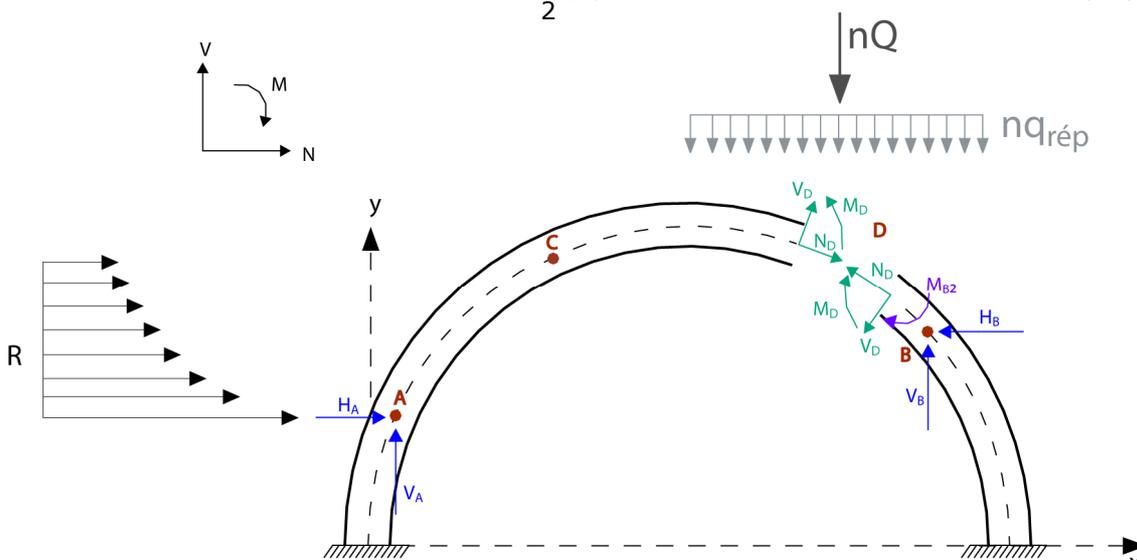


Figure 9.9 : Second état de sollicitation, sous charges utiles dans le cas d'un rapprochement des appuis

Un raisonnement sur l'équilibre de la structure isostatique, semblable à celui précédemment présenté, permet alors d'évaluer le multiplicateur limite des charges utiles dans le cas d'un rapprochement des appuis. Les développements concernés peuvent être consultés en annexe 22, tandis que le tableau Excel relatif figure en annexe 25.

$$n = \frac{1}{2(6G_T^2\alpha + 4 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T^2\alpha)} \left[ -3G_T d\beta^2 v - 12G_T \alpha H_T - 8 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T \alpha H_T - 6E_T \beta^2 v + \right. \quad (9.3)$$

$$\left. + (9G_T^2 d^2 \beta^4 v^2 + 36G_T d \beta^4 v^2 E_T + 144G_T \alpha H_T E_T \beta^2 v + 96G_T \alpha H_T 3^{1/2} E_T \beta^2 v + 36E_T^2 \beta^4 v^2 + \right.$$

$$\left. - 144G_T^2 \alpha F_T \beta^2 v - 96G_T^2 \alpha 3^{1/2} F_T \beta^2 v)^{1/2} \right]$$

### 9.2.3. Conséquences de l'endommagement

Les conséquences de l'endommagement n°2 sur la capacité portante peuvent être illustrées par l'application du modèle modifié présenté ci-dessus au Schwarzwasserbrücke (voir § 7.1). En admettant que cet ouvrage présente trois rotules visibles suite à un écartement ou à un rapprochement de ses appuis, le multiplicateur limite des charges utiles a pu être calculé. Les résultats obtenus pour chacune de ces deux situations sont résumés dans le tableau 9.1. Le moment initialement admis dans la rotule *B* est le correspondant, selon le diagramme d'interaction, de l'effort normal fixé, égal à 1250 kN (voir § 6.6). Suite à la superposition des deux états de sollicitation considérés, un moment de signe inverse, et d'une valeur égale à 50% du moment considéré dans la première phase du calcul, a été admis.

Tableau 9.1 : Multiplicateurs des charges utiles obtenus pour le Schwarzwasserbrücke, dans le cas d'un écartement ou d'un rapprochement des appuis

	Multiplicateur limite des charges utiles [-]	Pourcentage [%]
<b>Sans endommagement</b>	3.85	100
<b>Ecartement des appuis</b>	3.02	79
<b>Rapprochement des appuis</b>	3.56	93

Si un rapprochement relatif des appuis du Schwarzwasserbrücke devait survenir, une diminution de sa capacité portante équivalente à 7 % pourrait être attendue, alors que dans le cas d'un écartement relatif des appuis, cette dernière atteindrait 21%.

Ainsi, suivant le sens du déplacement relatif des appuis considéré, l'influence de l'endommagement n°2 peut être plus ou moins importante. Remarquons cependant qu'un écartement des appuis, soit le cas le plus fréquemment rencontré, implique une diminution de la capacité portante nettement plus marquée que le mouvement relatif inverse.

## 9.3. Cas d'endommagement n°3 – Matériau localement manquant

### 9.3.1. Description

L'un des dommages communément rencontrés sur les ponts en arc historiques implique une détérioration locale de la maçonnerie, sous la forme de blocs partiellement éclatés et dont une portion manque. Il en résulte une diminution locale de la section porteuse de l'arc.

L'influence directe d'une telle réduction est d'introduire une section affaiblie dans l'arc, qui devient alors une localisation préférentielle pour l'apparition d'une rotule. Le moment de flexion responsable de sa formation est par ailleurs logiquement réduit. Le niveau d'endommagement peut par conséquent être évalué lors du relevé de l'état de l'ouvrage, sous la forme d'une estimation de l'épaisseur résiduelle de l'arc à l'endroit de l'endommagement. Il va sans dire qu'une diminution simultanée de la section en différentes localisations peut être envisagée.

### 9.3.2. Modifications du modèle

Suivant la position de l'endommagement, une hypothèse sur la rotule concernée ( $A$ ,  $C$ ,  $D$  ou  $B$ ) doit être émise. Dans les zones de l'arc où cette supposition serait sujette à une trop forte incertitude, deux scénarios peuvent être élaborés et le calcul effectué pour chacun d'eux. Celui fournissant la valeur du multiplicateur limite des charges utiles le plus faible devra alors être considéré comme celui à adopter.

Dans le cas où l'endommagement concernerait les rotules  $A$ ,  $B$  ou  $C$ , les modifications du modèle, se limitent à retirer la coordonnée horizontale de positionnement correspondante ( $x_A$ ,  $x_B$  ou  $x_C$ ) des variables d'itération. La position de l'articulation est ainsi admise fixe car déterminée par la localisation de l'endommagement. Il reste alors à choisir la valeur réduite du moment de flexion appliqué à la rotule concernée.

Si l'endommagement observé est supposé provoquer l'apparition de la rotule  $D$ , son influence doit être prise en compte d'une part au moyen du retrait de la coordonnée horizontale de positionnement  $x_D$  des variables d'itération et d'autre part, par une réduction de l'épaisseur de l'arc  $d$ .

Une représentation du modèle modifié sous la forme d'un tableau Excel peut être consultée à l'annexe 26.

### 9.3.3. Conséquences de l'endommagement

Les conséquences d'un manque local de matériaux sur la capacité portante d'un pont en arc peuvent être évaluées par l'application du modèle modifié au Schwarzwasserbrücke.

L'effet de l'endommagement sur la capacité portante de l'arc dépend évidemment de la localisation de l'affaiblissement. La figure 9.10 illustre l'évolution du multiplicateur limite des charges utiles dans le cas d'un manque de matériau entraînant une diminution locale de l'épaisseur de l'arc de 50%, en fonction de la position de cette dernière le long de l'arc. Les intersections entre les différentes portions de courbe marquent les points de transition à partir desquels l'endommagement est rattaché à l'apparition de la rotule adjacente.

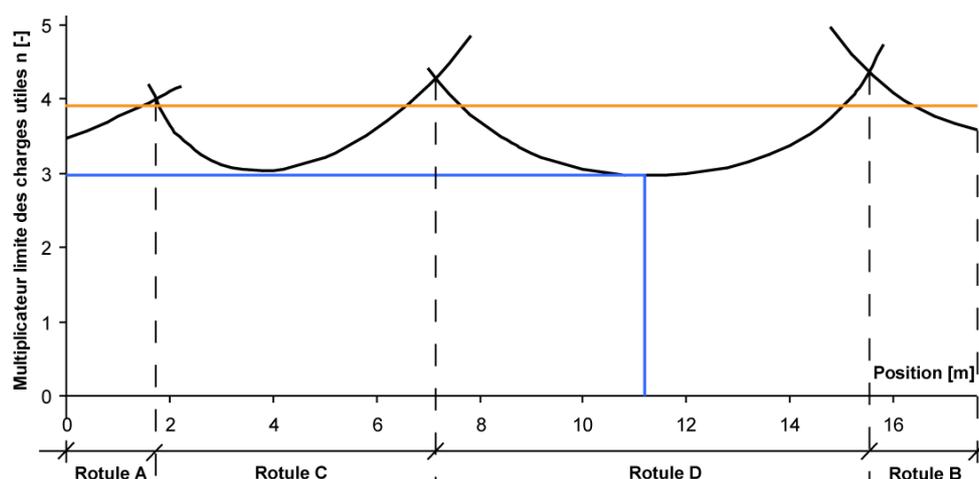


Figure 9.10 . Evolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction de la position de l'endommagement le long de l'arc

La position de l'endommagement pour laquelle l'influence de ce dernier sur la capacité portante est la plus marquée se situe à 11.2 m de la naissance gauche de l'arc et correspond à la rotule *D*. Une valeur du multiplicateur limite des charges utiles égale à 2.96 a été obtenue dans le cas où le Schwarzwasserbrücke présenterait un endommagement induisant une diminution de 50% de l'épaisseur de l'arc en cette localisation. Cette valeur représente une diminution de 23% par rapport au cas sans défaut.

Un endommagement situé à 3.8 m de la naissance gauche et correspondant par conséquent à la rotule *C*, aurait des conséquences presque identiques en termes de capacité portante. Partout ailleurs, l'influence d'une telle diminution de l'épaisseur de l'arc serait moindre.

La ligne orange tracée sur la figure 9.10 représente la valeur du multiplicateur limite des charges utiles pour l'arc du Schwarzwasserbrücke, considéré sans défaut (voir § 7.1). Une anomalie du modèle apparaissant sous la forme d'une capacité portante plus élevée dans le cas d'un arc endommagé que dans celui cas sans défaut, peut être constatée pour certaines localisations de la rotule. Cette irrégularité s'explique par le fait que le positionnement de la rotule, déterminé par la localisation de l'endommagement, peut induire une configuration globale des rotules plus favorable que celle déduite du cas sans dommage, et ce en dépit de la considération d'un amincissement donné. Le calcul de l'arc non endommagé doit, par conséquent, être également effectué pour s'assurer que l'effet du dommage considéré n'est pas insignifiant. La figure 9.10 permet néanmoins de se rendre compte que ce cas est rare.

La figure 9.11 illustre l'évolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction de l'ampleur de la réduction de l'épaisseur de l'arc, en admettant que cette dernière se situe dans la section critique précédemment déterminée.

L'analyse de l'influence de ce paramètre via le modèle modifié précédemment décrit nécessite néanmoins quelques précautions. En premier lieu, il est nécessaire de tenir compte du fait qu'une réduction importante de la section implique une forte augmentation de la contrainte normale de compression qui la sollicite. Au-delà d'un certain seuil, cette dernière est alors suffisante pour maintenir la section résiduelle entièrement comprimée et donc d'éviter toute fissuration due à la flexion. Une analyse dans le domaine non fissuré est alors nécessaire. Le critère de passage d'un domaine à l'autre a précédemment été défini au chapitre 5 (Point 2, figure 5.12, équation 5.20) :

$$N = nG + H = N_{\max \text{ fissuré}} = N_{\min \text{ non fissuré}} = \frac{-1}{4} dv\beta^2 \frac{-1 + 3^{1/3}}{\alpha} \quad (9.4)$$

Ainsi, dans les cas où l'effort normal déterminé est supérieur à la valeur établie via l'équation (9.4), le calcul doit être effectué sur la base de la courbe d'interaction établie pour une section non fissurée (équation 5.16) :

$$M = \frac{-1}{24} 3^{1/2} d \frac{4\alpha N + dv\beta^2}{\alpha} \quad (5.16)$$

La valeur du multiplicateur des charges utiles peut alors en être déduite.

$$n = -\frac{1}{4} \cdot \frac{24F\alpha + 4d3^{1/2} \alpha H + d^2 3^{1/2} v\beta^2}{\alpha(6E + 3^{1/2} dG)} \quad (9.5)$$

Un second aspect est à prendre en compte dans le cas où une section non fissurée doit être considérée. Il faut effectivement prendre en compte le fait que la section n'est capable de supporter qu'un effort normal limité, pour lequel une rupture de la section en compression survient, et dont la valeur a également été établie au chapitre 5 (Point 1 figure 5.12, équation 5.18) :

$$N = nG + H \leq N_{\max} = -\frac{dv\beta^2}{4\alpha} \quad (9.6)$$

Il en résulte un critère restrictif supplémentaire à appliquer sur le multiplicateur limite des charges utiles.

$$n \leq \frac{N_{\max} - H}{G} \quad (9.7)$$

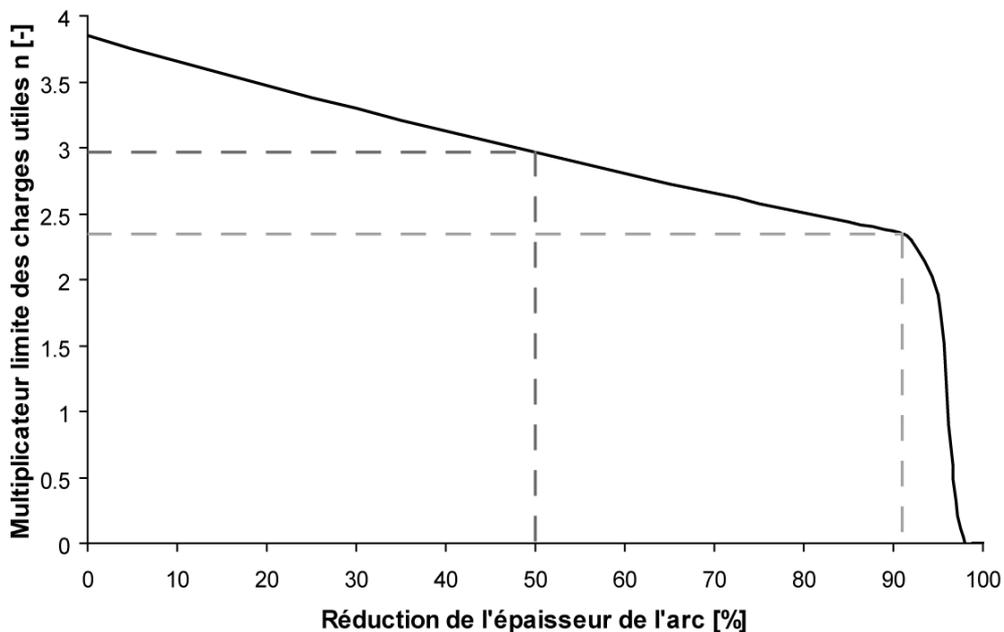


Figure 9.11 : Evolution du multiplicateur limite des charges utiles en fonction de l'ampleur de l'endommagement

La figure 9.11 permet de constater que, dans une première phase se prolongeant jusqu'à une réduction égale à 91 % de la section et pour laquelle le multiplicateur limite des charges utiles est égal à 2.35, la valeur de ce dernier diminue pratiquement linéairement avec l'épaisseur de l'arc. Ainsi, une réduction conséquente de l'épaisseur de l'arc, par exemple équivalente à 50 %, permet néanmoins le maintien d'un multiplicateur limite des charges utiles élevé, en l'occurrence égal à 2.96.

La courbe de la figure 9.11 présente une seconde phase, sous la forme une brusque chute de la capacité portante, jusqu'à l'atteinte d'une valeur nulle, lorsque la réduction de l'épaisseur de l'arc atteint 98 %. Cette diminution brutale de la résistance s'explique par le changement de mode de ruine mentionné ci-dessus, correspondant à l'atteinte de l'effort normal maximal que la section peut supporter et par conséquent à une rupture en compression de cette dernière (équation (9.6)).

Il peut ainsi être constaté qu'une diminution locale de l'épaisseur de l'arc due à un manque de matériau n'a qu'une influence limitée sur la capacité portante de l'arc tant que l'ampleur de l'endommagement reste assez faible pour que la section se rompe sous l'effet de l'interaction moment de flexion – effort normal. Dans les cas où la section serait suffisamment diminuée pour que l'effort normal appliqué parvienne à maintenir la section entièrement comprimée, le risque d'une chute de la capacité portante, consécutive à une rupture en compression pure, devient significatif.

Le dernier cas intéressant à évaluer implique un endommagement simultanément de l'arc en deux positions. L'exemple du Schwarzwasserbrücke a donc été traité en admettant d'une part une diminution de l'épaisseur égale à 50 %, fixée au niveau de la section critique précédemment déterminée (rotule *D*), et d'autre part une seconde réduction de la section, également équivalente à 50%, et dont la position a été considérée comme variable le long de l'ouverture.

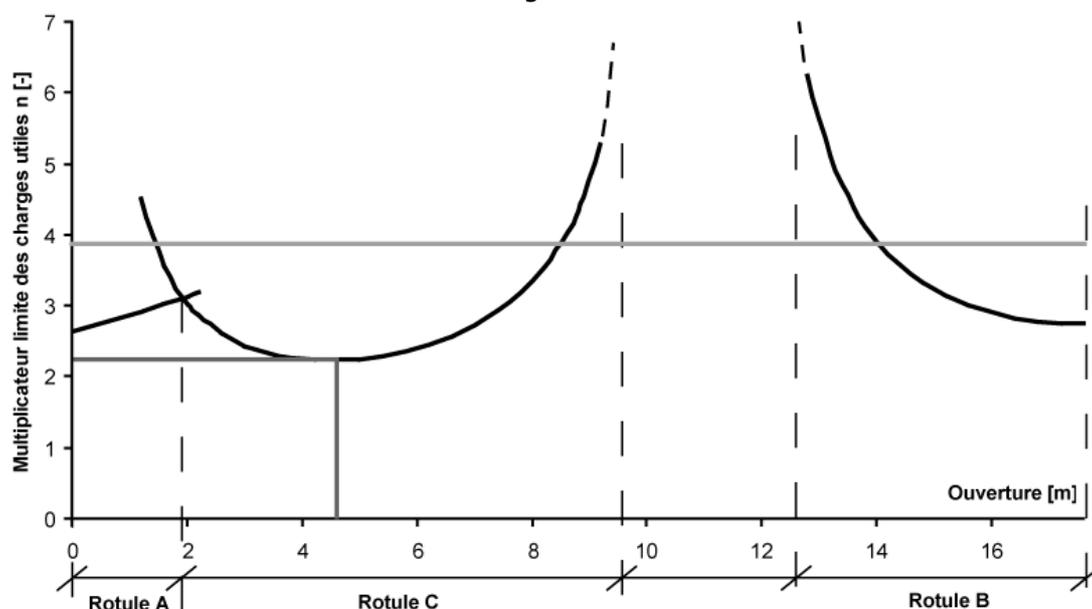


Figure 9.12 : Evolution du multiplicateur limite des charges utiles pour un endommagement simultané en deux sections

La figure 9.12 illustre l'évolution du multiplicateur des charges utiles en fonction de la position du second endommagement considéré. Il peut être immédiatement constaté que lorsque la position de deux affaiblissements est fortement rapprochée, le multiplicateur limite des charges utiles obtenu est très élevé, et ce en raison de la configuration des rotules, très éloignée de celle dite critique, que l'on obtiendrait si toutes les articulations étaient libres de se produire le long de l'arc. A nouveau, dans cette situation, un calcul effectué sur l'arc considéré comme non endommagé devrait être réalisé afin de lever tout doute concernant ce type d'anomalie.

Le cas le plus défavorable est obtenu lorsque le second affaiblissement est placé à une distance égale à 4.6 m de la naissance gauche de l'arc. Cette configuration

induit un multiplicateur limite des charges utiles égal à 2.23, ce qui représente une capacité portante réduite de 42 % par rapport au cas non endommagé.

Ainsi, grâce à la redistribution des efforts, les conséquences d'un endommagement local restent, dans la plupart des cas, acceptables du point de vue de la sécurité structurale.

## 9.4. Conclusions

La présence d'une ou deux fissures longitudinales à l'intrados de l'arc d'un pont en maçonnerie résulte du comportement normal d'un tel ouvrage et son influence sur la capacité portante peut être considérée comme négligeable dans la majorité des cas.

Le second cas d'endommagement considéré implique un déplacement des appuis de l'arc. L'ampleur des conséquences de l'endommagement sur la capacité portante dépend du mouvement relatif des naissances l'une par rapport à l'autre. Ce type d'endommagement, qui bien qu'il ne puisse en lui-même induire la ruine de la structure, implique une diminution de la capacité portante de l'arc. L'application du modèle modifié au Schwarzwasserbrücke a cependant montré que tant que les déplacements considérés restent petits, et que l'hypothèse de linéarité géométrique demeure par conséquent valable, la capacité portante restait suffisante pour que la sécurité structurale puisse être garantie.

L'étude du troisième cas considéré illustre que les conséquences d'un endommagement local, s'il ne se produit qu'en un seul point, ne deviennent critiques que si l'ampleur de la diminution de la section porteuse dépasse les 90 %. Il a en outre été constaté qu'une perte de matériau située aux reins de l'arc, qu'elle se trouve du côté de la charge appliquée ou à l'opposé, a une influence sur la capacité portante plus marquée que dans les cas où l'endommagement se situe à la clé de voûte ou proche des naissances.

Une perte de section simultanée en deux localisations aurait pour effet une diminution supplémentaire la capacité portante de l'arc. Il a néanmoins été démontré par l'application au Schwarzwasserbrücke que, dans ce cas, la réserve de portance restait suffisante.

Les conclusions rapportées dans ce chapitre illustrent l'importance d'une étude détaillée de l'influence de l'endommagement que présentent fréquemment les anciens ponts en maçonnerie. Leur établissement ne se base cependant que sur l'application du modèle présenté ici, et une validation des résultats obtenu, notamment via une campagne expérimentale, serait souhaitable. Il en ressort néanmoins que dans la plupart des cas, bien qu'une perte de capacité portante soit généralement inévitable, le multiplicateur limite des charges utiles résiduel calculé reste suffisant, malgré un endommagement qui peut parfois sembler impressionnant. La mise en place d'un renforcement dont la réalisation altérerait irrémédiablement la valeur patrimoniale de ce type d'ouvrage, est bien souvent sans justification et superflue.

## 9.5. Références

- [9.1] Royles R., Hendry A. W. (1991) *Model tests on masonry arches*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 91, pp. 299-321.
- [9.2] Begimgil M. *Behaviour of restrained 1.25 m span model masonry arch bridge*, Proceedings of the First International Conference on Arch Bridges held at Bolton, UK, pp. 321-325.
- [9.3] Page J. (1995) *Load tests to Collapse on Masonry Arch Bridges*, Arch Bridges, Ed. Thomas Telford, London, pp. 289-298.

- [9.4] Harvey W. J., Smith F. W., Barthel R. (1998) *Some notes on system behaviour in arch bridges*, Arch Bridges, Sinopoli (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 315-319.
- [9.5] Grandjean A., Brühwiler E. (2006) *Murs de soutènement en maçonnerie de pierre naturelle. Directive pour l'évaluation de l'état et les concepts d'intervention*, Rapport interne, EPFL-MCS n° 05.11, 41 p.
- [9.6] Loo Y.-C., Yang Y. (1991) *Cracking and failure analysis of masonry arch bridges*, Journal of Structural Engineering, vol. 117, issue 6, pp. 1641-1659.
- [9.7] Ochsendorf J. A. (2006) *The masonry arch on spreading supports*, The Structural Engineer, vol. 84, n°2 pp. 29-35.
- [9.8] Huerta S. (2005) *The use of simple models in the teaching of the essentials of masonry arch behaviour*, Proceedings of the International Seminar Theory and practice of constructions: knowledge, means and models. Didactic and research experiences, pp. 747-761.
- [9.9] Audenaert A., Fanning P., Sobczak L., Peremans H. (2008) *2-D analysis of arch bridges using an elasto-plastic material model*, Engineering Structures, 30, pp. 845-855.
- [9.10] Heyman J. (1969) *The safety of masonry arches*, Int. J. Mech. Sci., vol. 11, pp. 363-385.
- [9.11] Heyman J. (1966) *The stone skeleton*, Int. J. Solids Structures, vol. 2, pp. 269-279.

## **9.6. Références complémentaires <sup>9</sup>**

- [9.12] Bien J., Kaminski T. (2006) *Numerical modelling of damaged masonry arch bridges*, bridge maintenance, safety, management, life-cycle performance and cost, Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference.
- [9.13] Gilbert M. (1993) *The behaviour of masonry arch bridges containing defects*, PhD Thesis, Bolton Institute of Higher Education, 278 p.
- [9.14] Karaveziroglou-Weber M., Stavrakakis E. (1998) *Damages of existing stone bridges in Greece*, Arch bridges: history, analysis, assessment, maintenance and repair, Proceedings of the Second International Arch Bridge Conference, Venice, Italy, pp. 361-367.
- [9.15] Ural A., Oruç S., Dogangün A., Iskender Tuluk Ö. (2008) *Turkish historical arch bridges and their deteriorations and failures*, Engineering Failure Analysis, 15, pp. 43-53.

---

<sup>9</sup> Bien que non citées dans le texte, les références dites complémentaires sont susceptibles d'apporter un supplément d'information au lecteur.

## 10. Examen d'un pont en arc en maçonnerie

### 10.1. Principes

La procédure d'examen d'une structure existante est spécifique et diffère de celle d'une structure neuve, dans la mesure où elle doit impérativement intégrer la condition réelle de l'ouvrage, en vue de limiter au strict nécessaire les interventions à entreprendre. Selon le projet de norme SIA 269 « Bases pour la maintenance des structures porteuses », l'examen d'une structure existante a pour but « *de vérifier sa sécurité structurale et son aptitude au service du point de vue de l'utilisation restante prévue, et permettre, si nécessaire, de proposer des interventions de maintenance* » [10.1].

Réalisé selon une procédure par étape, l'examen se focalise successivement sur chacun des éléments structuraux déterminants et inclut les aspects suivants :

- le relevé de l'état
- l'analyse structurelle et la vérification des états limites de sécurité structurale et d'aptitude au service
- l'évaluation des résultats et les recommandations concernant d'éventuelles interventions

Le relevé de l'état est la première étape de tout examen d'une structure existante. Il a pour but l'identification des détériorations et autres déficiences de la structure et de collecter les différentes informations nécessaires à l'application de modèles structuraux, tels celui présenté dans cette étude. L'application de ce dernier permet ensuite de chiffrer la capacité portante de la structure considérée.

Ce chapitre vise à compléter le modèle précédemment présenté par une description de la procédure d'examen appliquée aux ponts en maçonnerie. Il s'articule autour de deux approches complémentaires. La première comprend l'appréciation qualitative du risque présenté par la structure, sur la base du relevé de l'état de cette dernière, alors que la seconde implique d'une part, la vérification quantitative de la sécurité structurale, via le modèle présenté dans cette étude, et d'autre part, celle de l'aptitude au service, sur la base d'observations menées in situ. L'application simultanée de ces deux approches conduit à l'évaluation de l'état de la structure, sur la base de concepts tant qualitatifs que quantitatifs, et amène ainsi l'ingénieur vers une prise de position objective concernant une recommandation d'intervention.

La procédure d'examen ainsi décrite permet de tenir compte de l'état de la structure, de son histoire, relativement à ses performances, et des propriétés réelles des matériaux mis en œuvre. Cet apport d'informations, disponible grâce au fait que l'utilisation de la structure, en service, est satisfaisante, permet de réduire les risques et incertitudes.

Dans le cas d'un monument historique, l'application rigoureuse de cette procédure d'examen est particulièrement importante dans la mesure où elle offre la possibilité de prendre en compte les réelles réserves de sécurité dont ces ouvrages disposent, malgré les dommages que ces derniers peuvent présenter. A terme, cette procédure permet également de limiter les éventuelles interventions de renforcement au strict nécessaire, de manière à préserver au maximum la valeur patrimoniale de l'ouvrage.

## **10.2. Relevé de l'état et appréciation du risque**

Outre son rôle lié au recensement des caractéristiques nécessaires à l'application de modèles structuraux, le relevé de l'état sert également de base à l'appréciation du risque présenté par la structure. Ce dernier peut être défini comme le produit de la probabilité que la structure présente une sécurité insuffisante par l'ampleur des conséquences qu'entraîneraient sa ruine (équation (10.1)) et constitue le fondement de l'évaluation qualitative de la structure.

$$\text{Risque} = \text{Probabilité d'insécurité} \times \text{Conséquences de la ruine} \quad (10.1)$$

Les paragraphes suivants s'attachent à définir les deux facteurs intervenant dans cette équation.

### **10.2.1.1. Probabilité d'insécurité**

La probabilité d'insécurité peut être évaluée sur la base de l'état de l'élément structurel, déduit lui-même du relevé de l'état de la structure. La maçonnerie est en effet un matériau qui, de par sa faible résistance en traction, présente fréquemment de grandes fissures, dont l'apparition a pour effet d'apporter une certaine ductilité à la structure. Ainsi, grâce aux propriétés mécaniques de la maçonnerie et en raison du mode de rupture des arcs impliquant une importante capacité de rotation, il peut être postulé que la résistance ultime de ce type d'élément structurel est fortement corrélée avec sa déformation, qui peut être exprimée comme l'amplitude de la déviation de l'arc par rapport à sa forme d'origine. Un corolaire immédiat à cette observation consiste à affirmer que, dès lors, la déformation de l'arc doit permettre d'évaluer la probabilité que ce dernier présente une sécurité insuffisante [10.2].

Quantifier l'écartement global d'un arc par rapport à sa configuration d'origine s'avère néanmoins périlleux, puisque une mesure de déplacement ne peut jamais être que locale et par conséquent nullement révélatrice de la déviation d'ensemble de l'arc. Toutefois, la formation d'une rotule nécessitant l'ouverture d'une fissure et, par compatibilité cinématique, l'apparition d'une certaine déformation, il peut être postulé que la déviation de l'arc par rapport à sa configuration d'origine est fonction du nombre de rotules visibles sur l'arc. Bien que moins précise qu'une mesure métrique, cette quantification offre un moyen de qualification du degré d'endommagement présenté par la structure et, par extension, une manière d'évaluer la probabilité que cette dernière ne dispose pas d'une sécurité suffisante (tableau 10.1).

La figure 10.1 illustre la déviation d'un arc par rapport à sa position d'origine, juste avant sa ruine. L'apparition des rotules y est clairement distinguable et leur représentation en gros plan permet de constater que l'ouverture la plus visible est celle correspondant à la rotule *C*, soit celle apparaissant sous la charge ponctuelle appliquée. L'articulation *D* est, quant à elle, répartie sur trois joints, celui qui est au centre subissant néanmoins la plus grande ouverture. Bien que facilement perceptible à l'œil nu, la déformation de l'arc reste limitée et justifie ainsi l'hypothèse des petits déplacements (linéarité géométrique) considérée dans le modèle présenté dans cette étude.

Tableau 10.1 : Probabilité d'insécurité de l'arc en fonction du degré d'endommagement

Degré d'endommagement	Relevé de l'état			Appréciation de l'état
	Forme de l'arc	Nombre de rotules visibles	Dommages observés	
Faible	Forme et dimensions initiales maintenues	0 ou 1	Perte très locale de matériaux, fissures longitudinales le long de l'intrados, fissures en général d'une ouverture inférieure à 10 mm	Bon, acceptable
Moyen	Déviations visibles de l'arc par rapport à sa configuration initiale	2 ou 3	Perte fréquente de matériaux, fissures d'une ouverture de plusieurs centimètres	Détérioré
Elevé	Déviations significatives de l'arc par rapport à sa configuration initiale	3 ou 4 (partielle)	Détérioration étendue, perte fréquente de matériaux	Mauvais, alarmant

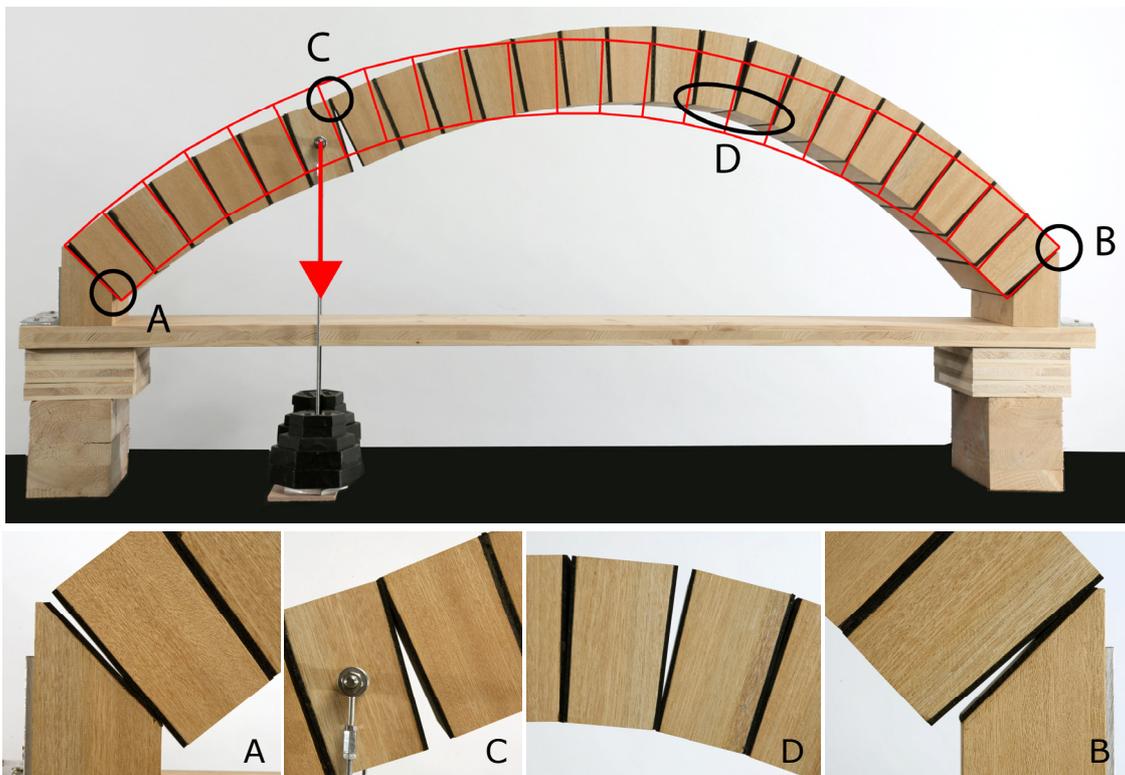


Figure 10.1 : Déformation d'un arc juste avant la ruine et gros plans sur les rotules

Le relevé de l'état doit également permettre de détecter la présence d'éventuels dommages, qui pourront alors être intégrés à l'évaluation quantitative de la sécurité structurale. Trois dommages types, communément rencontrés sur les arcs de ponts en maçonnerie, ont été précédemment recensés et leur effet sur la capacité portante évalué (voir chapitre 9).

Pour rappel, ils sont respectivement caractérisés par (figure 10.2) :

- une fissuration longitudinale à l'intrados de l'arc, située au droit des tympans (figure 10.2 (a))

- l'apparition de trois rotules, suite à la survenance d'un déplacement relatif des appuis (figure 10.2 (b))
- un manque local de matériaux (figure 10.2 (c))

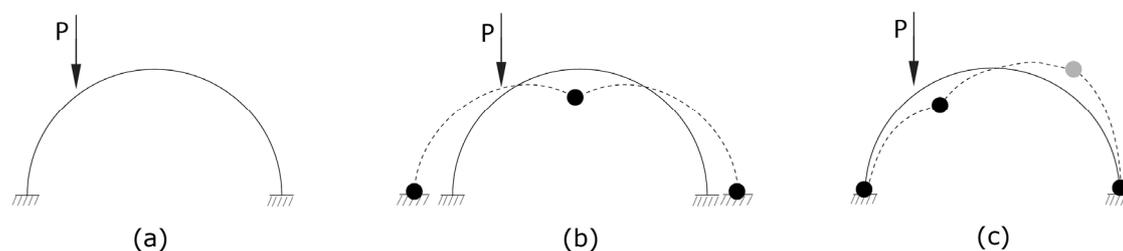


Figure 10.2 : Dommages communément rencontrés sur les arcs de ponts en maçonnerie – a) fissuration longitudinale à l'intrados, b) déplacement des appuis, c) manque local de matériau en différents endroits

Le premier cas d'endommagement cité n'impliquant qu'un effet longitudinal (figure 10.2 (a) et § 10.1), la déviation de l'arc par rapport à sa configuration d'origine est en général quasi inexistante. Aucune rotule n'est visible, ce qui révèle le bon état et, par conséquent, la faible probabilité d'un manque de sécurité de la structure.

Dans le second cas examiné, trois rotules sont déjà apparues suite à un déplacement relatif des appuis. Leur formation s'accompagne d'une inévitable déviation de l'arc par rapport à sa configuration d'origine (figure 10.2 (b) et § 10.2). Suite à la perte de redondance de la structure, la capacité portante de cette dernière se voit diminuée et la probabilité d'une sécurité insuffisante, par conséquent, augmentée.

Le troisième cas d'endommagement peut s'accompagner, suivant l'étendue de la perte de matériau, de l'apparition d'une à trois rotules, la quatrième pouvant même être en cours de formation (figure 10.2 (c) et § 10.3). La déviation de l'arc sera par conséquent également fonction du degré d'endommagement constaté et la probabilité d'une sécurité insuffisante peut donc être très variable.

La survenance conjointe de deux, voire trois, de ces dommages est également à considérer et la probabilité d'insécurité, à évaluer en fonction du type et de l'étendue des observations effectuées lors du relevé de l'état.

Le comportement structurel d'un arc en maçonnerie soumis à une charge ponctuelle placée au quart de son ouverture peut être exprimé schématiquement par l'évolution de sa déviation par rapport à sa configuration d'origine en fonction de la sollicitation appliquée, comme représenté sur la figure 10.3.

Après une première phase linéaire élastique, se prolongeant environ jusqu'au tiers de la charge ultime [10.3], le comportement d'un arc sans défaut présente une réduction graduelle de sa rigidité en raison de la formation successive des rotules, jusqu'à atteindre la charge ultime, correspondant à l'apparition de la quatrième articulation. Dans ce cas, le bon état de l'élément structurel permet d'admettre que la probabilité d'une sécurité insuffisante reste faible.

Un arc souffrant du premier cas d'endommagement cité ci-dessus ne présente pas de déviation initiale par rapport à sa configuration d'origine. Toutefois, une diminution de sa largeur participante, alliée à la disparition de la rigidité additionnelle apportée par les tympans, induit une potentielle légère réduction de sa capacité portante. L'absence de déviation notable de l'arc par rapport à sa configuration initiale implique toutefois que la probabilité d'une sécurité insuffisante demeure faible.

Dans le second cas d'endommagement relevé, la présence de trois rotules implique une déviation notable de l'arc et, par conséquent, une probabilité d'insécurité plus élevée. Les développements réalisés au chapitre 9 ont néanmoins montré que le multiplicateur limite des charges utiles restait relativement élevé, de l'ordre de 75% de sa valeur pour un arc sans défaut.

Dans le cas d'un arc présentant le troisième type d'endommagement considéré, l'ampleur de la déviation de la structure par rapport à sa forme d'origine, et par conséquent la probabilité d'une sécurité insuffisante qui en découle, dépendent de l'ampleur du dommage observé. Une situation critique, présentant un endommagement très important ayant entraîné l'apparition de trois rotules, la quatrième étant en cours de formation, est représenté sur la figure 10.3 par un trait interrompu. Dans ce cas, la probabilité d'insécurité peut être considérée comme élevée.

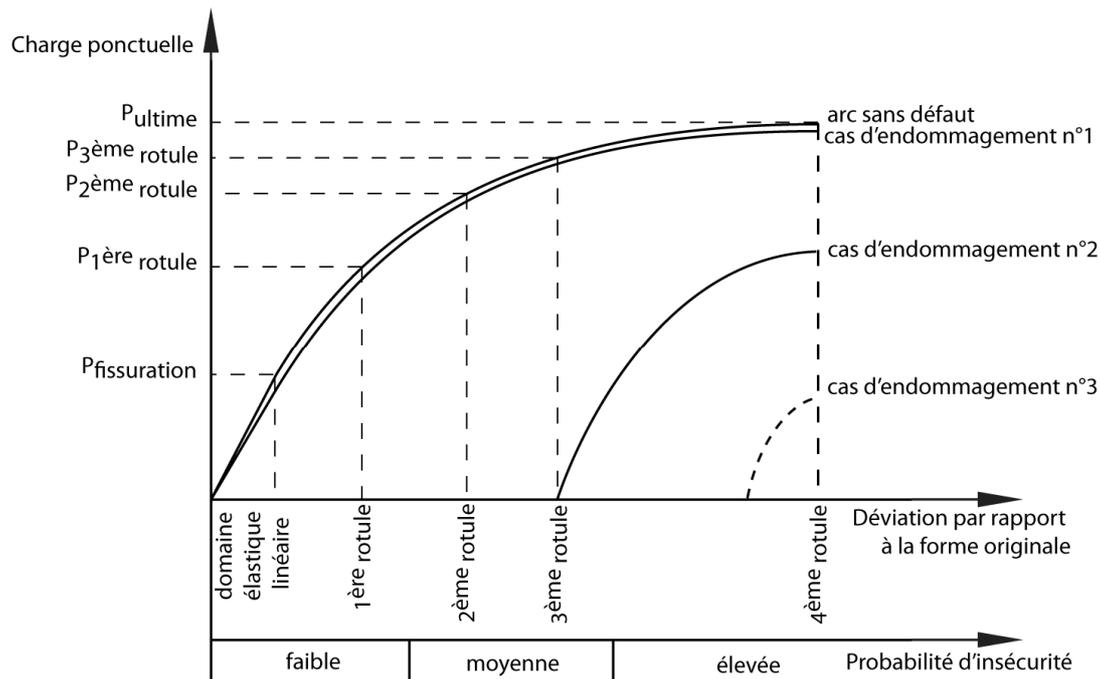


Figure 10.3 : Evolution de la réponse structurale et de la probabilité d'insécurité d'un arc en fonction de l'endommagement

### 10.2.1.2. Conséquences de la ruine

Le second paramètre impliqué dans l'appréciation du risque, selon l'équation (10.1), fait intervenir les conséquences, au sens global du terme, qu'entraînerait la ruine de l'élément structural considéré. Ce facteur peut être exprimé comme le rapport  $\rho$  entre les coûts de défaillance de la structure  $C_F$ , y inclus les conséquences financières de l'interruption du trafic, et les coûts nécessaires pour remettre en état la structure après sa ruine  $C_W$  [10.4] :

$$\rho = \frac{C_F}{C_W} \quad (10.2)$$

Les conséquences d'une ruine structurale peuvent ainsi être reliées à l'importance de l'axe routier ou ferroviaire auquel l'ouvrage appartient, mais également à la valeur culturelle et patrimoniale de ce dernier.

Dans le cas où la défaillance aurait des conséquences induisant un rapport  $\rho$  supérieur à 10, et qu'elle générerait des coûts importants, le niveau d'exigences

requis pour la sécurité structurale pourra être déterminé par une analyse de risque plus étendue, incluant le contexte environnant la structure.

L'appréciation du risque peut ensuite être représentée sous la forme d'une matrice, telle que celle illustrée sur la figure 10.5, pour laquelle les colonnes représentent les différents degrés de probabilité d'occurrence d'une sécurité insuffisante, et les lignes, les niveaux de conséquence d'une ruine structurale.

### 10.3. Vérification de la sécurité structurale

La vérification de la sécurité structurale se base sur le modèle élaboré dans les chapitres précédents. Afin de garantir un niveau de sécurité suffisant, tenant compte des écarts des valeurs considérées par rapport aux valeurs représentatives, et des incertitudes liées au modèle, les grandeurs intervenant dans la vérification doivent être majorées, respectivement minorées, selon qu'elles interviennent de manière défavorable ou favorable dans la vérification. Les valeurs ainsi obtenues sont dites « d'examen » et sont agrémentées de l'indice  $d$  [10.1].

Les principes modernes de maintenance font en outre intervenir le concept d'actualisation des informations, dont l'objectif est de réduire les incertitudes dans la modélisation des variables, grâce à la collecte de données concernant la structure existante. L'actualisation concerne les actions et effets des actions sur la structure, le comportement structural, les propriétés des matériaux et les mécanismes de détérioration [10.5].

La sécurité structurale peut être exprimée sous la forme d'une fonction d'état limite  $G_d$ , faisant intervenir la soustraction entre la résistance,  $R_d$ , et la sollicitation,  $S_d$ , au niveau des valeurs d'examen. La vérification est considérée comme satisfaite lorsque cette fonction d'état limite est supérieure ou égale à zéro.

$$G_d \{R_d - S_d\} \geq 0 \quad (10.3)$$

Lorsque la structure est à l'état limite ultime, la fonction d'état limite est égale à zéro et s'exprime, d'un point de vue général, de la manière suivante :

$$G_d \{G_{d,act,sup} ; G_{d,act,inf} ; n \cdot Q_{d,act} ; \psi \cdot Q_{k,act} ; X_{d,act} ; a_{d,act}\} = 0 \quad (10.4)$$

$G_d$ :	Fonction d'état limite
$G_{d,act,sup}$ :	Valeur d'examen actualisée des actions permanentes dont l'effet est défavorable
$G_{d,act,inf}$ :	Valeur d'examen actualisée des actions permanentes dont l'effet est favorable
$n \cdot Q_{d,act}$ :	Valeur d'examen actualisée de l'action variable prépondérante, multipliée par le multiplicateur limite des charges utiles
$\psi \cdot Q_{k,act}$ :	Valeur caractéristique actualisée de l'action variable concomitante, multipliée par le facteur de réduction $\psi$
$X_{d,act}$ :	Valeur d'examen actualisée d'une propriété du matériau
$a_{d,act}$ :	Valeur d'examen actualisée d'une donnée géométrique

Les valeurs d'examen peuvent être déterminées sur la base de deux concepts différents exposés ci-dessous.

#### Approche déterministe :

L'approche déterministe est celle le plus communément employée pour la vérification de la sécurité structurale. Elle implique la multiplication de valeurs

caractéristiques correspondant à un fractile donné de la distribution probabiliste de la grandeur  $Y$ , par un facteur partiel [10.1].

$$Y_{d,act} = \gamma_Y \cdot Y_{k,act} \quad (10.5)$$

$Y_{d,act}$  : Valeur d'examen actualisée de la grandeur  $Y$

$\gamma_Y$  : Facteur partiel relatif à la grandeur  $Y$

$Y_{k,act}$  : Valeur caractéristique actualisée de la grandeur  $Y$

Les valeurs caractéristiques et facteurs partiels peuvent généralement être déduits des renseignements figurants dans la norme SIA 269 [10.1].

### Approche semi-probabiliste :

L'approche semi-probabiliste est applicable lorsque l'on dispose de distributions probables actualisées des paramètres de base. Dans le cas d'une distribution normale, l'approche semi-probabiliste s'exprime sous la forme générale suivante :

$$Y_{d,act} = Y_{m,act} \cdot (1 + \alpha_Y \cdot \beta_0 \cdot v_{Y,act}) \quad (10.6)$$

$Y_{d,act}$  : Valeur d'examen actualisée de la grandeur  $Y$

$Y_{m,act}$  : Valeur moyenne actualisée de la grandeur  $Y$

$\alpha_Y$  : Facteur de sensibilité relatif à la grandeur  $Y$

$\beta_0$  : Valeur cible de l'indice de fiabilité

$v_{Y,act}$  : Coefficient de variation actualisé relatif à la grandeur  $Y$

Les valeurs cibles de l'indice de fiabilité et les facteurs de sensibilité peuvent être déduits des renseignements fournis par la norme SIA 269 [10.1]. Les valeurs du coefficient de variation actualisé sont, par contre, à déterminer sur la base d'une campagne de mesure ou d'une étude de la littérature adéquate.

Selon que l'effet des actions permanentes est favorable ou défavorable pour la sécurité structurale de l'élément, la valeur de ces dernières doit être majorée (indice sup) ou minorée (indice inf). En raison de la déformation de l'arc, l'effet des actions permanentes qui le sollicite est simultanément favorable, sur la portion d'arc non sollicitée par la charge utile, et défavorable, sur la partie sollicitée (figure 10.4). Bien que les effets opposés ne soient pas exactement symétriques, il peut être considéré que leur incertitude respective se compense mutuellement et que, par conséquent, la valeur d'examen des charges permanentes peut être considérée comme égale à leur valeur moyenne. Cette hypothèse est, en outre, étayée par l'étude paramétrique concernant l'effet d'une variation de la charge permanente sur la capacité portante (voir § 8.5.1), qui a révélé que ce dernier n'impliquait qu'un faible changement dans la valeur du multiplicateur limite des charges utiles.

La valeur d'examen actualisée de l'action variable prépondérante correspond, dans le cas qui nous occupe dans ce travail, à la charge de trafic, multipliée par le multiplicateur limite des charges utiles obtenu, dans le cas de la considération de l'état limite ultime. Ce terme correspond donc à l'inconnue du problème posé.

L'action variable concomitante correspond, dans le cadre du modèle présenté ici, à la poussée latérale exercée par le remplissage. En observant une approche déterministe, la valeur d'examen peut, par conséquent, être obtenue en considérant cette action comme équivalente à une poussée des terres sur un écran et à laquelle on adjoint, selon la norme SIA 260 [10.6], un coefficient de réduction  $\psi$  égal à 0.7. En l'absence de valeur caractéristique, il est en outre admis de considérer dans la vérification la valeur moyenne de cette action [10.6]. L'établissement de la valeur d'examen selon une approche semi-probabiliste

paraît, dans ce cas, plus problématique en raison de la difficulté d'évaluation du coefficient de variation.

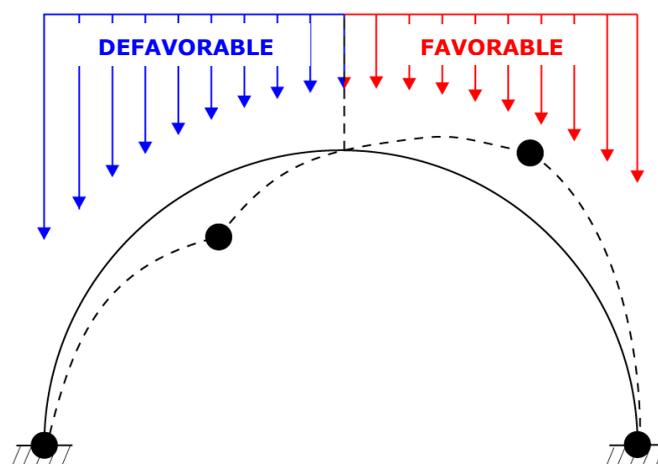


Figure 10.4 : Répartition favorable et défavorable de la charge permanente sur un arc déformé

Les caractéristiques du matériau sont introduites, dans le modèle élaboré ici, sous la forme d'une loi constitutive dont l'équation s'exprime de la manière suivante (voir chapitre 4) :

$$\sigma = \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon \quad (10.7)$$

L'étude paramétrique ayant démontré la faible influence des caractéristiques du matériau sur la valeur de la capacité portante (voir § 8.6), il peut être admis de considérer les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  correspondant à la courbe moyenne comme également représentatifs de la courbe caractéristique du matériau [10.6].

L'étude paramétrique présentée au chapitre 8 a, en outre, démontré que l'épaisseur de l'arc était de loin le paramètre le plus influent sur la valeur de la capacité portante calculée. A l'inverse, il peut être considéré que l'ouverture ou le tracé d'intrados n'ont qu'une influence relative (voir § 8.3). La considération de l'incertitude peut dès lors être concentrée sur la mesure de l'épaisseur de l'arc. Généralement dissimulée par le matériau de remplissage, cette dernière devra, en l'absence de plans fiables, être déterminée par des investigations non destructives, telles par exemple qu'une campagne de mesure au géoradar. La répétition de cette mesure permettra en outre de déduire les caractéristiques nécessaires à une approche semi-probabiliste.

La prise en compte des considérations émises ci-dessus permet de résumer la fonction d'état limite, dans le cas de la vérification de la sécurité structurale d'un pont en arc en maçonnerie de pierre naturelle, à l'équation suivante :

$$G_d \{G_{m,act} ; n \cdot Q_{d,act} ; \psi \cdot Q_{k,act} ; X_{d,act} ; a_{d,act}\} = 0 \quad (10.8)$$

Une fois déterminées, ces valeurs d'examen peuvent être introduites dans le modèle élaboré. Le multiplicateur limite des charges utiles déduit du calcul représente, dès lors, la capacité portante de l'arc, prenant en considération la marge de sécurité nécessaire.

Une première étape consiste en l'application du modèle général (voir chapitre 6). Dans le cas d'un arc ne présentant pas de dommage, cette analyse suffit pour compléter l'approche quantitative de la sécurité. Si le relevé de l'état a montré un endommagement du type de ceux recensés au chapitre 9, une seconde analyse impliquant l'utilisation du modèle modifié correspondant, selon le chapitre 9, est nécessaire. Le calcul sur l'arc non endommagé sert alors de situation de référence, et permet de repérer les cas où le dommage recensé serait trop faible

pour induire une diminution de la capacité portante et pour lesquels le modèle modifié risquerait de fournir une réponse non conservatrice (voir § 9.3.3). Le multiplicateur limite des charges utiles le plus petit doit alors être considéré pour l'évaluation de la capacité portante de la structure.

#### **10.4. Vérification de l'aptitude au service**

La vérification de l'aptitude au service des ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle n'est que rarement abordée. Certaines directives admettent une limite de service équivalente à 50% de la charge ultime [10.7 ; 10.8]. D'autres se basent sur des éléments visuellement détectables comme l'apparition de la première rotule ou encore la séparation visible des tympans et de l'arc [10.9]. Le peu de fondement de ces critères suggère cependant qu'il est nécessaire de réexaminer les exigences de base concernant la vérification de l'aptitude au service des ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle.

Au sens de la norme SIA 260 [10.6], les critères d'aptitude au service visent à garantir le confort des utilisateurs ainsi que la fonction et l'aspect de la structure. Divers essais effectués sous charges de service sur des ponts en maçonnerie, ont tous, sans exception, montré la faiblesse des valeurs de déformation enregistrées, de l'ordre du millimètre, même dans le cas d'une ouverture importante [10.11-10.20]. Ces essais confirment ainsi le comportement élastique linéaire de ces structures, et par conséquent l'absence de rotules, sous charges de service [10.10]. Au vu de la forte proportion des charges permanentes par rapport à la sollicitation variable, il peut, par ailleurs, être admis qu'une augmentation des charges utiles n'entraînera pas une déformation d'un ordre de grandeur plus élevé que celui énoncé ci-dessus et que, par conséquent, l'aptitude au service peut être considérée comme implicitement satisfaite, sans calcul. La massivité des ouvrages en maçonnerie de pierre naturelle implique, en outre, que les effets dynamiques enregistrés sont également très faibles et ne posent, à notre connaissance, jamais aucun problème à ce type de structures, que ce soit en service ou à l'état limite ultime [10.20].

L'aspect des ponts anciens en maçonnerie doit être examiné du point de vue du conservateur du patrimoine. Les marques du temps qui ne remettent pas en question sa sécurité ou sa durabilité ne devraient pas être corrigées dans la mesure où ces dernières sont, au même titre que l'ouvrage lui-même, le témoin de son histoire, et font donc partie intégrante de sa valeur patrimoniale. Il en résulte en particulier que les fissures ne présentant pas d'implications structurelles ou pour la durabilité de l'ouvrage, ne doivent pas être obturées, même si ces dernières exhibent une ouverture importante. En outre, un nettoyage de la structure, visant à enlever la croûte noire apparaissant dans les milieux urbains pollués et les efflorescences survenant suite à la libération de sels, doivent être entrepris avec la plus grande précaution, un nettoyage agressif pouvant gravement altérer la pierre et le mortier.

Il en résulte que la vérification de l'aptitude au service d'un pont en arc en maçonnerie doit se fonder sur une étude au cas par cas, se basant sur une évaluation objective du niveau d'utilisation de l'ouvrage, mis en regard de la préservation de sa valeur patrimoniale. Les informations récoltées lors du relevé de l'état sont alors d'une importance primordiale et, en cas de doute, la réalisation d'un essai de charge peut fournir de précieux renseignements [10.20].

#### **10.5. Evaluation et recommandation d'intervention**

Comme mentionné ci-dessus, la procédure d'examen de la structure comprend deux approches complémentaires. La première permet la détermination quantitative de la capacité portante de la structure, telle qu'elle a été présentée

au paragraphe 11.3. Cette dernière doit ensuite être mise en relation avec le niveau de sécurité exigé.

La sécurité structurale du pont peut alors être vérifiée, sachant que toutes les incertitudes susceptibles d'influencer sa capacité portante ont été prises en compte. En postulant que la charge utile représente l'action prépondérante, le facteur de charge qui doit lui être appliqué, selon la norme SIA 269 [10.1], est égal à 1.5. Ce dernier peut être assimilé au niveau de sécurité exigible et la vérification de la sécurité structurale prend dès lors la forme suivante :

$$n \geq \gamma_Q = 1.5 \quad (10.9)$$

La première partie de la procédure décrite ci-dessus est ainsi établie, sous la forme de la détermination quantitative de la sécurité présentée par la structure.

La seconde approche comprend une appréciation qualitative du risque, sur la base de la matrice de risque précédemment mentionnée. Les différentes zones de cette dernière, délimitées sur la figure 10.5, définissent des catégories de risque, auxquelles est rattachée l'ampleur des interventions à prévoir.

<b>Conséquences de la ruine</b>	<b>Elevées</b> $5 < \rho < 10$			
	<b>Moyennes</b> $2 < \rho < 5$			
	<b>Faibles</b> $\rho < 2$			
		<b>Faible</b>	<b>Moyenne</b>	<b>Elevée</b>
		<b>Probabilité d'insécurité</b>		

Figure 10.5 : Matrice de risque

Les zones blanches représentent un élément structurel dont le risque est jugé mineur. Dans ce cas, la recommandation d'intervention comprendra l'acceptation de l'état existant et le maintien d'une surveillance normale, pour autant que les conditions suivantes soient respectées [10.1] :

- aucune détérioration, ni aucun défaut susceptible de réduire la résistance de la structure n'a pu être observé
- la structure a fait preuve d'un comportement satisfaisant sur une durée de service suffisamment longue
- des constatations analogues ont été effectuées sur le comportement de structures comparables
- la sécurité structurale a été vérifiée

Les zones gris clair englobent les structures dont le risque est considéré comme intermédiaire et pour lesquelles la prise de mesures de sécurité supplémentaires, selon la norme SIA 269 [10.1], sera probablement nécessaire. Une surveillance intensifiée (monitoring) ou une restriction d'utilisation sont, en outre, envisageables.

Les zones gris foncé représentent les structures dont le risque est jugé important et pour lesquelles la prise de mesures urgentes de sécurité, selon la norme SIA 269 [10.1], est nécessaire. Celles-ci peuvent inclure un monitoring permanent, et une intervention liée à la construction devra être mise en œuvre. Dans un cas extrême, le risque induit par une structure correspondant aux zones gris foncé peut induire la mise hors service de cette dernière.

## 10.6. Conclusions

Le présent chapitre expose une procédure d'examen adaptée aux ponts en arc en maçonnerie de pierre de taille, basée sur l'application simultanée de deux approches complémentaires. La première exploite le modèle développé dans cette étude pour déterminer quantitativement la capacité portante de l'ouvrage. Elle comprend, en outre, la prise en compte de la marge de sécurité prescrite par les normes et applicable au principaux paramètres intervenant dans le calcul, par le biais d'une méthode déterministe ou semi-probabiliste. La seconde approche se base sur les résultats du relevé de l'état pour apprécier le risque présenté par la structure et permettre ainsi, via l'établissement d'une matrice de risque, une évaluation qualitative de la sécurité. L'application simultanée de ces deux approches conduit ainsi à un examen objectif de la structure et permet de se prononcer sur une recommandation d'intervention. Les avantages présentés par une telle analyse résident dans le fait qu'elle permet de tenir compte de l'état de l'ouvrage, mais également de son importance, tant sur un plan logistique qu'historique.

Les déformations et vibrations sollicitant les ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle étant toujours très faibles, il est reconnu que la vérification de l'aptitude au service est généralement satisfaite pour ce genre de structures. Par souci de préservation de la valeur patrimoniale de l'ouvrage, les conséquences de toute intervention visant à améliorer l'aspect de ce dernier doivent, néanmoins, être soigneusement évaluées.

Une procédure d'examen adaptée aux ouvrages historiques, permettant de se prononcer de manière objective quant à la sécurité et à une recommandation d'intervention, est ainsi complétée.

## 10.7. Références

- [10.1] Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes (2009) *Norme SIA 269 : Bases pour la maintenance des structures porteuses (projet de consultation septembre 2009)*, 28 p.
- [10.2] Grandjean A., Brühwiler E. (2009) *Advanced examination of historical masonry bridges for future traffic demands*, Proceedings of the Third International Congress on Construction History, Cottbus, pp. 737-743.
- [10.3] Boothby T.E., Domalik D., Dalal V. (1995) *Assessment of masonry arch bridges by service load testing*, Melbourne C. (eds.), Arch Bridges Proceedings of the First International Conference on Arch Bridges, Bolton, UK, pp. 345-354.
- [10.4] Diamantis D. (2001) *Probabilistic assesement of existing structures*, Joint Committee on Structural Safety (JCSS), RILEM Publications Sarl, Cachan, 161 p.
- [10.5] Brühwiler E. (2009) *Structures existantes I : Sécurité et durabilité*, Cours de maintenance des structures, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [10.6] Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes (2009) *Norme SIA 260 : Bases pour l'élaboration de structures porteuses*, 44 p.
- [10.7] Department of Transport (1993) *Design Manual for Roads and Bridges Vol.3 Highway Structures ; Inspection and Maintenance, Section 4 Assessment Part 3*, BD 21/93 The Assessment of Highway Bridges and Structures, U.K.

- [10.8] Department of Transport (1993) *Design Manual for Roads and Bridges Vol.3 Highway Structures ; Inspection and Maintenance, Section 4 Assessment Part 4, BA 16/93 The Assessment of Highway Bridges and Structures*, U.K.
- [10.9] Melbourne C., Walker P. J. (1990) *Load tests to collapse on a full scale model 6 m span brick arch bridge*, TRRL Contractor Report n°189.
- [10.10] Page J. (1995) *Load tests for assessment of in-service arch bridges*, Melbourne C. (eds.), Arch Bridges Proceedings of the First International Conference on Arch Bridges, Bolton, UK, pp. 299-308.
- [10.11] Boothby T. E., Domalik D. E., Dala V. A. (1995) *Assessment of masonry arch bridges by service load testing*, Arch Bridges, Ed. Thomas Telford, London, pp. 345-354.
- [10.12] Brookes C. L., Mullette P. J. (2004) *Service load testing, numerical simulation and strengthening of masonry arch bridges*, Arch Bridges, ARCH'04, CIMNE, Barcelona.
- [10.13] Fanning P. J., Boothby T. E. (2001) *Three-dimensional modelling and full-scale testing of stone arch bridges*, Computers and Structures 79, pp. 2645-2662.
- [10.14] Hendry A. W., Davies S. R., Royles R., Ponniah D. A., Forde M. C., Komeyli-Birjhandi F. (1986) *Load test to collapse on a masonry arch bridge at Bargower, Strathclyde*, Contractor Report 26, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 107 p.
- [10.15] Hendry A. W., Davies S. R., Royles R. (1985) *Test on stone masonry arch at Bridgemill – Girvan*, Contractor Report 7, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 63 p.
- [10.16] Page J. (1995) *Load tests to collapse on masonry arch bridges*, Arch Bridges, Ed. Thomas Telford, London, pp. 289-298.
- [10.17] Page J. (1987) *Load tests to collapse on two arch bridges at Preston, Shropshire and Prestwood, Staffordshire*, Transport and Road Research Laboratory, TRRL Research Report 110, 25 p.
- [10.18] Page J. (1989) *Load tests to collapse on two arch bridges at Strathmashie and Barlae*, Research Report 201, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 17 p.
- [10.19] Page J. (1988) *Load tests to collapse on two arch bridges at Torksey and Shinafoot*, Research Report 159, Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport, 22 p.
- [10.20] Brühwiler E. (2009) *Sanneviadukt Gümnenen, Verformungsmessungen – Interpretation der Ergebnisse*, Rapport interne EPFL-MCS n° 230805.1, 21 p.

## **10.8. Références complémentaires <sup>10</sup>**

- [10.21] Bailey S.F., Antille S., Béguin P., Imhof D., Brühwiler E. (200) *Niveau de sécurité requis pour l'évaluation des ponts-routes existants*, OFROU, Rapport du mandat de recherche AGB 1999/156 (84/99), Union des professionnels suisses de la route (VSS), Zurich, 59 p.

---

<sup>10</sup> Bien que non citées dans le texte, les références dites complémentaires sont susceptibles d'apporter un supplément d'information au lecteur.

- [10.22] Boothby T. E., Domalik D. E., Dala V. A. (1998) *Service load response of masonry arch bridges*, Journal of Structural Engineering, vol. 124, n°1, pp. 17-23.
- [10.23] Choo B. S., Hogg V. (1995) *Determination of the serviceability limit state for masonry arch bridges*, Melbourne C. (eds.), Arch Bridges Proceedings of the First International Conference on Arch Bridges, Bolton, UK, pp. 529-536.



## 11. Travaux futurs

Le modèle développé dans cette étude permet d'évaluer de manière simple et transparente la capacité portante des ponts en arcs en maçonnerie. La majorité des critères limitatifs du domaine d'application du modèle ont été identifiés. Néanmoins quelques points demeurent incertains ou imprécis et nécessiteraient des investigations supplémentaires dans le but de mieux définir certains paramètres ou délimiter plus précisément le domaine de validité du modèle. Ils ont été recensés et sont détaillés ci-dessous.

### 11.1. Loi constitutive

Le chapitre 4 a présenté les résultats d'une modélisation numérique visant à reproduire le comportement d'échantillons de maçonnerie soumis à un effort de compression simple [11.1]. Dans le cas d'une maçonnerie de pierre de taille, la modélisation numérique s'est révélée n'être pas capable de reproduire le comportement de l'échantillon de manière entièrement satisfaisante et il en a été déduit que le mode de ruine réel impliquait une rupture locale de la pierre, due à un défaut de cette dernière (inclusions, microfissuration), ou à une concentration de contraintes.

La réalisation d'une série d'essais redondants sur ce type de maçonnerie permettrait de confirmer cette hypothèse et d'identifier le type de défaut conduisant à la ruine de l'échantillon. Les renseignements ainsi obtenus pourraient alors être intégrés dans la modélisation numérique et leur influence sur la résistance de la maçonnerie sous un effort de compression simple pourrait être reproduite. Une telle étude permettrait en outre de confirmer l'ordre de grandeur de la résistance en compression que l'on peut raisonnablement admettre pour ce type de maçonnerie.

Une telle campagne d'essais devrait par ailleurs permettre de mieux cerner certains paramètres dont l'influence est supposée importante, mais est encore aujourd'hui mal connue, tels que, par exemple, le confinement de l'échantillon, son âge ou encore son élancement relativement à la taille des blocs. Les éprouvettes testées devraient en outre comporter plusieurs blocs par assises, de manière à ne pas influencer le mode de ruine (voir § 4.3.2.4).

Se pose finalement la question de l'influence des effets tridimensionnels, non considérée dans l'analyse effectuée au chapitre 4. La comparaison des résultats obtenus avec ceux que fournirait un modèle tridimensionnel permettrait de confirmer l'hypothèse émise selon laquelle l'endommagement progressif se produit essentiellement dans le plan de l'échantillon testé.

### 11.2. Mode de ruine

L'unique mode de ruine considéré dans ce modèle est celui survenant suite à la formation d'un mécanisme à quatre rotules. Le snap-through reste néanmoins une rupture identifiée et probablement critique dans le cas d'arcs très fortement surbaissés (voir § 3.5.1). Les conditions d'apparition d'un tel mode de rupture ne sont cependant que mal connues et les publications proposant un moyen analytique d'en tenir compte sont rares [11.2 ; 11.3]. Une étude complémentaire permettant la prise en compte d'un tel mode de rupture est indispensable pour les cas considérés comme sensibles à ce problème.

Comme évoqué au chapitre 7, le logiciel RING 2.0 prédit, lors de l'évaluation de la capacité portante de certains arcs en plein cintre particulièrement fins, un mode de ruine différent de celui admis par hypothèse dans le modèle développé. Selon ce programme, la rupture, bien que se produisant toujours suite à la formation

d'un mécanisme à quatre rotules, implique le développement de la rotule dite  $D$  au droit de la charge ponctuelle, en lieu et place de l'articulation  $C$  (voir figure 7.15). Bien que le cas d'arcs fonctionnant réellement en plein cintre puisse être considéré comme relativement rare (voir § 2.1.1), les conditions de survenance de ce type de mode de ruine devraient être éclaircies afin d'en déduire, le cas échéant, d'éventuelles limites d'application supplémentaires, relatives au modèle développé.

### 11.3. Comportement de la rotule

Une extension de l'analyse au méso-niveau pourrait être envisagée, sous la forme d'une étude, par exemple par voie numérique, de la relation moment – courbure, au fur et à mesure du développement de la rotule. Ce travail permettrait de confirmer l'hypothèse selon laquelle la rotule dispose d'une capacité de rotation infinie et fournirait ainsi une information complémentaire quand à la capacité de déformation globale de l'arc.

### 11.4. Tracé d'intrados

Le modèle présenté ici a été testé sur des arcs présentant un surbaissement compris entre 0.1 et 0.5, ces derniers étant considérés comme les plus fréquents dans le cas de ponts anciens en maçonnerie. Une extension du modèle à différents types de tracés d'intrados (figure 11.1) est néanmoins possible, mais nécessiterait des investigations supplémentaires, en vue de vérifier sa validité pour ce type de cas.

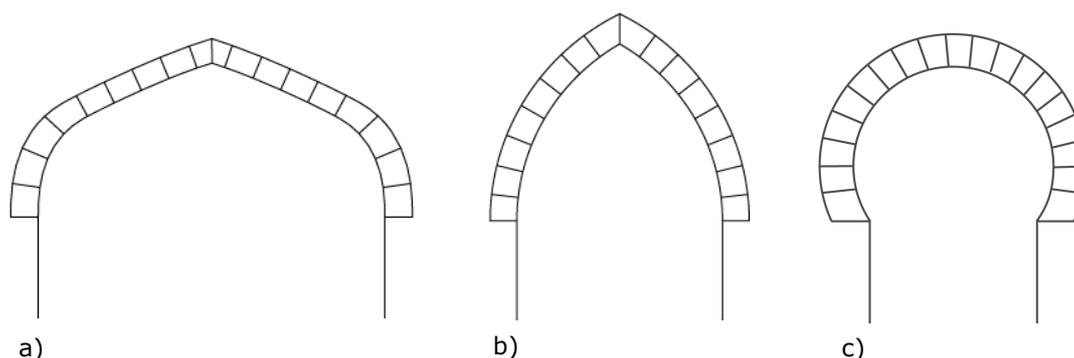


Figure 11.1 : Différents types de tracés d'intrados – a) Arc Tudor, b) Arc en ogive, c) Arc outrepassé

### 11.5. Efforts admis dans les rotules A, C et B

Comme mentionné précédemment, l'admission d'un effort normal, et par conséquent du moment de flexion qui lui est associé par le diagramme d'interaction, consiste en une importante hypothèse (voir § 6.6). L'influence de cette dernière sur la capacité portante a été brièvement traitée dans l'étude paramétrique (voir § 8.4), mais un doute persiste quant aux conditions d'acceptabilité d'un tel postulat. Des études complémentaires sont, par conséquent, nécessaires pour définir précisément le domaine d'acceptabilité de l'hypothèse émise, pour mieux cerner quels paramètres ont une influence prédominante sur la valeur de l'effort normal à admettre, en particulier en ce qui concerne les charges permanentes, et finalement pour chiffrer cet effort pour différents cas types.

L'extension du modèle développé pour la prise en considération du cas d'endommagement n°2 a, en outre, nécessité l'admission à priori de la valeur du moment de flexion  $M_{B2}$  sollicitant la rotule  $B$ , dans le second état de sollicitation, soit après inversion de son sens de rotation (voir § 9.2.2). Il a été postulé que

bien que considéré comme faible, l'endommagement consécutif à la formation de la rotule sous l'effet du premier état de sollicitation impliquait une réduction du moment à admettre dans ladite rotule. Des investigations complémentaires sont, par conséquent, nécessaires en vue de justifier, puis de chiffrer précisément, cette réduction.

### **11.6. Poussée exercée par le remplissage**

La poussée exercée par le remplissage sur l'arc, lorsque ce dernier se déforme, est reconnue comme étant un point de grande incertitude (voir § 6.4). Des investigations complémentaires, concernant principalement l'évaluation de l'ampleur de cette poussée et la mise en évidence des critères l'influençant, sont encore nécessaires. Il serait, par exemple, d'un intérêt certain de déterminer, vraisemblablement par voie expérimentale, quel déplacement de l'arc est nécessaire à la mobilisation de cet effort, quelle est l'influence des effets d'interaction entre le sol et l'arc et quelle est l'importance réelle de la courbure de l'arc dans l'évaluation de cette poussée.

### **11.7. Ponts multi-portées**

L'une des principales hypothèses restrictives du modèle présenté dans cette étude est son application limitée aux ponts à portée unique (voir § 6.1). Son extension aux ponts multi-portées permettrait d'en généraliser l'utilisation. Dans le cas d'ouvrages trapus, présentant des arcs épais et des piles peu élancées, le mode de rupture adopté dans la présente étude reste valable et le modèle général (voir chapitre 6), voire le modèle développé pour le cas d'endommagement impliquant un déplacement des naissances de l'arc (voir § 9.2), peuvent être employés pour obtenir une évaluation fiable de la capacité portante de l'ouvrage multi-portée concerné. Les limites géométriques pour lesquelles cette procédure est valable reste néanmoins à établir. En ce qui concerne les ouvrages plus élancés, leur mode de rupture par la formation d'un mécanisme à multiples rotules implique les portées adjacentes à celle chargée [11.5-11.7] (figure 11.2) et une étude complémentaire serait nécessaire pour étendre le modèle développé à ces ouvrages. Cette extension devra dans un premier temps délimiter le système statique actif dans le mécanisme, ce dernier impliquant tant les arcs que les piles. Un raisonnement similaire à celui présenté dans cette étude, basé sur la structure rendue isostatique par l'apparition successive des rotules, devrait alors permettre, via un processus itératif, de déterminer la capacité portante de la structure.

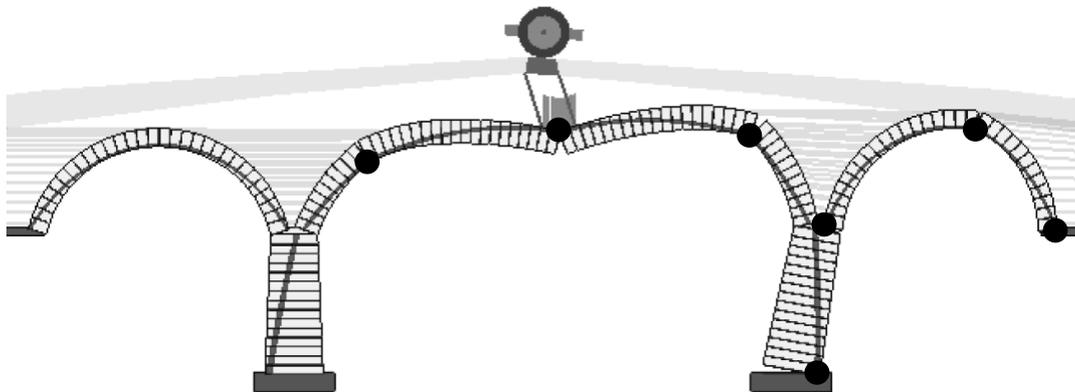


Figure 11.2 : Mécanisme de ruine d'un pont multi-portées, selon le programme RING 2.0

## **11.8. Références**

- [11.1] Binda L., Pina-Henriques J., Anzani A., Fontana A., Lourenço P. B. (2006) *A contribution for the understanding of load-transfer mechanisms in multi-leaf masonry walls: testing and modelling*, Engineering Structures, 28, pp. 1132-1148.
- [11.2] Wang X. J., Harvey W. J. (1995) *Snap-through buckling analysis of shallow masonry arches*, Arch Bridges, C. Melbourne (ed.), Thomas Telford, London, UK, pp. 417-426.
- [11.3] Ochsendorf J. A. (2006) *The masonry arch on spreading supports*, The Structural Engineer, vol. 84, n°2 pp. 29-35.
- [11.4] Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes (2009) *Norme SIA 269/1 Maintenance des structures porteuses – Actions (Projet de consultation)*, 20 p.
- [11.5] Melbourne C., Gilbert M. (1994) *The application of limit analysis techniques to masonry arch bridges*, Bridge Assessment Management and Design, B. I. G., Barr, H. R. Evans, J. E. Harding (eds.), Elsevier Science B. V., pp. 193-198.
- [11.6] Brencich A., De Francesco U. (2004) *Assessment of multispan masonry arch bridges. I: Simplified approach*, Journal of Bridge Engineering, 9 (6), pp. 582-590.
- [11.7] Brencich A., De Francesco U. (2004) *Assessment of multispan masonry arch bridges. II: Examples and applications*, Journal of Bridge Engineering, 9 (6), pp. 591-598.

## 12. Conclusions

Cette étude avait pour objectif l'établissement d'un modèle analytique, basé sur les principes de la théorie de la plasticité et capable de déterminer la capacité portante d'arcs de ponts en maçonnerie de pierre naturelle. Dans le but d'examiner de manière précise l'implication des propriétés du matériau et le comportement de ce dernier lorsque qu'il est intégré dans une telle structure, une procédure articulée autour de trois niveaux d'étude a été élaborée.

### Micro-niveau

L'étude dite au micro-niveau a permis de conclure que la maçonnerie est un matériau dont le comportement mécanique dépend avant tout de l'appareillage, ce dernier n'influençant pas uniquement les propriétés mécaniques de la maçonnerie, mais également son mode de fonctionnement et, par conséquent, son mode de rupture.

Une modélisation numérique a ainsi permis de démontrer que dans le cas d'une maçonnerie cyclopéenne, la réponse du matériau sous une sollicitation de compression simple est dominée par le comportement du mortier dont l'écrasement conduit à la ruine complète de l'échantillon par instabilité, les caractéristiques mécaniques de la pierre n'ayant qu'une importance secondaire. A l'inverse, les propriétés mécaniques de la pierre influencent grandement le comportement de la maçonnerie de pierre de taille et permettent à cette dernière d'atteindre une valeur de résistance à la compression s'approchant de celle de la pierre. Il a cependant été constaté que la survenance d'une ruine prématurée, liée à une rupture locale, réduit généralement la résistance en compression de la maçonnerie de pierre de taille.

Le caractère local de la rupture constaté dans les deux cas étudiés explique la variabilité observée dans la valeur des caractéristiques mécaniques de la maçonnerie. La reproduction numérique de ces phénomènes s'est révélée néanmoins peu aisée et nécessiterait l'incorporation d'imperfections locales.

### Méso-niveau

L'étude au méso-niveau a, quant à elle, décrit le mécanisme de plastification locale de l'arc soumis à un effort de flexion composée, sous la forme de l'apparition d'une rotule. Il a été démontré que cette dernière peut être modélisée comme une articulation parfaite, disposant d'une capacité de rotation illimitée et présentant un comportement réversible, un déchargement impliquant sa fermeture. La connaissance de la courbe contrainte - déformation relative à la maçonnerie en tant que matériau a permis d'établir les conditions d'apparition d'une telle rotule, puis d'exprimer ces dernières sous la forme d'une courbe d'interaction moment de flexion - effort normal. Cette dernière représente la résistance en section et offre, en outre, la possibilité de cerner l'influence des hypothèses émises quant au comportement du matériau.

### Macro-niveau

Se fondant sur les raisonnements précédemment élaborés aux micro- et méso-niveaux, l'étude au macro-niveau présente le modèle permettant d'évaluer la capacité portante d'un arc en maçonnerie. Basé sur le théorème cinématique de la plasticité, ce dernier intègre la ductilité de l'élément structurel et du matériau le constituant, pour fournir une réponse, sous la forme d'un multiplicateur limite des charges utiles. Intégrant un processus itératif, le modèle ainsi développé est capable, d'une part, de donner la valeur minimale de la borne supérieure que fournit la méthode cinématique et, d'autre part, de représenter le mécanisme de ruine correspondant à la configuration critique des rotules.

Une validation, effectuée sur la base de trois applications, a confirmé la fiabilité du modèle, une différence inférieure à 10 % ayant été obtenue entre la réponse fournie par le modèle et celle trouvée soit expérimentalement, soit à l'aide d'un logiciel reconnu, RING 2.0.

Basé sur l'équilibre et sur une connaissance détaillée du comportement des arcs en maçonnerie, le modèle offre les avantages d'être facilement compréhensible et simple d'application, puisque uniquement basé sur des principes bien connus de l'équilibre. Il intègre, en outre, tous les paramètres influents pour le calcul de la capacité portante. Par opposition aux méthodes empiriques ou aux logiciels, il présente en outre l'intérêt d'être totalement transparent et de se baser sur les principes de la théorie de la plasticité, ce qui lui permet d'éviter un conservatisme excessif, en exploitant la forte ductilité présentée par ce type de structures.

A l'inverse de certains programmes informatiques, par éléments finis ou autre, le modèle développé ne souffre pas de problèmes de convergence et ne nécessite que de faibles ressources informatiques. Il permet, en outre, une économie considérable en temps, puisqu'une fois le fichier Excel élaboré, l'application à différents ouvrages ne réclame que l'introduction de quelques paramètres géométriques et relatifs aux matériaux.

Le modèle élaboré ne remet pas en question l'utilité des programmes par éléments finis, mais se veut être un outil complémentaire, dont l'application peut également permettre de confirmer certains résultats, obtenus avec d'autres méthodes.

### **Paramètres pertinents**

Une étude paramétrique a permis de cerner l'influence des principaux paramètres intervenant dans le modèle. Leur interdépendance empêche cependant parfois une interprétation absolue des résultats obtenus. Cette étude a notamment mis en évidence que, pour des cas usuels, la capacité portante de l'arc ne dépendait que très peu du surbaissement. Cette dernière est par contre très fortement corrélée à l'épaisseur de l'arc. Il a, en outre, été confirmé que l'influence du matériau de remplissage n'était pas négligeable pour les arcs profonds et que la valeur de la capacité portante n'était que très peu sensible aux caractéristiques mécaniques de la maçonnerie.

### **Incorporation de l'endommagement**

Une extension du modèle à trois dommages types, communément rencontrés sur les arcs en maçonnerie, a été effectuée. Elle a révélé que l'influence de la présence de deux fissures longitudinales situées à l'intrados, au droit des tympans, n'avait qu'un effet négligeable sur la capacité portante de l'arc. Le second cas d'endommagement considéré implique un déplacement des appuis de l'arc, provoquant l'apparition de trois rotules, rendant ainsi la structure isostatique, et impliquant, par conséquent, une diminution de sa capacité portante. Cette réduction reste néanmoins faible, puisqu'elle ne dépasse pas les 25 %, dans l'exemple considéré. Le troisième cas examiné implique un endommagement local de l'arc, modélisé sous la forme d'un amincissement de ce dernier. Son influence sur la capacité portante est fonction de l'ampleur du dommage, du nombre de sections touchées et de leur localisation.

Globalement, il ressort de cette étude que la présence de dommages est à évaluer selon leur impact sur la capacité portante. Celui-ci se révélant fréquemment moins grave que soupçonné, il est alors généralement possible de prouver, au moyen du modèle développé, que la sécurité structurale est encore suffisante et que le dommage présenté par la structure ne nécessite pas d'intervention.

**Procédure d'examen**

Finalement, le dernier chapitre de cette thèse présente une procédure d'examen globale pour les ponts en maçonnerie de pierre naturelle. Cette dernière s'articule autour de deux approches simultanées et complémentaires. La première comprend une appréciation quantitative de la sécurité au moyen du modèle développé et inclut la prise en compte de l'incertitude liée à chaque paramètre important intervenant dans le calcul. La seconde fait intervenir une appréciation qualitative du risque, évaluée sur la base du relevé de l'état et de l'importance logistique et historique de l'ouvrage considéré. La mise en regard de ces deux approches permet une prise de position objective de l'ingénieur concernant la sécurité structurale et la recommandation d'intervention.

La procédure d'examen présentée s'appuie donc sur des principes modernes et adaptés aux ponts historiques. Grâce au modèle développé et à l'analyse de risque, elle permet une évaluation tangible et respectueuse de la valeur culturelle de l'ouvrage.



## Annexe 1 : Carrières suisses en activité ou fermées, état en 1996

Type de pierre		Dénomination commerciale	Dénomination pétrographique	Lieux d'extraction
<b>Plutonique</b>	<b>Granite</b>	Granite d'Uri	Granite de l'Aar	Gurtellen "Güetli"
		Granite d'Uri, Granite du Gothard	Granite de l'Aar	Wassen, Göschenen
		Granite du Grimsel	Granite de l'Aar	Grimselpass ob Handegg
		Granite de Campascio	Granite de Brusio	Campascio
<b>Sédimentaire</b>	<b>Quartzite</b>	Quartzite du Valais	Quartzite micacé	Embd, Kalpetran
		Quartzite	Quartzite calcaireux	St-Léonard
	<b>Verrucano</b>	Pierre rouge de Melz	Conglomérat	Mels
		Rouges de Collonges	Conglomérat	Collonges
	<b>Nagefluh</b>	Granite d'Appenzel	Poudingue	Herisau, Degersheim, Rüti
		Poudingue	Poudingue	Goldau
	<b>Calcaires alpins</b>	Calcaire siliceux de Mitholz, calcaire du Blausee	Calcaire siliceux	Blausee, Mitholz
		Calcaire de Ringgerberg	Calcaire siliceux	Ringgerberg
		Grès des Carrières	Calcaire siliceux	Monthey
		Calcaire siliceux de Goldswil	Calcaire siliceux	Goldswil
		Rouge du Rhône	Calcaire	St-Maurice
		Calcaire	Calcaire spatique	Ovronnaz
		Calcaire alpin		Oberriet-Rheintal, Quinten, Weesen, Näfels, Mollis, Brunnen, Seewen, Matt, Kehrsiten, Hergiswil, Rotzloch, Blamholz
		Calcaire de Saint-Triphon, "Marbre" de Saint-Triphon		Saint-Triphon
		Calcaire à entroque		Arvel, Bex
		Calcaire à entroque		Collombey
	<b>Grès du Flysch</b>	Guber, Alpnacher Guber, Grès	Grès du Flysch	Alpnach, Guber
		Grès	Grès du Flysch	Plasselb
		Grès	Grès du Flysch	Matt, Attinghausen, Schwarzenburg-Gumigel
		Grès	Grès du Flysch	Massongex, Saint-Gingolphe, Buchserberg, Sevelen, Beckenried
	<b>Calcaires du Jura</b>	Calcaire de Lägern	Calcaire micritique	Dielsdorf, Steinmaur, Regensberg
		Pierre de Lägern		Hemmental, Baden
		"Marbre" de Soleure, Calcaire de Soleure	Calcaire micritique	Lommiswil
		Roc de la Cernia, Pierre de la Cernia	Calcaire micritique	Neuchâtel, Valangin, La Cernia
		Calcaire de Laufon, Calcaire de Laufon	Calcaire oolitique	Dittingen, Liesberg, Laufen
		Calcaire du Laufonnais	Calcaire oolitique	Brislach, Muttenz, Balsthal
		Calcaire du Jura		Läufelfingen, Soleure, Bienne, Reuchenette, Neuveville, La Chaux-de-Fonds
		Calcaire de Liesberg	Calcaire oolitique	Dittingen, Liesberg
Pierre d'Hauterive	Calcaire poreux	Hauterive, Saint-Blaise		

Type de pierre		Dénomination commerciale	Dénomination pétrographique	Lieux d'extraction
Sédimentaire	Grès coquilliers	Grès colquillier de Mägenwil	Calcaire coquillier	Mägenwil, Othmarsingen
		Grès de La Molière	Grès coquillier	Murist, Estavayer-le-lac
		Grès coquillier	Grès coquillier	Seiry
		Grès coquillier	Grès coquillier	Thal, Würenlos
	Grès du Jura	Grès d'Oberhofen	Grès du Jura	Oberhofen
	Grès molassiques	Grès de Rorschach	Plattensandstein	Buchen, Staad
		Grès de Rorschach, Grès de Root		Staad-Rorschach, Renggloch
		Grès de Root	Plattensandstein	Root, Rooterberg
		Grès de Rorschach	Plattensandstein	St. Margrethen, Fuchsloch
		Molasse de Berne	Molasse	Ostermundigen
		Molasse de Berne	Molasse	Krauchthal
		Molasse de Berne	Molasse	Köniz-Gurten
		Molasse de Villarlod, Molasse de Fribourg	Molasse	Villarlod
		Molasse de Massonnens	Molasse	Massonnens
		Grès de St. Margrethen	Grès granitique	St. Margrethen Dorf
		Grès de St. Margrethen	Grès granitique	Büriswilen
		Grès de St. Margrethen	Grès granitique	Buchberg, Jona, Schmerikon,
		Grès de Teufen	Grès granitique	Teufen, Lochmüli
		Grès de Bollingen	Grès granitique	Eschenbach, Brand
		Grès de Bollingen	Grès granitique	Bollingen, Lehholz
		Grès de Buchberg	Grès granitique	Nuolen, Guntliweid
		Grès de Guntliweid	Grès granitique	Nuolen, Guntliweid
		Grès non délité		Stockern, Oberburg, Fribourg
		Grès riche en calcaire	Grès riche en calcaire	Waldstatt, Ebnat, Krummenau,
		Grès d'Attalens	Grès riche en calcaire	Attalens, Chexbres
	Grès de Corbières	Grès riche en calcaire	Echarlens	
	Métaborphique	Gneiss	Granite d'Andeer	(Ortho)gneiss
Granite d'Andeer			(Ortho)gneiss	Monthey, Martigny
Quartzit Bernhardin, Quartzite du San Bernardino			Gneiss clair micacé	Hinterrhein, Dürrboden
Quartzite du Rhin			Gneiss clair micacé	Hinterrhein, Panzerpiste
Quartzite de Soglio, Beola Argenta, Silver Quartzite			Gneiss clair micacé	Promontogno, Soglio
Granite de Cresciano			(Para)gneiss	Cresciano
Granite du Val Calanca, Calanca Granit			(Para)gneiss	Arvigo
Granite du Val Maggia			(Para)gneiss	Vergeletto, Riveo, Cervio, Linescio
Granite du Val Maggia			(Para)gneiss	Ponte-Brolla, Someo
Granite du Val Onsernone			(Para)gneiss	Hinterstes Vergeletttotal
Granite d'Iragna, Granite de Lodrino			(Para)gneiss à grain moyen	Lodrino, Iragna, Personico
Gneiss de Vals, Valser Quartzit			(Para)gneiss, schiste micacé	Vals
Granite foncé d'Iragna			Gneiss à grain fin	Iragna
Granite foncé de Bodio			Gneiss à grain fin	Personico, Bodio
Granite de Lavorgo			Gneiss granitique grossier	Lavorgo, Chiggiogna
Granite de Legiuna			Gneiss oeilé	Malvaglia, Biasca
Granite du Val Verzasca			Gneiss	Brione
Granite du Tession			Gneiss	Rodi, Faido, Chiggiogna, Pollegio, Claro, Osogna
Nuvolato Zalende, Métabasite			Gneiss	Campascio, Zalende
Gneiss			Gneiss migmatitique	Oberwald, Gletsch

Type de pierre	Dénomination commerciale	Dénomination pétrographique	Lieux d'extraction	
<b>Métamorphique</b>	<b>Serpentinite</b>	Vert de Salvan, Vert des Glaciers, Gletschergrün	Conglomérat de Vallorcine (Verrucano)	Route Martigny - Salvan
		Serpentinite de la Puschlav	Serpentinite à antigorite - chlorite	Poschiavo
		Pierre ollaire	Serpentinite à talc	Disentis Patschadauns
		Pierre ollaire	Serpentinite à talc	Disentis "Mompé-Medel"
		Pierre ollaire	Serpentinite à talc	Oberalppass "Calmut"
		Pierre ollaire	Serpentinite à talc	Ulrichen
		Serpentinite, Pierre ollaire	Serpentinite à talc	Hospental "Chämleten"
	<b>Marbre</b>	Marbre clair de Castione, Castione chiaro	Marbre	Castione
		Granite de Castione, Granito nero, Castione scuro	Marbre à silicates, gneiss carbonaté, roche silico-calcaire	Castione
		Marbre de Cristallina	Marbre	San Carlo, Peccia
		Marbre, Broccatello d'Arzo	Brèche calcaire	Arzo
	<b>Prasinite</b>	Vert d'Evolène	Prasinite	Evolène
	<b>Phyllite</b>	Dalles de Sembrancher	Phyllite calcaire	Volège

 Carrières en activité en 1996

 Carrières fermées en 1996

Sources : [4.32 ; 4.111 ; 4.112]



## Annexe 2 : Propriétés mécaniques indicatives des roches

Type de roche		Résistance en compression [N/mm <sup>2</sup> ]	Résistance à la flexion [N/mm <sup>2</sup> ]	Résistance en traction [N/mm <sup>2</sup> ]	Energie de rupture en traction [J/m <sup>2</sup> ] <sup>1</sup>	Module d'élasticité [kN/mm <sup>2</sup> ]	Sources
Plutoniques	Granite	200	15	12	122		2
		185	20	16		54.5	3
		185	25	20		54.5	4
		200	24.5	19.6			5
	Granodiorite (Tonalite)	185	20	16	140	54.5	3
		185	25	20		54.5	4
	Syénite	200	15	12			2
		190	20	16		85	3
		190	25	20		85	4
	Diorite	235	115	92			2
		190	20	16		85	3
		190	25	20		85	4
Gabbro	235	115	92			2	
	190	20	16		85	3	
	190	25	20		85	4	
Volcaniques	Rhyolithe	190	21	16.8		53	3
		190	26	20.8		53	4
	Porphyre quartzifère	240	17.5	14			2
		190	21	16.8		53	3
		190	26	20.8		53	4
	Porphyrite	240	17.5	14			2
	Andésite (Dacite)	240	17.5	14			2
		165	20.5	16.4		50	3
		165	25.5	20.4		50	4
	Kératophyre	240	17.5	14			2
	Basalte	325	20	16	50		2
		208	27.5	22		72.5	3
		208	37.5	30		72.5	4
	Mélaphyre	325	20	16			2
	Lave basaltique	115	10	8			2
		62.5	10	8		30	3
		62.5	12.5	10		30	4
		110	16.5	13.2			5
	Diabase	215	20	16			2
		208	27.5	22		72.5	3
208		37.5	30	72.5		4	
Pyroclastite	25	4	3.2			3	
Microgabbro	208	27.5	22		72.5	3	
Trachyte	55	10	8		25	3	
	55	12.5	10		25	4	
Tuf volcanique	55	10	8		25	3	
	55	12.5	10		25	4	

Type de roche		Résistance en compression [N/mm <sup>2</sup> ]	Résistance à la flexion [N/mm <sup>2</sup> ]	Résistance en traction [N/mm <sup>2</sup> ]	Energie de rupture en traction [J/m <sup>2</sup> ] <sup>1</sup>	Module d'élasticité [kN/mm <sup>2</sup> ]	Sources		
Sédimentaires	Quartzite	225	19	15.2	178	62.5	2		
		200	37	29.6			3, 4		
	Grauwacke	225	19	15.2			2		
	Grès quartzitiques	160	16	12.8	90		2		
		157.5	21	16.8			5		
	Grès quartzeux	105	9	7.2					2
		145	18.5	14.8			41	3	
	Grès siliceux	145	20	16			41	4	
		105	10.5	8.4			19	3	
	Grès calcaire	105	10.5	8.4					4
		130	10.5	8.4			34	48	2
	Calcaire (compacts, bien consolidés)	125	16.5	13.2					3, 4
		130	18	14.4					5
	Dolomie (compacts)	130	10.5	8.4			2		
		125	16.5	13.2	48	4			
	Calcaire (peu consolidés)	55	6.5	5.2	34	14	2		
		16.5	5	4			3, 4		
		57.5	10.5	8.4			5		
	Travertin	40	7	5.6			2		
		55	11.5	9.2		25	3		
45		11.5	9.2		25	4			
Tuf calcaire	55	11.5	9.2	32	25	3			
	45	11.5	9.2			4			
Brèche	87	7	5.6		33.5	3, 4			
Poudingue, conglomérat	87	7	5.6		33.5	3, 4			
Métamorphiques	Gneiss	220	0		178	45	2		
		135	26.5	21.2			3, 4		
	Granulite	220	0				2		
	Amphibolite	225	0				2		
	Serpentinite	195	0				2		
		127.5	30	24		75	3		
		127.5	35.5	28.4		75	4		
	Schiste vert	127.5	30	24		75	3		
	Schiste ardoisier		65	52			2		
	Marbre	130	37.5	30	54	67.5	2		
		135	24	19.2			3		
		135	25	20			4		
	Ophticalcite	135	24	19.2		67.5	3		
		135	25	20			4		
	Migmatite	135	26.5	21.2		45	3, 4		
	Micaschiste	100	22.5	18		40	3		
100		24	19.2		40	4			
Phyllite	100	22.5	18		40	3			
	100	24	19.2		40	4			

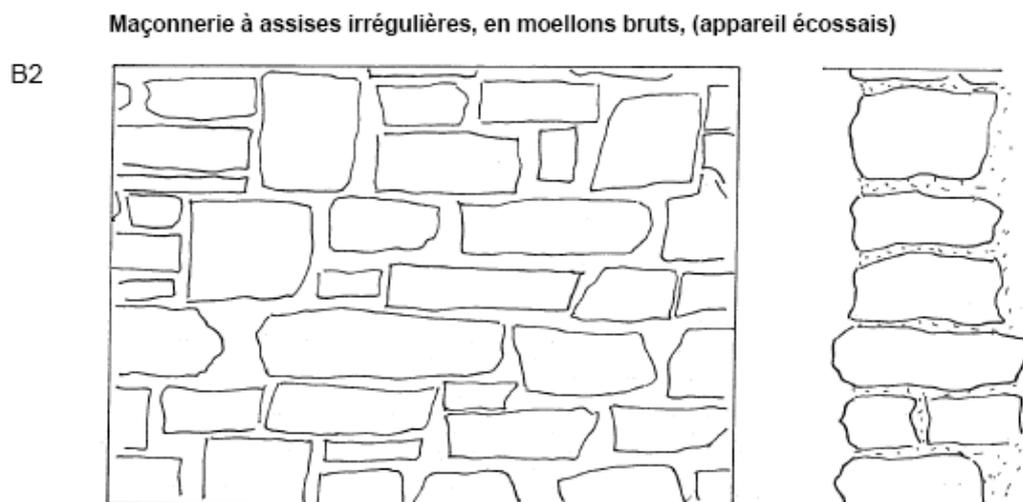
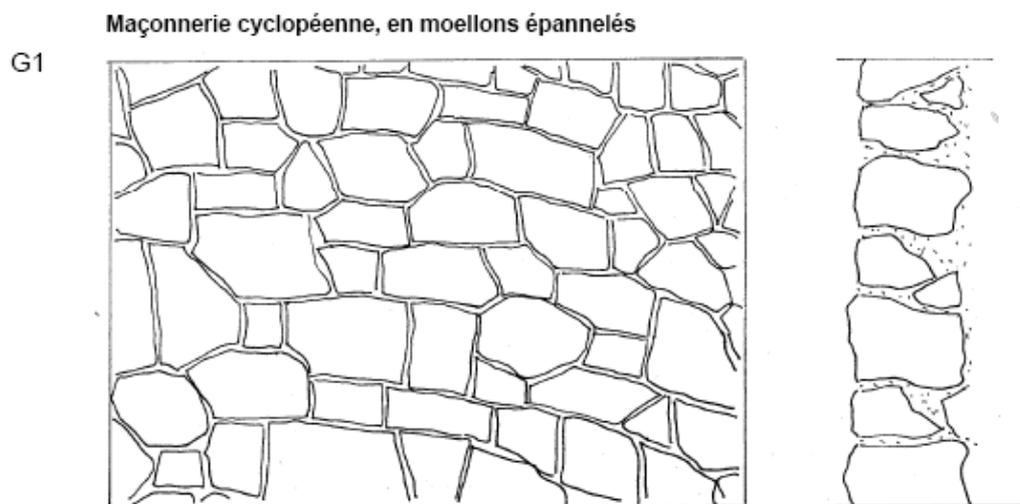
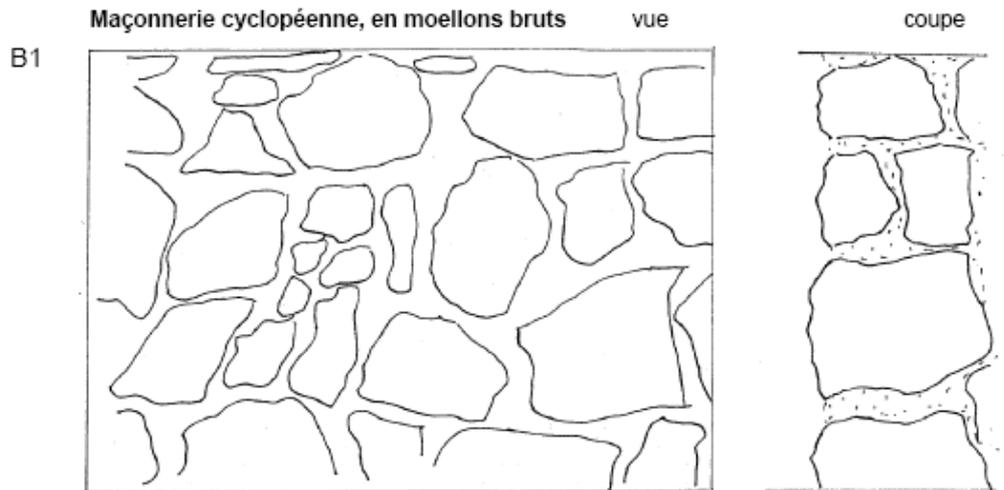
- 1 Atkinson B. K. (1987) *Fracture Mechanics of Rock*, Academic Press, 534 p. [4.113]
- 2 Schumann W. (2007) *Guide des pierres et minéraux, roches, gemmes et météorites*, Les Guides du Naturaliste, Delachaux et Niestlé (eds.), Paris, 383 p. [4.114]
- 3 Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes (1996) *Recommandation SIA V 178 Maçonnerie de pierre*, 49 p. [4.24] (voir également [4.62])
- 4 Schweizerische Geotechnische Kommission (2006) *Die Mineralischen Rohstoffe der Schweiz*, Zürich, 522 p. [4.111]
- 5 Deutsches Institut für Normung (1990) *DIN 1053 Teil 1 : Rezeptmauerwerk. Berechnung und Ausführung*. [4.23]

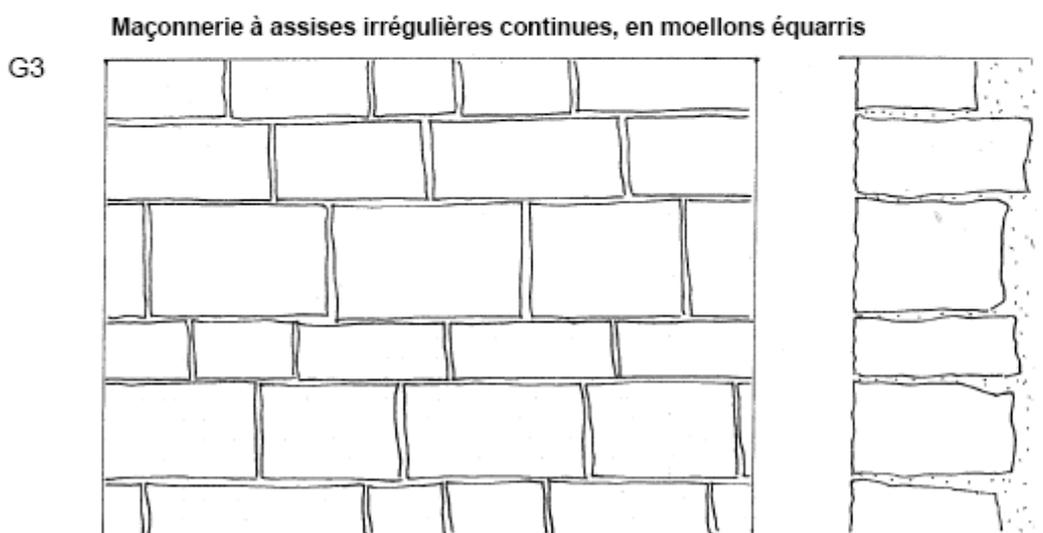
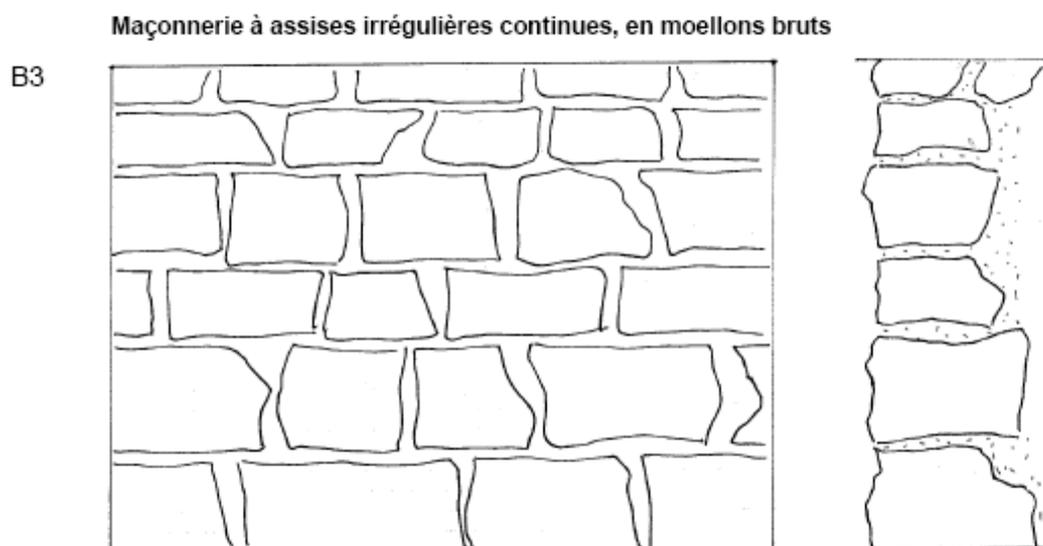
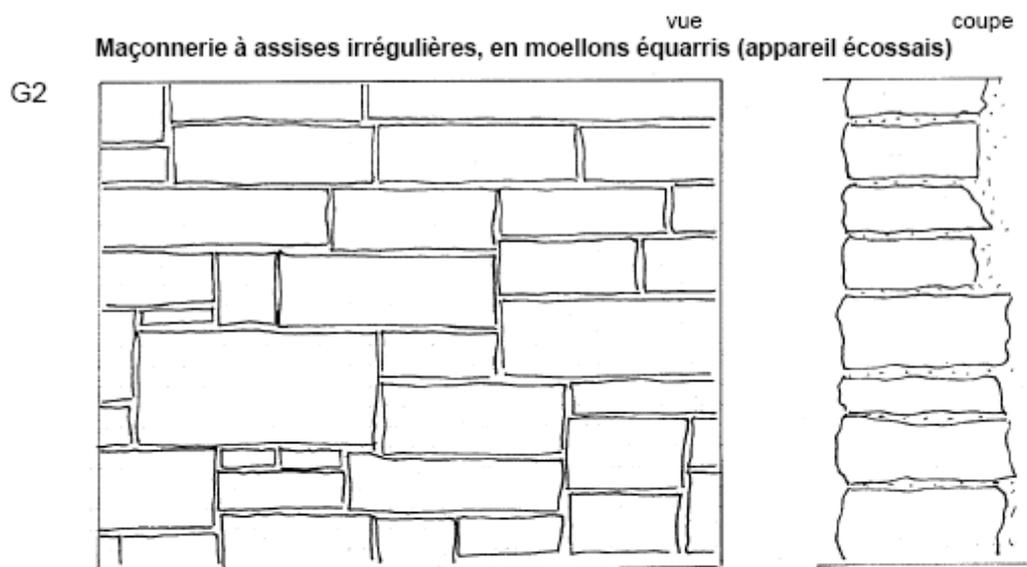
## Annexe 3 : Classification des roches en fonction de leurs propriétés mécaniques

Catégo- ries	Types de roche correspondant		Résistance en compression [N/mm <sup>2</sup> ]		Résistance en traction [N/mm <sup>2</sup> ]		Module d'élasticité [kN/mm <sup>2</sup> ]		Energie de rupture en traction [J/m <sup>2</sup> ]	Energie de rupture en compression [J/m <sup>2</sup> ]	Coefficient de Poisson [-]
	En général	En Suisse	Min	Max	Min	Max	Min	Max			
1	Lave basaltique, Pyroclastite, Trachyte, Tuf volcanique, Calcaire peu consolidé, Travertin, Tuf calcaire, Brèche, Conglomérats, Poudingue	Grès de Mägenwil, Grès de La Molière, Grès d'Oberhofen, Grès de Rorschach, Grès de Root, Molasse de Berne, Molasse de Villarlod, Molasse de Massonnens, Grès de Bollingen, Grès de Buchberg, Marbre de Cristallina, Broccatello d'Arzo	5	90	1	10	8	35	0.03	2.625	0.1
2	Grès quartzitiques, Grès quartzex, Grès siliceux, Grès calcaire, Calcaire dur, Dolomie, Schiste vert, Schiste arabisier, Marbre, Opicalcâte, Migmatite, Micaschiste, Phyllite	Pierre rouge de Meiz, Rouge de Collonges, Calcaire siliceux de Mitholz, Calcaire du Blauser, Calcaire de Ringgerberg, Calcaire de Läger, Marbre de Soleure, Roc de la Cernia, Calcaire de Laufon, Calcaire de Liesberg, Grès de St. Margrethen, Grès de Teufen, Grès de Bollingen, Grès de Gurtliweid, Granite d'Andeer, Quartzite du San Bernardino, Quartzite de Soglio, Granite de Cresciano, Granite du Val Calanca, Granite d'Iragra, Granite du Val Verzasca, Vert de Salvan, Marbre clair de Castione, Granite de Castione, Granite d'Appenzel, Nagelfluh, Calcaire de Saint-Triphon, Calcaire à entroque, Calcaire d'Hauterive, Grès d'Attalens, Grès de Corbières	90	170	10	14	35	50	0.05	2.625	0.1
3	Granite, Granodiorite, Syénite, Rhyolithe, Andésite, Gneiss	Granite d'Uri, Granite du Gothard, Granite du grimsel, Granite de Campascio, Quartzite du Valais, Quartzite, Granite du Val Maggia, Granite du Val Orsenone, Gneiss de Vals, Granite de LAVORGO, Calcaire à entroque	170	205	14	16	50	70	0.09	2.625	0.2
4	Diorite, Gabro, Porphyre quartzifère, Porphyrite, Kéatophyre, Mélaophyre, Basalte, Diabase, Microgabbro, Quartzite, Grauwacke, Granulite, Amphibolite, Serpentinite, Schiste vert, Schiste ardoisier, Marbre, Opicalcâte	Grès des carrières, Guber, Serpentinite de la Puschlav, Calcaires alpins	205	350	16	25	70	85	0.15	2.625	0.2



## Annexe 4 : Appareillages, selon la Recommandation SIA V 178 (1996) [4.24]





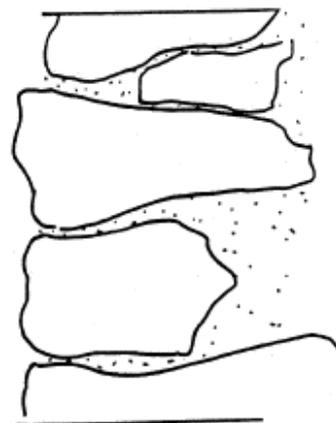
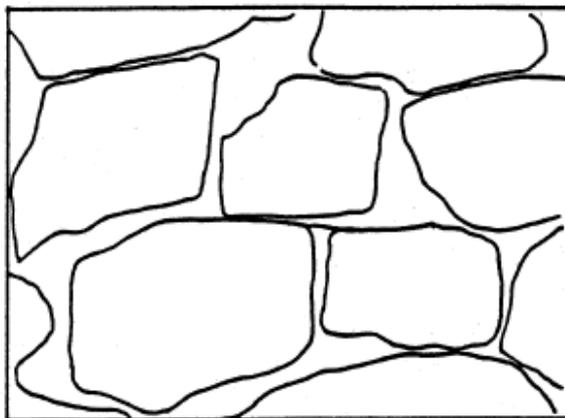


**Maçonnerie de blocs bruts**

vue

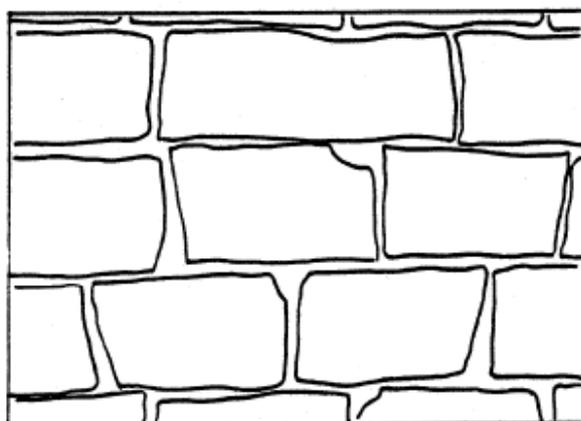
coupe

B6



**Maçonnerie de blocs épannelés**

G6



## Annexe 5 : Classification des appareillages

		Pas d'assise	Assises discontinues	Assises continues
Pourcentage de surface de mortier visible, relativement à la surface totale	< 8%	3	1	1 (G5)
	< 13%	3 (G1)	2 (G2)	1 (G3, G4)
	< 20%	3	2	2 (G6)
	< 25%	4 (B6)	3	2 (B3)
	> 25%	4 (B1)	3 (B2)	3

### Catégorie 1

Maçonnerie de pierre de taille (G4); Maçonnerie à assises irrégulières continues, en moellons équarris (G3); Maçonnerie à assises régulières en moellons équarris (G4)

### Catégorie 2

Maçonnerie à assises irrégulières, en moellons équarris (appareil écossais) (G2); Maçonnerie de blocs épannelés (G6); Maçonnerie à assises irrégulières continues, en moellons bruts (B3)

### Catégorie 3

Maçonnerie cyclopéenne, en moellons épannelés (G1); Maçonnerie à assises irrégulières, en moellons bruts (appareil écossais) (B2)

### Catégorie 4

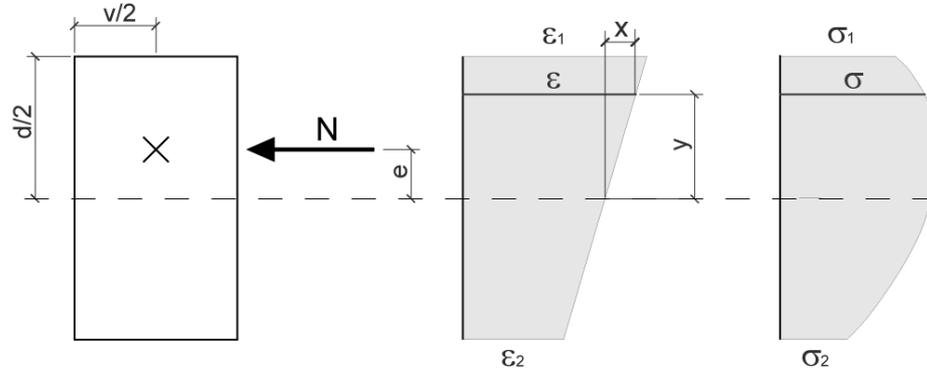
Maçonnerie de blocs bruts (B6); Maçonnerie cyclopéenne, en moellons bruts (B1)



## Annexe 6 : Efforts intérieurs M et N

Les calculs d'intégration ont été effectués à l'aide du logiciel Mathcad 11.0a.

### 1. Réécriture de la loi constitutive / section non fissurée



Loi constitutive initiale :

$$\sigma = \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon \quad (\text{A 6.1})$$

Expression de  $\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $x$  :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + x \quad (\text{A 6.2})$$

Expression de  $x$  en fonction de  $d$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $y$  :

$$x = \frac{y (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{d} \quad (\text{A 6.3})$$

Expression de  $\sigma$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d$ ,  $y$ ,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  :

$$\sigma = \alpha \left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{y (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{d} \right)^2 + \beta \left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{y (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{d} \right) \quad (\text{A 6.4})$$

### 2. Effort normal / section non fissurée

Intégration de l'expression de  $\sigma$  sur  $d$  :

$$N = \int_{-d/2}^{d/2} \sigma(y) v \, dy =$$

$$N = \frac{1}{6} v d (2\alpha \varepsilon_1^2 + 3\beta \varepsilon_1 + 2\alpha \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 3\beta \varepsilon_2 + 2\alpha \varepsilon_2^2) \quad (\text{A 6.5})$$

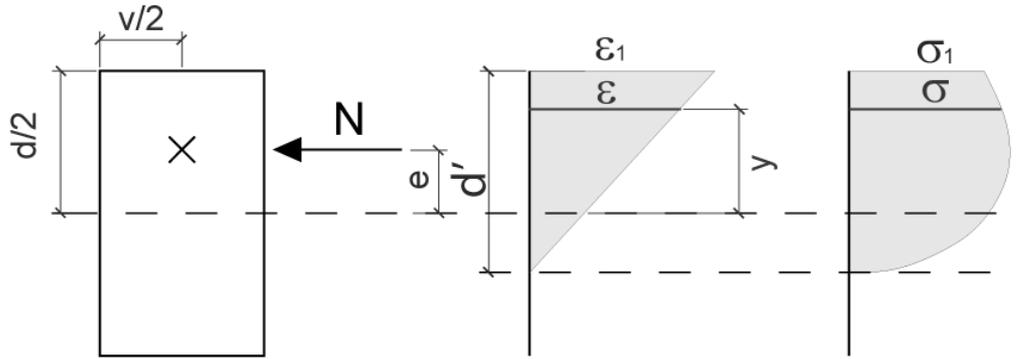
### 3. Moment de flexion / section non fissurée

Intégration de  $\sigma \cdot y$  sur  $d$  :

$$M = \int_{-d/2}^{d/2} \sigma(y) y v \, dy =$$

$$M = \frac{1}{12} v d^2 (\alpha \varepsilon_1^2 - \alpha \varepsilon_2^2 + \beta \varepsilon_1 - \beta \varepsilon_2) \quad (\text{A 6.6})$$

#### 4. Réécriture de la loi constitutive /section fissurée



Loi constitutive initiale :

$$\sigma = \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon \quad (\text{A 6.7})$$

Expression de  $\varepsilon$  en fonction de  $y$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $d$  et  $d'$  :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \left( \frac{y}{d'} + 1 - \frac{d}{2d'} \right) \quad (\text{A 6.8})$$

Expression de  $\sigma$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $y$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $d$  et  $d'$  :

$$\sigma = \alpha \varepsilon_1^2 \left( \frac{y}{d'} + 1 - \frac{d}{2d'} \right)^2 + \beta \varepsilon_1 \left( \frac{y}{d'} + 1 - \frac{d}{2d'} \right) \quad (\text{A 6.9})$$

#### 5. Effort normal / section fissurée

Intégration de l'expression de  $\sigma$  sur  $d'$  :

$$N = \int_{d/2-d'}^{d/2} \sigma(y) v dy =$$

$$N = \frac{1}{6} v \varepsilon_1 d' (2\alpha \varepsilon_1 + 3\beta) \quad (\text{A 6.10})$$

#### 6. Moment de flexion / section fissurée

Intégration de  $\sigma \cdot y$  sur  $d'$  :

$$M = \int_{d/2-d'}^{d/2} \sigma(y) v b dy =$$

$$M = \frac{1}{12} v \varepsilon_1 d' (2\alpha \varepsilon_1 d + 3\beta d - \alpha \varepsilon_1 d' - 2\beta d') \quad (\text{A 6.11})$$

## Annexe 7 : Diagramme d'interaction M – N

Les expressions suivantes ont été déterminées à l'aide du logiciel Mathcad 11.0a.

### Domaine non fissuré

Expression de  $N$  en fonction de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  (équation (A 6.5)) :

$$N = \frac{1}{6} vd (2\alpha\varepsilon_1^2 + 3\beta\varepsilon_1 + 2\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2 + 3\beta\varepsilon_2 + 2\alpha\varepsilon_2^2) \quad (\text{A 7.1})$$

Expression de  $\varepsilon_1$  en fonction de  $N$  et  $\varepsilon_2$  :

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \frac{-1}{4} \frac{3dv\beta + 2dv\alpha\varepsilon_2 - 3^{1/2} [-dv(-3dv\beta^2 + 4dv\beta\alpha\varepsilon_2 + 4dv\alpha^2\varepsilon_2^2 - 16\alpha N)]^{1/2}}{dv\alpha} \\ -1 \frac{3dv\beta + 2dv\alpha\varepsilon_2 + 3^{1/2} [-dv(-3dv\beta^2 + 4dv\beta\alpha\varepsilon_2 + 4dv\alpha^2\varepsilon_2^2 - 16\alpha N)]^{1/2}}{4} \\ \frac{dv\alpha}{dv\alpha} \end{cases} \quad (\text{A 7.2})$$

Il y a deux solutions. La seconde conduisant à un résultat illogique ou impossible, on adopte la première.

Expression de  $M$  en fonction de  $\varepsilon_1$  et de  $\varepsilon_2$  (équation (A 6.6)) :

$$M = \frac{1}{12} vd^2 (\alpha\varepsilon_1^2 - \alpha\varepsilon_2^2 + \beta\varepsilon_1 - \beta\varepsilon_2) \quad (\text{A 7.3})$$

Expression de  $M$  en fonction de  $N$  et de  $\varepsilon_2$  :

$$M = \frac{-1}{96} \frac{d}{\alpha} (-3dv\beta^2 + 12dv\beta\alpha\varepsilon_2 + 3^{1/2}\beta [-dv(-3dv\beta^2 + 4dv\beta\alpha\varepsilon_2 + 4dv\alpha^2\varepsilon_2^2 - 16\alpha N)]^{1/2} + 12dv\alpha^2\varepsilon_2^2 + 2 \cdot 3^{1/2}\alpha\varepsilon_2 [-dv(-3dv\beta^2 + 4dv\beta\alpha\varepsilon_2 + 4dv\alpha^2\varepsilon_2^2 - 16\alpha N)]^{1/2} - 24\alpha N) \quad (\text{A 7.4})$$

Dérivation de l'expression de  $M$  par rapport à  $\varepsilon_2$  :

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_2} = \frac{1}{24} \frac{d^2v}{[-dv(-3dv\beta^2 + 4dv\beta\alpha\varepsilon_2 + 4dv\alpha^2\varepsilon_2^2 - 16\alpha N)]^{1/2}} (-3\beta [-dv(-3dv\beta^2 + 4dv\beta\alpha\varepsilon_2 + 4dv\alpha^2\varepsilon_2^2 - 16\alpha N)]^{1/2} - 3^{1/2}\beta^2 dv + 4 \cdot 3^{1/2}\beta dv\alpha\varepsilon_2 - 6\alpha\varepsilon_2 [-dv(-3dv\beta^2 + 4dv\beta\alpha\varepsilon_2 + 4dv\alpha^2\varepsilon_2^2 - 16\alpha N)]^{1/2} + 4 \cdot 3^{1/2}\alpha^2\varepsilon_2^2 dv - 8 \cdot 3^{1/2}\alpha N) \quad (\text{A 7.5})$$

Annulation de la dérivée et expression pour  $\varepsilon_2$  :

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_2} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = \begin{cases} \frac{-1}{4} \frac{2dv\beta - 2^{1/2} \cdot 3^{1/2} [dv(4\alpha N + dv\beta^2)]^{1/2} - 2^{1/2} [dv(4\alpha N + dv\beta^2)]^{1/2}}{dv\alpha} \\ -1 \frac{2dv\beta + 2^{1/2} \cdot 3^{1/2} [dv(4\alpha N + dv\beta^2)]^{1/2} + 2^{1/2} [dv(4\alpha N + dv\beta^2)]^{1/2}}{4} \\ \frac{dv\alpha}{dv\alpha} \\ -1 \frac{2dv\beta - 2^{1/2} \cdot 3^{1/2} [dv(4\alpha N + dv\beta^2)]^{1/2} + 2^{1/2} [dv(4\alpha N + dv\beta^2)]^{1/2}}{4} \\ \frac{dv\alpha}{dv\alpha} \\ -1 \frac{2dv\beta + 2^{1/2} \cdot 3^{1/2} [dv(4\alpha N + dv\beta^2)]^{1/2} - 2^{1/2} [dv(4\alpha N + dv\beta^2)]^{1/2}}{4} \\ \frac{dv\alpha}{dv\alpha} \end{cases} \quad (\text{A 7.6})$$

Il y a quatre solutions. Les trois dernières conduisant à des résultats illogiques ou impossibles, on adopte la première.

Expression de  $M$  en fonction de  $N$  :

$$M = \frac{-1}{24} 3^{1/2} d \frac{4\alpha N + d v \beta^2}{\alpha} \quad (\text{A 7.7})$$

Expression de  $N$  en fonction de  $M$  :

$$N = \frac{-1}{12} 3^{1/2} \frac{24M\alpha + d^2 3^{1/2} v \beta^2}{d\alpha} \quad (\text{A 7.8})$$

### **Domaine fissuré**

Expression de  $N$  en fonction de  $\varepsilon_1$  et  $d'$  (équation (A 6.10)) :

$$N = \frac{1}{6} v d' \varepsilon_1 (2\alpha \varepsilon_1 + 3\beta) \quad (\text{A 7.9})$$

Expression de  $d'$  en fonction de  $N$  et  $\varepsilon_1$  :

$$d' = 6 \frac{N}{v \varepsilon_1 (2\alpha \varepsilon_1 + 3\beta)} \quad (\text{A 7.10})$$

Expression de  $M$  en fonction de  $\varepsilon_1$  et  $d'$  (équation (A 6.11)) :

$$M = \frac{1}{12} v d' \varepsilon_1 (2\alpha \varepsilon_1 d + 3d\beta - \alpha \varepsilon_1 d' - 2\beta d') \quad (\text{A 7.11})$$

Expression de  $M$  en fonction de  $N$  et  $\varepsilon_1$  :

$$M = \frac{1}{2} N \frac{4\alpha^2 \varepsilon_1^3 d v + 12\alpha \varepsilon_1^2 d v \beta + 9d\beta^2 v \varepsilon_1 - 6\alpha N \varepsilon_1 - 12\beta N}{(2\alpha \varepsilon_1 + 3\beta)^2 v \varepsilon_1} \quad (\text{A 7.12})$$

Dérivation de l'expression de  $M$  par rapport à  $\varepsilon_1$  :

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_1} = 6N^2 \frac{2\alpha^2 \varepsilon_1^2 + 6\alpha \varepsilon_1 \beta + 3\beta^2}{(2\alpha \varepsilon_1 + 3\beta)^3 v \varepsilon_1^2} \quad (\text{A 7.13})$$

Annulation de la dérivée et expression pour  $\varepsilon_1$  :

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_1} = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = \begin{cases} \left( \frac{-3}{2} + \frac{1}{2} 3^{1/2} \right) \frac{\beta}{\alpha} \\ \left( \frac{-3}{2} - \frac{1}{2} 3^{1/2} \right) \frac{\beta}{\alpha} \end{cases} \quad (\text{A 7.14})$$

Il y a deux solutions. La seconde conduisant à un résultat illogique ou impossible, on adopte la première.

Expression de  $M$  en fonction de  $N$  :

$$M = \frac{1}{2} N \frac{-3d\beta^2 v + 3^{1/2} \beta^2 d v - 2\alpha N - 2 \cdot 3^{1/2} \alpha N}{\beta^2 v (-3 + 3^{1/2})} \quad (\text{A 7.15})$$

Expression de  $N$  en fonction de  $M$  :

$$N = \frac{1}{2(-6\alpha - 4 \cdot 3^{1/2} \alpha)} \left[ 3d v \beta + (9d^2 v^2 \beta^2 + 144M v \alpha + 96 \cdot 3^{1/2} M v \alpha)^{1/2} \right] \beta \quad (\text{A 7.16})$$

## Annexe 8 : Points caractéristiques de la courbe d'interaction M - N

Les expressions suivantes ont été déterminées à l'aide du logiciel Mathcad 11.0a.

### Point 1 : Effort normal maximal

Expression de  $N$  en fonction de  $M$  dans le cas d'une section non fissurée (équation (A 7.8))

$$N = \frac{-1}{12} \cdot \frac{24M\alpha + 3^{1/2}d^2v\beta^2}{d} \cdot \frac{3^{1/2}}{\alpha} \quad (\text{A 8.1})$$

Expression de  $N$ , lorsque  $M = 0$  :

$$N = -\frac{dv\beta^2}{4\alpha} \quad (\text{A 8.2})$$

### Point 2 : Point délimitant les domaines fissuré et non fissuré :

Expression de  $N$  en fonction de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , dans le domaine non fissuré (équation (A 6.5))

$$N = \frac{1}{6}vd(2\alpha\varepsilon_1^2 + 3\beta\varepsilon_1 + 2\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2 + 3\beta\varepsilon_2 + 2\alpha\varepsilon_2^2) \quad (\text{A 8.3})$$

Expression de  $N$  en fonction de  $\varepsilon_1$ , admettant  $\varepsilon_2 = 0$  :

$$N = \left( \frac{1}{3}\alpha\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\beta\varepsilon_1 \right)dv \quad (\text{A 8.4})$$

Expression de  $\varepsilon_1$  en fonction de  $N$  :

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \frac{1}{4dv\alpha} \left[ -3dv\beta + (9d^2v^2\beta^2 + 48dv\alpha N)^{1/2} \right] \\ \frac{1}{4dv\alpha} \left[ -3dv\beta - (9d^2v^2\beta^2 + 48dv\alpha N)^{1/2} \right] \end{cases} \quad (\text{A 8.5})$$

Expression de  $M$  en fonction de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , dans le domaine non fissuré (équation (A 6.6))

$$M = \frac{1}{12}vd^2(\alpha\varepsilon_1^2 - \alpha\varepsilon_2^2 + \beta\varepsilon_1 - \beta\varepsilon_2) \quad (\text{A 8.6})$$

Expression de  $M$  en fonction de  $\varepsilon_1$ , admettant  $\varepsilon_2 = 0$  :

$$M = \frac{1}{12}vd^2(\alpha\varepsilon_1^2 + \beta\varepsilon_1) \quad (\text{A 8.7})$$

Expression de  $\varepsilon_1$  en fonction de  $M$  :

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \frac{1}{2v\alpha} \left[ \frac{-dv\beta + (d^2v^2\beta^2 + 48v\alpha M)^{1/2}}{d} \right] \\ \frac{1}{2v\alpha} \left[ \frac{-dv\beta - (d^2v^2\beta^2 + 48v\alpha M)^{1/2}}{d} \right] \end{cases} \quad (\text{A 8.8})$$

Les expressions de  $\varepsilon_1$  respectivement en fonction de  $N$  et de  $M$  ont chacune deux solutions. La seconde conduisant à un résultat illogique ou impossible, on adopte la première dans les deux cas.

On égale ces deux expressions et on exprime  $M$  en fonction de  $N$  :

$$M = \frac{1}{96} d \frac{3vd\beta^2 - \beta (9d^2v^2\beta^2 + 48dv\alpha N)^{1/2} + 24\alpha N}{\alpha} \quad (\text{A 8.9})$$

Expression de la courbe d'interaction du domaine non fissuré :

$$M = \frac{-1}{24} 3^{1/2} d \frac{4\alpha N + dv\beta^2}{\alpha} \quad (\text{A 8.10})$$

Intersection entre les deux courbes et résolution pour  $N$  :

$$N = \frac{-1}{4} dv\beta^2 \frac{-1 + 3^{1/2}}{\alpha} \quad (\text{A 8.11})$$

Expression de  $M$  correspondante :

$$M = \frac{1}{24} d^2 v \beta^2 (-2 + 3^{1/2}) \frac{3^{1/2}}{\alpha} \quad (\text{A 8.12})$$

### **Point 3 : Moment de flexion de pic et effort normal correspondant**

Expression de  $M$  en fonction de  $N$ , dans le domaine fissuré (équation (A 7.15)) :

$$M = \frac{1}{2} N \frac{-3d\beta^2v + 3^{1/2}\beta^2dv - 2\alpha N - 2 \cdot 3^{1/2}\alpha N}{\beta^2v(-3 + 3^{1/2})} \quad (\text{A 8.13})$$

Dérivation de l'expression de  $M$  par rapport à  $N$  :

$$\frac{\partial M}{\partial N} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{3vd\beta^2 - 3^{1/2}\beta^2vd + 4\alpha N + 4 \cdot 3^{1/2}\alpha N}{\beta^2v(-3 + 3^{1/2})} \quad (\text{A 8.14})$$

Annulation de la dérivée et expression pour  $N$  :

$$\frac{\partial M}{\partial N} = 0 \Rightarrow N = \frac{1}{4} vd\beta^2 \frac{-3 + 3^{1/2}}{\alpha(1 + 3^{1/2})} \quad (\text{A 8.15})$$

Moment de flexion correspondant :

$$M = \frac{1}{16} (-3 + 3^{1/2}) \beta^2 v \frac{d^2}{(1 + 3^{1/2}) \alpha} \quad (\text{A 8.16})$$

## Annexe 9 : Comparaison avec d'autres modèles de comportement pour la maçonnerie

Les expressions suivantes ont été déterminées à l'aide du logiciel Mathcad 11.0a.

### ***Loi constitutive élastique linéaire, cas non fissuré***

Contrainte maximale de compression due à  $N$  et  $M$  :

$$\sigma_1 = \frac{N}{vd} + \frac{M}{I} \cdot \frac{d}{2} = \frac{1}{vd} \left( N + \frac{6M}{d} \right) \quad (\text{A 9.1})$$

Expression de  $M$  en fonction de  $N$ , en admettant  $\sigma_1 = f_c$  :

$$M = \frac{(f_c vd - N) d}{6} \quad (\text{A 9.2})$$

Limite du domaine non fissuré, avec  $M = 0$  :

$$N = f_c vd \quad (\text{A 9.3})$$

Limite du domaine non fissuré, avec  $\sigma_2 = 0$  :

$$N = \frac{6M}{d} = f_c vd - N \quad (\text{A 9.4})$$

$$N = \frac{f_c vd}{2} \quad (\text{A 9.5})$$

Moment correspondant :

$$M = \frac{f_c vd^2}{12} \quad (\text{A 9.6})$$

### ***Loi constitutive élastique linéaire, cas fissuré***

Contrainte maximale de compression due à  $N$  et  $M$  :

$$\sigma_1 = \frac{4N^2}{3v(dN - 2M)} \quad (\text{A 9.7})$$

Expression de  $M$  en fonction de  $N$ , en admettant  $\sigma_1 = f_c$  :

$$M = \frac{dN}{2} - \frac{2N^2}{3vf_c} \quad (\text{A 9.8})$$

Dérivation de l'expression de  $M$  par rapport à  $N$  :

$$\frac{\partial M}{\partial N} = \frac{d}{2} - \frac{4N}{3vf_c} \quad (\text{A 9.9})$$

Annulation de la dérivée et expression pour  $N$  :

$$\frac{\partial M}{\partial N} = 0 \Rightarrow N = \frac{3dvf_c}{8} \quad (\text{A 9.10})$$

Moment de flexion correspondant :

$$M = \frac{3d^2vf_c}{32} \quad (\text{A 9.11})$$

***Loi constitutive rigide plastique avec stress-block***

Hauteur du stress-block :

$$x_{pl} = \frac{N}{f_c v} \quad (\text{A 9.12})$$

Expression de  $M$  en fonction de  $N$  :

$$M = N \left( \frac{d}{2} - \frac{N}{2f_c v} \right) \quad (\text{A 9.13})$$

Dérivation de l'expression de  $M$  par rapport à  $N$  :

$$\frac{\partial M}{\partial N} = \frac{d}{2} - \frac{N}{vf_c} \quad (\text{A 9.14})$$

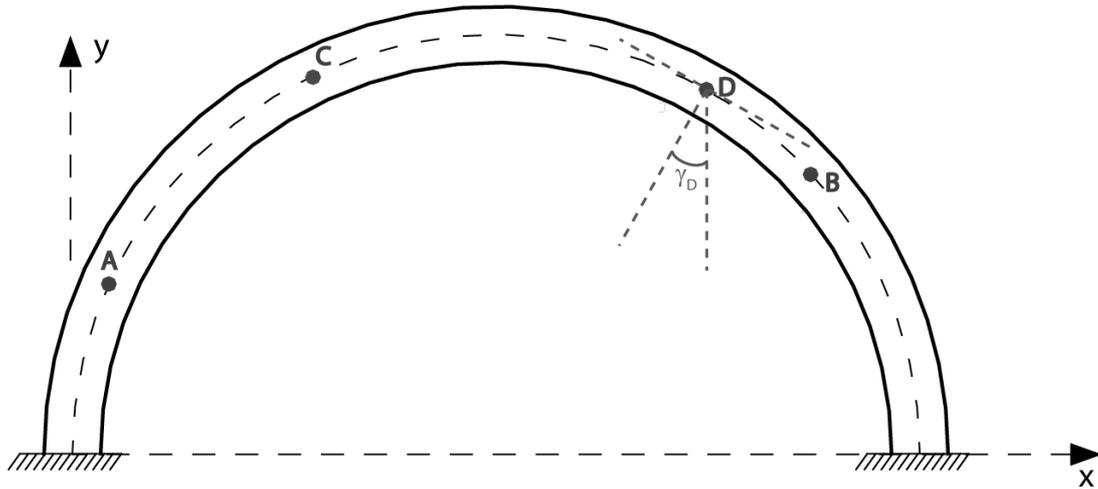
Annulation de la dérivée et expression pour  $N$  :

$$\frac{\partial M}{\partial N} = 0 \Rightarrow N = \frac{d^2vf_c}{2} \quad (\text{A 9.15})$$

Moment de flexion correspondant :

$$M = \frac{d^2vf_c}{8} \quad (\text{A 9.16})$$

## Annexe 10 : Calcul de l'angle $\gamma_D$



La pente de la droite tangente à la courbe polynomiale représentant le tracé de l'arc en  $D$  est égale à la tangente de l'angle  $\gamma_D$ .

Equation polynomiale représentant le tracé de l'axe central de l'arc :

$$y = fx^4 + jx^3 + kx^2 + rx + u \quad (\text{A 10.1})$$

Les paramètres  $f$ ,  $j$ ,  $k$ ,  $r$  et  $u$  ont été préalablement déterminés.

Dérivation de l'équation (A 10.1) par rapport à  $x$  :

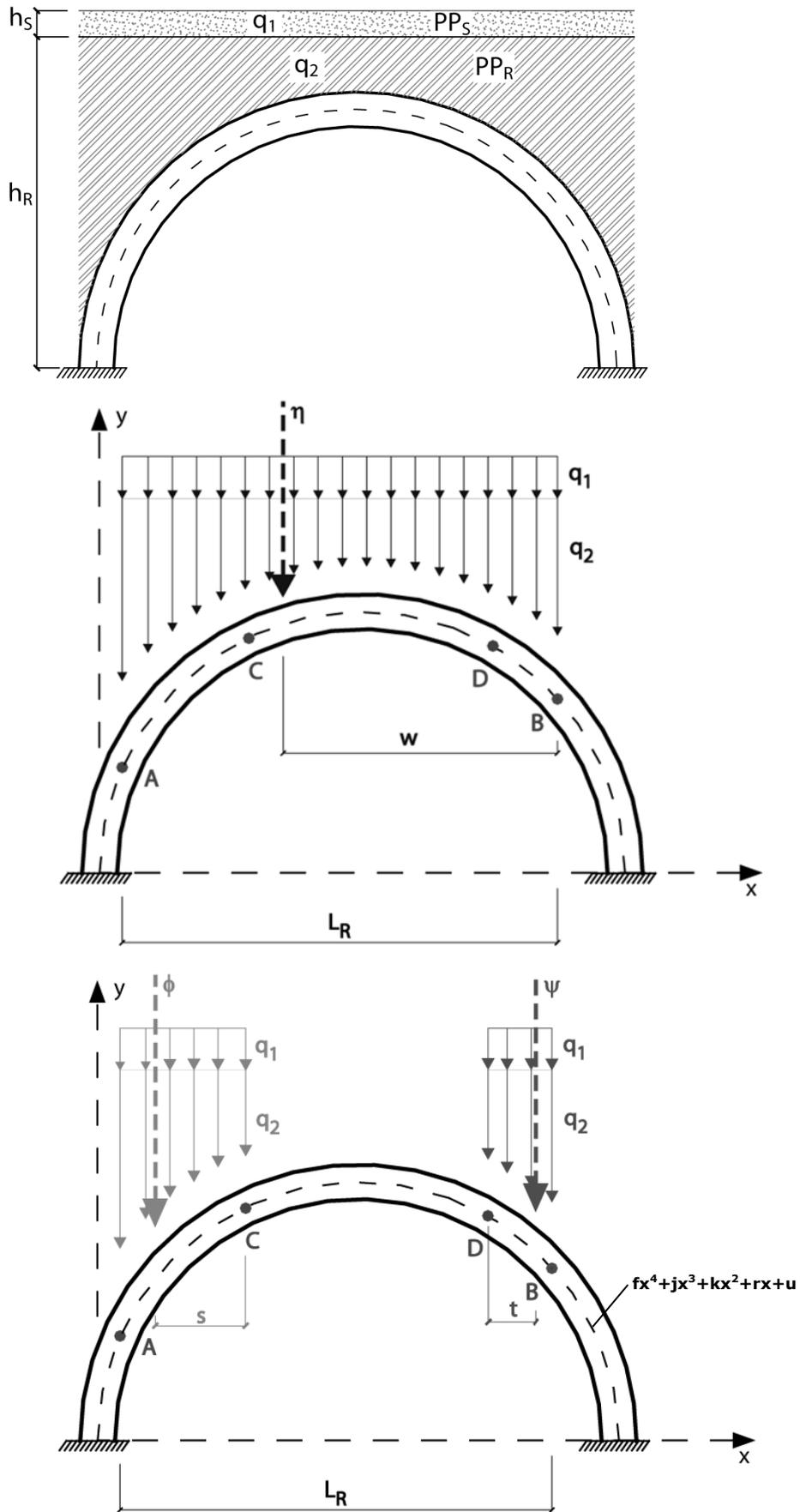
$$\frac{\partial}{\partial x}(fx^4 + jx^3 + kx^2 + rx + u) = 4fx^3 + 3jx^2 + 2kx + r \quad (\text{A 10.2})$$

Expression de l'équation (A 10.2) en  $D$  :

$$\gamma_D = \tan^{-1}(4fx_D^3 + 3jx_D^2 + 2kx_D + r) \quad (\text{A 10.3})$$



## Annexe 11 : Calcul des charges permanentes



Les expressions suivantes ont été déterminées à l'aide du logiciel Mathcad 11.0a.

La grandeur  $\eta$  représente la résultante des charges permanentes sur l'ouverture active de l'arc :

$$\begin{aligned}
 \eta &= \int_{L_R} vq(x)dx = & (A 11.1) \\
 &= \int_{L_R} vq_1 dx + \int_{L_R} vq_2(x)dx = \\
 &= vPP_S h_S \int_{x_A}^{x_B} dx + vPP_R \left[ h_R \int_{x_A}^{x_B} dx - \int_{x_A}^{x_B} (fx^4 + jx^3 + kx^2 + rx)dx \right] = \\
 &= v \left[ PP_S h_S L_R + PP_R \left[ h_R L_R - \left( \frac{1}{5} f(x_B^5 - x_A^5) + \frac{1}{4} j(x_B^4 - x_A^4) + \frac{1}{3} k(x_B^3 - x_A^3) + \frac{1}{2} r(x_B^2 - x_A^2) \right) \right] \right] = \\
 &= v \left[ PP_S h_S L_R + PP_R \left( h_R L_R - f \frac{(x_B^5 - x_A^5)}{5} - j \frac{(x_B^4 - x_A^4)}{4} - k \frac{(x_B^3 - x_A^3)}{3} - r \frac{(x_B^2 - x_A^2)}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Le moment de flexion induit par la charge  $\eta$  par rapport à la rotule  $B$  est exprimé par la grandeur  $\eta w$  :

$$\begin{aligned}
 \eta w &= \int_{L_R} vq(x)(x_B - x)dx = & (A 11.2) \\
 &= \int_{L_R} vq_1(x_B - x)dx + \int_{L_R} vq_2(x)(x_B - x)dx = \\
 &= vPP_S h_S \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x)dx + vPP_R \left[ h_R \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x)dx - \int_{x_A}^{x_B} (fx^4 + jx^3 + kx^2 + rx)(x_B - x)dx \right] = \\
 &= v \left[ PP_S h_S \left( x_B^2 - \frac{x_B^2}{2} - x_A x_B + \frac{x_A^2}{2} \right) + PP_R \left[ h_R \left( x_B^2 - \frac{x_B^2}{2} - x_A x_B + \frac{x_A^2}{2} \right) - \left( f \frac{x_B^6}{30} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + j \frac{x_B^5}{20} + k \frac{x_B^4}{12} + r \frac{x_B^3}{6} + f \frac{x_A^6}{6} + j \frac{x_A^5}{5} - f \frac{x_A^5 x_B}{5} + k \frac{x_A^4}{4} - j \frac{x_A^4 x_B}{4} + r \frac{x_A^3}{3} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - k \frac{x_A^3 x_B}{3} - r \frac{x_A^2 x_B}{2} \right) \right] = \\
 &= v \left[ PP_S h_S \frac{(x_B - x_A)^2}{2} + PP_R \left( h_R \frac{(x_B - x_A)^2}{2} - f \frac{x_B^6}{30} - j \frac{x_B^5}{20} - k \frac{x_B^4}{12} - r \frac{x_B^3}{6} - f \frac{x_A^6}{6} - j \frac{x_A^5}{5} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + f \frac{x_A^5 x_B}{5} - k \frac{x_A^4}{4} + j \frac{x_A^4 x_B}{4} - r \frac{x_A^3}{3} + k \frac{x_A^3 x_B}{3} + r \frac{x_A^2 x_B}{2} \right) \right] = \\
 &= v \left[ PP_S h_S \frac{L_R^2}{2} + PP_R \left( h_R \frac{L_R^2}{2} - f \frac{x_B^6}{30} - j \frac{x_B^5}{20} - k \frac{x_B^4}{12} - r \frac{x_B^3}{6} - f \frac{x_A^6}{6} - j \frac{x_A^5}{5} + f \frac{x_A^5 x_B}{5} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - k \frac{x_A^4}{4} + j \frac{x_A^4 x_B}{4} - r \frac{x_A^3}{3} + k \frac{x_A^3 x_B}{3} + r \frac{x_A^2 x_B}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

La grandeur  $\phi$  représente la résultante des charges permanentes sollicitant la portion d'arc comprise entre les rotules A et C :

$$\begin{aligned}
 \phi &= \int_a^{x_C} vq(x)dx = & (A 11.3) \\
 &= \int_a^{x_C} vq_1 dx + \int_a^{x_C} vq_2(x)dx = \\
 &= vPP_S h_S \int_{x_A}^{x_C} dx + vPP_R \left[ h_R \int_{x_A}^{x_C} dx - \int_{x_A}^{x_C} (fx^4 + jx^3 + kx^2 + rx)dx \right] = \\
 &= v \left[ PP_S h_S a + PP_R \left[ h_R a - \left( \frac{1}{5} f(x_C^5 - x_A^5) + \frac{1}{4} j(x_C^4 - x_A^4) + \frac{1}{3} k(x_C^3 - x_A^3) + \frac{1}{2} r(x_C^2 - x_A^2) \right) \right] \right] = \\
 &= v \left[ PP_S h_S a + PP_R \left( h_R a - f \frac{(x_C^5 - x_A^5)}{5} - j \frac{(x_C^4 - x_A^4)}{4} - k \frac{(x_C^3 - x_A^3)}{3} - r \frac{(x_C^2 - x_A^2)}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Le moment de flexion induit par la force  $\phi$  par rapport à la rotule C est exprimé par la grandeur  $\phi s$  :

$$\begin{aligned}
 \phi s &= \int_a^{x_C} vq(x)(x_C - x)dx = & (A 11.4) \\
 &= \int_a^{x_C} vq_1(x_C - x)dx + \int_a^{x_C} vq_2(x)(x_C - x)dx = \\
 &= vPP_S h_S \int_{x_A}^{x_C} (x_C - x)dx + vPP_R \left[ h_R \int_{x_A}^{x_C} (x_C - x)dx - \int_{x_A}^{x_C} (fx^4 + jx^3 + kx^2 + rx)(x_C - x)dx \right] = \\
 &= v \left[ PP_S h_S \left( x_C^2 - \frac{x_C^2}{2} - x_A x_C + \frac{x_A^2}{2} \right) + PP_R \left[ h_R \left( x_C^2 - \frac{x_C^2}{2} - x_A x_C + \frac{x_A^2}{2} \right) - \left( f \frac{x_C^6}{30} + j \frac{x_C^5}{20} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + k \frac{x_C^4}{12} + r \frac{x_C^3}{6} + f \frac{x_A^6}{6} + j \frac{x_A^5}{5} - f \frac{x_A^5 x_C}{5} + k \frac{x_A^4}{4} - j \frac{x_A^4 x_C}{4} + r \frac{x_A^3}{3} - k \frac{x_A^3 x_C}{3} - r \frac{x_A^2 x_C}{2} \right) \right] = \\
 &= v \left[ PP_S h_S \frac{a^2}{2} + PP_R \left( h_R \frac{a^2}{2} - f \frac{x_C^6}{30} - j \frac{x_C^5}{20} - k \frac{x_C^4}{12} - r \frac{x_C^3}{6} - f \frac{x_A^6}{6} - j \frac{x_A^5}{5} + f \frac{x_A^5 x_C}{5} - k \frac{x_A^4}{4} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + j \frac{x_A^4 x_C}{4} - r \frac{x_A^3}{3} + k \frac{x_A^3 x_C}{3} + r \frac{x_A^2 x_C}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

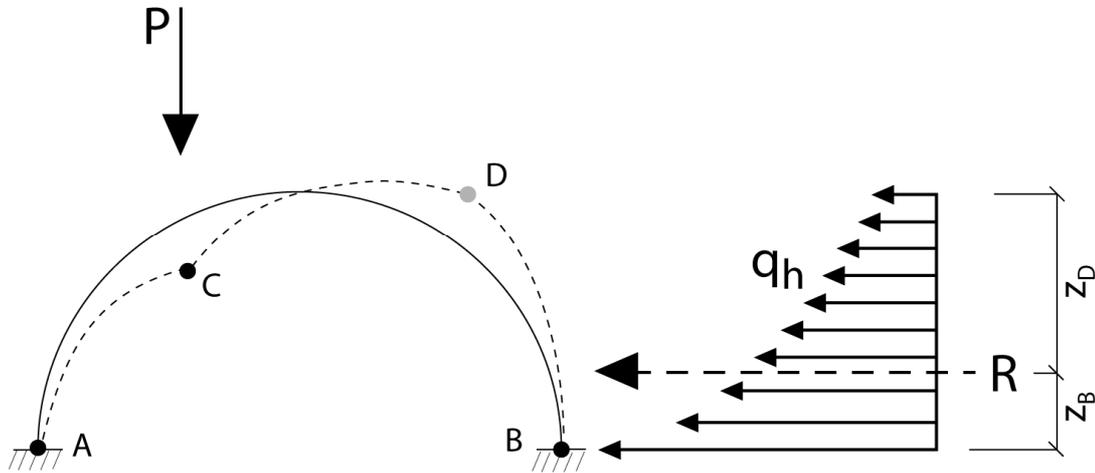
La grandeur  $\psi$  représente la résultante des charges permanentes sollicitant la portion d'arc comprise entre les rotules  $D$  et  $B$  :

$$\begin{aligned}
 \psi &= \int_b vq(x)dx = & (A 11.5) \\
 &= \int_b vq_1 dx + \int_b vq_2(x)dx = \\
 &= vPP_S h_S \int_{x_D}^{x_B} dx + vPP_R \left[ h_R \int_{x_D}^{x_B} dx - \int_{x_D}^{x_B} (fx^4 + jx^3 + kx^2 + rx)dx \right] = \\
 &= v \left[ PP_S h_S b + PP_R \left[ h_R b - \left( \frac{1}{5} f(x_B^5 - x_D^5) + \frac{1}{4} j(x_B^4 - x_D^4) + \frac{1}{3} k(x_B^3 - x_D^3) + \frac{1}{2} r(x_B^2 - x_D^2) \right) \right] \right] = \\
 &= v \left[ PP_S h_S b + PP_R \left( h_R b - f \frac{(x_B^5 - x_D^5)}{5} - j \frac{(x_B^4 - x_D^4)}{4} - k \frac{(x_B^3 - x_D^3)}{3} - r \frac{(x_B^2 - x_D^2)}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Le moment de flexion induit par la force  $\psi$  par rapport à la rotule  $D$  est exprimé par la grandeur  $\psi t$  :

$$\begin{aligned}
 \psi t &= \int_b vq(x)(x - x_D)dx = & (A 11.6) \\
 &= \int_b vq_1(x - x_D)dx + \int_b vq_2(x)(x - x_D)dx = \\
 &= vPP_S h_S \int_{x_D}^{x_B} (x - x_D)dx + vPP_R \left[ h_R \int_{x_D}^{x_B} (x - x_D)dx - \int_{x_D}^{x_B} (fx^4 + jx^3 + kx^2 + rx)(x - x_D)dx \right] = \\
 &= v \left[ PP_S h_S \left( x_B^2 - \frac{x_B^2}{2} - x_D x_B + \frac{x_D^2}{2} \right) + PP_R \left[ h_R \left( x_B^2 - \frac{x_B^2}{2} - x_D x_B + \frac{x_D^2}{2} \right) - \left( f \frac{x_D^6}{30} + j \frac{x_D^5}{20} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + k \frac{x_D^4}{12} + r \frac{x_D^3}{6} + f \frac{x_B^6}{6} + j \frac{x_B^5}{5} - f \frac{x_B^5 x_D}{5} + k \frac{x_B^4}{4} - j \frac{x_B^4 x_D}{4} + r \frac{x_B^3}{3} - k \frac{x_B^3 x_D}{3} - r \frac{x_B^2 x_D}{2} \right) \right] = \\
 &= v \left[ PP_S h_S \frac{b^2}{2} + PP_R \left( h_R \frac{b^2}{2} - f \frac{x_D^6}{30} - j \frac{x_D^5}{20} - k \frac{x_D^4}{12} - r \frac{x_D^3}{6} - f \frac{x_B^6}{6} - j \frac{x_B^5}{5} + f \frac{x_B^5 x_D}{5} - k \frac{x_B^4}{4} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + j \frac{x_B^4 x_D}{4} - r \frac{x_B^3}{3} + k \frac{x_B^3 x_D}{3} + r \frac{x_B^2 x_D}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

## Annexe 12 : Calcul de la poussée horizontale due au remplissage



Les expressions suivantes ont été déterminées à l'aide du logiciel Mathcad 11.0a.

Résultante de la poussée horizontale due au remplissage entre les rotules B et D :

$$\begin{aligned}
 R &= \int_{h_B}^{h_D} v q_h dh = & (A\ 12.1) \\
 &= \int_{h_B}^{h_D} v [m_p K_p (q_1 + q_2) + c m_{pc} K_{pc}] dh = \\
 &= v \left[ m_p K_p h_S P P_S \int_{h_B}^{h_D} dh + m_p K_p P P_R \int_{h_B}^{h_D} (h_R - h) dh + c m_{pc} K_{pc} \int_{h_B}^{h_D} dh \right] = \\
 &= v \left[ m_p K_p \left[ h_S P P_S \int_{h_B}^{h_D} dh + P P_R h_R \int_{h_B}^{h_D} dh - P P_R \int_{h_B}^{h_D} h dh \right] + c m_{pc} K_{pc} \int_{h_B}^{h_D} dh \right] = \\
 &= v \left[ K_p m_p \left[ h_S P P_S (h_D - h_B) + P P_R h_R (h_D - h_B) - P P_R \left( \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} \right) \right] + c m_{pc} K_{pc} (h_D - h_B) \right]
 \end{aligned}$$

Moment de flexion induit par la résultante  $R$  par rapport à la rotule  $B$  :

$$\begin{aligned}
 RZ_B &= \int_{h_B}^{h_D} v q_h (h - h_B) dh = & (A 12.2) \\
 &= \int_{h_B}^{h_D} v [m_p K_p (q_1 + q_2) + c m_{pc} K_{pc}] (h - h_B) dh = \\
 &= v \left[ m_p K_p h_S P P_S \int_{h_B}^{h_D} (h - h_B) dh + m_p K_p P P_R \int_{h_B}^{h_D} (h_R - h)(h - h_B) dh + c m_{pc} K_{pc} \int_{h_B}^{h_D} (h - h_B) dh \right] = \\
 &= v \left[ m_p K_p h_S P P_S \int_{h_B}^{h_D} h dh - m_p K_p h_S P P_S \int_{h_B}^{h_D} h_B dh + m_p K_p P P_R \int_{h_B}^{h_D} (h_R h - h_B h_R + h h_B - h^2) dh + \right. \\
 &\quad \left. + c m_{pc} K_{pc} \int_{h_B}^{h_D} h dh - c m_{pc} K_{pc} \int_{h_B}^{h_D} h_B dh \right] = \\
 &= v \left[ m_p K_p \left[ h_S P P_S \left[ \int_{h_B}^{h_D} h dh - h_B \int_{h_B}^{h_D} dh \right] + P P_R \left[ h_R \int_{h_B}^{h_D} h dh - h_B h_R \int_{h_B}^{h_D} dh - \int_{h_B}^{h_D} h^2 dh + h_B \int_{h_B}^{h_D} h dh \right] \right] + \right. \\
 &\quad \left. + c m_{pc} K_{pc} \left[ \int_{h_B}^{h_D} h dh - h_B \int_{h_B}^{h_D} dh \right] \right] = \\
 &= v \left[ K_p m_p \left[ h_S P P_S \left[ \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} - h_B (h_D - h_B) \right] + P P_R \left[ h_R \left( \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} \right) - h_R h_B (h_D - h_B) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{h_D^3}{3} + \frac{h_B^3}{3} + h_B \left( \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} \right) \right] \right] + c m_{pc} K_{pc} \left[ \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} - h_B (h_D - h_B) \right] \right]
 \end{aligned}$$

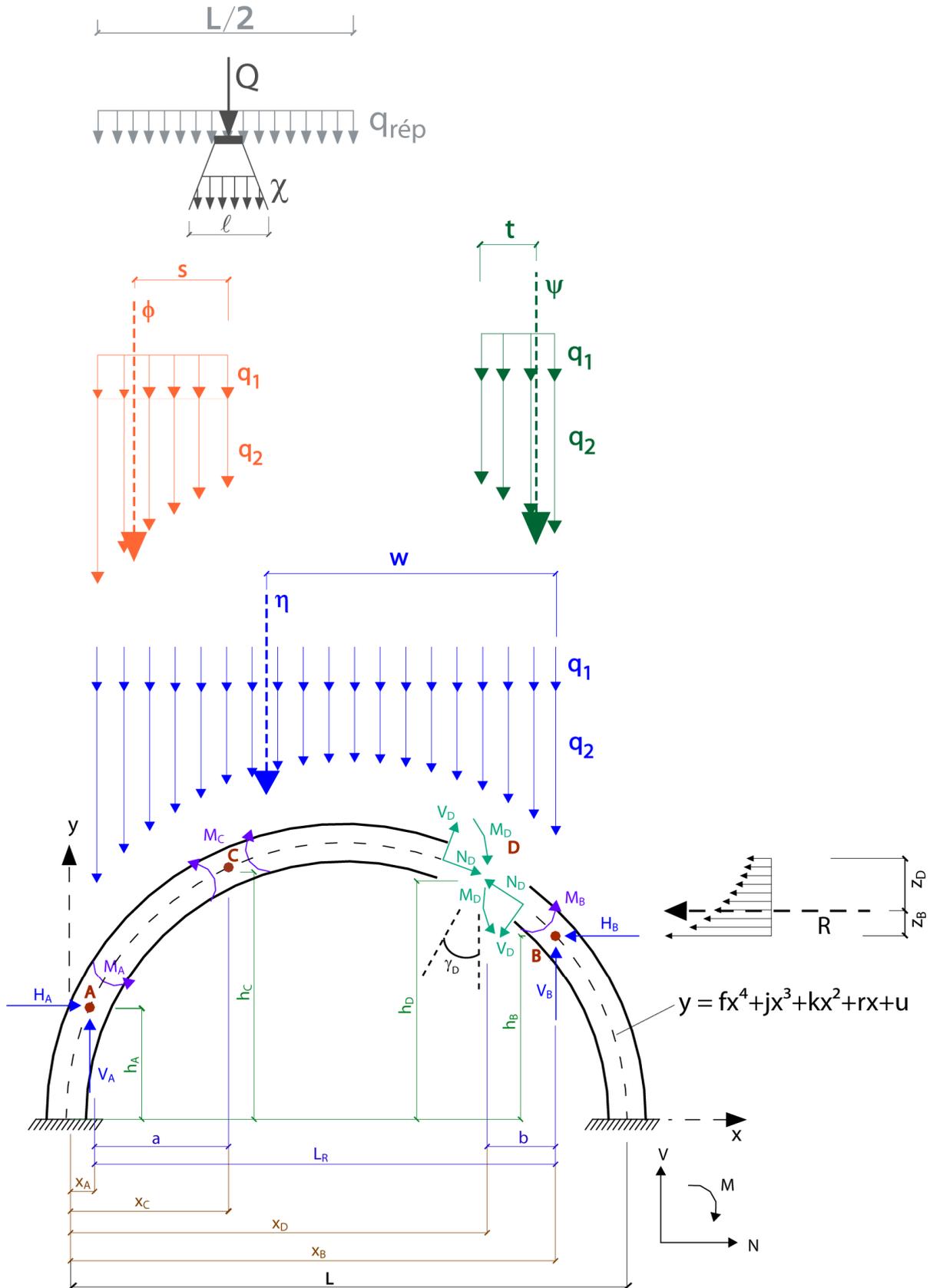
Moment de flexion induit par la résultante  $R$  par rapport à la rotule  $D$  :

$$\begin{aligned}
 RZ_D &= \int_{h_B}^{h_D} v q_h (h_D - h) dh = & (A 12.3) \\
 &= \int_{h_B}^{h_D} v [m_p K_p (q_1 + q_2) + c m_{pc} K_{pc}] (h_D - h) dh = \\
 &= v \left[ m_p K_p h_S PP_S \int_{h_B}^{h_D} (h_D - h) dh + m_p K_p PP_R \int_{h_B}^{h_D} (h_R - h)(h_D - h) dh + c m_{pc} K_{pc} \int_{h_B}^{h_D} (h_D - h) dh \right] = \\
 &= v \left[ m_p K_p h_S PP_S \int_{h_B}^{h_D} h_D dh - m_p K_p h_S PP_S \int_{h_B}^{h_D} h dh + m_p K_p PP_R \int_{h_B}^{h_D} (h_R h_D - h h_R - h h_D + h^2) dh + \right. \\
 &\quad \left. + c m_{pc} K_{pc} \int_{h_B}^{h_D} h_D dh - c m_{pc} K_{pc} \int_{h_B}^{h_D} h dh \right] = \\
 &= v \left[ m_p K_p \left[ h_S PP_S \left[ h_D \int_{h_B}^{h_D} dh - \int_{h_B}^{h_D} h dh \right] + PP_R \left[ h_R h_D \int_{h_B}^{h_D} dh - h_R \int_{h_B}^{h_D} h dh - h_D \int_{h_B}^{h_D} h dh + \int_{h_B}^{h_D} h^2 dh \right] \right] + \right. \\
 &\quad \left. + c m_{pc} K_{pc} \left[ h_D \int_{h_B}^{h_D} dh - \int_{h_B}^{h_D} h dh \right] \right] = \\
 &= v \left[ K_p m_p \left[ h_S PP_S \left[ h_D (h_D - h_B) - \frac{h_D^2}{2} + \frac{h_B^2}{2} \right] + PP_R \left[ h_R h_D (h_D - h_B) - h_R \left( \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} \right) - h_D \left( \frac{h_D^2}{2} - \frac{h_B^2}{2} \right) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{h_D^3}{3} - \frac{h_B^3}{3} \right] \right] + c m_{pc} K_{pc} \left[ h_D (h_D - h_B) - \frac{h_D^2}{2} + \frac{h_B^2}{2} \right]
 \end{aligned}$$



## Annexe 13 : Développement du modèle

La figure ci-dessous résume les différentes caractéristiques nécessaires à l'élaboration du modèle.



**Efforts horizontaux et verticaux aux rotules A et B :**

Sur toute l'ouverture active :

Equilibre des moments en B :

$$\sum M_B = -H_A(h_B - h_A) + V_A L_R - \eta w - n\chi \ell v(L_R - a) - nq_{\text{rép}} v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \left( \frac{L}{4} - \frac{x_A}{2} \right) \right) + \quad (\text{A 13.1})$$

$$- M_A - M_B - Rz_B = 0$$

Equilibre des forces horizontales :

$$\sum F_x = H_A - H_B - R = 0 \quad (\text{A 13.2})$$

Equilibre des forces verticales :

$$\sum F_y = V_A + V_B - n\chi \ell v - nq_{\text{rép}} v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) - \eta = 0 \quad (\text{A 13.3})$$

Sur le tronçon A - C :

Equilibre des moments en C :

$$\sum M_C = -M_A - M_C - H_A(h_C - h_A) + V_A a - n\chi v \frac{\ell}{2} \frac{\ell}{4} - nq_{\text{rép}} v a \frac{a}{2} - \phi s = 0 \quad (\text{A 13.4})$$

De l'équation (A 13.4) :

$$V_A = \frac{M_A + M_C + H_A(h_C - h_A) + n\chi v \frac{\ell^2}{8} + nq_{\text{rép}} v \frac{a^2}{2} + \phi s}{a} \quad (\text{A 13.5})$$

En introduisant (A 13.5) dans (A 13.1) :

$$\sum M_B = -H_A(h_B - h_A) + L_R \frac{M_A + M_C + H_A(h_C - h_A) + n\chi v \frac{\ell^2}{8} + nq_{\text{rép}} v \frac{a^2}{2} + \phi s}{a} - \eta w + \quad (\text{A 13.6})$$

$$- n\chi \ell v(L_R - a) - nq_{\text{rép}} v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) - M_A - M_B - Rz_B = 0$$

$$H_A = \frac{1}{h_A - h_B + \frac{L_R(h_C - h_A)}{a}} \left[ \frac{-L_R(M_A + M_C + \phi s) - nL_R \chi v \frac{\ell^2}{8} - nL_R q_{\text{rép}} v \frac{a^2}{2} + \eta w + \quad (\text{A 13.7})}{a} \right.$$

$$\left. + n\chi \ell v(L_R - a) + nq_{\text{rép}} v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) + M_A + M_B + Rz_B \right]$$

$$H_A = \frac{1}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -L_R(M_A + M_C + \phi s) + n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a \ell v(L_R - a) \right] + \quad (\text{A 13.8}) \right.$$

$$\left. + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + a v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a(\eta w + M_A + M_B + Rz_B) \right]$$

Effort horizontal à la rotule A,  $H_A$  :

$$H_A = \frac{1}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + \right. \right. \quad (\text{A 13.9})$$

$$\left. \left. + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a(\eta w + M_A + M_B + Rz_B) - L_R(M_A + M_C + \phi s) \right]$$

De l'équation (A 13.2) :

$$H_B = H_A - R \quad (\text{A 13.10})$$

Effort horizontal à la rotule B,  $H_B$  :

$$H_B = \frac{1}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + \right. \right. \quad (\text{A 13.11})$$

$$\left. \left. + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a(\eta w + M_A + M_B + Rz_B) - L_R(M_A + M_C + \phi s) \right] - R$$

De l'équation (A 13.4) :

$$V_A = \frac{M_A + M_C + \phi s}{a} + \frac{h_C - h_A}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right] + \right. \quad (\text{A 13.12})$$

$$\left. + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a(\eta w + M_A + M_B + Rz_B) - \right.$$

$$\left. - L_R(M_A + M_C + \phi s) \right] + n\chi v \frac{\ell^2}{8a} + nq_{\text{rép}} v \frac{a}{2}$$

Effort vertical à la rotule A,  $V_A$  :

$$V_A = n\chi \left[ \frac{v\ell^2}{8a} + \frac{(h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \right] + \quad (\text{A 13.13})$$

$$+ nq_{\text{rép}} \left[ \frac{av}{2} + \frac{(h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \right] + \frac{M_A + M_C + \phi s}{a} +$$

$$+ \frac{(h_C - h_A) [a(\eta w + M_A + M_B + Rz_B) - L_R(M_A + M_C + \phi s)]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]}$$

De l'équation (A 13.3) :

$$V_B = -V_A + n\chi\ell v + nq_{\text{rép}} v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) + \eta \quad (\text{A 13.14})$$

Effort vertical à la rotule  $B$ ,  $V_B$  :

$$\begin{aligned}
 V_B = n\chi & \left[ \ell v - \frac{v\ell^2}{8a} - \frac{(h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right]}{a [a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)]} \right] + nq_{\text{rép}} \left[ \left( \frac{L}{2} - x_A \right) v - \frac{av}{2} + \right. \\
 & \left. - \frac{(h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a [a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)]} \right] + \eta - \frac{M_A + M_C + \phi s}{a} + \\
 & - \frac{(h_C - h_A) [a (\eta w + M_A + M_B + RZ_B) - L_R (M_A + M_C + \phi s)]}{a [a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)]}
 \end{aligned} \quad (\text{A 13.15})$$

**Effort normal et moment de flexion en  $D$  :**

Sur le tronçon d'arc  $D - B$  :

Equilibre des moments en  $D$  :

$$\sum M_D = -V_B b + H_B (h_D - h_B) - M_B - M_D + \psi t + RZ_D = 0 \quad (\text{A 13.16})$$

De l'équation (A 13.15) :

$$M_D = -V_B b + H_B (h_D - h_B) - M_B + \psi t + RZ_D \quad (\text{A 13.17})$$

$$\begin{aligned}
 M_D = n\chi & \left[ -b\ell v + \frac{bv\ell^2}{8a} + \frac{b (h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right]}{a [a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)]} \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -bv \left( \frac{L}{2} - x_A \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{bav}{2} + \frac{b (h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a [a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)]} \right] - b\eta + \\
 & + \frac{b (M_A + M_C + \phi s)}{a} + \frac{b (h_C - h_A) [a (\eta w + M_A + M_B + RZ_B) - L_R (M_A + M_C + \phi s)]}{a [a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)]} + \\
 & + \frac{(h_D - h_B)}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a (\eta w + M_A + M_B + RZ_B) - L_R (M_A + M_C + \phi s) \right] + \\
 & - R (h_D - h_B) - M_B + \psi t + RZ_D
 \end{aligned} \quad (\text{A 13.18})$$

$$\begin{aligned}
M_D = n\chi & \left[ -b\ell v + \frac{bv\ell^2}{8a} + \frac{b(h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right]}{a [a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} + \right. \\
& \left. + \frac{(h_D - h_B) \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -bv \left( \frac{L}{2} - x_A \right) + \frac{bav}{2} + \right. \\
& \left. + \frac{b(h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a [a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} + \right. \\
& \left. + \frac{(h_D - h_B) \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} - b\eta + \frac{b(M_A + M_C + \phi s)}{a} + \right. \\
& \left. + \frac{b(h_C - h_A) [a(\eta w + M_A + M_B + Rz_B) - L_R(M_A + M_C + \phi s)]}{a [a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} + \right. \\
& \left. + \frac{(h_D - h_B) [a(\eta w + M_A + M_B + Rz_B) - L_R(M_A + M_C + \phi s)]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} - R(h_D - h_B) - M_B + \right. \\
& \left. + \psi t + Rz_D \right]
\end{aligned} \tag{A 13.19}$$

Moment de flexion à la rotule  $D$ ,  $M_D$  :

$$\begin{aligned}
M_D = n\chi & \left[ \frac{\left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left( \frac{b(h_C - h_A)}{a} + h_D - h_B \right) - b\ell v + \frac{bv\ell^2}{8a} + \right. \\
& \left. + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{\left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left( \frac{b(h_C - h_A)}{a} + h_D - h_B \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{bav}{2} - bv \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \right] - b\eta + \frac{b(M_A + M_C + \phi s)}{a} + \right. \\
& \left. + \frac{a(\eta w + M_A + M_B + Rz_B) - L_R(M_A + M_C + \phi s)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left( \frac{b(h_C - h_A)}{a} + h_D - h_B \right) + \right. \\
& \left. - R(h_D - h_B) - M_B + \psi t + Rz_D \right]
\end{aligned} \tag{A 13.20}$$

Changement de variables :

$$M_D = nE + F \tag{A 13.21}$$

$$E = \chi \left[ \frac{\left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a \ell v (L_R - a) \right]}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \left( \frac{b (h_C - h_A)}{a} + h_D - h_B \right) - b \ell v + \frac{b v \ell^2}{8a} \right] \quad (\text{A } 13.22)$$

$$+ q_{\text{rép}} \left[ \frac{\left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + a v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \left( \frac{b (h_C - h_A)}{a} + h_D - h_B \right) + \frac{b a v}{2} - b v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \right]$$

$$F = -b \eta + \frac{b (M_A + M_C + \phi s)}{a} + \frac{a (\eta w + M_A + M_B + R z_B) - L_R (M_A + M_C + \phi s)}{a (h_A - h_B) + L_R (h_C - h_A)} \quad (\text{A } 13.23)$$

$$\cdot \left( \frac{b (h_C - h_A)}{a} + h_D - h_B \right) - R (h_D - h_B) - M_B + \psi t + R z_D$$

Equilibre des forces horizontales :

$$\sum F_x = -N_D \cos(\gamma_D) - V_D \sin(\gamma_D) - H_B - R = 0 \quad (\text{A } 13.24)$$

Equilibre des forces verticales :

$$\sum F_y = N_D \sin(\gamma_D) - V_D \cos(\gamma_D) + V_B - \psi = 0 \quad (\text{A } 13.25)$$

De l'équation (A 13.24) :

$$V_D = \frac{-N_D \cos(\gamma_D) - H_B - R}{\sin(\gamma_D)} \quad (\text{A } 13.26)$$

De l'équation (A 13.25) :

$$N_D \sin(\gamma_D) + \frac{N_D \cos^2(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} + \frac{H_B \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} + \frac{R \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} + V_B - \psi = 0 \quad (\text{A } 13.27)$$

$$N_D \left( \sin(\gamma_D) + \frac{\cos^2(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} \right) = \frac{-H_B \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} - \frac{R \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} - V_B + \psi \quad (\text{A } 13.28)$$

$$N_D = -H_B \cos(\gamma_D) - R \cos(\gamma_D) - V_B \sin(\gamma_D) + \psi \sin(\gamma_D) \quad (\text{A } 13.29)$$

$$\begin{aligned}
N_D = & \frac{-\cos(\gamma_D)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + \right. \right. & (A 13.30) \\
& \left. \left. + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a(\eta w + M_A + M_B + Rz_B) - L_R(M_A + M_C + \phi s) \right] + \psi \sin(\gamma_D) + \\
& + R \cos(\gamma_D) - R \cos(\gamma_D) + n\chi \left[ -\sin(\gamma_D)\ell v + \sin(\gamma_D) \frac{v\ell^2}{8a} + \right. \\
& \left. + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -\left( \frac{L}{2} - x_A \right) v \sin(\gamma_D) + \right. \\
& \left. + \frac{av \sin(\gamma_D)}{2} + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] \right] - \eta \sin(\gamma_D) + \frac{(M_A + M_C + \phi s) \sin \gamma_D}{a} + \\
& + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A) [a(\eta w + M_A + M_B + Rz_B) - L_R(M_A + M_C + \phi s)]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_D = & n\chi \left[ \frac{-\cos(\gamma_D) \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} - \sin(\gamma_D)\ell v + \sin(\gamma_D) \frac{v\ell^2}{8a} + \right. & (A 13.31) \\
& \left. + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a) \right]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \right] + \\
& + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{-\cos(\gamma_D) \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} - \left( \frac{L}{2} - x_A \right) v \sin(\gamma_D) + \right. \\
& \left. + \frac{av \sin(\gamma_D)}{2} + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A) \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \right] + \\
& - \frac{\cos(\gamma_D) [a(\eta w + M_A + M_B + Rz_B) - L_R(M_A + M_C + \phi s)]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \psi \sin(\gamma_D) - \eta \sin(\gamma_D) + \\
& + \frac{(M_A + M_C + \phi s) \sin(\gamma_D)}{a} + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A) [a(\eta w + M_A + M_B + Rz_B) - L_R(M_A + M_C + \phi s)]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]}
\end{aligned}$$

Effort normal à la rotule  $D$ ,  $N_D$  :

$$\begin{aligned}
 N_D = n\chi & \left[ \frac{-L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left( -\cos(\gamma_D) + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)}{a} \right) + \right. \\
 & \left. + \sin(\gamma_D)\ell v \left( \frac{\ell}{8a} - 1 \right) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{-L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left( -\cos(\gamma_D) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)}{a} \right) + v \sin(\gamma_D) \left( \frac{a}{2} - \frac{L}{2} + x_A \right) \right] + \\
 & + \frac{a(\eta w + M_A + M_B + RZ_B) - L_R(M_A + M_C + \phi s)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left( -\cos(\gamma_D) + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)}{a} \right) + \\
 & + \sin(\gamma_D) \left( \psi - \eta + \frac{M_A + M_C + \phi s}{a} \right)
 \end{aligned} \tag{A 13.32}$$

Changement de variables :

$$N_D = nG + H \tag{A 13.33}$$

$$\begin{aligned}
 G = \chi & \left[ \frac{-L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v (L_R - a)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left( -\cos(\gamma_D) + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)}{a} \right) + \sin(\gamma_D)\ell v \left( \frac{\ell}{8a} - 1 \right) \right] + \\
 & + q_{\text{rép}} \left[ \frac{-L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left( -\cos(\gamma_D) + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)}{a} \right) + \right. \\
 & \left. + v \sin(\gamma_D) \left( \frac{a}{2} - \frac{L}{2} + x_A \right) \right]
 \end{aligned} \tag{A 13.34}$$

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{a(\eta w + M_A + M_B + RZ_B) - L_R(M_A + M_C + \phi s)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left( -\cos(\gamma_D) + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)}{a} \right) + \\
 & + \sin(\gamma_D) \left( \psi - \eta + \frac{M_A + M_C + \phi s}{a} \right)
 \end{aligned} \tag{A 13.35}$$

Selon l'étude au micro-niveau (équations 5.17 et A 7.15) :

$$M_D = \frac{1}{2} N_D \frac{-3d\beta^2 v + 3^{1/2} \beta^2 dv - 2\alpha N_D - 2 \cdot 3^{1/2} \alpha N_D}{\beta^2 v(-3 + 3^{1/2})} \tag{A 13.36}$$

Avec le changement de variable :

$$nE + F = \frac{1}{2} (nG + H) \frac{-3d\beta^2 v + 3^{1/2} \beta^2 dv - 2\alpha(nG + H) - 2 \cdot 3^{1/2} \alpha(nG + H)}{\beta^2 v(-3 + 3^{1/2})} \tag{A 13.37}$$

Cette équation peut être résolue avec l'aide d'un logiciel de mathématique tel que Mathcad 11.0a.

On obtient deux solutions :

$$n = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2(6G^2\alpha + 4 \cdot 3^{1/2} \cdot G^2\alpha)} \left[ -3Gd\beta^2v - 12G\alpha H - 8 \cdot 3^{1/2} \cdot G\alpha H - 6E\beta^2v + \right. \\ \left. + (9G^2d^2\beta^4v^2 + 36Gd\beta^4v^2E + 144G\alpha HE\beta^2v + 96G\alpha H^3^{1/2}E\beta^2v + 36E^2\beta^4v^2 + \right. \\ \left. - 144G^2\alpha F\beta^2v - 96G^2\alpha 3^{1/2}F\beta^2v)^{1/2} \right] \\ \\ \frac{1}{2(6G^2\alpha + 4 \cdot 3^{1/2} \cdot G^2\alpha)} \left[ -3Gd\beta^2v - 12G\alpha H - 8 \cdot 3^{1/2} \cdot G\alpha H - 6E\beta^2v + \right. \\ \left. - (9G^2d^2\beta^4v^2 + 36Gd\beta^4v^2E + 144G\alpha HE\beta^2v + 96G\alpha H^3^{1/2}E\beta^2v + 36E^2\beta^4v^2 + \right. \\ \left. - 144G^2\alpha F\beta^2v - 96G^2\alpha 3^{1/2}F\beta^2v)^{1/2} \right] \end{array} \right. \quad (A 13.38)$$

Il y a deux solutions. La seconde conduisant à un résultat illogique ou impossible, on adopte la première. Multiplicateur des charges utiles :

$$n = \frac{1}{2(6G^2\alpha + 4 \cdot 3^{1/2} \cdot G^2\alpha)} \left[ -3Gd\beta^2v - 12G\alpha H - 8 \cdot 3^{1/2} \cdot G\alpha H - 6E\beta^2v + \right. \\ \left. + (9G^2d^2\beta^4v^2 + 36Gd\beta^4v^2E + 144G\alpha HE\beta^2v + 96G\alpha H^3^{1/2}E\beta^2v + 36E^2\beta^4v^2 + \right. \\ \left. - 144G^2\alpha F\beta^2v - 96G^2\alpha 3^{1/2}F\beta^2v)^{1/2} \right] \quad (A 13.39)$$



## Annexe 14 : Représentation du modèle dans un tableau Excel

Le tableau Excel ci-dessous est une suggestion de présentation du modèle élaboré.

Les zones blanches représentent les données initiales à entrer dans le tableur, les gris clair sont les paramètres d'itérations et la zone noire donne le multiplicateur limite des charges utiles cherché.

Géométrie	L	[mm]	15000	
	f	[-]	-1.47E-12	
	j	[-]	4.40E-08	
	k	[-]	-5.46E-04	
	r	[-]	3.238	
	x <sub>A</sub>	[mm]	3156	
	x <sub>C</sub>	[mm]	6175	$a = x_C - x_A$
	x <sub>D</sub>	[mm]	10996	
	x <sub>B</sub>	[mm]	14001	$b = x_B - x_D$
	a	[mm]	3018	
	b	[mm]	3004	
	γ <sub>D</sub>	[rad]	0.54	$\gamma_D \rightarrow (6.2) \text{ et } (A 10.3)$
	h <sub>A</sub>	[mm]	6019	$h_i = fx_i^4 + jx_i^3 + kx_i^2 + rx_i$
	h <sub>C</sub>	[mm]	7406	
	h <sub>D</sub>	[mm]	6659	
	h <sub>B</sub>	[mm]	2733	
	L <sub>R</sub>	[mm]	10844	$L_R = x_B - x_A$
	d	[mm]	1000	$v \rightarrow \text{figure 6.10}$
v	[mm]	4000		
h <sub>R</sub>	[mm]	9000	$h_{L/2} = f(L/2)^4 + j(L/2)^3 + k(L/2)^2 + r(L/2)$	
h <sub>S</sub>	[mm]	500		
h <sub>L/2</sub>	[mm]	7500	$\eta \rightarrow (6.3) \text{ et } (A 11.1)$	
Matériau	α	[-]	0.726	
	β	[-]	6.095	$\phi \rightarrow (6.5) \text{ et } (A 11.3)$
Charges permanentes	PP <sub>R</sub>	[N/mm <sup>3</sup> ]	0.000018	
	PP <sub>S</sub>	[N/mm <sup>3</sup> ]	0.00002	$\psi \rightarrow (6.7) \text{ et } (A 11.5)$
	η	[N]	2317822	
	φ	[N]	576417	$\eta w \rightarrow (6.4) \text{ et } (A 11.2)$
	ψ	[N]	961709	
	ηw	[Nmm]	10818129597	$\phi s \rightarrow (6.6) \text{ et } (A 11.4)$
	φs	[Nmm]	943270863	
	ψt	[Nmm]	1652853177	$\psi t \rightarrow (6.8) \text{ et } (A 11.6)$

Poussée du remplissage	$\varphi$	[°]	30	$K_p \rightarrow (6.10)$
	$c$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0	$K_{pc} \rightarrow (6.11)$
	$m_p$	[-]	0.33	$R \rightarrow (6.12) \text{ et } (A 12.1)$
	$K_p$	[-]	3.00	$R_{Z_B} \rightarrow (6.13) \text{ et } (A 12.2)$
	$m_{pc}$	[-]	0.01	$R_{Z_D} \rightarrow (6.14) \text{ et } (A 12.3)$
	$K_{pc}$	[-]	3.46410161514	$q_{trans} \rightarrow (6.15)$
	$R$	[N]	1373798	$\chi \rightarrow (6.18)$
	$R_{Z_B}$		2333895059	$\ell \rightarrow (6.16) \text{ et } (6.17)$
Modèle de charge de trafic routier	$\delta$	[°]	30	$M_{admis} \rightarrow (5.17) \text{ et } (A 7.15)$
	$h_{Rclé}$	[mm]	1500	$M_i = M_{admis}$
	$Q$	[N]	160000	$E \rightarrow (6.27) \text{ et } (A 13.22)$
	$q_{rep}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.005	$F \rightarrow (6.28) \text{ et } (A 13.23)$
	$q_{trans}$	[N/mm]	40	$G \rightarrow (6.29) \text{ et } (A 13.34)$
	$\chi$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.018761279	$H \rightarrow (6.30) \text{ et } (A 13.35)$
	$\ell$	[mm]	2132	$n \rightarrow (6.32) \text{ et } (A 13.39)$
Efforts intérieurs dans les rotules	$N_{admis}$	[N]	-1250000	$H_A \rightarrow (6.19) \text{ et } (A 13.9)$
	$M_{admis}$	[Nmm]	608551127	$H_B \rightarrow (6.21) \text{ et } (A 13.11)$
	$M_A$	[Nmm]	608551127	$V_A \rightarrow (6.20) \text{ et } (A 13.13)$
	$M_C$	[Nmm]	608551127	$V_B \rightarrow (6.22) \text{ et } (A 13.15)$
	$M_B$	[Nmm]	608551127	
Changements de variables	$E$	[Nmm]	370125551	
	$F$	[Nmm]	-1862020358	
	$G$	[N]	-218762	
	$H$	[N]	-824881	
	$n$	-	8.435	
Réactions d'appui	$H_A$	[N]	2354446	
	$H_B$	[N]	980647	
	$V_A$	[N]	2171543	
	$V_B$	[N]	2228652	

En vue de faciliter la convergence et afin d'éviter une réponse physiquement inadmissible du modèle, un certain nombre de contraintes doivent être imposées au solveur :

$$n \geq 0 \quad (\text{A 14.2})$$

$$M = nE + F \geq 0 \quad (\text{A 14.1})$$

$$x_B \leq L \quad (\text{A 14.3})$$

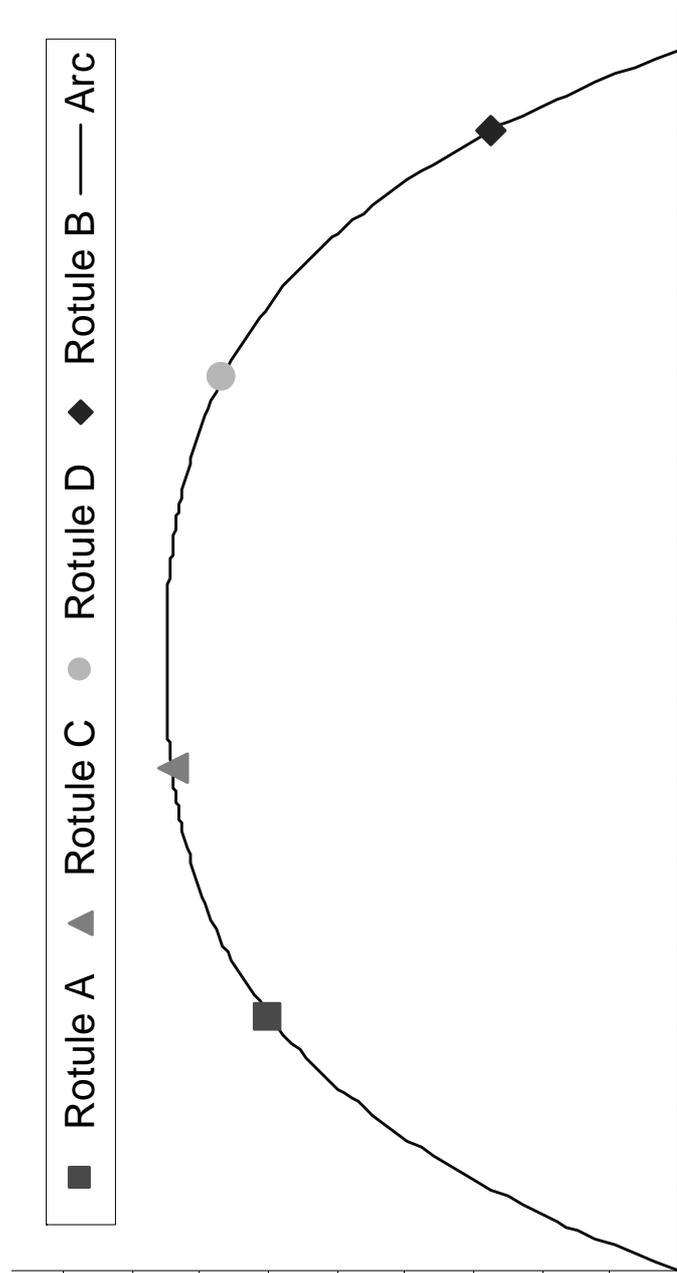
$$x_A \geq 0 \quad (\text{A 14.4})$$

$$x_A \leq x_C \quad (\text{A 14.5})$$

$$x_C \leq x_D \quad (\text{A 14.7})$$

$$x_D \leq x_B \quad (\text{A 14.6})$$

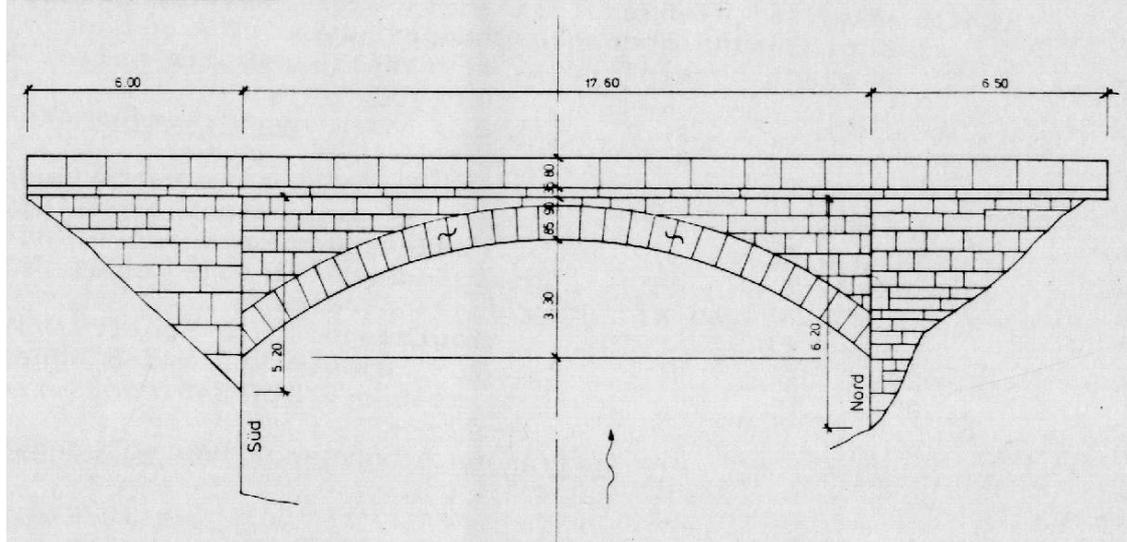
Représentation graphique de la position des rotules :



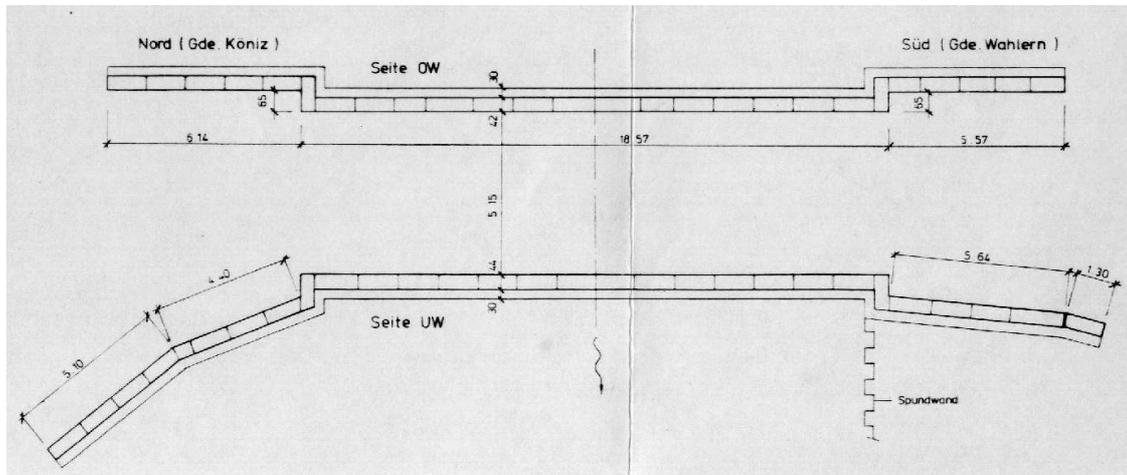


## Annexe 15 : Schwarzwasserbrücke – Plan, coupe et élévation

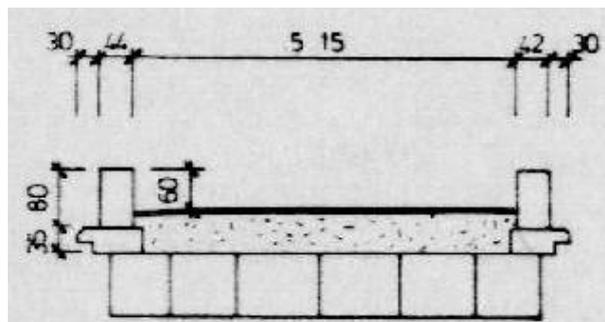
Vue en élévation (sans échelle) :



Vue en plan (sans échelle) :



Vue en coupe (sans échelle) :

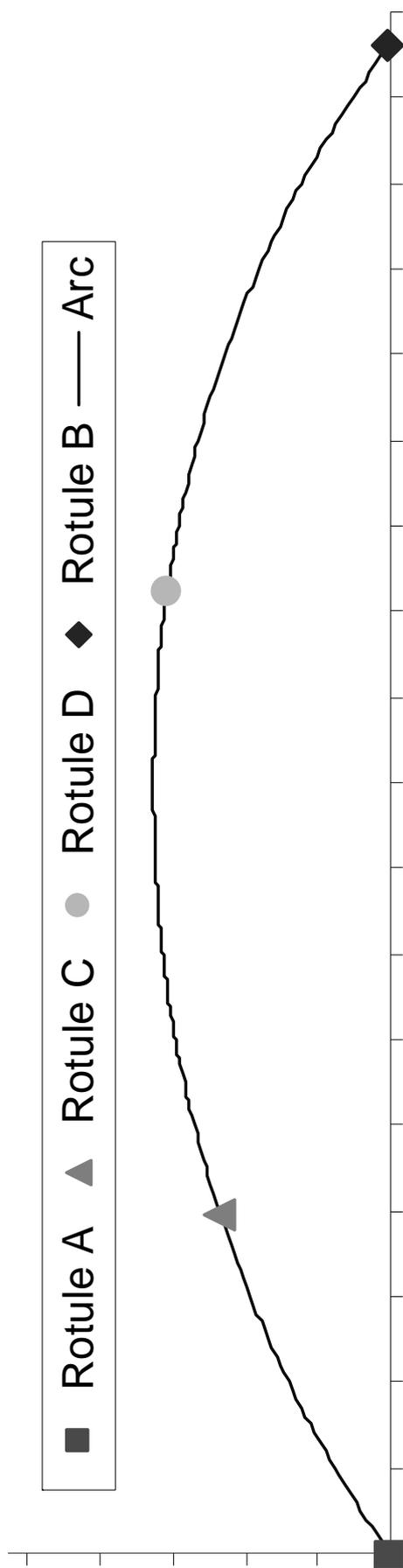




## Annexe 16 : Schwarzwasserbrücke – Application du modèle

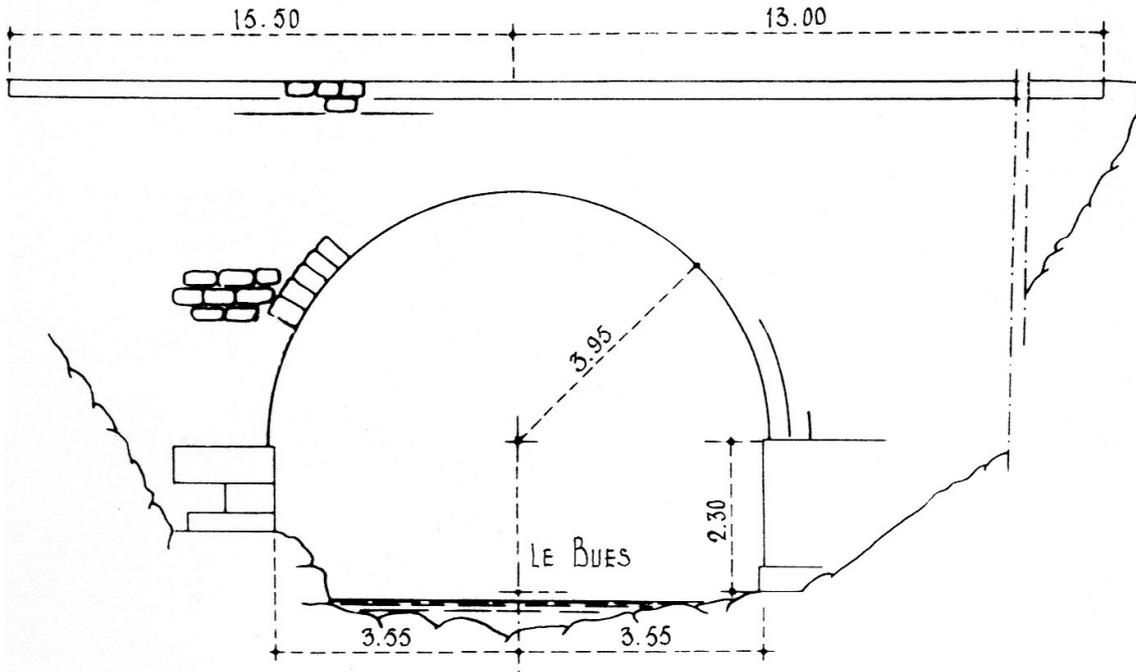
<b>Géométrie</b>	L	[mm]	17600	<b>Poussée du remplissage</b>	$\varphi$	[°]	30		
	f	[-]	-8.30E-14		c	[N/mm <sup>2</sup> ]	0		
	j	[-]	2.80E-09		$m_p$	[-]	0.33		
	k	[-]	-7.10E-05		$K_p$	[-]	3.00		
	r	[-]	0.836		$m_{pc}$	[-]	0.01		
	$x_A$	[mm]	0		$K_{pc}$	[-]	3.464		
	$x_C$	[mm]	3938		R	[N]	513190		
	$x_D$	[mm]	11270		RZ <sub>B</sub>		716472164		
	$x_B$	[mm]	17600		RZ <sub>D</sub>	[Nmm]	916600907		
	a	[mm]	3938		<b>Modèle de charge de trafic routier</b>	$\delta$	[°]	30	
	b	[mm]	6330			$h_{Rclé}$	[mm]	550	
	$\gamma_D$	[rad]	0.171			Q	[N]	160000	
	$h_A$	[mm]	0			$q_{rép}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.005	
	$h_C$	[mm]	2342			$q_{trans}$	[N/mm]	77.29	
	$h_D$	[mm]	3073			$\chi$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.0747	
	$h_B$	[mm]	22			$\ell$	[mm]	1035	
	$L_R$	[mm]	17600			<b>Efforts intérieurs dans les rotules</b>	$N_{admis}$	[N]	-1250000
	d	[mm]	850				$M_{admis}$	[Nmm]	593217357
	v	[mm]	2070				$M_A$	[Nmm]	499467357
	$h_R$	[mm]	4700		$M_C$		[Nmm]	499467357	
$h_S$	[mm]	150	$M_B$	[Nmm]	499467357				
$h_{L/2}$	[mm]	3269	<b>Changements de variables</b>	E	[Nmm]	350334854			
<b>Matériau</b>	$\alpha$	[-]		0.726	F	[Nmm]	-1187833222		
	$\beta$	[-]		6.095	G	[N]	-230045		
<b>Charges permanentes</b>	PP <sub>R</sub>	[N/mm <sup>3</sup> ]		0.000018	H	[N]	-684527		
	PP <sub>S</sub>	[N/mm <sup>3</sup> ]	0.00002	<b>n</b>	-	<b>3.848</b>			
	$\eta$	[N]	1716570	<b>Réactions d'appui</b>	H <sub>A</sub>	[N]	1764342		
	$\phi$	[N]	520738		H <sub>B</sub>	[N]	1386934		
	$\psi$	[N]	697113		V <sub>A</sub>	[N]	1690561		
	$\eta w$	[Nmm]	15190417562		V <sub>B</sub>	[N]	992230		
	$\phi s$	[Nmm]	1137397440						
	$\psi t$	[Nmm]	2579810134						

Représentation graphique de la position des rotules :



## Annexe 17 : Pont romain sur le ravin du Buès – Elévation

Vue en élévation (sans échelle) [7.9] :

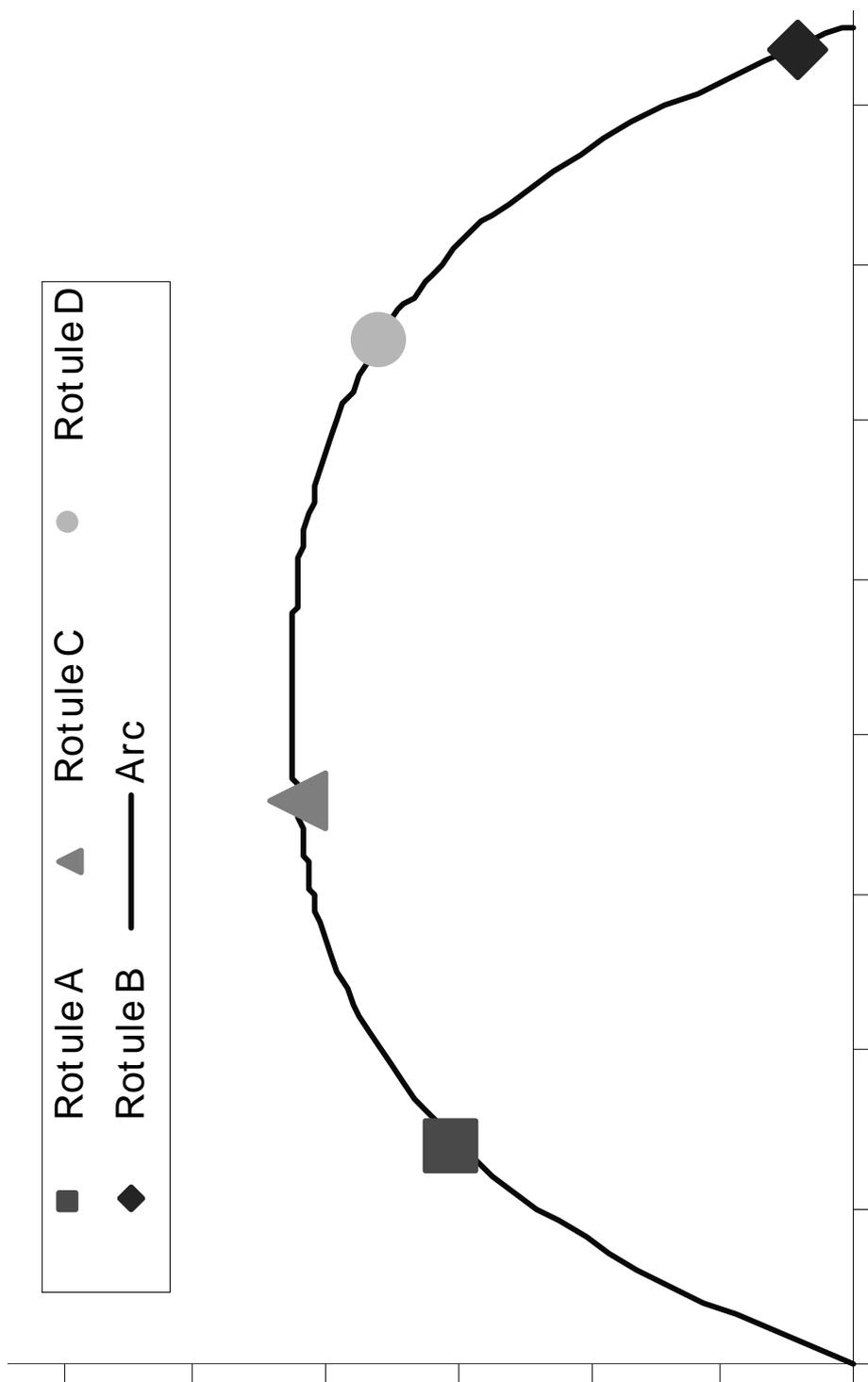




## Annexe 18 : Pont romain sur le ravin du Buès – Application du modèle

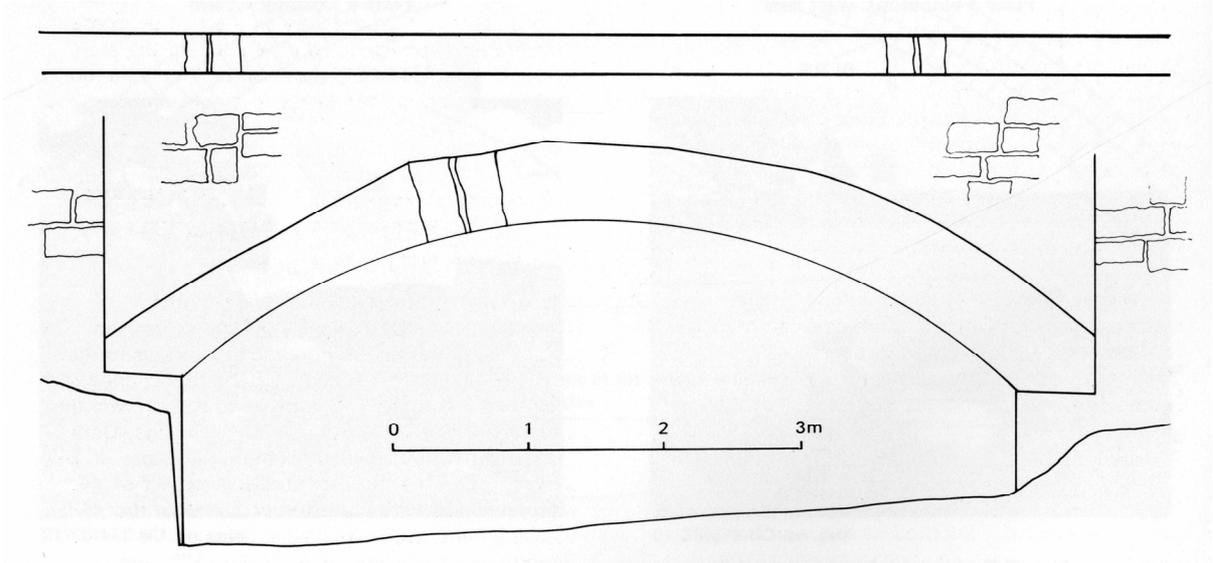
Géométrie	L	[mm]	8520	Poussée du remplissage	$\varphi$	[°]	30		
	f	[-]	-8.00E-12		c	[N/mm <sup>2</sup> ]	0		
	j	[-]	1.36E-07		$m_p$	[-]	0.33		
	k	[-]	-9.61E-04		$K_p$	[-]	3.00		
	r	[-]	3.24		$m_{pc}$	[-]	0.01		
	$x_A$	[mm]	1421		$K_{pc}$	[-]	3.464		
	$x_C$	[mm]	3591		R	[N]	616710		
	$x_D$	[mm]	6527		$RZ_B$		833747552		
	$x_B$	[mm]	8380		$RZ_D$	[Nmm]	1111091825		
	a	[mm]	2170		Modèle de charge de trafic routier	$\delta$	[°]	30	
	b	[mm]	1853			$h_{Rclé}$	[mm]	930	
	$\gamma_D$	[rad]	0.662			Q	[N]	160000	
	$h_A$	[mm]	3019			$q_{rép}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.005	
	$h_C$	[mm]	4218			$q_{trans}$	[N/mm]	54	
	$h_D$	[mm]	3589			$\chi$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.0368	
	$h_B$	[mm]	435			$\ell$	[mm]	1474	
	$L_R$	[mm]	6959			Efforts intérieurs dans les rotules	$N_{admis}$	[N]	-1250000
	d	[mm]	620				$M_{admis}$	[Nmm]	360315306
	v	[mm]	2948				$M_A$	[Nmm]	360315306
	$h_R$	[mm]	5420		$M_C$		[Nmm]	360315306	
$h_S$	[mm]	250	$M_B$	[Nmm]	360315306				
$h_{L/2}$	[mm]	4260	Changements de variables	E	[Nmm]	195466966			
Matériau	$\alpha$	[-]		0.72	F	[Nmm]	-976288239		
	$\beta$	[-]		5.5	G	[N]	-161210		
Charges permanentes	$PP_R$	[N/mm <sup>3</sup> ]		0.000018	H	[N]	-62136		
	$PP_S$	[N/mm <sup>3</sup> ]	0.00002	<b>n</b>	-	<b>6.687</b>			
	$\eta$	[N]	794215	Réactions d'appui	$H_A$	[N]	943746		
	$\phi$	[N]	216961		$H_B$	[N]	327036		
	$\psi$	[N]	329327		$V_A$	[N]	1170827		
	$\eta W$	[Nmm]	2358128231		$V_B$	[N]	973142		
	$\phi S$	[Nmm]	259229661						
	$\psi t$	[Nmm]	352026057						

Représentation graphique de la position des rotules :

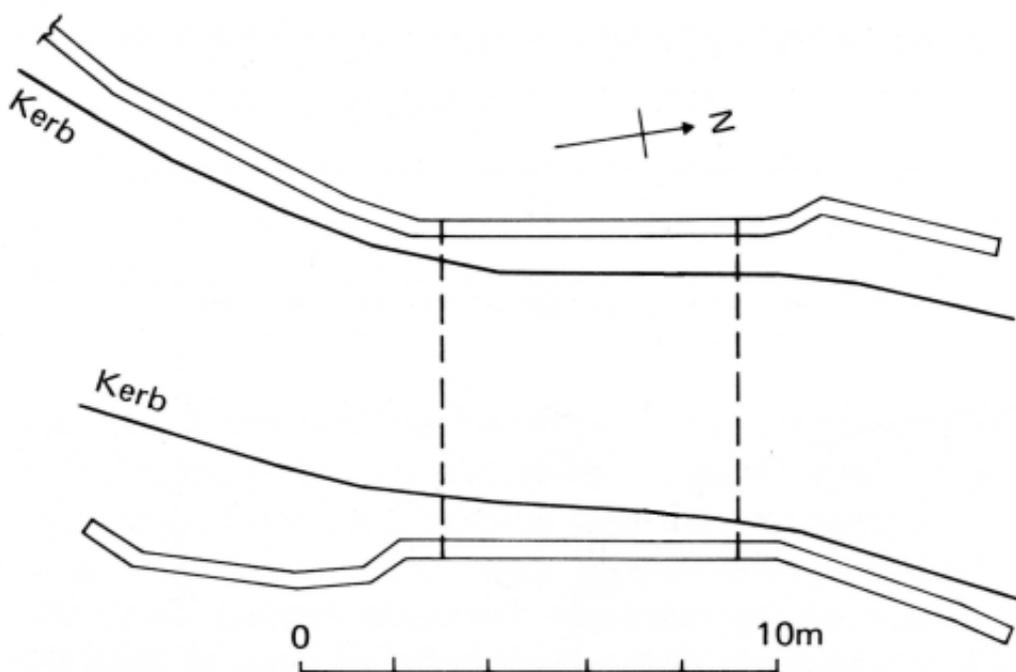


## Annexe 19 : Shinafoot Bridge – Plan et élévation

Vue en élévation (sans échelle) [7.1] :



Vue en plan (sans échelle) [7.1] :

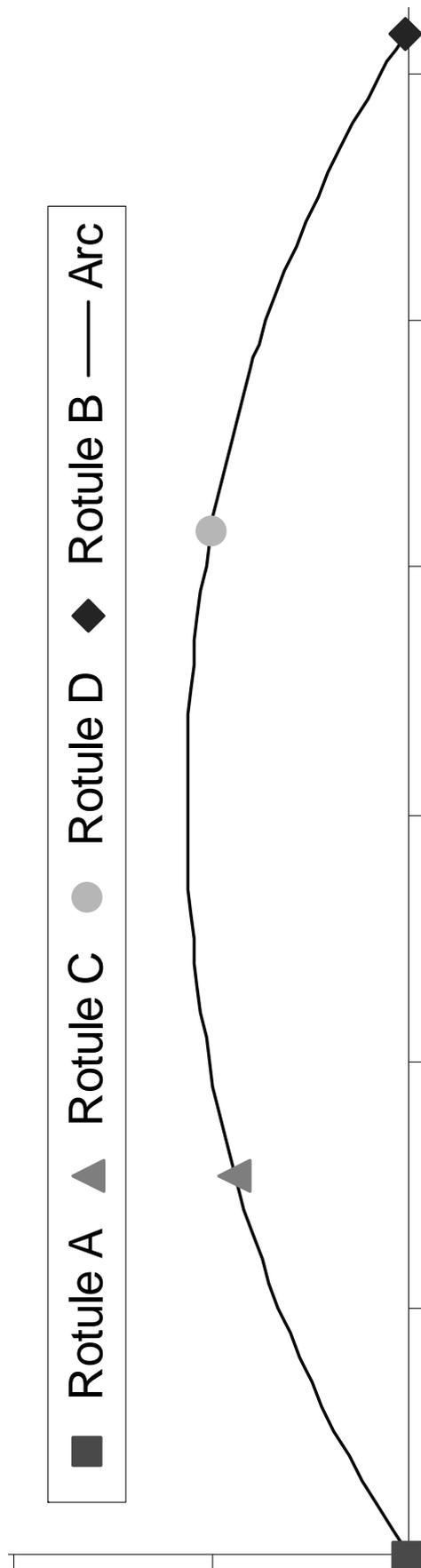




## Annexe 20 : Shinafoot Bridge – Application du modèle

<b>Géométrie</b>	L	[mm]	6160	<b>Poussée du remplissage</b>	$\varphi$	[°]	30		
	f	[-]	-1.55E-12		c	[N/mm <sup>2</sup> ]	0		
	j	[-]	2.00E-08		$m_p$	[-]	0.33		
	k	[-]	-2.00E-04		$K_p$	[-]	3.00		
	r	[-]	0.8374		$m_{pc}$	[-]	0.01		
	$x_A$	[mm]	0		$K_{pc}$	[-]	3.464		
	$x_C$	[mm]	1540		R	[N]	174077		
	$x_D$	[mm]	4152		$RZ_B$		76349293		
	$x_B$	[mm]	6160		$RZ_D$	[Nmm]	95586537		
	a	[mm]	1540		<b>Modèle de charge de trafic routier</b>	$\delta$	[°]	30	
	b	[mm]	2008			$h_{Rclé}$	[mm]	805	
	$\gamma_D$	[rad]	0.229			Q	[N]	1000000	
	$h_A$	[mm]	0			$q_{rép}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0	
	$h_C$	[mm]	880			$q_{trans}$	[N/mm]	-	
	$h_D$	[mm]	1000			$\chi$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.089467058	
	$h_B$	[mm]	12			$\ell$	[mm]	1680	
	$L_R$	[mm]	6160			<b>Efforts intérieurs dans les rotules</b>	$N_{admis}$	[N]	-1250000
	d	[mm]	580				$M_{admis}$	[Nmm]	337554573
	v	[mm]	6655				$M_A$	[Nmm]	337554573
	$h_R$	[mm]	1645		$M_C$		[Nmm]	337554573	
$h_S$	[mm]	285	$M_B$	[Nmm]	337554573				
$h_{L/2}$	[mm]	1127	<b>Changements de variables</b>	E	[Nmm]	567175045			
<b>Matériau</b>	$\alpha$	[-]		3	F	[Nmm]	-728740120		
	$\beta$	[-]		7.8	G	[N]	-1106317		
<b>Charges permanentes</b>	$PP_R$	[N/mm <sup>3</sup> ]		0.000018	H	[N]	38632		
	$PP_S$	[N/mm <sup>3</sup> ]		0.000021	<b>n</b>	-	<b>2.450</b>		
	$\eta$	[N]	889656	<b>Réactions d'appui</b>	$H_A$	[N]	2603858		
	$\phi$	[N]	271972		$H_B$	[N]	2429781		
	$\psi$	[N]	331376		$V_A$	[N]	2409062		
	$\eta w$	[Nmm]	2736821761		$V_B$	[N]	930669		
	$\phi s$	[Nmm]	230111092						
	$\psi t$	[Nmm]	372158299						

Représentation graphique de la position des rotules :



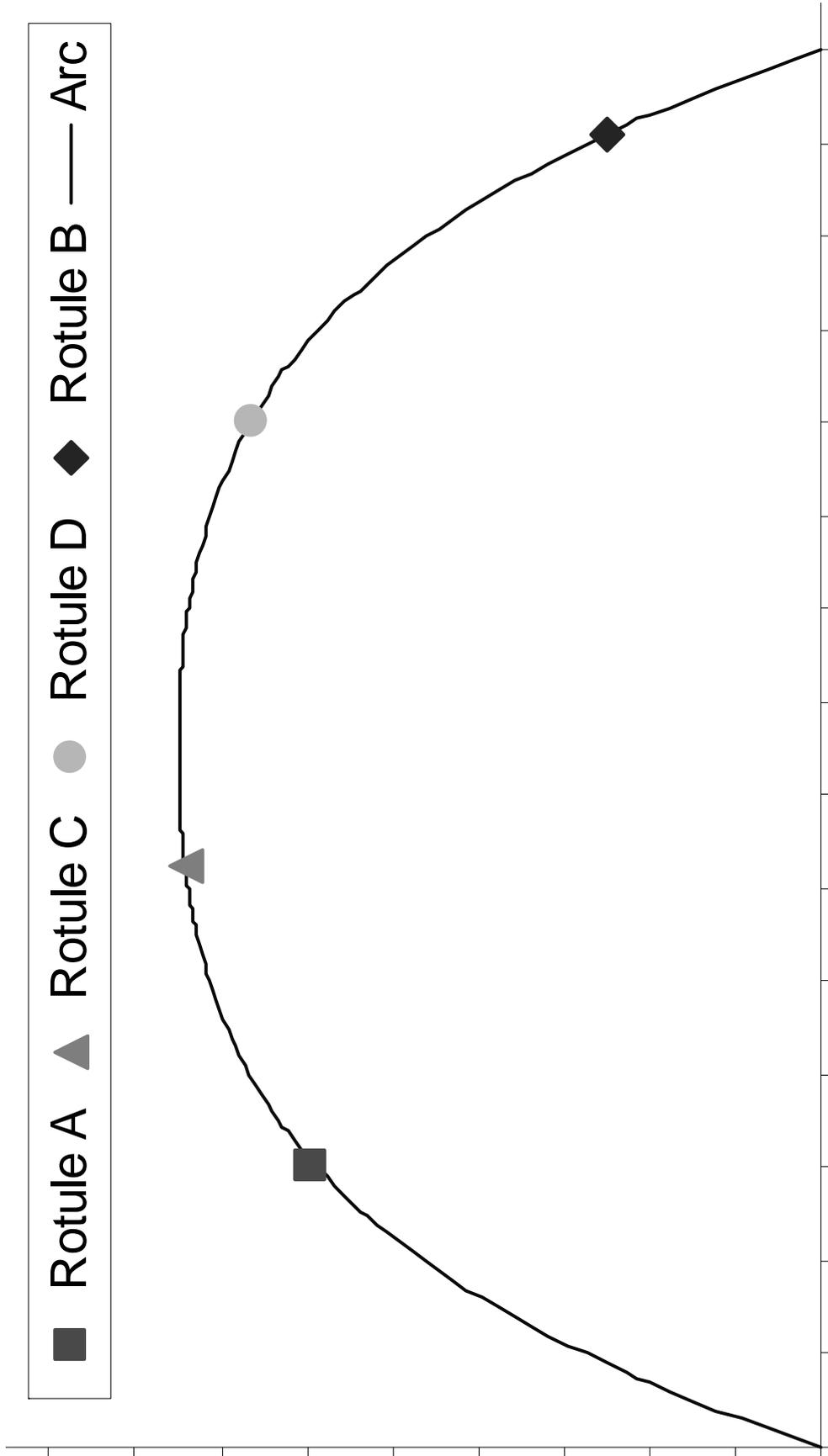
## Annexe 21 : Représentation du modèle modifié – Cas d'endommagement n°1

Le tableau Excel ci-dessous est une suggestion de représentation du modèle modifié. Les modifications apportées au modèle initial pour tenir compte de l'influence du cas d'endommagement n°1 sur la capacité portante de l'arc sont mises en évidence.

Géométrie	L	[mm]	15000		
	f	[-]	-1.47E-12		
	j	[-]	4.40E-08		
	k	[-]	-5.46E-04		
	r	[-]	3.238		
	x <sub>A</sub>	[mm]	3069		
	x <sub>C</sub>	[mm]	6231		
	x <sub>D</sub>	[mm]	11058		
	x <sub>B</sub>	[mm]	14106		
	a	[mm]	3162		
	b	[mm]	3048		
	γ <sub>D</sub>	[rad]	0.559		
	h <sub>A</sub>	[mm]	5936		
	h <sub>C</sub>	[mm]	7414		
	h <sub>D</sub>	[mm]	6622		
	h <sub>B</sub>	[mm]	2490		
	L <sub>R</sub>	[mm]	11037		
	d	[mm]	1000		
	<b>v<sub>initial</sub></b>	<b>[mm]</b>	<b>4000</b>		V <sub>initial</sub> → figure 6.10
	<b>v<sub>réduit</sub></b>	<b>[mm]</b>	<b>3000</b>		V <sub>réduit</sub> → mesuré sur l'ouvrage
<b>v</b>	<b>[mm]</b>	<b>3000</b>		$v = \begin{cases} v_{\text{initial}}, & \text{Si } v_{\text{initial}} < v_{\text{réduit}} \\ v_{\text{réduit}}, & \text{Si } v_{\text{initial}} \geq v_{\text{réduit}} \end{cases}$	
h <sub>R</sub>	[mm]	9000			
h <sub>S</sub>	[mm]	500			
h <sub>L/2</sub>	[mm]	7500			
Matériau	α	[-]	0.726		
	β	[-]	6.095		
Charges permanentes	PP <sub>R</sub>	[N/mm <sup>3</sup> ]	0.000018		
	PP <sub>S</sub>	[N/mm <sup>3</sup> ]	0.00002		
	η	[N]	1794674		
	φ	[N]	455708		
	ψ	[N]	751007		
	ηW	[Nmm]	8484416944		
	φS	[Nmm]	784540549		
	ψt	[Nmm]	1313692732		

Poussée du remplissage	$\varphi$	[°]	30
	$c$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0
	$m_p$	[-]	0.33
	$K_p$	[-]	3.00
	$m_{pc}$	[-]	0.01
	$K_{pc}$	[-]	3.464
	$R$	[N]	1115640
	$Rz_B$		1987472206
	$Rz_D$	[Nmm]	2622432181
Modèle de charge de trafic routier	$\delta$	[°]	30
	$h_{Rclé}$	[mm]	1500
	$Q$	[N]	160000
	$q_{rép}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.005
	$q_{trans}$	[N/mm]	53.33
	$\chi$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.0250
	$\ell$	[mm]	2132
Efforts intérieurs dans les rotules	$N_{admis}$	[N]	-1250000
	$M_{admis}$	[Nmm]	603068169
	$M_A$	[Nmm]	603068169
	$M_C$	[Nmm]	603068169
	$M_B$	[Nmm]	603068169
Changements de variables	$E$	[Nmm]	350221134
	$F$	[Nmm]	-1774096234
	$G$	[N]	-200468
	$H$	[N]	-549253
	<b>n</b>	-	<b>7.938</b>
Réactions d'appui	$H_A$	[N]	1873973
	$H_B$	[N]	758334
	$V_A$	[N]	1800785
	$V_B$	[N]	1791601

Représentation graphique de la position des rotules :

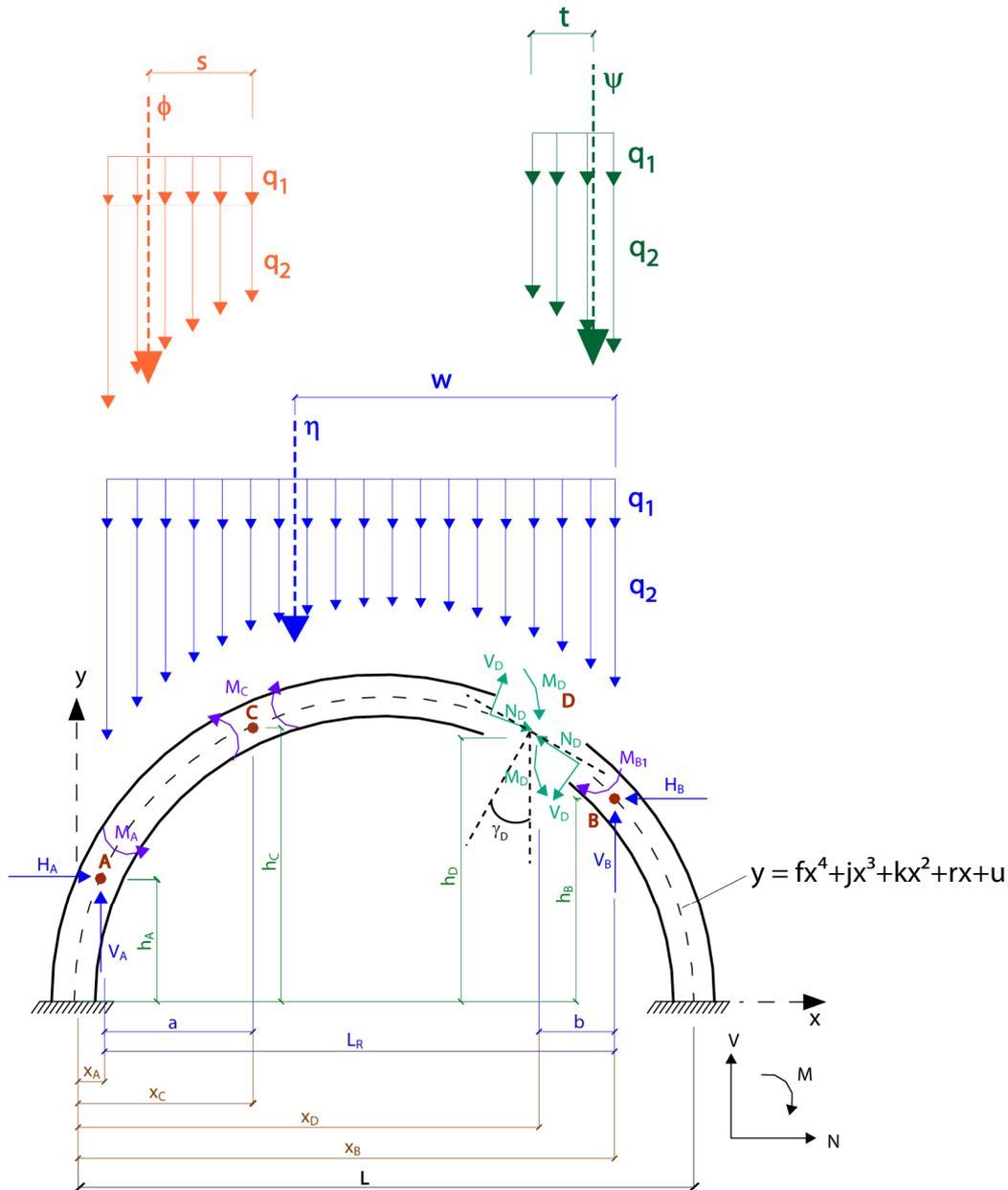




## Annexe 22 : Développement du modèle modifié pour tenir compte du cas d'endommagement n°2

La figure ci-dessous résume les différentes caractéristiques nécessaires à l'extension du modèle permettant de tenir compte du cas d'endommagement n°2.

### Ecartement des appuis – Premier état de sollicitation



### Efforts horizontaux et verticaux aux rotules A et B :

Sur toute la portée active :

Equilibre des moments en B :

$$\sum M_B = -H_{A1}(h_B - h_A) + V_{A1}L_R - M_A + M_{B1} - \eta w = 0 \quad (\text{A 22.1})$$

Equilibre des forces horizontales :

$$\sum F_x = H_{A1} - H_{B1} = 0 \quad (\text{A 22.2})$$

Equilibre des forces verticales :

$$\sum F_y = V_{A1} + V_{B1} - \eta = 0 \quad (\text{A 22.3})$$

Sur le tronçon A - C :

Equilibre des moments en C :

$$\sum M_C = -H_{A1}(h_C - h_A) + V_{A1}a - M_A - M_C - \phi s = 0 \quad (\text{A 22.4})$$

De l'équation (A 22.4) :

$$V_A = \frac{H_{A1}(h_C - h_A) + M_C + M_A + \phi s}{a} \quad (\text{A 22.5})$$

En introduisant (A 22.5) dans (A 22.1) :

$$\sum M_B = -H_{A1}(h_B - h_A) + \frac{L_R(H_{A1}(h_C - h_A) + M_C + M_A + \phi s)}{a} - M_A + M_{B1} - \eta w = 0 \quad (\text{A 22.6})$$

$$H_{A1} = \frac{1}{h_A - h_B + \frac{L_R(h_C - h_A)}{a}} \left[ -\frac{L_R(M_C + M_A + \phi s)}{a} + M_A - M_{B1} + \eta w \right] \quad (\text{A 22.7})$$

$$H_{A1} = \frac{1}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -L_R(M_C + M_A + \phi s) + a(M_A - M_{B1} + \eta w) \right] \quad (\text{A 22.8})$$

Effort horizontal à la rotule A,  $H_{A1}$  :

$$H_{A1} = \frac{-L_R(M_C + M_A + \phi s) + a(M_A - M_{B1} + \eta w)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \quad (\text{A 22.9})$$

De l'équation (A 22.2) :

$$H_{B1} = H_{A1} \quad (\text{A 22.10})$$

Effort horizontal à la rotule B,  $H_{B1}$  :

$$H_{B1} = \frac{-L_R(M_C + M_A + \phi s) + a(M_A - M_{B1} + \eta w)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \quad (\text{A 22.11})$$

De l'équation (A 22.4), effort vertical à la rotule A,  $V_{A1}$  :

$$V_{A1} = \frac{(h_C - h_A) \left[ -L_R(M_C + M_A + \phi s) + a(M_A - M_{B1} + \eta w) \right]}{a \left[ a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A) \right]} + \frac{M_C + M_A + \phi s}{a} \quad (\text{A 22.12})$$

De l'équation (A 22.3) :

$$V_{B1} = \eta - V_{A1} \quad (\text{A 22.13})$$

Effort vertical à la rotule B,  $V_{B1}$  :

$$V_{B1} = \eta - \frac{(h_C - h_A) \left[ -L_R(M_C + M_A + \phi s) + a(M_A - M_{B1} + \eta w) \right]}{a \left[ a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A) \right]} - \frac{M_C + M_A + \phi s}{a} \quad (\text{A 22.14})$$

**Effort normal et moment de flexion en D :**

Sur le tronçon d'arc  $D - B$  :

Equilibre des moments en  $D$  :

$$\sum M_D = H_{B1}(h_D - h_B) - V_{B1}b + M_{B1} - M_{D1} + \psi t = 0 \quad (\text{A 22.15})$$

De l'équation (A 22.15) :

$$M_D = H_{B1}(h_D - h_B) - V_{B1}b + M_{B1} + \psi t \quad (\text{A 22.16})$$

$$M_D = \frac{(h_D - h_B)[-L_R(M_C + M_A + \phi s) + a(M_A - M_{B1} + \eta w)]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} - \eta b + \quad (\text{A 22.17})$$

$$+ \frac{b(h_C - h_A)[-L_R(M_C + M_A + \phi s) + a(M_A - M_{B1} + \eta w)]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} + \frac{b(M_C + M_A + \phi s)}{a} + M_{B1} + \psi t$$

Moment de flexion à la rotule  $D$ ,  $M_D$  :

$$M_D = \frac{-L_R(M_C + M_A + \phi s) + a(M_A - M_{B1} + \eta w)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ h_D - h_B + \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] + \quad (\text{A 22.18})$$

$$+ \frac{b(M_C + M_A + \phi s)}{a} + M_{B1} - \eta b + \psi t$$

Changement de variables :

$$M_D = nE_1 + F_1 \quad (\text{A 22.19})$$

$$E_1 = 0 \quad (\text{A 22.20})$$

$$F_1 = \frac{-L_R(M_C + M_A + \phi s) + a(M_A - M_{B1} + \eta w)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ h_D - h_B + \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] + \quad (\text{A 22.21})$$

$$+ \frac{b(M_C + M_A + \phi s)}{a} + M_{B1} - \eta b + \psi t$$

Equilibre des forces horizontales :

$$\sum F_x = -N_D \cos(\gamma_D) - V_D \sin(\gamma_D) - H_{B1} = 0 \quad (\text{A 22.22})$$

Equilibre des forces verticales :

$$\sum F_y = N_D \sin(\gamma_D) - V_D \cos(\gamma_D) + V_{B1} - \psi = 0 \quad (\text{A 22.23})$$

De l'équation (A 22.22) :

$$V_D = \frac{-N_D \cos(\gamma_D) - H_{B1}}{\sin(\gamma_D)} \quad (\text{A 22.24})$$

De l'équation (A 22.23) :

$$N_D \sin(\gamma_D) + \frac{N_D \cos^2(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} + \frac{H_{B1} \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} + V_{B1} - \psi = 0 \quad (\text{A 22.25})$$

$$N_D \left( \sin(\gamma_D) + \frac{\cos^2(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} \right) = \frac{-H_{B1} \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} - V_{B1} + \psi \quad (\text{A 22.26})$$

$$N_D = -H_{B1} \cos(\gamma_D) - V_{B1} \sin(\gamma_D) + \psi \sin(\gamma_D) \quad (\text{A 22.27})$$

$$N_D = \frac{-\cos(\gamma_D)[-L_R(M_C + M_A + \phi s) + a(M_A - M_{B1} + \eta w)]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} - \eta \sin(\gamma_D) + \quad (\text{A 22.28})$$

$$+ \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)[-L_R(M_C + M_A + \phi s) + a(M_A - M_{B1} + \eta w)]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} +$$

$$+ \frac{\sin(\gamma_D)(M_C + M_A + \phi s)}{a} + \psi \sin(\gamma_D)$$

Effort normal à la rotule  $D$ ,  $N_D$  :

$$N_D = \frac{-L_R(M_C + M_A + \phi s) + a(M_A - M_{B1} + \eta w)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)}{a} \right] + \quad (\text{A 22.29})$$

$$+ \sin(\gamma_D) \left[ \frac{M_C + M_A + \phi s}{a} - \eta + \psi \right]$$

Changement de variables :

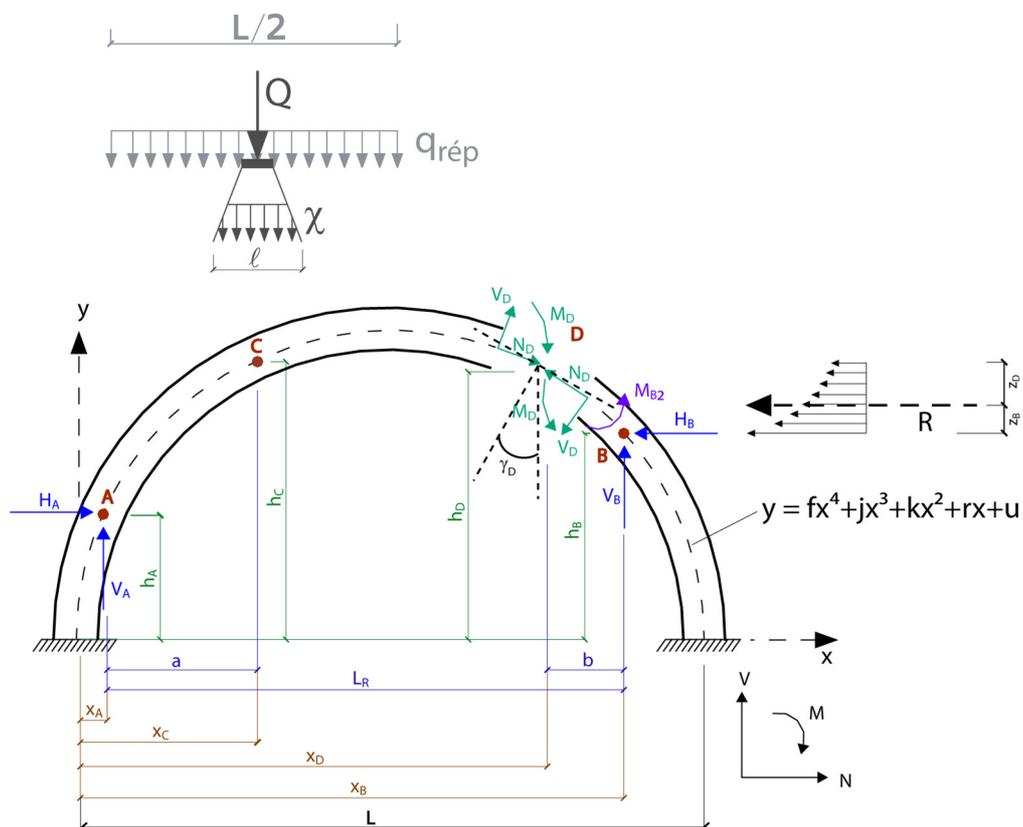
$$N_D = nG_1 + H_1 \quad (\text{A 22.30})$$

$$G_1 = 0 \quad (\text{A 22.31})$$

$$H_1 = \frac{-L_R(M_C + M_A + \phi s) + a(M_A - M_{B1} + \eta w)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)}{a} \right] + \quad (\text{A 22.32})$$

$$+ \sin(\gamma_D) \left[ \frac{M_C + M_A + \phi s}{a} - \eta + \psi \right]$$

### Ecartement des appuis – Second état de sollicitation



**Efforts horizontaux et verticaux aux rotules A et B :**

Sur toute la portée active :

Equilibre des moments en B :

$$\sum M_B = -H_{A2}(h_B - h_A) + V_{A2}L_R - n\chi\ell v(L_R - a) - nq_{\text{rép}}v\left(\frac{L}{2} - x_A\right)\left(L_R - \left(\frac{L}{4} - \frac{x_A}{2}\right)\right) + \quad (\text{A 22.33})$$

$$-M_{B2} - Rz_B = 0$$

Equilibre des forces horizontales :

$$\sum F_x = H_{A2} - H_{B2} - R = 0 \quad (\text{A 22.34})$$

Equilibre des forces verticales :

$$\sum F_y = V_{A2} + V_{B2} - n\chi\ell v - nq_{\text{rép}}v\left(\frac{L}{2} - x_A\right) = 0 \quad (\text{A 22.35})$$

Sur le tronçon A - C :

Equilibre des moments en C :

$$\sum M_C = -H_{A2}(h_C - h_A) + V_{A2}a - n\chi v\frac{\ell^2}{2} - nq_{\text{rép}}va\frac{a}{2} = 0 \quad (\text{A 22.36})$$

De l'équation (A 22.36) :

$$V_{A2} = \frac{H_{A2}(h_C - h_A) + n\chi v\frac{\ell^2}{8} + nq_{\text{rép}}v\frac{a^2}{2}}{a} \quad (\text{A 22.37})$$

En introduisant (A 22.37) dans (A 22.33) :

$$\sum M_B = -H_{A2}(h_B - h_A) + \frac{L_R\left[H_{A2}(h_C - h_A) + n\chi v\frac{\ell^2}{8} + nq_{\text{rép}}v\frac{a^2}{2}\right]}{a} - n\chi\ell v(L_R - a) \quad (\text{A 22.38})$$

$$- nq_{\text{rép}}v\left(\frac{L}{2} - x_A\right)\left(L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2}\right) - M_{B2} - Rz_B = 0$$

$$H_{A2} = \frac{1}{h_A - h_B + \frac{L_R(h_C - h_A)}{a}} \left[ \frac{L_R\left(n\chi v\frac{\ell^2}{8} - nq_{\text{rép}}v\frac{a^2}{2}\right)}{a} + n\chi\ell v(L_R - a) + \right. \quad (\text{A 22.39})$$

$$\left. + nq_{\text{rép}}v\left(\frac{L}{2} - x_A\right)\left(L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2}\right) + M_{B2} + Rz_B \right]$$

Effort horizontal à la rotule A,  $H_{A2}$  :

$$H_{A2} = \frac{1}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ n\chi \left[ -L_R v\frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v\frac{a^2}{2} + \right. \quad (\text{A 22.40})$$

$$\left. + av\left(\frac{L}{2} - x_A\right)\left(L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2}\right) \right] + a(M_{B2} + Rz_B) \right]$$

De l'équation (A 22.34) :

$$H_{B2} = H_{A2} - R \quad (\text{A 22.41})$$

Effort horizontal à la rotule  $B$ ,  $H_{B2}$  :

$$H_{B2} = \frac{1}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + \right. \right. \quad (\text{A 22.42})$$

$$\left. \left. + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a(M_{B2} + Rz_B) \right] - R$$

De l'équation (A 22.37), effort vertical à la rotule  $A$ ,  $V_{A2}$  :

$$V_{A2} = \frac{(h_C - h_A)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + \right. \right. \quad (\text{A 22.43})$$

$$\left. \left. + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a(M_{B2} + Rz_B) \right] + \frac{n\chi v \ell^2}{8a} + \frac{nq_{\text{rép}} va}{2}$$

De l'équation (A 22.35), effort vertical à la rotule  $B$ ,  $V_{B2}$  :

$$V_{B2} = \frac{-(h_C - h_A)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a) \right] + \right. \quad (\text{A 22.44})$$

$$\left. + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a(M_{B2} + Rz_B) \right] +$$

$$+ n\chi \left[ -\frac{v\ell^2}{8a} + \ell v \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -\frac{va}{2} + v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \right]$$

### **Effort normal et moment de flexion en $D$ :**

Sur le tronçon d'arc  $D - B$  :

Equilibre des moments en  $D$  :

$$\sum M_D = H_{B2}(h_D - h_B) - V_{B2}b - M_D - M_{B2} + Rz_D = 0 \quad (\text{A 22.45})$$

De l'équation (A 22.45) :

$$M_D = H_{B2}(h_D - h_B) - V_{B2}b - M_{B2} + Rz_D \quad (\text{A 22.46})$$

$$M_D = \frac{h_D - h_B}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + \right. \right. \quad (\text{A 22.47})$$

$$\left. \left. + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a(M_{B2} + Rz_B) \right] - R(h_D - h_B) +$$

$$+ \frac{b(h_C - h_A)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a(M_{B2} + Rz_B) \right] + n\chi \left[ \frac{bv\ell^2}{8a} - b\ell v \right] +$$

$$+ nq_{\text{rép}} \left[ \frac{bva}{2} - bv \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \right] - M_{B2} + Rz_D$$

$$\begin{aligned}
M_D = n\chi & \left[ \frac{(h_D - h_B) \left( -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a) \right)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \frac{b(h_C - h_A) \left( -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a) \right)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} + \right. \\
& \left. + \frac{bv\ell^2}{8a} - b\ell v \right] + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{(h_D - h_B) \left( -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \right. \\
& \left. + \frac{b(h_C - h_A) \left( -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} + \frac{bva}{2} - bv \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \right] + \\
& + \frac{(h_D - h_B)a(M_{B2} + Rz_B)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \frac{b(h_C - h_A)a(M_{B2} + Rz_B)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} - R(h_D - h_B) - M_{B2} + Rz_D
\end{aligned} \tag{A 22.48}$$

Moment de flexion à la rotule  $D$ ,  $M_D$  :

$$\begin{aligned}
M_D = n\chi & \left[ \frac{-L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ h_D - h_B + \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] + \frac{bv\ell^2}{8a} - b\ell v \right] + \\
& + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{-L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ h_D - h_B + \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{bva}{2} - bv \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \right] + \frac{a(M_{B2} + Rz_B)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ h_D - h_B + \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] + \\
& - R(h_D - h_B) - M_{B2} + Rz_D
\end{aligned} \tag{A 22.49}$$

Changement de variables :

$$M_D = nE_2 + F_2 \tag{A 22.50}$$

$$\begin{aligned}
E_2 = \chi & \left[ \frac{-L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ h_D - h_B + \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] + \frac{bv\ell^2}{8a} - b\ell v \right] + \\
& + q_{\text{rép}} \left[ \frac{-L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ h_D - h_B + \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{bva}{2} - bv \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \right]
\end{aligned} \tag{A 22.51}$$

$$F_2 = \frac{a(M_{B2} + Rz_B)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ h_D - h_B + \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] - R(h_D - h_B) - M_{B2} + Rz_D \tag{A 22.52}$$

Equilibre des forces horizontales :

$$\sum F_x = -N_D \cos(\gamma_D) - V_D \sin(\gamma_D) - H_{B2} - R = 0 \quad (\text{A 22.53})$$

Equilibre des forces verticales :

$$\sum F_y = N_D \sin(\gamma_D) - V_D \cos(\gamma_D) + V_{B2} = 0 \quad (\text{A 22.54})$$

De l'équation (A 22.53) :

$$V_D = \frac{-N_D \cos(\gamma_D) - H_{B2} - R}{\sin(\gamma_D)} \quad (\text{A 22.55})$$

De l'équation (A 22.54) :

$$N_D \sin(\gamma_D) + \frac{N_D \cos^2(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} + \frac{H_{B2} \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} + \frac{R \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} + V_{B2} = 0 \quad (\text{A 22.56})$$

$$N_D \left( \sin(\gamma_D) + \frac{\cos^2(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} \right) = - \frac{H_{B2} \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} - \frac{R \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} - V_{B2} \quad (\text{A 22.57})$$

$$N_D = -H_{B2} \cos(\gamma_D) - R \cos(\gamma_D) - V_{B2} \sin(\gamma_D) \quad (\text{A 22.58})$$

$$\begin{aligned} N_D = & \frac{-\cos(\gamma_D)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a(M_{B2} + Rz_B) \right] + R \cos(\gamma_D) - R \cos(\gamma_D) + \\ & + \frac{(h_C - h_A) \sin(\gamma_D)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \left[ n\chi \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right] + a(M_{B2} + Rz_B) \right] + n\chi \left[ \frac{v\ell^2}{8a} - \ell v \right] \sin(\gamma_D) + \\ & \left. + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{va}{2} - v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \right] \sin(\gamma_D) \right. \end{aligned} \quad (\text{A 22.59})$$

$$\begin{aligned}
N_D = n\chi & \left[ \frac{-\cos(\gamma_D) \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a) \right]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \frac{(h_C - h_A) \sin(\gamma_D) \left[ -L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a) \right]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \right] \quad (A 22.60) \\
& + \sin(\gamma_D) \left[ \frac{v\ell^2}{8a} - \ell v \right] + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{-\cos(\gamma_D) \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \right. \\
& \left. + \frac{(h_C - h_A) \sin(\gamma_D) \left[ -L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right) \right]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} + \sin(\gamma_D) \left[ \frac{va}{2} - v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \right] \right] + \\
& + \frac{-\cos(\gamma_D) a(M_{B2} + Rz_B)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \frac{(h_C - h_A) \sin(\gamma_D) a(M_{B2} + Rz_B)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]}
\end{aligned}$$

Effort normal à la rotule  $D$ ,  $N_D$  :

$$\begin{aligned}
N_D = n\chi & \left[ \frac{-L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A) \sin(\gamma_D)}{a} \right] + \sin(\gamma_D) \left[ \frac{v\ell^2}{8a} - \ell v \right] \right] + \quad (A 22.61) \\
& + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{-L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A) \sin(\gamma_D)}{a} \right] + \right. \\
& \left. + \sin(\gamma_D) \left[ \frac{va}{2} - v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \right] \right] + \frac{a(M_{B2} + Rz_B)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A) \sin(\gamma_D)}{a} \right]
\end{aligned}$$

Changement de variables :

$$N_D = nG_2 + H_2 \quad (A 22.62)$$

$$\begin{aligned}
G_2 = \chi & \left[ \frac{-L_R v \frac{\ell^2}{8} + a\ell v(L_R - a)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A) \sin(\gamma_D)}{a} \right] + \sin(\gamma_D) \left[ \frac{v\ell^2}{8a} - \ell v \right] \right] + \quad (A 22.63) \\
& + q_{\text{rép}} \left[ \frac{-L_R v \frac{a^2}{2} + av \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \left( L_R - \frac{L}{4} + \frac{x_A}{2} \right)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A) \sin(\gamma_D)}{a} \right] + \right. \\
& \left. + \sin(\gamma_D) \left[ \frac{va}{2} - v \left( \frac{L}{2} - x_A \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$H_2 = \frac{a(M_{B2} + Rz_B)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A) \sin(\gamma_D)}{a} \right] \quad (A 22.64)$$

Sollicitation totale :

$$E_T = E_1 + E_2 \quad (A 22.65)$$

$$F_T = F_1 + F_2 \quad (A 22.66)$$

$$G_T = G_1 + G_2 \quad (\text{A 22.67})$$

$$H_T = H_1 + H_2 \quad (\text{A 22.68})$$

Selon l'étude au micro-niveau (équations (5.17) et (A 7.15)) :

$$M_{DT} = \frac{1}{2} N_{DT} \frac{-3d\beta^2v + 3^{1/2}\beta^2dv - 2\alpha N_{DT} - 2 \cdot 3^{1/2}\alpha N_{DT}}{\beta^2v(-3 + 3^{1/2})} \quad (\text{A 22.69})$$

Avec le changement de variable :

$$nE_T + F_T = \frac{1}{2} (nG_T + H_T) \frac{-3d\beta^2v + 3^{1/2}\beta^2dv - 2\alpha(nG_T + H_T) - 2 \cdot 3^{1/2}\alpha(nG_T + H_T)}{\beta^2v(-3 + 3^{1/2})} \quad (\text{A 22.70})$$

Cette équation peut être résolue avec l'aide d'un logiciel de mathématique, tel que Mathcad 11.0a.

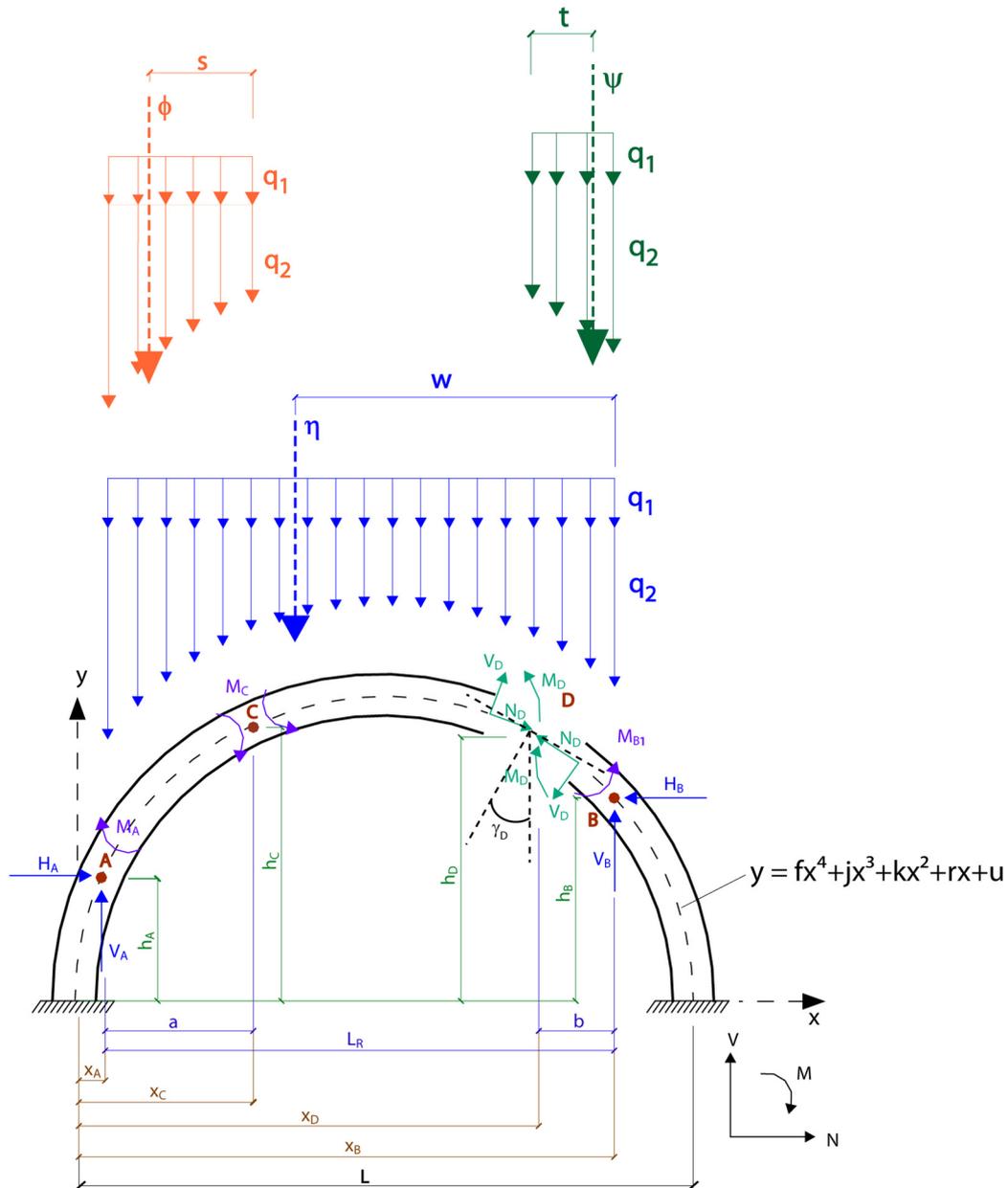
On obtient deux solutions :

$$n = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2(6G_T^2\alpha + 4 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T^2\alpha)} \left[ -3G_Td\beta^2v - 12G_T\alpha H_T - 8 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T\alpha H_T - 6E_T\beta^2v + \right. \\ \left. + (9G_T^2d^2\beta^4v^2 + 36G_Td\beta^4v^2E_T + 144G_T\alpha H_T E_T\beta^2v + 96G_T\alpha H_T 3^{1/2}E_T\beta^2v + 36E_T^2\beta^4v^2 + \right. \\ \left. - 144G_T^2\alpha F_T\beta^2v - 96G_T^2\alpha 3^{1/2}F_T\beta^2v)^{1/2} \right] \\ \\ \frac{1}{2(6G_T^2\alpha + 4 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T^2\alpha)} \left[ -3G_Td\beta^2v - 12G_T\alpha H_T - 8 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T\alpha H_T - 6E_T\beta^2v + \right. \\ \left. - (9G_T^2d^2\beta^4v^2 + 36G_Td\beta^4v^2E_T + 144G_T\alpha H_T E_T\beta^2v + 96G_T\alpha H_T 3^{1/2}E_T\beta^2v + 36E_T^2\beta^4v^2 + \right. \\ \left. - 144G_T^2\alpha F_T\beta^2v - 96G_T^2\alpha 3^{1/2}F_T\beta^2v)^{1/2} \right] \end{array} \right. \quad (\text{A 22.71})$$

La seconde solution conduisant à un résultat illogique ou impossible, on adopte la première. Multiplicateur des charges utiles :

$$n = \frac{1}{2(6G_T^2\alpha + 4 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T^2\alpha)} \left[ -3G_Td\beta^2v - 12G_T\alpha H_T - 8 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T\alpha H_T - 6E_T\beta^2v + \right. \quad (\text{A 22.72}) \\ \left. + (9G_T^2d^2\beta^4v^2 + 36G_Td\beta^4v^2E_T + 144G_T\alpha H_T E_T\beta^2v + 96G_T\alpha H_T 3^{1/2}E_T\beta^2v + 36E_T^2\beta^4v^2 + \right. \\ \left. - 144G_T^2\alpha F_T\beta^2v - 96G_T^2\alpha 3^{1/2}F_T\beta^2v)^{1/2} \right]$$

### Rapprochement des appuis – Premier état de sollicitation



#### Efforts horizontaux et verticaux aux rotules A et B :

Sur toute la portée active :

Equilibre des moments en B :

$$\sum M_B = -H_{A1}(h_B - h_A) + V_{A1}L_R + M_A - M_{B1} - \eta w = 0 \quad (\text{A 22.73})$$

Equilibre des forces horizontales :

$$\sum F_x = H_{A1} - H_{B1} = 0 \quad (\text{A 22.74})$$

Equilibre des forces verticales :

$$\sum F_y = V_{A1} + V_{B1} - \eta = 0 \quad (\text{A 22.75})$$

Sur le tronçon  $A - C$  :

Equilibre des moments en  $C$  :

$$\sum M_C = -H_{A1}(h_C - h_A) + V_{A1}a + M_A + M_C - \phi s = 0 \quad (\text{A 22.76})$$

De l'équation (A 22.76) :

$$V_{A1} = \frac{H_{A1}(h_C - h_A) - M_C - M_A + \phi s}{a} \quad (\text{A 22.77})$$

En introduisant (A 22.77) dans (A 22.73) :

$$\sum M_B = -H_{A1}(h_B - h_A) + \frac{L_R [H_{A1}(h_C - h_A) - M_C - M_A + \phi s]}{a} + M_A - M_{B1} - \eta w = 0 \quad (\text{A 22.78})$$

$$H_{A1} = \frac{1}{h_A - h_B + \frac{L_R(h_C - h_A)}{a}} \left[ \frac{-L_R(-M_C - M_A + \phi s)}{a} - M_A + M_{B1} + \eta w \right] \quad (\text{A 22.79})$$

$$H_{A1} = \frac{1}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -L_R(-M_C - M_A + \phi s) + a(-M_A + M_{B1} + \eta w) \right] \quad (\text{A 22.80})$$

Effort horizontal à la rotule  $A$ ,  $H_{A1}$  :

$$H_{A1} = \frac{-L_R(-M_C - M_A + \phi s) + a(-M_A + M_{B1} + \eta w)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \quad (\text{A 22.81})$$

De l'équation (A 22.74) :

$$H_{B1} = H_{A1} \quad (\text{A 22.82})$$

Effort horizontal à la rotule  $B$ ,  $H_{B1}$  :

$$H_{B1} = \frac{-L_R(-M_C - M_A + \phi s) + a(-M_A + M_{B1} + \eta w)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \quad (\text{A 22.83})$$

De l'équation (A 22.77), effort vertical à la rotule  $A$ ,  $V_{A1}$  :

$$V_{A1} = \frac{(h_C - h_A) \left[ -L_R(-M_C - M_A + \phi s) + a(-M_A + M_{B1} + \eta w) \right]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} + \frac{-M_C - M_A + \phi s}{a} \quad (\text{A 22.84})$$

De l'équation (A 22.75) :

$$V_{B1} = \eta - V_{A1} \quad (\text{A 22.85})$$

Effort vertical à la rotule  $B$ ,  $V_{B1}$  :

$$V_{B1} = \eta - \frac{(h_C - h_A) \left[ -L_R(-M_C - M_A + \phi s) + a(-M_A + M_{B1} + \eta w) \right]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} - \frac{-M_C - M_A + \phi s}{a} \quad (\text{A 22.86})$$

### **Effort normal et moment de flexion en $D$ :**

Sur le tronçon d'arc  $D - B$  :

Equilibre des moments en  $D$  :

$$\sum M_D = H_{B1}(h_D - h_B) - V_{B1}b + -M_{B1} + M_D + \psi t = 0 \quad (\text{A 22.87})$$

De l'équation (A 22.87) :

$$M_D = -H_{B1}(h_D - h_B) + V_{B1}b + M_{B1} - \psi t \quad (\text{A 22.88})$$

$$M_D = - \frac{(h_D - h_B) [-L_R(-M_C - M_A + \phi s) + a(-M_A + M_{B1} + \eta w)]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \eta b + \quad (A 22.89)$$

$$- \frac{b(h_C - h_A) [-L_R(-M_C - M_A + \phi s) + a(-M_A + M_{B1} + \eta w)]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} +$$

$$- \frac{b(-M_C - M_A + \phi s)}{a} + M_{B1} - \psi t$$

Moment de flexion à la rotule  $D$ ,  $M_D$  :

$$M_D = \frac{-L_R(-M_C - M_A + \phi s) + a(-M_A + M_{B1} + \eta w)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -h_D + h_B - \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] + \quad (A 22.90)$$

$$- \frac{b(-M_C - M_A + \phi s)}{a} + M_{B1} + \eta b - \psi t$$

Changement de variables :

$$M_D = nE_1 + F_1 \quad (A 22.91)$$

$$E_1 = 0 \quad (A 22.92)$$

$$F_1 = \frac{-L_R(-M_C - M_A + \phi s) + a(-M_A + M_{B1} + \eta w)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ \frac{-b(h_C - h_A)}{a} - h_D + h_B \right] + \eta b + \quad (A 22.93)$$

$$- \frac{b(-M_C - M_A + \phi s)}{a} + M_{B1} - \psi t$$

Equilibre des forces horizontales :

$$\sum F_x = -N_D \cos(\gamma_D) - V_D \sin(\gamma_D) - H_{B1} = 0 \quad (A 22.94)$$

Equilibre des forces verticales :

$$\sum F_y = N_D \sin(\gamma_D) - V_D \cos(\gamma_D) + V_{B1} - \psi = 0 \quad (A 22.95)$$

De l'équation (A 22.94) :

$$V_D = \frac{-N_D \cos(\gamma_D) - H_{B1}}{\sin(\gamma_D)} \quad (A 22.96)$$

De l'équation (A 22.95) :

$$N_D \sin(\gamma_D) + \frac{N_D \cos^2(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} + \frac{H_{B1} \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} + V_{B1} - \psi = 0 \quad (A 22.97)$$

$$N_D \left( \sin(\gamma_D) + \frac{\cos^2(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} \right) = \frac{-H_{B1} \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} - V_{B1} + \psi \quad (A 22.98)$$

$$N_D = -H_{B1} \cos(\gamma_D) - V_{B1} \sin(\gamma_D) + \psi \sin(\gamma_D) \quad (A 22.99)$$

$$N_D = \frac{-\cos(\gamma_D)[-L_R(-M_C - M_A + \phi S) + a(-M_A + M_{B1} + \eta w)]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \quad (A 22.100)$$

$$+ \sin(\gamma_D) \left[ -\eta + \psi + \frac{-M_C - M_A + \phi S}{a} \right] +$$

$$+ \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)[-L_R(-M_C - M_A + \phi S) + a(-M_A + M_{B1} + \eta w)]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]}$$

Effort normal à la rotule  $D$ ,  $N_D$  :

$$N_D = \frac{-L_R(-M_C - M_A + \phi S) + a(-M_A + M_{B1} + \eta w)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A)\sin(\gamma_D)}{a} \right] + \quad (A 22.101)$$

$$+ \sin(\gamma_D) \left[ \frac{-M_C - M_A + \phi S}{a} - \eta + \psi \right]$$

Changement de variables :

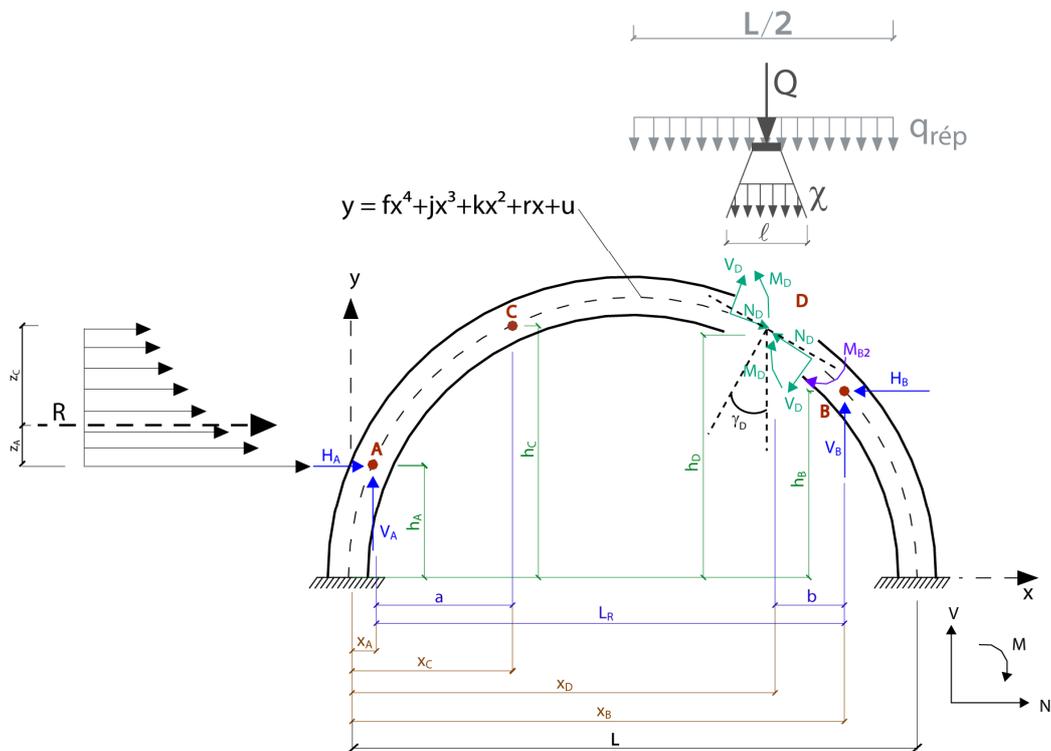
$$N_D = nG_1 + H_1 \quad (A 22.102)$$

$$G_1 = 0 \quad (A 22.103)$$

$$H_1 = \frac{-L_R(-M_C - M_A + \phi S) + a(-M_A + M_{B1} + \eta w)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{\sin(\gamma_D)(h_C - h_A)}{a} \right] + \quad (A 22.104)$$

$$+ \sin(\gamma_D) \left[ \frac{-M_C - M_A + \phi S}{a} - \eta + \psi \right]$$

### Ecartement des appuis – Second état de sollicitation



**Efforts horizontaux et verticaux aux rotules A et B :**

Sur toute la portée active :

Equilibre des moments en A :

$$\sum M_A = -H_{B2}(h_B - h_A) - V_{B2}L_R + n\chi\ell v(L_R - b) + nq_{\text{rép}}v\left(\frac{L}{2} - (L - x_B)\right)\left(L_R - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} - (L - x_B)\right)\right) + M_{B2} + Rz_A = 0 \quad (\text{A 22.105})$$

$$\sum M_A = -H_{B2}(h_B - h_A) - V_{B2}L_R + n\chi\ell v(L_R - b) + nq_{\text{rép}}v\left(x_B - \frac{L}{2}\right)\left(L_R + \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2}\right) + M_{B2} + Rz_A = 0 \quad (\text{A 22.106})$$

Equilibre des forces horizontales :

$$\sum F_x = H_{A2} - H_{B2} + R = 0 \quad (\text{A 22.107})$$

Equilibre des forces verticales :

$$\sum F_y = V_{A2} + V_{B2} - n\chi\ell v - nq_{\text{rép}}v\left(x_B - \frac{L}{2}\right) = 0 \quad (\text{A 22.108})$$

Sur le tronçon A - C :

Equilibre des moments en C :

$$\sum M_C = -H_{A2}(h_C - h_A) + V_{A2}a - Rz_C = 0 \quad (\text{A 22.109})$$

De l'équation (A 22.109) :

$$V_{A2} = \frac{H_{A2}(h_C - h_A) + Rz_C}{a} \quad (\text{A 22.110})$$

De l'équation (A 22.108) :

$$V_{B2} = -V_{A2} + n\chi\ell v + nq_{\text{rép}}v\left(x_B - \frac{L}{2}\right) \quad (\text{A 22.111})$$

$$V_{B2} = -\frac{H_{A2}(h_C - h_A) + Rz_C}{a} + n\chi\ell v + nq_{\text{rép}}v\left(x_B - \frac{L}{2}\right) \quad (\text{A 22.112})$$

De l'équation (A 22.107) :

$$H_{B2} = H_{A2} + R \quad (\text{A 22.113})$$

De l'équation (A 22.106) :

$$\begin{aligned} \sum M_A = & -(H_{A2} + R)(h_B - h_A) + \frac{L_R[H_{A2}(h_C - h_A) + Rz_C]}{a} - n\chi\ell vL_R + \\ & - nq_{\text{rép}}vL_R\left(x_B - \frac{L}{2}\right) + n\chi\ell v(L_R - b) + nq_{\text{rép}}v\left(x_B - \frac{L}{2}\right)\left(L_R + \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2}\right) + \\ & + M_{B2} + Rz_A = 0 \end{aligned} \quad (\text{A 22.114})$$

De l'équation (A 22.114) :

$$\begin{aligned} H_{A2} = & \frac{1}{h_A - h_B + \frac{L_R(h_C - h_A)}{a}} \left[ R(h_B - h_A) - \frac{L_R Rz_C}{A} + n\chi[\ell vL_R - \ell v(L_R - b)] + \right. \\ & \left. + nq_{\text{rép}}v\left[L_R\left(x_B - \frac{L}{2}\right) - \left(x_B - \frac{L}{2}\right)\left(L_R + \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2}\right)\right] - M_{B2} - Rz_A \right] \end{aligned} \quad (\text{A 22.115})$$

$$H_{A2} = \frac{1}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ n\chi^\ell vba + nq_{\text{rép}}va \left[ L_R \left( x_B - \frac{L}{2} \right) + \right. \right. \quad (\text{A 22.116}) \\ \left. \left. - \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( L_R + \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right) \right] - L_R RZ_C + a[R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A] \right]$$

Effort horizontal à la rotule A,  $H_{A2}$  :

$$H_{A2} = \frac{1}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ n\chi^\ell vba - nq_{\text{rép}}va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right) + \right. \quad (\text{A 22.117}) \\ \left. - L_R RZ_C + a[R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A] \right]$$

De l'équation (A 22.113), effort horizontal à la rotule B,  $H_{B2}$  :

$$H_{B2} = \frac{1}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ n\chi^\ell vba - nq_{\text{rép}}va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right) + \right. \quad (\text{A 22.118}) \\ \left. - L_R RZ_C + a[R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A] \right] + R$$

De l'équation (A 22.110) effort vertical à la rotule A,  $V_{A2}$  :

$$V_{A2} = \frac{(h_C - h_A)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \left[ n\chi^\ell vba - nq_{\text{rép}}va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right) + \right. \quad (\text{A 22.119}) \\ \left. - L_R RZ_C + a[R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A] \right] + \frac{RZ_C}{a}$$

De l'équation (A 22.111) effort vertical à la rotule B,  $V_{B2}$  :

$$V_{B2} = \frac{-(h_C - h_A)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \left[ n\chi^\ell vba - nq_{\text{rép}}va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right) + \right. \quad (\text{A 22.120}) \\ \left. - L_R RZ_C + a[R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A] \right] - \frac{RZ_C}{a} + n\chi^\ell v + nq_{\text{rép}}v \left( x_B - \frac{L}{2} \right)$$

### **Effort normal et moment de flexion en D :**

Sur le tronçon D - B :

Equilibre des moments en D :

$$\sum M_D = H_{B2}(h_D - h_B) - V_{B2}b + n\chi v \frac{\ell}{2} \frac{\ell}{4} + nq_{\text{rép}}vb \frac{b}{2} + M_D + M_{B2} = 0 \quad (\text{A 22.121})$$

De l'équation (A 22.121) :

$$M_D = -H_{B2}(h_D - h_B) + V_{B2}b - n\chi v \frac{\ell^2}{8} - nq_{\text{rép}}v \frac{b^2}{2} - M_{B2} \quad (\text{A 22.122})$$

$$M_D = \frac{-(h_D - h_B)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ n\chi^\ell vba - nq_{\text{rép}}va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right) + \right. \quad (\text{A 22.123}) \\ \left. - L_R RZ_C + a[R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A] \right] - (h_D - h_B)R - \frac{b(h_C - h_A)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \cdot \\ \cdot \left[ n\chi^\ell vba - nq_{\text{rép}}va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right) - L_R RZ_C + a[R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A] \right] + \\ - \frac{bRZ_C}{a} + n\chi^\ell vb + nq_{\text{rép}}vb \left( x_B - \frac{L}{2} \right) - n\chi v \frac{\ell^2}{8} - nq_{\text{rép}}v \frac{b^2}{2} - M_{B2}$$

$$\begin{aligned}
M_D = n\chi & \left[ \frac{-(h_D - h_B)\ell vba}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} - \frac{b(h_C - h_A)\ell vba}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} + \ell v b - \frac{v\ell^2}{8} \right] + & (A 22.124) \\
& + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{(h_D - h_B)va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \frac{b(h_C - h_A)va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} + \right. \\
& + vb \left( x_B - \frac{L}{2} \right) - \frac{vb^2}{2} \left. \right] - \frac{(h_D - h_B)(-L_R RZ_C + a[R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A])}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \\
& - \frac{b(h_C - h_A)(-L_R RZ_C + a[R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A])}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} - (h_D - h_B)R - \frac{bRZ_C}{a} - M_{B2}
\end{aligned}$$

Moment de flexion à la rotule  $D$ ,  $M_D$  :

$$\begin{aligned}
M_D = n\chi & \left[ \frac{\ell vba}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -h_D + h_B - \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] + b\ell v - \frac{v\ell^2}{8} \right] + & (A 22.125) \\
& + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{-va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -h_D + h_B - \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] + \right. \\
& + vb \left( x_B - \frac{L}{2} \right) - \frac{vb^2}{2} \left. \right] + \frac{-L_R RZ_C + a[R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -h_D + h_B - \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] + \\
& - (h_D - h_B)R - M_{B2} - \frac{bRZ_C}{a}
\end{aligned}$$

Changement de variables :

$$M_D = nE_2 + F_2 \quad (A 22.126)$$

$$\begin{aligned}
E_2 = \chi & \left[ \frac{\ell vba}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -h_D + h_B - \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] + b\ell v - \frac{v\ell^2}{8} \right] + & (A 22.127) \\
& + q_{\text{rép}} \left[ \frac{-va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -h_D + h_B - \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] + \right. \\
& + vb \left( x_B - \frac{L}{2} \right) - \frac{vb^2}{2} \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = \frac{-L_R RZ_C + a[R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -h_D + h_B - \frac{b(h_C - h_A)}{a} \right] - (h_D - h_B)R + & (A 22.128) \\
-M_{B2} - \frac{bRZ_C}{a}
\end{aligned}$$

Equilibre des forces horizontales :

$$\sum F_x = -N_D \cos(\gamma_D) - V_D \sin(\gamma_D) - H_{B2} = 0 \quad (A 22.129)$$

Equilibre des forces verticales :

$$\sum F_y = N_D \sin(\gamma_D) - V_D \cos(\gamma_D) + V_{B2} - n\chi v \frac{\ell}{2} - nq_{\text{rép}} vb = 0 \quad (\text{A 22.130})$$

De l'équation (A 22.129) :

$$V_D = \frac{-N_D \cos(\gamma_D) - H_{B2}}{\sin(\gamma_D)} \quad (\text{A 22.131})$$

De l'équation (A 22.130) :

$$N_D \sin(\gamma_D) + \frac{N_D \cos^2(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} + \frac{H_{B2} \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} + V_{B2} - n\chi v \frac{\ell}{2} - nq_{\text{rép}} vb = 0 \quad (\text{A 22.132})$$

$$N_D \left( \sin(\gamma_D) + \frac{\cos^2(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} \right) = -\frac{H_{B2} \cos(\gamma_D)}{\sin(\gamma_D)} - V_{B2} + n\chi v \frac{\ell}{2} + nq_{\text{rép}} vb \quad (\text{A 22.133})$$

$$N_D = -H_{B2} \cos(\gamma_D) - V_{B2} \sin(\gamma_D) + \sin(\gamma_D) \left[ n\chi v \frac{\ell}{2} + nq_{\text{rép}} vb \right] \quad (\text{A 22.134})$$

$$N_D = \frac{-\cos(\gamma_D)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ n\chi \ell vba - nq_{\text{rép}} va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right) - L_R RZ_C + \right. \quad (\text{A 22.135})$$

$$\left. + a[R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A] \right] - R \cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A) \sin(\gamma_D)}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} \cdot$$

$$\cdot \left[ n\chi \ell vba - nq_{\text{rép}} va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right) - L_R RZ_C + a[R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A] \right] +$$

$$+ \frac{RZ_C \sin(\gamma_D)}{a} + \sin(\gamma_D) \left( -n\chi \ell v - nq_{\text{rép}} v \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \right) + \sin(\gamma_D) \left[ n\chi v \frac{\ell}{2} + nq_{\text{rép}} vb \right]$$

$$\begin{aligned}
N_D = n\chi & \left[ \frac{-\cos(\gamma_D)\ell vba}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \frac{(h_C - h_A)\sin(\gamma_D)\ell vba}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} - \ell v \sin(\gamma_D) + \right. \\
& \left. + v \frac{\ell}{2} \sin(\gamma_D) \right] + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{-\cos(\gamma_D) \left[ -va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right) \right]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \right. \\
& \left. + \frac{(h_C - h_A)\sin(\gamma_D) \left[ -va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right) \right]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} - v \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \sin(\gamma_D) + vb \sin(\gamma_D) \right] + \\
& + \frac{-\cos(\gamma_D) [-L_R RZ_C + a(R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A)]}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} + \\
& + \frac{(h_C - h_A)\sin(\gamma_D) [-L_R RZ_C + a(R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A)]}{a[a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)]} - R \cos(\gamma_D) + \frac{RZ_C \sin(\gamma_D)}{a}
\end{aligned} \tag{A 22.136}$$

Effort normal à la rotule  $D$ ,  $N_D$  :

$$\begin{aligned}
N_D = n\chi & \left[ \frac{\ell vba}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A)\sin(\gamma_D)}{a} \right] - \frac{v\ell}{2} \sin(\gamma_D) \right] + \tag{A 22.137} \\
& + nq_{\text{rép}} \left[ \frac{-va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A)\sin(\gamma_D)}{a} \right] + \right. \\
& \left. + v \sin(\gamma_D) \left[ b - x_B + \frac{L}{2} \right] \right] + \frac{-L_R RZ_C + a(R(h_B - h_A) - M_{B2} - RZ_A)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \cdot \\
& \cdot \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A)\sin(\gamma_D)}{a} \right] - R \cos(\gamma_D) + \frac{RZ_C \sin(\gamma_D)}{a}
\end{aligned}$$

Changement de variables :

$$N_D = nG_2 + H_2 \tag{A 22.138}$$

$$\begin{aligned}
G_2 = \chi & \left[ \frac{\ell vba}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A)\sin(\gamma_D)}{a} \right] - \frac{v\ell}{2} \sin(\gamma_D) \right] + \tag{A 22.139} \\
& + q_{\text{rép}} \left[ \frac{-va \left( x_B - \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{4} - \frac{x_B}{2} \right)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A)\sin(\gamma_D)}{a} \right] + v \sin(\gamma_D) \left[ b - x_B + \frac{L}{2} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$H_2 = \frac{-L_R R Z_C + a(R(h_B - h_A) - M_{B2} - R Z_A)}{a(h_A - h_B) + L_R(h_C - h_A)} \cdot \left[ -\cos(\gamma_D) + \frac{(h_C - h_A) \sin(\gamma_D)}{a} \right] + \quad (A 22.140)$$

$$- R \cos(\gamma_D) + \frac{R Z_C \sin(\gamma_D)}{a}$$

Sollicitation totale :

$$E_T = E_1 + E_2 \quad (A 22.141)$$

$$F_T = F_1 + F_2 \quad (A 22.142)$$

$$G_T = G_1 + G_2 \quad (A 22.143)$$

$$H_T = H_1 + H_2 \quad (A 22.144)$$

Selon l'étude au micro-niveau (équations 5.17 et A 7.15) :

$$M_{DT} = \frac{1}{2} N_{DT} \frac{-3d\beta^2 v + 3^{1/2} \beta^2 dv - 2\alpha N_{DT} - 2 \cdot 3^{1/2} \alpha N_{DT}}{\beta^2 v (-3 + 3^{1/2})} \quad (A 22.145)$$

Avec le changement de variable :

$$nE_T + F_T = \frac{1}{2} (nG_T + H_T) \frac{-3d\beta^2 v + 3^{1/2} \beta^2 dv - 2\alpha (nG_T + H_T) - 2 \cdot 3^{1/2} \alpha (nG_T + H_T)}{\beta^2 v (-3 + 3^{1/2})} \quad (A 22.146)$$

Cette équation peut être résolue avec l'aide d'un logiciel de mathématique, tel que Mathcad 11.0a.

On obtient deux solutions :

$$n = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2(6G_T^2 \alpha + 4 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T^2 \alpha)} \left[ -3G_T d\beta^2 v - 12G_T \alpha H_T - 8 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T \alpha H_T - 6E_T \beta^2 v + \right. \quad (A 22.147) \\ \left. + (9G_T^2 d^2 \beta^4 v^2 + 36G_T d\beta^4 v^2 E_T + 144G_T \alpha H_T E_T \beta^2 v + 96G_T \alpha H_T 3^{1/2} E_T \beta^2 v + 36E_T^2 \beta^4 v^2 + \right. \\ \left. - 144G_T^2 \alpha F_T \beta^2 v - 96G_T^2 \alpha 3^{1/2} F_T \beta^2 v)^{1/2} \right] \\ \\ \frac{1}{2(6G_T^2 \alpha + 4 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T^2 \alpha)} \left[ -3G_T d\beta^2 v - 12G_T \alpha H_T - 8 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T \alpha H_T - 6E_T \beta^2 v + \right. \\ \left. - (9G_T^2 d^2 \beta^4 v^2 + 36G_T d\beta^4 v^2 E_T + 144G_T \alpha H_T E_T \beta^2 v + 96G_T \alpha H_T 3^{1/2} E_T \beta^2 v + 36E_T^2 \beta^4 v^2 + \right. \\ \left. - 144G_T^2 \alpha F_T \beta^2 v - 96G_T^2 \alpha 3^{1/2} F_T \beta^2 v)^{1/2} \right] \end{array} \right.$$

La seconde solution conduisant à un résultat illogique ou impossible, on adopte la première. Multiplicateur des charges utiles :

$$n = \frac{1}{2(6G_T^2 \alpha + 4 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T^2 \alpha)} \left[ -3G_T d\beta^2 v - 12G_T \alpha H_T - 8 \cdot 3^{1/2} \cdot G_T \alpha H_T - 6E_T \beta^2 v + \right. \quad (A 22.148)$$

$$+ (9G_T^2 d^2 \beta^4 v^2 + 36G_T d\beta^4 v^2 E_T + 144G_T \alpha H_T E_T \beta^2 v + 96G_T \alpha H_T 3^{1/2} E_T \beta^2 v + 36E_T^2 \beta^4 v^2 +$$

$$\left. - 144G_T^2 \alpha F_T \beta^2 v - 96G_T^2 \alpha 3^{1/2} F_T \beta^2 v)^{1/2} \right]$$

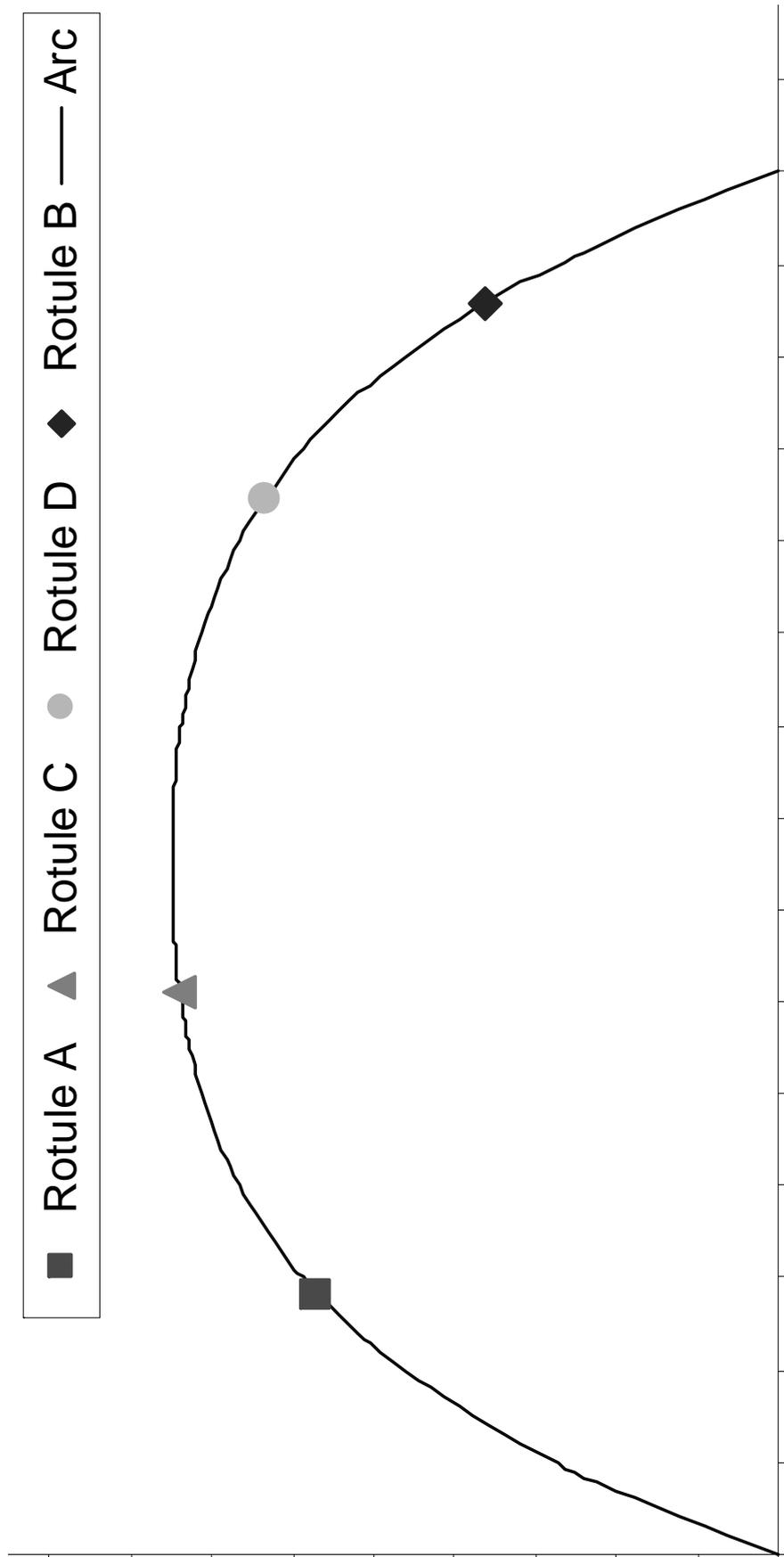
## Annexe 23 : Représentation du modèle modifié – Cas d'endommagement n°2 (Ecartement des appuis)

Le tableau Excel ci-dessous est une suggestion de représentation du modèle modifié. Les modifications apportées au modèle initial pour tenir compte de l'influence du cas d'endommagement n°2 sur la capacité portante de l'arc sont mises en évidence.

Géométrie	L	[mm]	15000
	f	[-]	-1.47E-12
	j	[-]	4.40E-08
	k	[-]	-5.46E-04
	r	[-]	3.238
	x <sub>A</sub>	[mm]	2831
	x <sub>C</sub>	[mm]	6116
	x <sub>D</sub>	[mm]	11481
	x <sub>B</sub>	[mm]	13583
	a	[mm]	3284
	b	[mm]	2102
	γ <sub>D</sub>	[rad]	0.6591
	h <sub>A</sub>	[mm]	5695
	h <sub>C</sub>	[mm]	7397
	h <sub>D</sub>	[mm]	6326
	h <sub>B</sub>	[mm]	3612
	L <sub>R</sub>	[mm]	10751
	d	[mm]	1000
	v	[mm]	4000
h <sub>R</sub>	[mm]	9000	
h <sub>S</sub>	[mm]	500	
h <sub>L/2</sub>	[mm]	7500	
Matériau	α	[-]	0.726
	β	[-]	6.095
Charges permanentes	PP <sub>R</sub>	[N/mm <sup>3</sup> ]	0.000018
	PP <sub>S</sub>	[N/mm <sup>3</sup> ]	0.00002
	η	[N]	2212504
	φ	[N]	653720
	ψ	[N]	663376
	ηW	[Nmm]	10805994423
	φS	[Nmm]	1179612199
	ψt	[Nmm]	768379759
Poussée du remplissage	φ	[°]	30
	c	[N/mm <sup>2</sup> ]	0
	m <sub>p</sub>	[-]	0.33
	K <sub>p</sub>	[-]	3.00
	m <sub>pc</sub>	[-]	0.01
	K <sub>pc</sub>	[-]	3.46410161514
	R	[N]	896387
	RZ <sub>B</sub>	[Nmm]	1096599728
RZ <sub>D</sub>	[Nmm]	1336612478	

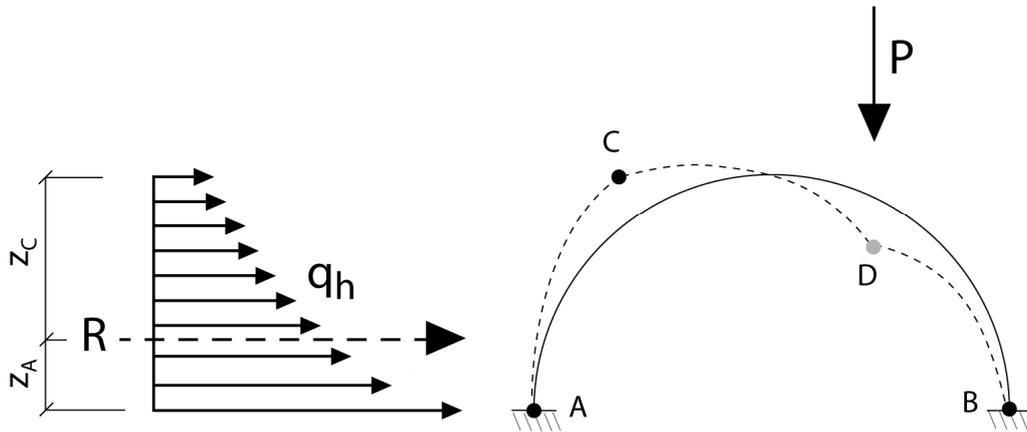
Modèle de charge de trafic routier	$\delta$	[°]	30			
	$h_{Rclé}$	[mm]	1500			
	$Q$	[N]	160000			
	$q_{rép}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.005			
	$q_{trans}$	[N/mm]	40			
Efforts intérieurs dans les rotules	$N_{admis}$	[N]	-1250000			
	$M_{admis}$	[Nmm]	608551127			
Etat de sollicitation 1	Efforts intérieurs dans les rotules	$M_A$	[Nmm]	608551127	$M_i = M_{admis}$	
		$M_C$	[Nmm]	608551127	$H_{A1} \rightarrow (A 22.9)$	
		$M_{B1}$	[Nmm]	608551127	$H_{B1} \rightarrow (A 22.11)$	
	Réactions d'appui	$H_{A1}$	[N]	386776	$V_{A1} \rightarrow (A 22.12)$	
		$H_{B1}$	[N]	386776	$V_{B1} \rightarrow (A 22.14)$	
		$V_{A1}$	[N]	930146	$E_1 \rightarrow (A 22.20)$	
		$V_{B1}$	[N]	1282358	$F_1 \rightarrow (A 22.21)$	
	Change-ments de variables	$E_1$	[Nmm]	0	$G_1 \rightarrow (A 22.31)$	
		$F_1$	[Nmm]	-268489465	$H_1 \rightarrow (A 22.32)$	
		$G_1$	[N]	0	$M_{B2} = (\%tage) \times M_{admis}$	
		$H_1$	[N]	-684842	$H_{A2} \rightarrow (A 22.40)$	
	Etat de sollicitation 2	Efforts intérieurs dans les rotules	%tage	[%]	50	$H_{B2} \rightarrow (A 22.42)$
			$M_{B2}$	[Nmm]	304275563	$V_{A2} \rightarrow (A 22.43)$
		Réactions d'appui	$H_{A2}$	[N]	1494143	$V_{B2} \rightarrow (A 22.44)$
			$H_{B2}$	[N]	597756	$E_2 \rightarrow (A 22.51)$
$V_{A2}$			[N]	1083325	$F_2 \rightarrow (A 22.52)$	
$V_{B2}$			[N]	625689	$G_2 \rightarrow (A 22.63)$	
Change-ments de variables		$E_2$	[Nmm]	303123984	$H_2 \rightarrow (A 22.64)$	
		$F_2$	[Nmm]	-704763784	$E_T = E_1 + E_2$	
		$G_2$	[N]	-219086	$F_T = F_1 + F_2$	
		$H_2$	[N]	-86597	$G_T = G_1 + G_2$	
Change-ments de variables		$E_T$	[Nmm]	303123984	$H_T = H_1 + H_2$	
		$F_T$	[Nmm]	-973253249	$H_{AT} = H_{A1} + H_{A2}$	
	$G_T$	[N]	-219086	$H_{BT} = H_{B1} + H_{B2}$		
	$H_T$	[N]	-771439	$V_{AT} = V_{A1} + V_{A2}$		
Multipl-cateur limite des charges utiles	$n$	-	6.745	$V_{BT} = V_{B1} + V_{B2}$		
Réactions d'appuis	$H_{AT}$	[N]	1880920			
	$H_{BT}$	[N]	984532			
	$V_{AT}$	[N]	2013471			
	$V_{BT}$	[N]	1908047			

Représentation graphique de la position des rotules :





## Annexe 24 : Calcul de la poussée horizontale due au remplissage, dans le cas d'un rapprochement des appuis



Les expressions suivantes ont été déterminées à l'aide du logiciel Mathcad 11.0a.  
 Résultante de la poussée horizontale due au remplissage entre les rotules A et C :

$$\begin{aligned}
 R &= \int_{h_A}^{h_C} v q_h dh = && \text{(A 24.1)} \\
 &= \int_{h_A}^{h_C} v [m_p K_p (q_1 + q_2) + c m_{pc} K_{pc}] dh = \\
 &= v \left[ m_p K_p h_s P P_S \int_{h_A}^{h_C} dh + m_p K_p P P_R \int_{h_A}^{h_C} (h_R - h) dh + c m_{pc} K_{pc} \int_{h_A}^{h_C} dh \right] = \\
 &= v \left[ m_p K_p \left[ h_s P P_S \int_{h_A}^{h_C} dh + P P_R h_R \int_{h_A}^{h_C} dh - P P_R \int_{h_A}^{h_C} h dh \right] + c m_{pc} K_{pc} \int_{h_A}^{h_C} dh \right] = \\
 &= v \left[ K_p m_p \left[ h_s P P_S (h_C - h_A) + P P_R h_R (h_C - h_A) - P P_R \left( \frac{h_C^2}{2} - \frac{h_A^2}{2} \right) \right] + c m_{pc} k_{pc} (h_C - h_A) \right]
 \end{aligned}$$

Moment de flexion induit par la résultante  $R$  par rapport à la rotule  $A$  :

$$\begin{aligned}
 RZ_A &= \int_{h_A}^{h_C} vq_h(h - h_A)dh = & (A\ 24.2) \\
 &= \int_{h_A}^{h_C} v[m_p K_p(q_1 + q_2) + cm_{pc} K_{pc}] (h - h_A) dh = \\
 &= v \left[ m_p K_p h_S PP_S \int_{h_A}^{h_C} (h - h_A) dh + m_p K_p PP_R \int_{h_A}^{h_C} (h_R - h)(h - h_A) dh + cm_{pc} K_{pc} \int_{h_A}^{h_C} (h - h_A) dh \right] = \\
 &= v \left[ m_p K_p h_S PP_S \int_{h_A}^{h_C} h dh - m_p K_p h_S PP_S \int_{h_A}^{h_C} h_A dh + m_p K_p PP_R \int_{h_A}^{h_C} (h_R h - h_A h_R + h h_A - h^2) dh + \right. \\
 &\quad \left. + cm_{pc} K_{pc} \int_{h_A}^{h_C} h dh - cm_{pc} K_{pc} \int_{h_A}^{h_C} h_A dh \right] = \\
 &= v \left[ m_p K_p \left[ h_S PP_S \left[ \int_{h_A}^{h_C} h dh - h_A \int_{h_A}^{h_C} dh \right] + PP_R \left[ h_R \int_{h_A}^{h_C} h dh - h_A h_R \int_{h_A}^{h_C} h dh - \int_{h_A}^{h_C} h^2 dh + h_A \int_{h_A}^{h_C} h dh \right] \right] + \right. \\
 &\quad \left. + cm_{pc} K_{pc} \left[ \int_{h_A}^{h_C} h dh - h_A \int_{h_A}^{h_C} dh \right] \right] = \\
 &= v \left[ K_p m_p \left[ h_S PP_S \left[ \frac{h_C^2}{2} - \frac{h_A^2}{2} - h_A (h_C - h_A) \right] + PP_R \left[ h_R \left( \frac{h_C^2}{2} - \frac{h_A^2}{2} \right) - h_R h_A (h_C - h_A) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{h_C^3}{3} + \frac{h_A^3}{3} + h_A \left( \frac{h_C^2}{2} - \frac{h_A^2}{2} \right) \right] \right] + cm_{pc} K_{pc} \left[ \frac{h_C^2}{2} - \frac{h_A^2}{2} - h_A (h_C - h_A) \right] \right]
 \end{aligned}$$

Moment de flexion induit par la résultante  $R$  par rapport à la rotule  $C$  :

$$\begin{aligned}
 RZ_C &= \int_{h_A}^{h_C} v q_h (h_C - h) dh = & (A\ 24.3) \\
 &= \int_{h_A}^{h_C} v [m_p K_p (q_1 + q_2) + c m_{pc} K_{pc}] (h_C - h) dh = \\
 &= v \left[ m_p K_p h_S PP_S \int_{h_A}^{h_C} (h_C - h) dh + m_p K_p PP_R \int_{h_A}^{h_C} (h_R - h) (h_C - h) dh + c m_{pc} K_{pc} \int_{h_A}^{h_C} (h_C - h) dh \right] = \\
 &= v \left[ m_p K_p h_S PP_S \int_{h_A}^{h_C} h_C dh - m_p K_p h_S PP_S \int_{h_A}^{h_C} h dh + m_p K_p PP_R \int_{h_A}^{h_C} (h_R h_C - h h_R - h h_C + h^2) dh + \right. \\
 &\quad \left. + c m_{pc} K_{pc} \int_{h_A}^{h_C} h_C dh - c m_{pc} K_{pc} \int_{h_A}^{h_C} h dh \right] = \\
 &= v \left[ m_p K_p \left[ h_S PP_S \left[ h_C \int_{h_A}^{h_C} dh - \int_{h_A}^{h_C} h dh \right] + PP_R \left[ h_R h_C \int_{h_A}^{h_C} dh - h_R \int_{h_A}^{h_C} h dh - h_C \int_{h_A}^{h_C} h dh + \int_{h_A}^{h_C} h^2 dh \right] \right] + \right. \\
 &\quad \left. + c m_{pc} K_{pc} \left[ h_C \int_{h_A}^{h_C} dh - \int_{h_A}^{h_C} h dh \right] \right] = \\
 &= v \left[ K_p m_p \left[ h_S PP_S \left[ h_C (h_C - h_A) - \frac{h_C^2}{2} + \frac{h_A^2}{2} \right] + PP_R \left[ h_R h_C (h_C - h_A) - h_R \left( \frac{h_C^2}{2} - \frac{h_A^2}{2} \right) - h_C \left( \frac{h_C^2}{2} - \frac{h_A^2}{2} \right) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{h_C^3}{3} - \frac{h_A^3}{3} \right] \right] + c m_{pc} K_{pc} \left[ h_C (h_C - h_A) - \frac{h_C^2}{2} + \frac{h_A^2}{2} \right] \Big]
 \end{aligned}$$



## Annexe 25 : Représentation du modèle modifié – Cas d'endommagement n°2 (Rapprochement des appuis)

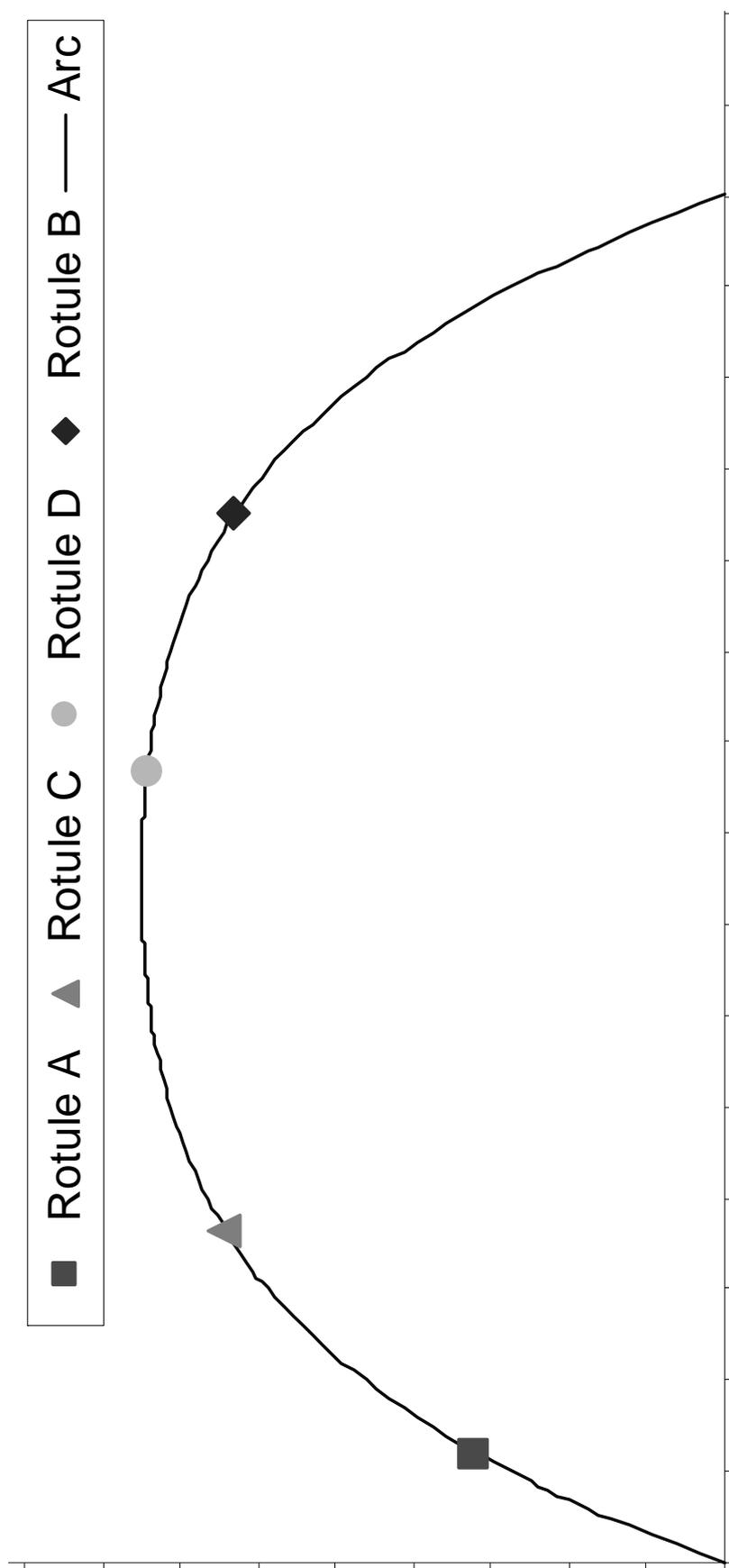
Le tableau Excel ci-dessous est une suggestion de représentation du modèle modifié. Les modifications apportées au modèle initial pour tenir compte de l'influence du cas d'endommagement n°2 sur la capacité portante de l'arc sont mises en évidence.

<b>Géométrie</b>	L	[mm]	15000	
	f	[-]	-1.47E-12	
	j	[-]	4.40E-08	
	k	[-]	-5.46E-04	
	r	[-]	3.237604307	
	$x_A$	[mm]	1216.034772	
	$x_C$	[mm]	3655	
	$x_D$	[mm]	8719	
	$x_B$	[mm]	11505	
	a	[mm]	2439	
	b	[mm]	2786	
	$\gamma_D$	[rad]	0.133680407	
	$h_A$	[mm]	3206	
	$h_C$	[mm]	6428	
	$h_D$	[mm]	7421	
	$h_B$	[mm]	6308	
	$L_R$	[mm]	10288	
	d	[mm]	1000	
	v	[mm]	4000	
	$h_R$	[mm]	9000	
$h_S$	[mm]	500		
$h_{L/2}$	[mm]	7500		
<b>Matériau</b>	$\alpha$	[-]	0.726	
	$\beta$	[-]	6.095	
<b>Charges permanentes</b>	$PP_R$	[N/mm <sup>3</sup> ]	0.000018	
	$PP_S$	[N/mm <sup>3</sup> ]	0.00002	
	$\eta$	[N]	2132436	
	$\phi$	[N]	783536	
	$\psi$	[N]	510144	
	$\eta W$	[Nmm]	12477346585	
	$\phi S$	[Nmm]	1068979714	
	$\psi t$	[Nmm]	760937818	
<b>Poussée du remplissage</b>	$\varphi$	[°]	30	
	c	[N/mm <sup>2</sup> ]	0	
	$m_p$	[-]	0.33	
	$K_p$	[-]	3.00	
	$m_{pc}$	[-]	0.01	
	$K_{pc}$	[-]	3.46410161514	
	<b>R</b>	<b>[N]</b>	<b>1099377</b>	
	<b>Rz<sub>A</sub></b>	<b>[Nmm]</b>	<b>1570489404</b>	
<b>Rz<sub>C</sub></b>	<b>[Nmm]</b>	<b>1971958438</b>		

R → (A 24.1)
Rz <sub>A</sub> → (A 24.2)
Rz <sub>C</sub> → (A 24.3)

<b>Modèle de charge de trafic routier</b>	$\delta$	[°]	30		
	$h_{Rclé}$	[mm]	1500		
	$Q$	[N]	160000		
	$q_{rép}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.005		
	$q_{trans}$	[N/mm]	40		
	$\chi$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.018761279		
<b>Efforts intérieurs dans les rotules</b>	$N_{admis}$	[N]	-1250000		
	$M_{admis}$	[Nmm]	608551127		
<b>Etat de sollicitation 1</b>	<b>Efforts intérieurs dans les rotules</b>	$M_A$	[Nmm]	608551127	$M_i = M_{admis}$
		$M_C$	[Nmm]	608551127	$H_{A1} \rightarrow (A 22.81)$
		$M_{B1}$	[Nmm]	608551127	$H_{B1} \rightarrow (A 22.83)$
	<b>Réactions d'appui</b>	$H_{A1}$	[N]	1248951	$V_{A1} \rightarrow (A 22.84)$
		$H_{B1}$	[N]	1248951	$V_{B1} \rightarrow (A 22.86)$
		$V_{A1}$	[N]	1589312	$E_1 \rightarrow (A 22.92)$
		$V_{B1}$	[N]	543124	$F_1 \rightarrow (A 22.93)$
	<b>Change-ments de variables</b>	$E_1$	[Nmm]	0	$G_1 \rightarrow (A 22.103)$
		$F_1$	[Nmm]	-30021159	$H_1 \rightarrow (A 22.104)$
		$G_1$	[N]	0	$M_{B2} = (\%tage) \times M_{admis}$
		$H_1$	[N]	-1242204	$H_{A2} \rightarrow (A 22.117)$
	<b>Etat de sollicitation 2</b>	<b>Efforts intérieurs dans les rotules</b>	%tage	[%]	50
$M_{B2}$			[Nmm]	304275563	$V_{A2} \rightarrow (A 22.119)$
<b>Réactions d'appui</b>		$H_{A2}$	[N]	-283765	$V_{B2} \rightarrow (A 22.120)$
		$H_{B2}$	[N]	815611	$E_2 \rightarrow (A 22.127)$
		$V_{A2}$	[N]	433625	$F_2 \rightarrow (A 22.128)$
		$V_{B2}$	[N]	1074012	$G_2 \rightarrow (A 22.139)$
<b>Change-ments de variables</b>		$E_2$	[Nmm]	271629869	$H_2 \rightarrow (A 22.140)$
		$F_2$	[Nmm]	-681170337	$E_T = E_1 + E_2$
		$G_2$	[N]	-60999	$F_T = F_1 + F_2$
		$H_2$	[N]	-454852	$G_T = G_1 + G_2$
<b>Change-ments de variables</b>		$E_T$	[Nmm]	271629869	$H_T = H_1 + H_2$
		$F_T$	[Nmm]	-711191496	$H_{AT} = H_{A1} + H_{A2}$
	$G_T$	[N]	-60999	$H_{BT} = H_{B1} + H_{B2}$	
	$H_T$	[N]	-1697056	$V_{AT} = V_{A1} + V_{A2}$	
	$n$	-	6.279464605	$V_{BT} = V_{B1} + V_{B2}$	
<b>Réactions d'appuis</b>	$H_{AT}$	[N]	965186		
	$H_{BT}$	[N]	2064563		
	$V_{AT}$	[N]	2022937		
	$V_{BT}$	[N]	1617136		

Représentation graphique de la position des rotules :





## Annexe 26 : Représentation du modèle modifié – Cas d'endommagement n°3

Le tableau Excel ci-dessous est une suggestion de représentation du modèle modifié. Les modifications apportées au modèle initial pour tenir compte de l'influence du cas d'endommagement n°3 sur la capacité portante de l'arc sont mises en évidence. Il a été choisi, dans le cas présenté ici, de fixer la position de la rotule C à 4000 mm et d'y admettre une section d'arc réduite de moitié.

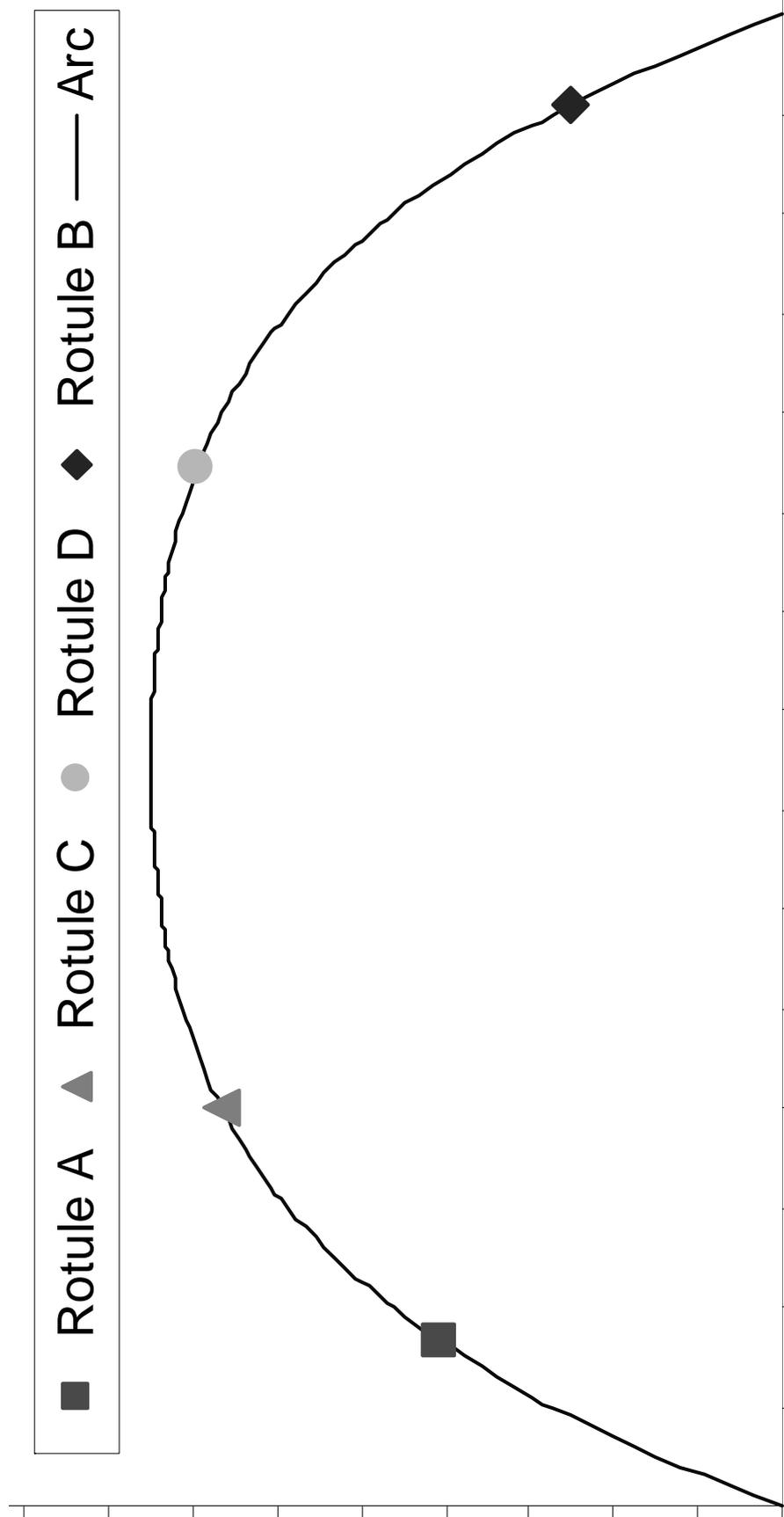
Géométrie	L	[mm]	15000	<p><math>x_i</math> → Suivant la position de l'endommagement, retirer <math>x_A</math>, <math>x_C</math>, <math>x_D</math> ou <math>x_B</math> des variables d'itération</p> <p><math>d</math> → Dans le cas où il est supposé que l'endommagement correspond à la rotule D, introduire l'épaisseur réduite de l'arc en ce point</p>
	f	[-]	-1.47E-12	
	j	[-]	4.40E-08	
	k	[-]	-5.46E-04	
	r	[-]	3.238	
	<b><math>x_A</math></b>	<b>[mm]</b>	<b>3404</b>	
	<b><math>x_C</math></b>	<b>[mm]</b>	<b>6222</b>	
	<b><math>x_D</math></b>	<b>[mm]</b>	<b>10811</b>	
	<b><math>x_B</math></b>	<b>[mm]</b>	<b>13937</b>	
	a	[mm]	2817	
	b	[mm]	3126	
	$\gamma_D$	[rad]	0.502468789	
	$h_A$	[mm]	6235	
	$h_C$	[mm]	7413	
	$h_D$	[mm]	6767	
	$h_B$	[mm]	2876	
	$L_R$	[mm]	10533	
	<b>d</b>	<b>[mm]</b>	<b>1000</b>	
	v	[mm]	4000	
	$h_R$	[mm]	9000	
$h_S$	[mm]	500		
$h_{L/2}$	[mm]	7500		
Matériau	$\alpha$	[-]	0.726	
	$\beta$	[-]	6.095	
Charges permanentes	$PP_R$	[N/mm <sup>3</sup> ]	0.000018	
	$PP_S$	[N/mm <sup>3</sup> ]	0.00002	
	$\eta$	[N]	2225812	
	$\phi$	[N]	522510	
	$\psi$	[N]	968782	
	$\eta w$	[Nmm]	10020427278	
	$\phi s$	[Nmm]	790497747	
$\psi t$	[Nmm]	1737296473		

<b>Poussée du remplissage</b>	$\varphi$	[°]	30
	$c$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0
	$m_p$	[-]	0.33
	$K_p$	[-]	3.00
	$m_{pc}$	[-]	0.01
	$K_{pc}$	[-]	3.464
	$R$	[N]	1326346
	$Rz_B$	[Nmm]	2226927037
	$Rz_D$	[Nmm]	2933804580
<b>Modèle de charge de trafic routier</b>	$\delta$	[°]	30
	$h_{Rclé}$	[mm]	1500
	$Q$	[N]	160000
	$q_{rép}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.005
	$q_{trans}$	[N/mm]	40
	$\chi$	[N/mm <sup>2</sup> ]	0.018761279
	$\ell$	[mm]	2132
<b>Efforts intérieurs dans les rotules</b>	$N_{admis}$	[N]	-1250000
	$d_A$	[mm]	1000
	$M_A$	[Nmm]	608551127
	$d_C$	[mm]	500
	$M_C$	[Nmm]	296051127
	$d_B$	[mm]	1000
	$M_B$	[Nmm]	608551127
<b>Change-ments de variables</b>	$E$	[Nmm]	365571276
	$F$	[Nmm]	-1403656172
	$G$	[N]	-223724
	$H$	[N]	-935182
	$n$	-	7.111
<b>Réactions d'appui</b>	$H_A$	[N]	2267230
	$H_B$	[N]	940883
	$V_A$	[N]	1857942
	$V_B$	[N]	2088084

$d_i \rightarrow$  Epaisseur de l'arc considérée dans la rotule  $i$

$M_i \rightarrow$  (5.17) tenant compte de l'épaisseur  $d_i$  et de l'effort normal admis  $N_{admis}$

Représentation graphique de la position des rotules :





---

## Curriculum vitae

Alix GRANDJEAN  
Rue de la Placette 3  
1304 Cossonay-Ville  
alix.grandjean@a3.epfl.ch

Née le 12.08.1980  
Célibataire  
Suisse



### Formation

2005 – 2010	Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Doctorat es sciences
1999 – 2005	Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Master of science en génie civil
1996 – 1999	Gymnase Auguste Picard, Lausanne Certificat de maturité fédérale

### Expérience professionnelle

2005 – 2010	Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Assistante – doctorante.  <i>Sujet de thèse</i> : Capacité portante de ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle – Modèle d'évaluation intégrant le niveau d'endommagement.  <i>Mandats</i> : Pont "La Madelon", RC 247.4, JU, évaluation de l'état ; "Murs de soutènement en maçonnerie de pierre naturelle. Directive pour l'évaluation de l'état et les concepts d'intervention", rédaction ; Pont sur la Sionge, Riaz, expertise ; Pont sur la Dala, Rümbling, évaluation de l'état ; Viaduc de Gümmenen, évaluation de l'état ; Immeuble 27 rue du Four, Yverdon-les-Bains, expertise ; Immeuble 40 rue des Maraîchers, Genève, évaluation de l'état d'une dalle à hourdis avec essai de charge ; Pont Adolphe, Luxembourg, participation à la campagne géoradar.  <i>Assistanat</i> : Assistante des cours de Sécurité et fiabilité I et Esthétique des ouvrages, supervision de travaux de semestre et master en génie civil.
2005 – 2010	GTG – Communauté d'ingénieurs civils, collaboration à divers projets, notamment : Basilique de Valère, restauration ; Collégiale de Neuchâtel, restauration.
2003 – 2005	Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Assistante – étudiante pour les cours de Mécanique des structures et solides IV, d'Instruments informatiques de base et Dessin assisté par ordinateur (Génie civil), de Statique et résistance des

matériaux (Science et Ingénierie de l'Environnement).  
2003 ESM - Sarrasin Ingénieurs SA, Saint-Sulpice, stage de 6 semaines.

### **Langues**

Français	Langue maternelle
Anglais	Bonnes connaissances
Allemand	Connaissances scolaires

### **Publications**

Grandjean A. (2008) *Numerical masonry: a tool for establishing stress-strain relationship for natural-stone masonry*, 7th fib PhD Symposium in Stuttgart, Germany, pp. 23-32.

Grandjean A., Brühwiler E. (2009) *Advanced examination of historical masonry bridges for future traffic demands*, Proceedings of the Third International Congress on Construction History, Cottbus, pp. 737-743.

Grandjean A., Brühwiler E. (2009) *Load-bearing capacity of masonry arch bridges using a plastic model*, Proceedings of the International Conference on Protection of Historical Buildings, Prohitech 09, Rome, Italy, pp. 195-200.