Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos,
Canales y Puertos

ANÁLISIS DE INESTABILIDADES EN MATERIALES REFORZADOS BIDIRECCIONALMENTE CON APLICACIÓN EN LA BIOMECÁNICA: LA FORMACIÓN DE ANEURISMAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Jefferson Andrés Giraldo Apolinar
Ingeniero Civil

Madrid, septiembre de 2012

Universidad Politécnica de Madrid
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Máster Universitario en Ingeniería de las Estructuras, Cimentaciones y Materiales

TRABAJO FIN DE MÁSTER

ANÁLISIS DE INESTABILIDADES EN MATERIALES REFORZADOS BIDIRECCIONALMENTE CON APLICACIÓN EN LA BIOMECÁNICA: LA FORMACIÓN DE ANEURISMAS

Autor
Jefferson Andrés Giraldo Apolinar
Ingeniero Civil

Director
José Merodio Gómez
Doctor Ingeniero Mecánico

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Madrid, septiembre de 2012

RESUMEN

Este trabajo analiza la influencia de parámetros mecánicos, desde la geometría y el modelo constitutivo (material de Holzapfel, que es una matriz neo-hookena reforzada bidireccionalmente con fibras de colágeno y elastina dispuestas de forma simétrica), en la bifurcación tipo abultamiento de cilindros huecos sometidos a presión interna y carga axial, relacionado con la formación de aneurismas en enfermedades cardiovasculares. Se valida una formulación analítica de las condiciones de bifurcación para cilindros de pared delgada sometidos al tipo de carga mencionado.

Se analiza la influencia de los siguientes parámetros: dispersión de las fibras en cilindros de pared delgada, dispersión de las fibras en cilindros de pared gruesa, espesor de la pared del cilindro, orientación de las fibras, longitud del cilindro, imperfección geométrica y capas en el espesor.

Los resultados muestran un acoplamiento entre los alargamientos circunferenciales y axiales para los que se produce la bifurcación. Se observa como este acoplamiento modifica cualitativamente y de forma relevante los resultados, existiendo una dependencia de estos a ambos valores.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN I
ÍNDICE GENERAL III
ÍNDICE DE FIGURAS VII
ÍNDICE DE TABLAS XIII
AGRADECIMIENTOS XV
Cápitulo 1. INTRODUCCIÓN 1
1.1. MOTIVACIÓN 1
1.2. OBJETIVOS 4
1.2.1. Objetivo general 4
1.2.2. Objetivos específicos 4
Cápitulo 2. HISTOLOGÍA, COMPORTAMIENTO MECÁNICO Y ENFERMEDADES DE LA PARED ARTERIAL 5
2.1. SISTEMA CARDIOVASCULAR. DESCRIPCIÓN GENERAL. 5
2.1.1. Histología arterial [8] 5
2.1.2. Comportamiento mecánico de la pared arterial 8
2.1.3. Enfermedades arteriales o que afectan las arterias [11] 9
Cápitulo 3. MODELOS CONSTITUTIVOS DE LA PARED ARTERIAL [8] 13
3.1. FORMULACIÓN TRIDIMENSIONAL 13
3.1.1. Función de energía de deformación propuesta por Delfino et al. 13
3.1.2. Función de energía de deformación tipo *Fung* 15
3.2. FORMULACIÓN BIDIMENSIONAL 16
3.2.1. La función de energía $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{E\Theta\Theta}, \mathbf{EZZ}, \mathbf{E\Theta Z})$ 16
3.2.2. Función de energía de deformación propuesta por Vaishnav et al. [2] 17
3.2.3. Función de energía de deformación propuesta por Fung et al. [4] .. 18
3.2.4. Función de energía de deformación propuesta por Takamizawa y Hayashi 19
3.3. MODELO DE GASSER-OGDEN-HOLZAPFEL [9] [8] [15] 20
3.3.1. Modelo constitutivo para las capas de la arteria 20
3.4. BIFURCACIÓN DE EQUILIBRIO DE CILINDROS BAJO PRESIÓN INTERNA Y CARGA AXIAL [5] [6] [7] 26
3.4.1. Análisis de la influencia del fenómeno de ablandamiento por deformación localizado en la bifurcación de cilindros de pared delgada bajo presión interna y estiramiento axial [5] 26

3.4.2. Análisis de la influencia del fenómeno de ablandamiento por deformación localizado en la bifurcación de cilindros de pared gruesa bajo presión interna y estiramiento axial [6] 30

3.4.3. Análisis de las condiciones de bifurcación de cilindros de pared delgada bajo presión interna y estiramiento axial, basado en el modelo de Holzapfel et al. [7] [8] 34

Cápitulo 4. ANÁLISIS NÚMERICO DE INESTABILIDAD DE BIFURCACIÓN PARA CILINDROS DE PARED DELGADA Y GRUESA CON MATERIAL DE HOLZAPFEL ET AL [9] 41

4.1. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS [19] [20] 41

4.2. EL MÉTODO DE RIKS [22] 43

4.3. MODELOS DE LA PARED ARTERIAL MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS 43

4.3.1. Geometrías globales y variaciones geométricas 46

4.3.2. Parámetros del material 47

4.3.3. Condiciones de contorno, cargas y pasos 48

4.3.4. Malla y elemento implementados 48

4.4. ANÁLISIS MEDIANTE MODELOS DE LA PARED ARTERIAL 50

4.4.1. Validación de la formulación analítica para las condiciones de bifurcación de cilindros huecos sometidos a carga axial y presión interna [7] 50

4.4.2. Influencia del parámetro de dispersión de las fibras ($\boldsymbol{\kappa}$) en cilindros de pared delgada 52

4.4.3. Influencia del parámetro de dispersión de las fibras ($\boldsymbol{\kappa}$) en cilindros de pared gruesa 56

4.4.4. Influencia del espesor de la pared 60

4.4.5. Influencia de la orientación de las fibras $\boldsymbol{\varphi}$ 64

4.4.6. Influencia de la longitud del cilindro 69

4.4.7. Influencia de la geometría de la pared 73

4.4.8. Influencia de varias capas en el espesor 76

4.5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS 84

Cápitulo 5. CONCLUSIONES 87

Apéndice A. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS [19] [20] 89

A.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ELÁSTICO 89

A.2. FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA 90

A.3. DISCRETIZACIÓN MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS 91

Apéndice B. TABLAS CORRESPONDIENTES A FIGURAS DE ANÁLISIS 97

B.1. INFLUENCIA DE LA DISPERSIÓN DE LAS FIBRAS EN PARED DELGADA. 97

B.2. INFLUENCIA DE LA DISPERSIÓN DE LAS FIBRAS EN PARED GRUESA. 98

B.3. INFLUENCIA DEL ESPESOR. 99

B.4. INFLUENCIA DE LA ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS. 100

B.5. INFLUENCIA DE LA GEOMETRÍA DEL MODELO. 101

B.6. INFLUENCIA DE LA LONGITUD DEL CILINDRO. 102
B.7. INFLUENCIA DEL NÚMERO DE CAPAS. 103
BIBLIOGRAFÍA 105

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – SISTEMA CARDIOVASCULAR. TOMADA DE [**10**]..5

FIGURA 2.2 – DIAGRAMA DE LOS COMPONENTES DE UNA ARTERIA ELÁSTICA SANA. TOMADA DE [**8**]..6

FIGURA 2.3 – DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DE UNA CURVA TENSIÓN DEFORMACIÓN TÍPICA PARA FRACCIONES CIRCUNFERENCIALES DE ARTERIA (MEDIA) EN CONDICIÓN PASIVA. TOMADA DE [**8**]..8

FIGURA 2.4 – ATEROSCLEROSIS. TOMADA DE [**11**]. 10

FIGURA 2.5 – ANEURISMA DE AORTA. TOMADA DE [**14**]..11

FIGURA 3.1 – CURVAS ISOPOTENCIALES DE (3.1) CON PARÁMETROS DEL MATERIAL A = 44.2 KPA Y B = 16.7. TOMADA DE [**8**]. 14

FIGURA 3.2 - MODELO DE HUMPHREY CON FUNCIÓN TIPO FUNG: CURVAS ISOPOTENCIALES DE Ψ. (IZQ.) CONJUNTO DE PARÁMETROS QUE ASEGURAN CONVEXIDAD. (DER.) CONJUNTO DE PARÁMETROS QUE ILUSTRAN NO CONVEXIDAD DE Ψ. TOMADA DE [**8**]..15

FIGURA 3.3 – CURVAS ISOPOTENCIALES DE (3.20) C_1 = -24,385 KPA, C_2 = -3,589 KPA, C_3 = -1,982 KPA, C_4 = 46,334 KPA, C_5 = 32,321 KPA, C_6 =3,743 KPA Y C_7 = 3,266 KPA. TOMADA DE [**8**]..18

FIGURA 3.4 – CURVAS ISOPOTENCIALES DE (3.21). (IZQ.) PARÁMETROS C = 28,58 KPA,B_1 = 0,8329, B_2 = 0,6004 Y B_3 = 0,016. (DER.) CONJUNTO DE PARÁMETROS PARA LOS CUALES (3.21) NO RESULTA EN CONVEXA. TOMADA DE [**8**].................19

FIGURA 3.5 – CURVAS ISOPOTENCIALES DE (3.23). (IZQ.) PARÁMETROS C = 57,94 KPA, B_1 = 0,0,6311, B_2 = 0,4728 Y B_3 = 0,0301. (DER.) CONJUNTO DE PARÁMETROS PARA LOS CUALES (3.23) NO RESULTA EN CONVEXA. TOMADA DE [**8**] 20

FIGURA 3.6 – MODELO BICAPA. TOMADA DE [**8**]. 21

FIGURA 3.7 – CARACTERIZACIÓN DE UN VECTOR UNITARIO ARBITRARIO $\boldsymbol{M}$. TOMADA DE [**9**]...23

FIGURA 3.8 – REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS DE COLÁGENO BASADAS EN UNA FUNCIÓN DE DENSIDAD TRANSVERSALMENTE ISÓTROPA. TOMADA DE [**9**]. 24

FIGURA 3.9 – CURVAS DE $\sigma\theta\theta/\mu$ VS. $\lambda\theta$ PARA $\lambda z =$ 1.5 FIJO. LA LÍNEA PUNTEADA CORRESPONDE A $\beta = 0$ (MATERIAL NEOHOOKEANO) Y LAS OTRAS LÍNEAS CORRESPONDEN A $\beta = 0, 0.25, 0.75, 1.25, 1.75, 2.0$ TOMADA DE [**5**]. 28

FIGURA 3.10 – CURVAS DE BIFURCACIÓN PARA TUBO DE LONGITUD INFINITA EN MODO DE ABULTAMIENTO PARA $\beta = (0, 0.01, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08)$, DONDE $\beta = 0$ CORRESPONDE A UN MATERIAL NEOHOOKEANO (CURVA DISCONTINUA). LA CURVA CON EL MÍNIMO MÁS PEQUEÑO CORRESPONDE A $\beta = 0.08$ Y EL MÍNIMO INCREMENTA CONFORMA β DECRECE. TOMADA DE [**5**]..29

FIGURA 3.11 - CURVAS DE BIFURCACIÓN PARA TUBO DE LONGITUD INFINITA EN MODO DE ABULTAMIENTO PARA $\beta = (0, 0.025, 0.05, 0.1, 0.15, 0.175, 0.2)$, DONDE $\beta = 0$ CORRESPONDE A UN MATERIAL NEOHOOKEANO (CURVA DISCONTINUA SUPERIOR). LA CURVA CON EL MÍNIMO MÁS PEQUEÑO CORRESPONDE A $\beta = 0.2$ Y EL MÍNIMO INCREMENTA CONFORMA β DECREC. TOMADA DE [**5**].......................29

FIGURA 3.12 – CURVAS DE BIFURCACIÓN DEL MODO ABULTAMIENTO PARA $\beta = 0.2$ Y PARA TUBOS CON LONGITUD FINITA CON $L/R = 10, 15, 25, 50$. LA CURVA DISCONTINUA CORRESPONDE A PRESIÓN INTERNA NULA. 30

FIGURA 3.13 – PRESIÓN INTERNA ADIMENSIONAL $2P/\mu$ VERSUS $\lambda\theta a$ PARA $\lambda z = 1, 1.25$ CON $\beta = 0(0.15)0.75$ PARA CADA FAMILIA DE CURVAS. LAS DOS FAMILIAS DE CURVAS QUE CORTAN EL EJE $\lambda\theta a$ EN 1, CORRESPONDEN A $\lambda z = 1$, CADA UNA ASOCIADA A UN ESPESOR DE PARED $(A/B = 0.6, 0.8)$. PARA UN MISMO λz Y $\lambda\theta a$ DETERMINADO, PAREDES MÁS GRUESAS REQUIEREN PRESIONES MAYORES. LAS CURVAS DISCONTINUAS REPRESENTAN UN MATERIAL NEOHOOKEANO $\beta = 0$. LAS CURVAS CON LOS MAYORES MÁXIMOS LOCALES DE CADA FAMILIA ESTÁN ASOCIADOS CON $\beta = 0.75$, DECRECIENDO EL MÁXIMO CON EL VALOR DE β. TOMADA DE [**6**]. 31

FIGURA 3.14 – TENSIÓN CIRCUNFERENCIAL ADIMENSIONAL $2\sigma\theta\theta/\mu$ EVALUADA EN LAS SUPERFICIES INTERNA Y EXTERNA DEL CILINDRO VERSUS $\lambda\theta a$. SE MUESTRAN DOS FAMILIAS DE CURVAS, UNA PARA CADA SUPERFICIE. EL ESPESOR DEL CILINDRO ES $A/B = 0.5$ Y $\lambda z = 1$. EN CADA FAMILIA HASY CINCO CURVAS CORRESPONDIENTES A $\beta = 0(0.25)1$, SIENDO $\beta = 0$ EL MATERIAL NEOHOOKEANO (CURVAS DISCONTINUAS). TOMADA DE [**6**]. 32

FIGURA 3.15 – SEGUNDA DERIVADA DE LA TENSIÓN CIRCUNFERENCIAL ADIMENSIONAL $2/\mu\ d2\sigma\theta\theta/d2\lambda\theta a$ EVALUADA EN LA SUPERFICIE INTERNA DEL CILINDRO VERSUS $\lambda\theta a$. LAS CURVAS CONTINUAS CORRESPONDEN A $A/B = 0.5$ Y LAS DISCONTINUAS CORRESPONDEN A $A/B = 0.9$. EN AMBOS CASOS $\beta = 0(0.25)1$, SIENDO $\beta = 0$ UN MATERIAL NEOHOOKEANO (CURVAS DISCONTINUAS - CRECIMIENTO MONÓTONO). TOMADA DE [**6**]. 32

FIGURA 3.16 – PUNTOS DE BIFURCACIÓN AXISIMÉTRICA EN TÉRMINOS DE $\lambda\theta a$ VERSUS λz. $L/B = 10$, $A/B = 0.8$ Y β ENTRE 0 Y 0.25. LA CURVA DISCONTINUA SUPERIOR CORRESPONDE A UN MATERIAL NEOHOOKEANO $(\beta = 0)$ Y LA CURVA DISCONTINUA INFERIOR CORRESPONDE A PRESIÓN INTERNA CERO. TOMADA DE [**6**]..33

FIGURA 3.17 - PUNTOS DE BIFURCACIÓN AXISIMÉTRICA EN TÉRMINOS DE $\lambda\theta a$ VERSUS λz. DOS FAMILIAS DE CUATRO CURVAS CADA UNA PARA DOS ESPESORES DE PARED DIFERENTES. LAS CURVAS PUNTEADAS CORRESPONDEN A $A/B = 0.5$, MIENTRAS QUE SÓLIDAS SON PARA $A/B = 0.9$. EN CADA FAMILIA SE TIENE $L/B = 10,20,50,100$. $\beta = 0.25$ EN TODOS LOS CASOS. LA LÍNEA DISCONTINUA INFERIOR CORRESPONDE A PRESIÓN INTERNA CERO. TOMADA DE [**6**]. 34

FIGURA 3.18 – BALANCE DE FUERZAS PARA EL MODO DE ABULTAMIENTO. TOMADA DE [**7**]...35

FIGURA 3.19 – CURVAS $k1c/\mu$ VS. $k2/k2c$ PARA DISTINTOS φ. CADA CURVA ES UNA LÍNEA DE TRANSICIÓN: COORDENADAS QUE ESTÉN POR ENCIMA O A LA DERECHA DE CADA CURVA, DAN PARÁMETROS DEL MATERIAL QUE NO PERMITEN EL MODO DE INESTABILIDAD POR ABULTAMIENTO. COORDENADAS QUE ESTÉN CONTENIDAS EN LA REGIÓN DELIMITADA POR LA CURVA (INCLUSIVE), DAN PARÁMETROS DEL MATERIAL QUE SE ASOCIAN CON ABULTAMIENTO PARA DEFORMACIONES QUE CUMPLAN $\lambda z \geq 1$ Y $\lambda\theta \geq 1$.TOMADA DE [**7**]...40

FIGURA 4.1 – MODELO FÍSICO IDEALIZADO DE UNA ARANDELA (IZQ.). DISCRETIZACIÓN Y MALLADO DEL MODELO (DER.). 42

FIGURA 4.2 – TIPOS DE ELEMENTOS: HEXAEDRO DE 8 NODOS (IZQ.), CUADRÁTICO DE 20 NODOS (CENT.) Y TETRAEDRO DE 10 NODOS (DERECHA). TOMADA DE [**21**].....42

FIGURA 4.3 – (A) MODELO DE ARTERIA CON SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS: 1 – EJE RADIAL, 2 – EJE CIRCUNFERENCIAL Y 3 – EJE AXIAL. (B) MEDIDAS PRINCIPALES DEL MODELO. 44

FIGURA 4.4 – FASES DEL ANÁLISIS DE INESTABILIDAD. FASE I (SUP.): CILINDRO SIN PRESIÓN (IZQ.), ALARGAMIENTO AXIAL IMPUESTO Y PROLONGADO DURANTE EL

ANÁLISIS (CENTRO) Y MODO DE PANDEO BUSCADO DEBIDO A PRESIÓN INTERNA (DER.). FASE 2 (INF.): INESTABILIDAD POR ABULTAMIENTO....................................45

FIGURA 4.5 – “CUÑA” AXISIMÉTRICA DEBIDA A LA SIMETRÍA RESPECTO AL EJE AXIAL. 45

FIGURA 4.6 – GEOMETRÍAS DISEÑADAS PARA IMPLEMENTAR LA IMPERFECCIÓN AL MODELO. 46

FIGURA 4.7 – VARIACIONES DE ESPESOR. $e = 0.1\ a, 0.2\ b, 0.3\ c, 0.4\ d, 0.5\ (e)$ MM.............47

FIGURA 4.8 – CONDICIONES DE CONTORNO Y CARGA. (A) RESTRICCIÓN DESPLAZAMIENTO EJE AXIAL; (B) DESPLAZAMIENTO IMPUESTO EN DIRECCIÓN AXIAL; (B) RESTRICCIÓN DESPLAZAMIENTO CIRCUNFERENCIAL; (D) PRESIÓN INTERNA. 48

FIGURA 4.9 – ANÁLISIS DE CONVERGENCIA PARA ELECCIÓN DE MALLA.......................49

FIGURA 4.10 – MALLA ESTRUCTURADA. 49

FIGURA 4.11 – METODOLOGÍA UTILIZADA PARA ENCONTRAR $k1c$. 51

FIGURA 4.12 – CURVA LPF VS. LONGITUD DE ARCO TÍPICA DE MODELO QUE PRESENTA INESTABILIDAD NUMÉRICA. 51

FIGURA 4.13 – CURVAS LPF VERSUS LONGITUD DE ARCO PARA DIVERSOS ESPESORES DESDE PARED DELGADA A PARED GRUESA.......................................52

FIGURA 4.14 – $\lambda\theta$ VS. λz CON VARIACIONES DE $\kappa = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$. $e = 0.1mm$; $\varphi = 15°$. 53

FIGURA 4.15 – $\sigma\theta\theta/C10$VS. λz CON VARIACIONES DE $\kappa = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$. $e = 0.1mm$; $\varphi = 15°$. 54

FIGURA 4.16 – PRESIÓN APLICADA P VS. λz CON VARIACIONES DE $\kappa = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$. $e = 0.1mm$; $\varphi = 15°$. 54

FIGURA 4.17 – MECANISMOS GEOMÉTRICOS DE LA BIFURCACIÓN...............................56

FIGURA 4.18 – REDUCCIÓN DE LA PARED DESDE EL ESTADO INICIAL (a) HASTA LA INESTABILIDAD (b) Y FINAL DEL ANÁLISIS c..56

FIGURA 4.19 – $\lambda\theta$ VS. λz CON VARIACIONES DE $\kappa = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$. $e = 0.4mm$; $\varphi = 15°$. 57

FIGURA 4.20 – $\sigma\theta\theta/C10$VS. λz CON VARIACIONES DE $\kappa = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$. $e = 0.4mm$; $\varphi = 15°$. 57

FIGURA 4.21 – PRESIÓN APLICADA P VS. λz CON VARIACIONES DE $\kappa = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$. $e = 0.1mm$; $\varphi = 15°$. 58

FIGURA 4.22 – VARIACIÓN DE LA ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS (φ) RESPECTO DEL EJE AXIAL VS. LONGITUD DE ARCO PARA DIFERENTES PARÁMETROS κ EN LA CARA INTERNA DE LA PARED (LÍNEAS DISCONTINUAS) Y EN LA CARA EXTERNA (LÍNEAS CONTINUAS) PARA $\lambda z = 1.5$. 59

FIGURA 4.23 – $\lambda\theta$ VS. λz CON VARIACIONES DE $e = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5mm$. $\kappa = 0.0$; $\varphi = 15°$. 60

FIGURA 4.24 – $\sigma\theta\theta/C10$VS. λz CON VARIACIONES DE $e = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5mm$. $\kappa = 0.0$; $\varphi = 15°$. 61

FIGURA 4.25 – PRESIÓN APLICADA P VS. λz CON VARIACIONES DE $e = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5mm$. $\kappa = 0.0$; $\varphi = 15°$..61

FIGURA 4.26 – VARIACIÓN DE LA ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS (φ) RESPECTO DEL EJE AXIAL VS. LONGITUD DE ARCO PARA DIFERENTES ESPESORES EN LA CARA INTERNA DE LA PARED (LÍNEAS DISCONTINUAS) Y EN LA CARA EXTERNA (LÍNEAS CONTINUAS) PARA $\lambda z = 1.35$. 62

FIGURA 4.27 – VARIACIÓN DE LA TENSIÓN RADIAL σrr PARA DIFERENTES ESPESORES EN EL MOMENTO DE LA BIFURCACIÓN. 63
FIGURA 4.28 - TENSIÓN RADIAL σrr VS. LONGITUD DE ARCO PARA DIFERENTES VALORES DEL ESPESOR EN LA PARED INTERNA (LÍNEA DISCONTINUA) Y EN LA PARED EXTERNA (LÍNEA CONTINUA)..63
FIGURA 4.29 - $\lambda\theta$ VS. λz CON VARIACIONES DE $\varphi = 15, 30, 60, 75°$. $\kappa = 0.0$; $e = 0.4\ mm$....64
FIGURA 4.30 – CURVAS DEL FACTOR PROPORCIONAL DE CARGA (LPF) PARA ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS75 PARA $\lambda\theta = 1.75, 2.00$. MODELOS ESTABLES. 65
FIGURA 4.31 - $\sigma\theta\theta/C10$ VS. λz CON VARIACIONES DE $\varphi = 15, 30, 60, 75°$. $\kappa = 0.0$; $e = 0.4\ mm$. 65
FIGURA 4.32 - PRESIÓN APLICADA P VS. λz CON VARIACIONES DE $\varphi = 15, 30, 60, 75°$. $\kappa = 0.0$; $e = 0.4\ mm$. 66
FIGURA 4.33 – VARIACIÓN DE LA ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS (φ) RESPECTO DEL EJE AXIAL VS. LONGITUD DE ARCO PARA DIFERENTES ORIENTACIONES DE LA FIBRAS EN LA CARA INTERNA DE LA PARED (LÍNEAS DISCONTINUAS) Y EN LA CARA EXTERNA (LÍNEAS CONTINUAS) PARA $\lambda z = 1.10$. 67
FIGURA 4.34 - $\lambda\theta$ VS. λz CON VARIACIONES CON VARIACIONES DE $L/R = 5, 20, 50$. $\kappa = 0.0$; $e = 0.2\ mm$; $\varphi = 30°$. 69
FIGURA 4.35 - $\sigma\theta\theta/C10$VS. λz CON VARIACIONES CON VARIACIONES DE $L/R = 5, 20, 50$. $\kappa = 0.0$; $e = 0.2\ mm$; $\varphi = 30°$. 70
FIGURA 4.36 - PRESIÓN APLICADA P VS. λz CON VARIACIONES CON VARIACIONES DE $L/R = 5, 20, 50$. $\kappa = 0.0$; $e = 0.2\ mm$; $\varphi = 30°$..70
FIGURA 4.37 – FORMACIÓN DE ANEURISMA POR BIFURCACIÓN TIPO ABULTAMIENTO PARA L/R $5, 20$ Y 50. 72
FIGURA 4.38 – DESPLAZAMIENTO EN EL EJE X PARA DIFERENTES NODOS POSICIONADOS EN LA PARED EXTERNA A DIFERENTES DISTANCIAS A PARTIR DEL PUNTO DE PROPAGACIÓN DEL ABULTAMIENTO. 72
FIGURA 4.39 – PROPAGACIÓN AXIAL POST BIFURCACIÓN PARA L/R 50 Y $\lambda z = 1.75$......73
FIGURA 4.40 - $\lambda\theta$ VS. λz PARA DISTINTAS GEOMETRÍAS. $\kappa = 0.0$; $e = 0.1\ mm$; $\varphi = 60°$....74
FIGURA 4.41 - $\sigma\theta\theta/C10$ VS. λz PARA DISTINTAS GEOMETRÍAS. $\kappa = 0.0$; $e = 0.1\ mm$; $\varphi = 60°$. 74
FIGURA 4.42 - PRESIÓN APLICADA P VS. λz PARA DISTINTAS GEOMETRÍAS. $\kappa = 0.0$; $e = 0.1\ mm$; $\varphi = 60°$..75
FIGURA 4.43 – ABULTAMIENTO EN MODELO AUMENTADO. PROPAGACIÓN DEL ABULTAMIENTO SIEMPRE POR LA PARTE SUPERIOR, DONDE LA PARED ES MÁS DELGADA. (a) $\lambda z = 1.1$ Y (b) $\lambda z = 1.35$. 75
FIGURA 4.44 – MODELO BICAPA...76
FIGURA 4.45 -$\lambda\theta$ VS. λz PARA UNA Y DOS CAPAS EN LA PARED ARTERIAL.$L/R = 20$. $\kappa = 0.0$. ESPESOR TOTAL DE LA PARED $e = 0.4\ mm$. 77
FIGURA 4.46 - $\sigma\theta\theta/C10$VS. λz PARA UNA Y DOS CAPAS DE LA PARED ARTERIAL. $L/R = 20$. $\kappa = 0.0$. ESPESOR TOTAL DE LA PARED $e = 0.4\ mm$. 77
FIGURA 4.47 - PRESIÓN APLICADA P VS. λz PARA UNA Y DOS CAPAS EN LA PARED ARTERIAL. $L/R = 20$. $\kappa = 0.0$. ESPESOR TOTAL DE LA PARED $e = 0.4\ mm$..............78
FIGURA 4.48 – EVOLUCIÓN DE LOS ÁNGULOS EN CADA MODELO Y CAPA. $\lambda z = 1.75$....79
FIGURA 4.49 – NODOS EN EL ESPESOR DE LA PARED PARA ANALIZAR TENSIONES....79
FIGURA 4.50 – EVOLUCIÓN DE TENSIONES RADIALES$\sigma rr\ [kPa]$ EN LA PARED DE LA ARTERIA: CAPA MEDIA (NODOS $1-8$) Y CAPA ADVENTICIA (NODOS $9-13$). $\lambda z = 1.75$. 80

FIGURA 4.51 – EVOLUCIÓN DE TENSIONES RADIALES$\sigma\theta\theta$ $[kPa]$ EN LA PARED DE LA ARTERIA: CAPA MEDIA (NODOS $1-8$) Y CAPA ADVENTICIA (NODOS $9-13$). $\lambda z = 1.75$. 81

FIGURA 4.52 – EVOLUCIÓN DE TENSIONES RADIALES$\sigma\theta\theta$ $[kPa]$ EN LA PARED DE LA ARTERIA: CAPA MEDIA (NODOS $1-8$) Y CAPA ADVENTICIA (NODOS $9-13$). $\lambda z = 1.75$ 82

FIGURA 4.53 – TENSIONES RADIALES, CIRCUNFERENCIALES Y AXIALES EN SUS RESPECTIVAS DIRECCIONES PRINCIPALES VS. DISTANCIA DESDE LA PARED INTERIOR HASTA LA EXTERIOR. $\lambda z = 1.75$. 83

FIGURA 4.54 – EVOLUCIÓN DE LA ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS PARA DIFERENTES ALARGAMIENTOS AXIALES. ORIENTACIÓN INICIAL DE LAS FIBRAS $60°$. 85

FIGURA A.1 – EQUILIBRIO DE CUERPO CONTINÚO. TOMADA DE [**19**]....89

FIGURA A.2 – PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL. TOMADA DE [**19**]....90

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 2.1 – ALGUNAS PROPIEDADES DE LA PARED ARTERIAL [**9**]. 9

TABLA 4.1 – PARÁMETROS DEL MATERIAL DE HOLZAPFEL QUE PERMITEN LA BIFURCACIÓN SEGÚN ÁNGULO DE LAS FIBRAS..51

TABLA 4.2 – ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS EN LA BIFURCACIÓN RESPECTO AL EJE AXIAL PARA VALORES CRÍTICOS DE λz. PARED DELGADA.....................................55

TABLA 4.3 – ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS EN LA BIFURCACIÓN RESPECTO AL EJE AXIAL PARA VALORES CRÍTICOS DE λz. PARED GRUESA. 59

TABLA 4.4 – ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS EN LA BIFURCACIÓN RESPECTO AL EJE AXIAL PARA VALORES CRÍTICOS DE λz. VARIACIÓN DE ESPESOR. 62

TABLA 4.5 – ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS EN LA BIFURCACIÓN RESPECTO AL EJE AXIAL PARA VALORES CRÍTICOS DE λz. VARIACIÓN DE LA ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS. 67

TABLA 4.6 – LONGITUD DE ARCO EN LA BIFURCACIÓN PARA VALORES CRÍTICOS DE λz. VARIACIÓN DE LA ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS. 67

TABLA 4.7 – INFLUENCIA DE LA DISPERSIÓN DE FIBRAS EN ALARGAMIENTOS CIRCUNFERENCIALES CON VARIACIÓN DE ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS. $\lambda z = 1.30$. 68

TABLA 4.8 – INFLUENCIA DE LA DISPERSIÓN DE FIBRAS EN TENSIONES CIRCUNFERENCIALES CON VARIACIÓN DE ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS. $\lambda z = 1.30$. 68

TABLA 4.9 – INFLUENCIA DE LA DISPERSIÓN DE FIBRAS EN PRESIÓN APLICADA CON VARIACIÓN DE ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS. $\lambda z = 1.30$. 68

TABLA 4.10 – LONGITUD DE ARCO EN EL MOMENTO DE LA BIFURCACIÓN PARA DIFERENTES ORIENTACIONES Y DISPERSIONES DE LAS FIBRAS. $\lambda z = 1.30$. 68

TABLA 4.11 – ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS EN EL MOMENTO DE LA BIFURCACIÓN PARA DIFERENTES ORIENTACIONES Y DISPERSIONES DE LAS FIBRAS. $\lambda z = 1.30$. 69

TABLA 4.12 – ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS EN EL MOMENTO DE LA BIFURCACIÓN PARA DIFERENTES LONGITUDES. $\varphi = 30°$...71

TABLA 4.13 – LONGITUD DE ARCO EN EL MOMENTO DE LA BIFURCACIÓN PARA DIFERENTES LONGITUDES. $\varphi = 30°$. 71

TABLA 4.14 - DISTANCIA (mm) DE NODOS DE LA PARED EXTERNA DESDE EL PLANO DE SIMETRÍA $r - \theta$. 72

TABLA 4.15 – PARÁMETROS PARA MODELOS DE UNA SOLA CAPA. $e = 0.26\ mm$. 76

TABLA 4.16 – PARÁMETROS PARA MODELO BICAPA. 76

TABLA 4.17 – ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS EN EL MOMENTO DE LA BIFURCACIÓN PARA DIFERENTE NÚMERO DE CAPAS. $e = 0.4\ mm$. 78

TABLA 4.18 – LONGITUD DE ARCO EN EL MOMENTO DE LA BIFURCACIÓN PARA DIFERENTE NÚMERO DE CAPAS. $e = 0.4\ mm$. 78

TABLA B.1 – ALARGAMIENTO CIRCUNFERENCIAL CON VARIACIÓN DE DISPERSIÓN DE FIBRAS. $e = 0.1mm$. 97

TABLA B.2 – $\Sigma_{\Theta\Theta}/C_{10}$ CON VARIACIÓN DE DISPERSIÓN DE FIBRAS. $e = 0.1mm$................97

TABLA B.3 – PRESIÓN APLICADA CON VARIACIÓN DE DISPERSIÓN DE FIBRAS. $e = 0.1mm.$ 97
TABLA B.4 – ALARGAMIENTO CIRCUNFERENCIAL CON VARIACIÓN DE DISPERSIÓN DE FIBRAS. $e = 0.4mm.$ 98
TABLA B.5 – $\Sigma_{\Theta\Theta}/C_{10}$ CON VARIACIÓN DE DISPERSIÓN DE FIBRAS. $e = 0.4mm$....98
TABLA B.6 – PRESIÓN APLICADA CON VARIACIÓN DE DISPERSIÓN DE FIBRAS. $e = 0.4\,mm.$ 98
TABLA B.7 – ALARGAMIENTO CIRCUNFERENCIAL CON VARIACIÓN DE ESPESOR. $\kappa = 0.0.$ 99
TABLA B.8 – $\Sigma_{\Theta\Theta}/C_{10}$ CON VARIACIÓN DE DISPERSIÓN DE ESPESORE $\kappa = 0.0.$ 99
TABLA B.9 – PRESIÓN APLICADA CON VARIACIÓN DE DISPERSIÓN DE ESPESOR. $\kappa = 0.0.$ 99
TABLA B.10 – ALARGAMIENTO CIRCUNFERENCIAL CON VARIACIÓN DE ORIENTACIÓN DE FIBRAS. $e = 0.4\,mm.$ 100
TABLA B.11 – $\Sigma_{\Theta\Theta}/C_{10}$ CON VARIACIÓN DE DISPERSIÓN DE ORIENTACIÓN DE FIBRAS. $e = 0.4\,mm.$ 100
TABLA B.12 – PRESIÓN APLICADA CON VARIACIÓN DE ORIENTACIÓN DE FIBRAS. $e = 0.4\,mm.$ 100
TABLA B.13 – ALARGAMIENTO CIRCUNFERENCIAL CON VARIACIÓN DE LA GEOMETRÍA DEL MODELO. $e = 0.1mm.$ 101
TABLA B.14 – $\Sigma_{\Theta\Theta}/C_{10}$ CON VARIACIÓN DE VARIACIÓN DE LA GEOMETRÍA DEL MODELO. $e = 0.1mm.$ 101
TABLA B.15 – PRESIÓN APLICADA CON VARIACIÓN DE LA GEOMETRÍA DEL MODELO. $e = 0.1mm.$ 101
TABLA B.16 – ALARGAMIENTO CIRCUNFERENCIAL CON VARIACIÓN DE LA LONGITUD DEL CILINDRO. $e = 0.2mm.$ 102
TABLA B.17 – $\Sigma_{\Theta\Theta}/C_{10}$ CON VARIACIÓN DE LA LONGITUD DEL CILINDRO. $e = 0.2mm.$ ...102
TABLA B.18 – PRESIÓN APLICADA CON VARIACIÓN DE LA LONGITUD DEL CILINDRO. $e = 0.2mm.$ 102
TABLA B.19 – ALARGAMIENTO CIRCUNFERENCIAL CON VARIACIÓN DE NÚMERO DE CAPAS....103
TABLA B.20 – $\Sigma_{\Theta\Theta}/C_{10}$ CON VARIACIÓN DE DISPERSIÓN DE VARIACIÓN DE NÚMERO DE CAPAS....103
TABLA B.21 – PRESIÓN APLICADA CON VARIACIÓN DE VARIACIÓN DE NÚMERO DE CAPAS....103

AGRADECIMIENTOS

Primero que todo me gustaría agradecer a mi familia por depositar su confianza en mí y apoyarme para realizar este máster.

A Shanti por su ayuda incondicional y total apoyo.

A mi director, Jose Merodio y al grupo de investigación: Ammar, Musthapa y Nam.

A Javier Rodriguez, por sus excelentes tutorías.

A mis amigos del máster Ana, Maricely, Elena, Marcos y Alejandro, sin cuya ayuda y apoyo hubiera sido simplemente diferente este periodo de estudio.

Y a mis compañeros de la novena por su ayuda y disponibilidad en todo momento.

Cápitulo 1.
INTRODUCCIÓN

1.1. MOTIVACIÓN

El presente trabajo es el Trabajo de Fin de Máster, del Máster Universitario en Ingeniería de Estructuras, Cimentaciones y Materiales de la E.T.S.I.C.C.P. de Madrid. El objetivo principal es realizar un análisis de inestabilidad de un material reforzado de forma bidireccional y simétrica con fibras de colágeno, observando la influencia de cada uno de los parámetros mecánicos en la formación de aneurismas, relacionados con la bifurcación tipo abultamiento.

Los aneurismas son dilataciones localizadas que se producen usualmente en las arterias, ocasionados por un debilitamiento de la pared vascular. En estos el diámetro aumenta hasta un 50 % del diámetro normal del vaso sanguíneo. El bombeo continuo de sangre contribuye a la deformación de la pared, provocando que la misma pueda tomar, bien sea, una forma sacular (formación de un saco esférico unido al vaso mediante un cuello) o una forma fusiforme (la arteria adquiere forma de huso). Este trabajo se centra en los aneurismas fusiformes. Su ruptura puede ocasionar hemorragias muy severas y mortales.

Los aneurismas pueden presentarse debido a enfermedades como la arteriosclerosis, la aterosclerosis, el síndrome de Marfan, la hipertensión, entre otras. Estas alteraciones del sistema cardiovascular están condicionadas por múltiples factores, tales como: situaciones de tipo fisiológicas, químicas, ambientales y mecánicas, y hábitos personales como la alimentación, el consumo de drogas, abuso en la medicación, entre otras. Debido a esto, a la alta frecuencia con la que se observan estas alteraciones en la atención primaria y hospitales y a que actualmente las indicaciones quirúrgicas están dadas solo por el tamaño, la clínica y la etiología de los aneurismas, se considera muy importante su estudio.

Hasta el momento gran cantidad de científicos e investigadores han estudiado el comportamiento del tejido de las paredes arteriales, analizando y definiendo modelos de todo tipo, adaptando sus respectivas funciones de energía, tales como: modelos tridimensionales [**1**], modelos bidimensionales [**2**], modelos isótropos [**3**], anisótropos [**4**], entre otros. Sin embargo, llegar a un modelo que se pueda comparar con el comportamiento fisiológico del tejido de la pared arterial es bastante complejo, pues son muchos los factores que se involucran en este proceso: la variación de las propiedades fisiológicas del tejido en cada ser vivo, la influencia de las variables del entorno, la edad del tejido, las enfermedades que atacan esta parte del organismo, etc. Esto ha llevado a que la investigación, desarrollo y posterior implementación de los diversos modelos se centre en campos específicos que permitan acotar los factores mencionados anteriormente y permitan representar fenómenos como la formación de aneurismas.

En esta complicada rama de la biomecánica, son varios los autores que han hecho análisis de inestabilidades con diferentes modelos, para encontrar el modo de bifurcación que se adapte mejor a la formación de aneurismas. Por ejemplo Haughton y Merodio [**5**], realizaron un estudio para analizar el efecto que tiene en la bifurcación el debilitamiento del tejido arterial debido al síndrome de Marfan, con énfasis especial en el modo de abultamiento, de acuerdo con sus resultados. Específicamente examinaron la influencia del ablandamiento por deformación localizado en la bifurcación de un cilindro de pared delgada sometido a carga axial y presión interna. De forma similar Merodio y Haughton [**6**] realizan un estudio que permite ampliar el análisis a cilindros de pared gruesa. Por su parte Rodríguez y Merodio [**7**], hacen un análisis con el mismo objetivo, pero aplicado al material de Holzapfel et al. [**8**], encontrando parámetros críticos para los cuales el modelo no presenta inestabilidad.

Con el objetivo de realizar análisis de inestabilidad por abultamiento en el contexto de formación de aneurismas, se implementa el modelo de Gasser–Ogden-Holzapfel [**9**], , por medio del cual se puede reforzar una matriz neohookeana con fibras largas orientadas simétricamente respecto al eje axial. Esta característica permite que al implementar el material en un tubo cilíndrico, el modelo sea capaz de reproducir el comportamiento de la pared arterial. Se busca encontrar la influencia que tienen las variables del material y la geometría en la formación de una bifurcación de equilibrio tipo abultamiento

En el capítulo 2 se explica la fisiología y el comportamiento mecánico de las arterias. También se explican algunas enfermedades y síndromes que afectan los tejidos arteriales, como lo son la aterosclerosis y los aneurismas, ya que este último está relacionado con el análisis de inestabilidades en las arterias.

En el capítulo 3 se muestran algunos modelos constitutivos de la pared arterial, tanto tridimensionales como bidimensionales. De igual forma se explica el modelo bicapa de Gasser-Ogden-Holzapfel o GOH [**9**], el cual se implementa en capítulos posteriores tanto bicapa como con una sola capa. El capítulo se cierra con distintos análisis de inestabilidad a cilindros de pared delgada y gruesa realizados por varios autores [**5**] [**6**] [**7**].

En el capítulo 4 se muestran los análisis de inestabilidad realizados con diversos modelos cilíndricos de pared delgada y gruesa, implementados con el programa de modelación por elementos finitos Abaqus. En este capítulo se explica resumidamente el método de los elementos finitos y el método de riks, mediante el cual se resuelve parte de los análisis computacionales. Posteriormente se explica la metodología aplicada, las geometrías base realizadas para analizar la inestabilidad, los parámetros del material de Holzapfel a implementar, los parámetros utilizados en los modelos de elementos finitos (condiciones de contorno, cargas, métodos de solución, mallado y elementos usados). Una vez definido esto, se realizan los análisis de forma paramétrica agrupándolos respecto a la variable o parámetro cuya influencia se quiere estudiar. Se realizaron ocho tipos de análisis:

1. Validación de la formulación analítica realizada por Rodríguez y Merodio [**7**] respecto de los parámetros críticos del material para que se produzca la bifurcación.
2. Dispersión de las fibras en cilindros de pared delgada.
3. Dispersión de las fibras en cilindros de pared gruesa.
4. Espesor de la pared.
5. Orientación de las fibras.
6. Longitud del cilindro.
7. Geometría de la pared
8. Capas en el espesor.

9. Para cada análisis se muestran los resultados y se realiza una discusión de los mismos. El capítulo se cierra con una discusión general de los resultados.
10.
11. En el capítulo 5 se enuncian las conclusiones del Trabajo de Fin de Máster y posibles trabajos futuros.
12.
13. Finalmente se incluyen dos apéndices: en el apéndice A, se describe la formulación y principios del método de los elementos finitos y en el apéndice B, se muestran los resultados de las figuras de los análisis en tablas, para facilitar al lector el uso de la información calculada de forma más precisa.

Para cada análisis se muestran los resultados y se realiza una discusión de los mismos. El capítulo se cierra con una discusión general de los resultados.

En el capítulo 5 se enuncian las conclusiones del Trabajo de Fin de Máster y posibles trabajos futuros.

Finalmente se incluyen dos apéndices: en el apéndice A, se describe la formulación y principios del método de los elementos finitos y en el apéndice B, se muestran los resultados de las figuras de los análisis en tablas, para facilitar al lector el uso de la información calculada de forma más precisa.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo general

Analizar la influencia que tienen los parámetros geométricos y mecánicos en la bifurcación de un material reforzado bidireccionalmente por fibras de colágeno y elastina, el material de Holzapfel, para modelar arterias y simular la formación de aneurismas por medio elementos finitos.

1.2.2. Objetivos específicos

- Validar la formulación analítica, de Rodriguez y Merodio (2010), que permite encontrar los parámetros críticos para la bifurcación de cilindros de pared delgada con el material de Holzapfel sometidos a presión interna y carga axial, por medio de la modelación con elementos finitos.

- Analizar la influencia de los parámetros del material de Holzapfel, tales como orientación y dispersión de las fibras, en la bifurcación de cilindros sometidos a presión interna y carga axial.

- Determinar la influencia de los parámetros geométricos, tales como espesor, longitud del cilindro y número de capas, en la bifurcación de cilindros sometidos a presión interna y carga axial.

Cápitulo 2.
HISTOLOGÍA, COMPORTAMIENTO MECÁNICO Y ENFERMEDADES DE LA PARED ARTERIAL

2.1. SISTEMA CARDIOVASCULAR. DESCRIPCIÓN GENERAL.

El sistema cardiovascular está compuesto por el corazón, los vasos sanguíneos (arterias, capilares y venas) y los vasos linfáticos (Figura 2.1). Su función es transportar la sangre por todo el cuerpo para que llegue a los diferentes tejidos y aportarles oxígeno (O_2) y metabolitos, necesarios para la vida de las células, recogiendo dióxido de carbono (CO_2) y productos de desecho de su metabolismo. Además contribuye al mantenimiento del pH fisiológico y es el medio por el cual se transportan las células del sistema inmunitario.

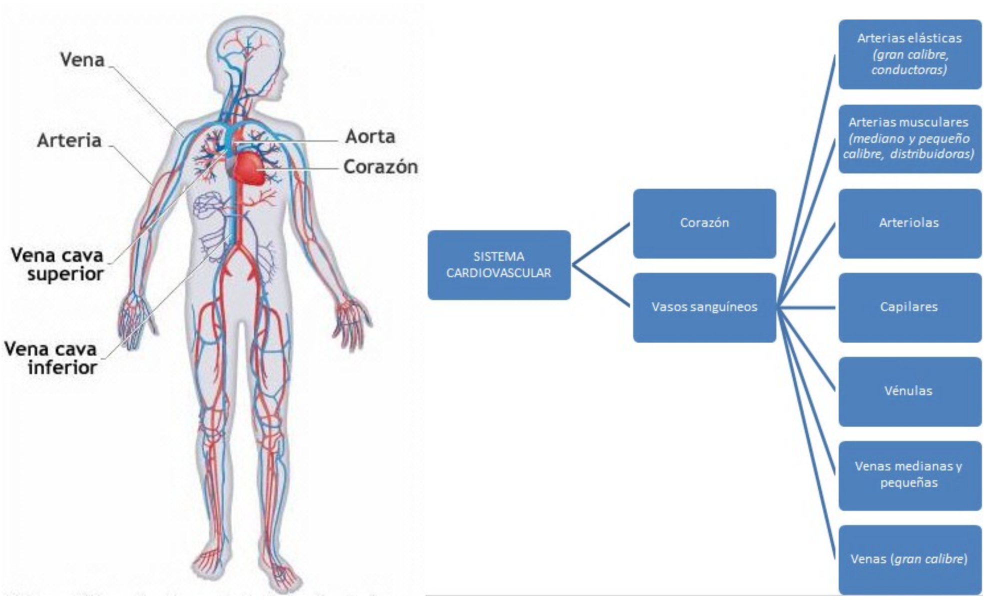

*Figura 2.1 – Sistema Cardiovascular. Tomada de [**10**].*

2.1.1. Histología arterial [8]

Las arterias son los vasos que transportan la sangre desde el corazón hasta los capilares. Por estar sometidas a gran presión, son muy resistentes y elásticas. Están formadas por tres capas: la túnica íntima o interna, la túnica media y la túnica adventicia o externa (Figura 2.2). Conforme se alejan del corazón su diámetro disminuye. Se distinguen claramente dos tipos de arterias: *elásticas y* musculares. Las arterias elásticas tienen diámetros usuales de 1 a 4 mm y las musculares, más alejadas del corazón, de 0.2 a 1 mm. La arteria aorta, la principal del cuerpo, tiene un diámetro de 25 mm. Cuando las arterias se hacen más pequeñas se denominan arteriolas (diámetros de 0,01 a 0,02 mm) que terminan en los capilares.

Las arterias elásticas se encuentran cerca del corazón y tienen gran diámetro. Entre estas se destacan la aorta, la pulmonar y la carótida. Se encargan de soportar los mayores cambios en el volumen de sangre que transportan. En ellas la túnica media está formada por una sucesión de láminas elásticas concéntricas entre las que se disponen las células musculares lisas. Las láminas elásticas interna y externa son más difíciles de distinguir a comparación que en las arterias musculares, por la gran cantidad de láminas elásticas que hay.

Por su parte, las arterias musculares son más pequeñas y están localizadas en la periferia del sistema cardiovascular. Entre estas se destacan la arteria femoral y las arterias cerebrales. Las láminas elásticas interna y externa son fácilmente distinguibles, ya que en la túnica media apenas hay láminas elásticas y predominan las fibras musculares lisas. Otras características de estas arterias son que la capa íntima no posee prácticamente tejido subendotelial y que la adventicia tiene un grosor similar al de la media.

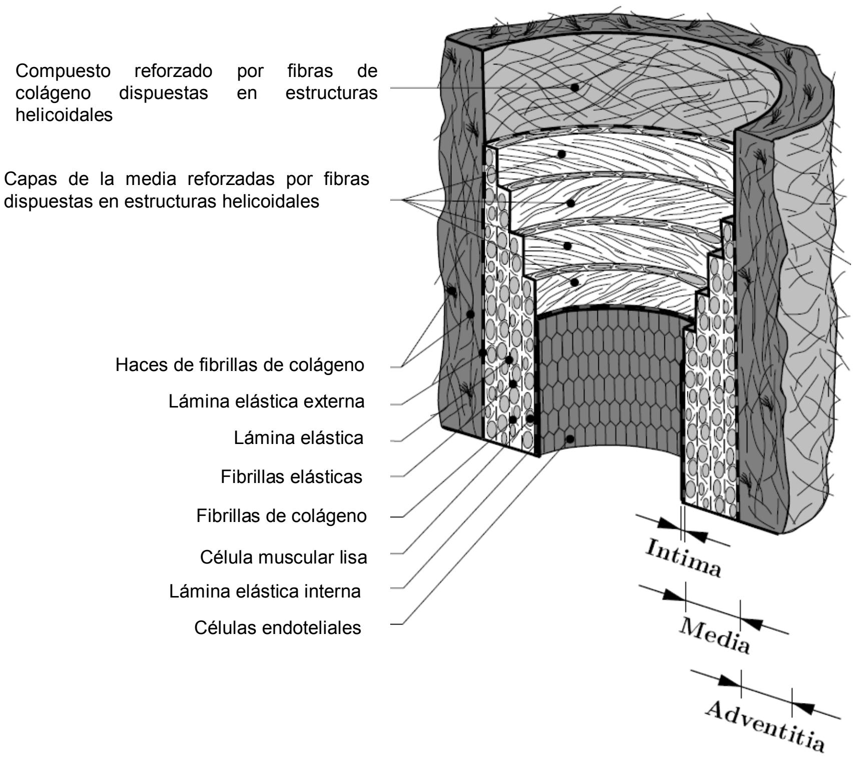

*Figura 2.2 – Diagrama de los componentes de una arteria elástica sana. Tomada de [**8**].*

2.1.1.1.Íntima

La intima consiste en una sola capa de células endoteliales que se encuentran sobre una membrana basal (lámina basal) y revisten la pared arterial. Además hay una capa subendotelial de tejido conectivo laxo cuyo grosor varía con la edad, las enfermedades y otros factores. Por ejemplo, en arterias musculares jóvenes y sanas esta capa es prácticamente inexistente. La composición de la íntima es similar en todas las arterias y por tanto la clasificación de los vasos se realiza atendiendo a las diferencias de las otras dos capas.

En individuos jóvenes y sanos la íntima es muy fina y apenas contribuye a las propiedades mecánicas de la pared arterial. Con la edad aumenta de grosor (arteriosclerosis) y se rigidiza de tal manera que sí afecta a la resistencia de la pared. Los cambios en los componentes de la íntima están asociados a la aterosclerosis, que es la enfermedad más frecuente en las paredes arteriales. Se produce cuando se depositan sobre la íntima sustancias grasas, calcio, fibras de colágeno, productos de desecho celular y fibrina de la sangre, formando la placa aterosclerótica, muy compleja geométrica y bioquímicamente, y que llega a afectar a la capa media. El comportamiento mecánico de estas arterias es significativamente distinto del de las arterias sanas.

2.1.1.2.Media

La capa media consiste en una compleja red tridimensional de células musculares lisas y fibrillas de elastina y de colágeno. Una serie de láminas elásticas separan la media en varias subcapas concéntricas, cuyo número disminuye conforme se alejan del corazón. La contracción regulada del músculo liso de esta túnica, la vasoconstricción, reduce la luz de la arteria aumentando la tensión arterial y la resistencia vascular mientras que la relajación de este músculo, la vasodilatación, aumenta la luz produciendo los efectos opuestos. La media está separada de la íntima y de la adventicia por las láminas elásticas interna y externa, respectivamente, aunque ésta última no se encuentra en los vasos cerebrales. En las arterias musculares estas láminas destacan mientras que en las arterias elásticas no se distinguen de las láminas elásticas regulares.

La orientación e interconexión entre las fibrillas elásticas y de colágeno, láminas elásticas y células musculares lisas forma una hélice fibrosa continua con una pequeña inclinación de manera que las fibrillas están orientadas casi circunferencialmente. Esta estructura proporciona alta resistencia, resiliencia y la capacidad de resistir cargas en dirección longitudinal y circunferencial. Es la capa más importante desde el punto de vista resistente en la pared arterial.

2.1.1.3.Adventicia

La adventicia es la capa externa de la pared arterial y está formada principalmente por fibroblastos y fibrocitos, que producen colágeno y elastina, y gruesos haces de fibrillas de colágeno formando un tejido fibroso, además de tejido conectivo denso. La adventicia está rodeada por un tejido conectivo laxo. El grosor de la adventicia depende mucho del tipo de arteria (elástica o muscular), de su función fisiológica y de su situación, por ejemplo en los vasos cerebrales apenas existe adventicia. En esta túnica se encuentran los vasos de nutrición de la arteria – los *vasa vasorum* – y los nervios que controlan la contracción del músculo liso – los *nervi vascularis*.

En la pared arterial las fibrillas onduladas de colágeno están dispuestas en estructuras helicoidales y sirven para reforzar la pared arterial, contribuyen significativamente a su estabilidad y resistencia. En la configuración libre de cargas y sometida a baja presión, la adventicia es mucho menos rígida que la media. Bajo niveles mayores de presión, las fibras de colágeno se enderezan y la adventicia se convierte en un tubo rígido que evita un estiramiento excesivo y la rotura de la arteria.

2.1.2. Comportamiento mecánico de la pared arterial

Cuando se caracteriza mecánicamente una pared arterial es necesario disponer de datos de ensayos realizados en la misma, preferiblemente *in vivo,* para reproducir condiciones reales. Sin embargo, estos ensayos tienen limitaciones ya que se encuentran influenciados por hormonas y el control nervioso. Es por esto que suelen realizarse ensayos *in vitro* bajo condiciones que reproduzcan el estado real, además que *in vitro* es la única forma mediante la cual se pueden obtener parámetros de un material tan complejo como la pared arterial sometido simultáneamente a extensión axial, presión interior y torsión. Por lo tanto estos ensayos son necesarios para caracterizar el comportamiento anisótropo de la pared arterial.

En el rango de solicitaciones fisiológicas las arterias no varían de volumen, por lo que pueden ser tomadas como un material incompresible. Gracias a esto se pueden obtener las propiedades de elementos tridimensionales a partir de ensayos en elementos bidimensionales con presión interior. Es relevante mencionar que las arterias se encuentran bajo tracción *in vivo*, por lo cual se acortan al ser extraídas para la realización de ensayos *in vitro*.

El comportamiento mecánico de la pared arterial depende de factores ambientales físicos y químicos como la temperatura, el pH, la presión parcial de CO_2 y O_2, la presión osmótica y las concentraciones de iones y de monosacáridos. Una vez se extrae una arteria, ésta se degrada, por lo que han de ser conservadas y ensayadas en soluciones salinas lo más frescas posibles y con la temperatura y la oxigenación apropiadas. Dependiendo de la función anatómica el comportamiento mecánico de la pared arterial es diferente para las diferentes arterias, aun así las propiedades en general sean las mismas.

Las arterias sanas son estructuras compuestas altamente deformables que muestran un comportamiento tensión-deformación no lineal con rigidización exponencial a altas presiones (Figura 2.3).). Esta rigidización es común en todos los tejidos biológicos y se debe a que las fibrillas onduladas de colágeno entran en carga, lo que provoca el comportamiento mecánico anisótropo. En la literatura es ampliamente aceptado considerar la pared arterial como cilíndricamente ortótropa. En la Tabla 2.1 se pueden observar características de la pared arterial encontradas en la bibliografía [**9**].

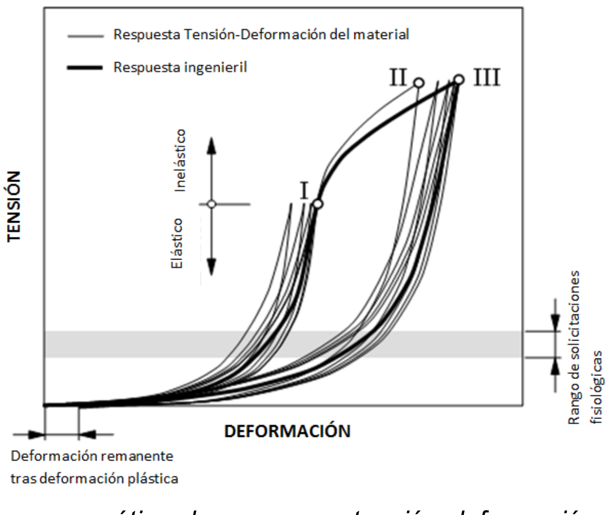

*Figura 2.3 – Diagrama esquemático de una curva tensión deformación típica para fracciones circunferenciales de arteria (media) en condición pasiva. Tomada de [**8**].*

*Tabla 2.1 – Algunas propiedades de la pared arterial [**9**].*

Propiedades cambian a lo largo del sistema arterial	Respuesta tensión-deformación no lineal	Tensiones residuales en la configuración libre de carga
Ortotropía cilíndrica	Altamente deformable	Viscoelasticidad
Incompresibilidad	Pre-deformación axial *in situ*	Fenómeno de precondicionamiento

Si se carga por encima del dominio (visco)elástico (punto I Figura 2.1) se encuentra una zona que está lejos del rango fisiológico de deformación. Sin embargo es una situación frecuente en algunos tratamientos, como la angioplastia transluminal percutánea. Este tratamiento consiste en la dilatación de la arteria mediante la introducción de un catéter con un globo en un extremo que se hincha y de deshincha varias veces en caso de arteriosclerosis. La deformación hasta el punto II está asociada con efectos inelásticos (mecanismos elastoplásticos y/o de daño) que causan grandes cambios en el comportamiento mecánico de la pared arterial. Esto conlleva una disipación representada por el área entre las ramas de carga y descarga.

Desde el punto II y bajo una carga cíclica el material se hace más flexible. En el punto III el material tiene un comportamiento perfectamente elástico o viscoelástico. Sin embargo, la descarga iniciada desde este punto produce una deformación plástica remanente. El modelo propuesto tiene en cuenta tan sólo la respuesta elástica aproximada, esto es, hasta el punto I.

2.1.3. Enfermedades arteriales o que afectan las arterias [11]

Son muchas las enfermedades que afectan directa o indirectamente el sistema cardiovascular. En esta sección se explican algunas de las más conocidas.

*2.1.3.1. Arteriosclerosis [**12**]*

La arteriosclerosis es un término general utilizado en medicina humana y veterinaria, que se refiere al endurecimiento de arterias de mediano y gran calibre. Esta enfermedad por lo general causa un estrechamiento de las arterias, conocido como estenosis, que puede progresar hasta la oclusión del vaso impidiendo el flujo de la sangre por la arteria afectada.

Los términos arteriosclerosis, arteriolosclerosis y aterosclerosis son similares tanto en escritura como en significado, aunque son, sin duda, diferentes. La arteriosclerosis es un término generalizado para cualquier endurecimiento con pérdida de la elasticidad de las arterias, la palabra viene el griego *arterio*, que significa «arteria» y *sclerosis* que significa «cicatriz, rigidez». La arteriolosclerosis se usa exclusivamente para el endurecimiento de las arteriolas o arterias de pequeño calibre. La aterosclerosis es una induración causada específicamente por placas de ateromas.

*2.1.3.2. Aterosclerosis [**13**]*

La aterosclerosis es la acumulación de depósitos adiposos llamados *placa* en el interior de las paredes de las *arterias*. A medida que se acumula la placa en la arteria, ésta se estrecha gradualmente y después se obstruye. Conforme más y más se estrecha una arteria, menos sangre puede pasar. La arteria también puede volverse menos elástica (a esto se le denomina "endurecimiento de las arterias"). La aterosclerosis es la causa principal de un grupo de enfermedades denominadas enfermedades *cardiovasculares* - enfermedades del corazón y los vasos sanguíneos.

La aterosclerosis puede provocar obstrucciones en las arterias en cualquier parte del cuerpo (Figura 2.4). Cuando se ven afectadas las arterias del corazón, podría ocurrir una *angina de pecho* (dolor en el pecho) o ataque cardiaco. Si se afectan las arterias de la pierna, podría ocurrir entonces dolor en la pierna. La aterosclerosis de las arterias del cerebro puede ocasionar un derrame cerebral. Es una enfermedad común en los Estados Unidos, que con frecuencia comienza en la niñez y a través de los años llevan a que las arterias se estrechen o bloqueen.

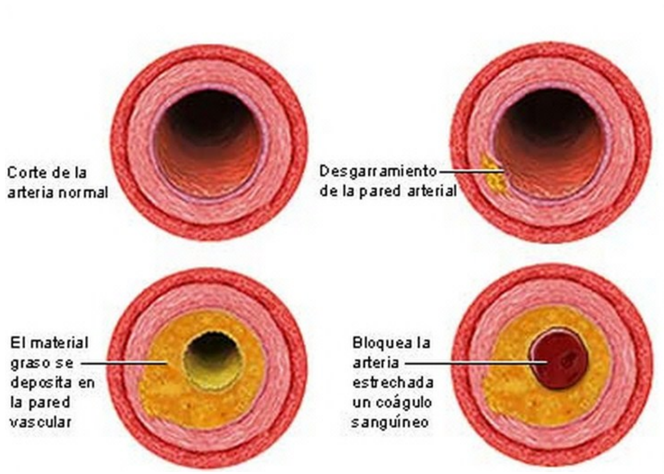

*Figura 2.4 – Aterosclerosis. Tomada de [**11**].*

2.1.3.3.Aneurisma arterial

Un aneurisma es una dilatación localizada en un vaso sanguíneo (arteria) ocasionada por una degeneración o debilitamiento de la pared vascular. Los aneurismas más frecuentes son los arteriales y su localización más habitual radica en la base del cerebro (el polígono de Willis) y la aorta, la principal arteria que sale del corazón.

En un aneurisma arterial diámetro aumenta 50% del diámetro normal de un vaso sanguíneo, o el ensanchamiento anormal de una arteria. El bombeo de sangre continuo contribuye al desarrollo de un globo en forma de huevo cuya pared es bastante débil. Su ruptura es considerada una de las causas más frecuentes de ingreso a sala de emergencia. Esta condición se puede desarrollar en cualquier parte del cuerpo. El aneurisma de aorta es más complicado porque envuelve la arteria más grande del cuerpo. El aneurisma de aorta abdominal se desarrolla entre los riñones y las arterias grandes de las piernas y el aneurisma de aorta toráxico es en la parte superior de la aorta (mucho más peligroso que el abdominal).

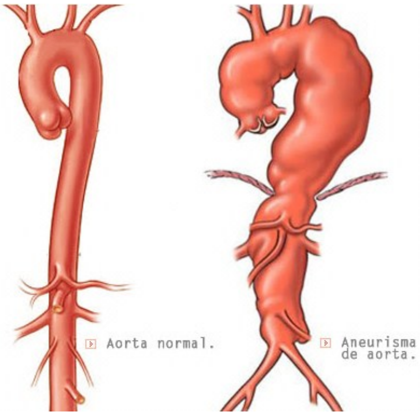

*Figura 2.5 – Aneurisma de aorta. Tomada de [**14**].*

*2.1.3.4.Síndrome de Marfan [**11**]*

El síndrome de Marfan es un trastorno poco común que debilita el tejido conectivo del cuerpo. El tejido conectivo es el tejido que sostiene muchas estructuras del cuerpo, tales como los tendones, los ligamentos, los cartílagos, los vasos sanguíneos, las válvulas cardíacas y demás. Como el tejido conectivo es más débil en quienes padecen el síndrome de Marfan, afecta a la manera en que se forman y funcionan el corazón, los vasos sanguíneos, los ojos y el esqueleto.

El defecto genético que causa el síndrome de Marfan controla la producción de una proteína especial presente en el tejido conectivo. Esta proteína se denomina fibrilina. Si no hay suficiente fibrilina, se debilitan las paredes de las principales arterias. Si la aorta (la principal fuente de irrigación sanguínea del cuerpo) se ve afectada, ésta se agranda (o dilata), lo cual la debilita. La zona debilitada de la aorta puede abombarse hacia afuera, creándose así un aneurisma aórtico. O la aorta puede romperse y la sangre puede pasar por las roturas e introducirse entre las capas de la pared de la aorta. Esto se denomina «disección aórtica».

Si la aorta está estirada o debilitada, eso también puede afectar a la válvula aórtica. En algunos pacientes la sangre retrocede por la válvula en lugar de circular correctamente, hacia adelante, en una sola dirección. Esto se denomina regurgitación. Si es mucha la sangre que retrocede, sólo una pequeña cantidad puede avanzar hacia los órganos del cuerpo. El corazón debe esforzarse más para compensar pero, con el tiempo, el corazón se agranda (dilata) y es menos capaz de bombear la sangre por el cuerpo.

Cápitulo 3.
MODELOS CONSTITUTIVOS DE LA PARED ARTERIAL [8]

El comportamiento mecánico activo de la pared arterial está controlado principalmente por las propiedades intrínsecas de la elastina y de las fibras de colágeno y el grado de activación de los músculos lisos.

Por otra parte, el comportamiento pasivo de la pared arterial es muy diferente y está controlado principalmente por la elastina y las fibras de colágeno. Si bien los músculos lisos también podrían contribuir, su aportación a la respuesta del conjunto no se conoce bien aún. La mayoría de los modelos propuestos para paredes arteriales son válidos para el estado pasivo de los músculos lisos y están basados en datos experimentales que describen la arteria como un sistema macroscópico. Estos modelos han sido desarrollados para reproducir el comportamiento mecánico de la pared arterial en el estado fisiológico y por lo tanto no tienen por qué responder correctamente para deformaciones fuera del mismo. Lo más frecuente es encontrar modelos con una función de energía de deformación de tipo exponencial, aunque también las polinómicas y las logarítmicas son utilizadas.

Los modelos constitutivos utilizados siguen varios caminos diferentes para explicar el comportamiento mecánico de las arterias. Unos utilizan una teoría bifásica para describir la pared arterial como un tejido blando hidratado. Otros consideran solamente las fibras como componente de la pared arterial. Algunos asumen que las fibrillas están embebidas en membranas concéntricas de elastina y músculo liso. Por otra parte, la mayoría consideran la pared arterial como de una sola capa, mientras que otros consideran dos capas. Dependiendo de las hipótesis realizadas se logrará mayor o menor precisión, así como una mayor o menor complejidad del modelo.

En este capítulo se presentan y comparan algunos modelos de funciones de energía de deformación frecuentemente utilizados, que se usaron con solicitaciones axiales (alargamientos axiales λ_z), radiales (presión interna) y torsionales (momento torsor). En cuanto a la presión, se usa un valor aproximado a la presión fisiológica, $13.33\ kPa\ (100\ mmHg)$.

3.1. FORMULACIÓN TRIDIMENSIONAL

Se muestran funciones de energía de deformación tridimensionales adecuadas para el análisis de tubos de pared gruesa, los cuales son el punto de partida para el estudio del comportamiento mecánico de las paredes arteriales.

3.1.1. Función de energía de deformación propuesta por Delfino et al.

Como ya se mencionó, las diferentes capas de la pared arterial son altamente anisótropas debido al arreglo regular de los componentes que soportan la carga (colágeno). Sin embargo hay muchas funciones de energía de deformación isótropas propuestas en la literatura y usadas en la práctica para caracterizar la respuesta de las paredes arteriales.

Una de estos potenciales, es el propuesto por Delfino et al. [**1**], el cual es un potencial isótropo tipo goma para arterias carótidas, el cual permite modelar los efectos de rigidización típicos en el dominio de las altas presiones. La función de energía de deformación $\overline{\Psi}$ tiene la forma

$$\overline{\Psi} = \frac{a}{b}\left\{\exp\left[\frac{b}{2}(\overline{I}_1 - 3)\right] - 1\right\} \tag{3.1}$$

donde a > 0 es una parámetro con unidades de tensión y b > 0 es un parámetro adimensional. El primer invariante del tensor derecho modificado de Cauchy-Green $\overline{\mathbf{C}}$ es $\overline{I}_1 = \overline{\mathbf{C}}:\mathbf{I}$. La función exponencial es monótona creciente con $\overline{I}_1$, por lo cual está garantizada la convexidad local estricta del potencial como función de $\overline{\mathbf{C}}$, lo que significa que la segunda derivada de Ψ respecto a $\overline{\mathbf{E}}$ es definida positiva, teniendo en cuenta las modificaciones por incompresibilidad. Esto es requerido en hiperelasticidad, ya que asegura que se eviten inestabilidades del material. Una consecuencia es que la representación de los valores de las deformaciones para $\overline{\Psi}$ constante son curvas convexas, por ejemplo para las deformaciones $\overline{E}_{\Theta\Theta}$ y $\overline{E}_{ZZ}$. Además las curvas son simétricas respecto a la bisectriz de los ejes por la condición de isotropía. La contribución isocórica $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ del tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ es

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = 2\,\overline{\Psi}_1 \operatorname{dev} \overline{\mathbf{b}}, \quad \text{con } \overline{\Psi}_1 = \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial \overline{I}_1} \tag{3.2}$$

La respuesta predicha por este modelo (Figura 3.1) es semejante a los resultados experimentales del comportamiento mecánico de la pared arterial. El modelo es capaz de representar la rigidización a altas presiones. La presión se varió entre 0 y $26.67\ kPa$ y el alargamiento axial (λ_z) se varió entre 1.1 y 1.2.

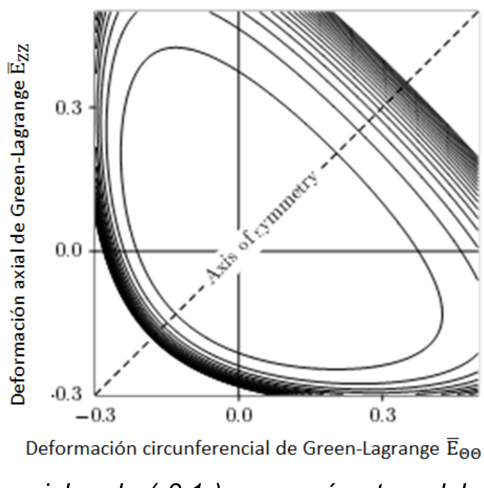

*Figura 3.1 – Curvas isopotenciales de (3.1) con parámetros del material a = 44.2 kPa y b = 16.7. Tomada de [**8**].*

Por medio de estudios realizados con este modelo se llegó a la conclusión de que la incorporación de tensiones residuales en la configuración libre de carga tiene una influencia pequeña en los resultados, flexibilizando el material, viéndose esto reflejado en que para alcanzar un mismo radio interior se necesita menos presión en modelos con tensiones residuales.

3.1.2. Función de energía de deformación tipo *Fung*

La función de energía de deformación más usada para arterias es la forma bidimensional exponencial propuesta por Fung et al. [**4**]. Por medio de una generalización al régimen tridimensional se asume que las direcciones principales del tensor de tensiones coinciden con las direcciones radial, circunferencial y axial de la arteria, sin tener en cuenta la cizalladura. A partir de ésta se han propuesto muchas modificaciones. Una de las funciones de energía de deformación más generales del tipo *Fung* es la propuesta por Humphrey, la cual es adecuada para cualquier estado (tridimensional) de deformaciones y tiene la forma:

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{2}\mathrm{c}[\exp(\mathrm{Q}) - 1] \tag{3.3}$$

donde *c* es un parámetro del material y *Q* está dado por

$$\begin{aligned}\mathrm{Q} = {} & \mathrm{b}_1\bar{\mathrm{E}}_{\Theta\Theta}^2 + \mathrm{b}_2\bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{ZZ}}^2 + \mathrm{b}_3\bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{RR}}^2 + 2\mathrm{b}_4\bar{\mathrm{E}}_{\Theta\Theta}\bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{ZZ}} + 2\mathrm{b}_5\bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{ZZ}}\bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{RR}} \\ & + 2\mathrm{b}_6\bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{RR}}\bar{\mathrm{E}}_{\Theta\Theta} + \mathrm{b}_7\bar{\mathrm{E}}_{\Theta\mathrm{Z}}^2 + \mathrm{b}_8\bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{RZ}}^2 + \mathrm{b}_9\bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{R}\Theta}^2\end{aligned} \tag{3.4}$$

en donde b_i son parámetros adimensionales del material y $\bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{IJ}}$ son las componentes del tensor modificado de Green-Lagrange en coordenadas cilíndricas.

En este modelo no hay restricciones a priori sobre los valores de los parámetros, aunque para que $\bar{\Psi}$ sea convexa no se pueden valores arbitrarios para los parámetros b_i. Los parámetros no tienen un significado físico claro por lo cual han de ser fijados cuidadosamente asegurándose durante el proceso de optimización que el potencial continúa siendo convexo. En la Figura 3.2 se puede observar, a la izquierda, un conjunto de parámetros elegidos cuidadosamente asegurar la convexidad, mientras que a la derecha, un conjunto de parámetros elegidos arbitrariamente que producen una función no convexa. Para el estudio con este modelo se aplicó una presión variante entre 0 y $21.33\ kPa$, un alargamiento axial (λ_z) variando entre 1.5 y 1.9.

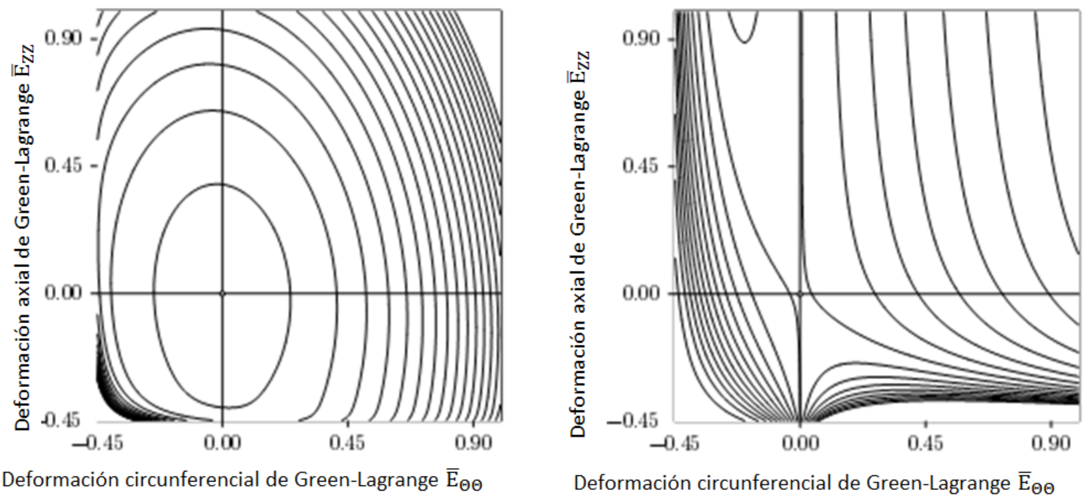

*Figura 3.2 - Modelo de Humphrey con función tipo Fung: curvas isopotenciales de $\bar{\Psi}$. (Izq.) Conjunto de parámetros que aseguran convexidad. (Der.) Conjunto de parámetros que ilustran no convexidad de $\bar{\Psi}$. Tomada de [**8**].*

Por medio de este modelo se observó una mayor influencia de las tensiones residuales, mucho mayor que para el modelo de Delfino et al.

3.2. FORMULACIÓN BIDIMENSIONAL

Ya que se acepta que la pared arterial se puede tratar como un material incompresible, se puede utilizar la condición de que el determinante de **F** es la unidad ($J = 1$) para obtener expresiones alternativas de la función de energía de deformación $\bar{\Psi}$. Ésta normalmente es función de $\bar{E}_{RR}$, $\bar{E}_{\Theta\Theta}$, $\bar{E}_{ZZ}$, $\bar{E}_{R\Theta}$, $\bar{E}_{RZ}$ y $\bar{E}_{\Theta Z}$. El potencial alternativo $\hat{\bar{\Psi}}(\bar{E}_{RR}, \bar{E}_{\Theta\Theta}, \bar{E}_{\Theta Z})$, que se denomina contraparte bidimensional de $\bar{\Psi}$, es utilizado frecuentemente en la bibliografía. Esta formulación bidimensional no es capaz de describir el comportamiento anisótropo tridimensional de un tubo de pared gruesa bajo presión interior y torsión. Sin embargo $\hat{\bar{\Psi}}$ es capaz de reproducir el estado tridimensional de tensión para extensión axial, presión interior y flexión.

3.2.1. La función de energía $\hat{\bar{\boldsymbol{\Psi}}}(\bar{\mathbf{E}}_{\Theta\Theta}, \bar{\mathbf{E}}_{ZZ}, \bar{\mathbf{E}}_{\Theta Z})$

Se considera un tubo cilíndrico de pared gruesa de material incompresible deformado de tal manera que las deformaciones modificadas de Green-Lagrange $\bar{E}_{R\Theta}$ y $\bar{E}_{RZ}$ sean nulas. Utilizando esta hipótesis y eliminando $\bar{E}_{ZZ}$ por la incompresibilidad del material, se puede aproximar la función de energía de deformación $\bar{\Psi}$ como

$$\bar{\Psi}(\bar{E}_{RR}, \bar{E}_{\Theta\Theta}, \bar{E}_{ZZ}, \bar{E}_{R\Theta}, \bar{E}_{RZ}, \bar{E}_{\Theta Z}) = \hat{\bar{\Psi}}(\bar{E}_{\Theta\Theta}, \bar{E}_{ZZ}, \bar{E}_{\Theta Z}) \tag{3.5}$$

Utilizando la regla de la cadena

$$\frac{\partial\hat{\bar{\Psi}}}{\partial\bar{E}_{\alpha}} = \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{E}_{\alpha}} + \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{E}_{RR}}\frac{\partial\bar{E}_{RR}}{\partial\bar{E}_{\alpha}}, \qquad \alpha = \Theta\Theta, ZZ, \Theta Z \tag{3.6}$$

se obtienen las derivadas. La restricción det $\bar{\mathbf{C}}$ = det (2$\bar{\mathbf{E}}$ + **I**) = 1 permite expresar $\bar{E}_{RR}$ en función de $\bar{E}_{\Theta\Theta}$, $\bar{E}_{ZZ}$ y $\bar{E}_{\Theta Z}$, de acuerdo con

$$\bar{E}_{RR} = \frac{1}{2}\left\{\left[(2\bar{E}_{\Theta\Theta}+1)(2\bar{E}_{ZZ}+1) - 4\bar{E}_{\Theta Z}^{2}\right]^{-1} - 1\right\} \tag{3.7}$$

Con (3.7) las derivada parciales de $\hat{\bar{\Psi}}$ quedan

$$\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{E}_{\Theta\Theta}} = \frac{\partial\hat{\bar{\Psi}}}{\partial\bar{E}_{\Theta\Theta}} + (2\bar{E}_{ZZ}+1)(2\bar{E}_{RR}+1)^{2}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{E}_{RR}} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{E}_{ZZ}} = \frac{\partial\hat{\bar{\Psi}}}{\partial\bar{E}_{ZZ}} + (2\bar{E}_{\Theta\Theta}+1)(2\bar{E}_{RR}+1)^{2}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{E}_{RR}} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{E}_{\Theta Z}} = \frac{\partial\hat{\bar{\Psi}}}{\partial\bar{E}_{\Theta Z}} - 4\bar{E}_{\Theta Z}(2\bar{E}_{RR}+1)^{2}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{E}_{RR}} \tag{3.10}$$

Con el objetivo de resolver la ecuación de equilibrio

$$p_i = \int_{r_i}^{r_0}(\bar{\sigma}_{\theta\theta} - \bar{\sigma}_{rr})\,\frac{dr}{r} \tag{3.11}$$

Con

$$\bar{\sigma} = J^{-1}\,\mathrm{desv}\left(\bar{\mathbf{F}}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{\mathbf{E}}}\bar{\mathbf{F}}^{T}\right), \quad \text{siendo} \quad \mathrm{desv}(\bullet) = (\bullet) - \frac{1}{3}[(\bullet):\mathbf{I}]\,\mathbf{I} \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered}\bar{\mathbf{F}} = (\lambda_\theta\lambda_z)^{-1}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_R + \lambda_\theta \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_\Theta + \gamma\lambda_z \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_Z + \lambda_z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_Z \\ \mathbf{E}_Z = \mathbf{e}_z\end{gathered} \tag{3.13}$$

Se tiene que

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \lambda_\theta^2 \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{E}_{\Theta\Theta}} + 2\gamma\lambda_z\lambda_\theta \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{E}_{\Theta Z}} + \gamma^2\lambda_z^2 \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{E}_{ZZ}} \tag{3.14}$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = \lambda_r^2 \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{E}_{RR}} \tag{3.15}$$

Si se utilizan las tres ecuaciones de las derivadas de $\bar{\Psi}$, (3.8), (3.9), (3.10) no se podría obtener la diferencia $\bar{\sigma}_{\theta\theta} - \bar{\sigma}_{rr}$ en función de $\hat{\bar{\Psi}}$, ya que la expresión $\partial\bar{\Psi}/\partial\bar{E}_{RR}$ no puede ser eliminada y permanece sin determinar. Además de esto $\bar{\sigma}_{\theta z}$ también depende de esa expresión. Por lo tanto, no puede utilizarse en general un potencial $\hat{\bar{\Psi}}$ para obtener el estado tensional en un tubo cilíndrico anisótropo bajo presión interior y torsión. Aun así, sí que pueden obtenerse las siguientes combinaciones de tensiones como función del potencial $\hat{\bar{\Psi}}$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} - \bar{\sigma}_{rr} - 2\gamma\bar{\sigma}_{\theta z} = \lambda_\theta^2 \frac{\partial\hat{\bar{\Psi}}}{\partial\bar{E}_{\Theta\Theta}} - \gamma^2\lambda_z^2 \frac{\partial\hat{\bar{\Psi}}}{\partial\bar{E}_{ZZ}} \tag{3.16}$$

$$\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\sigma}_{rr} - 2\gamma\bar{\sigma}_{\theta z} = \lambda_z^2 \frac{\partial\hat{\bar{\Psi}}}{\partial\bar{E}_{ZZ}} \tag{3.17}$$

Se anota además que

$$\lambda_\theta^2 = 2\bar{E}_{\Theta\Theta} + 1 \tag{3.18}$$

$$(1+\gamma^2)\lambda_z^2 = 2\bar{E}_{ZZ} + 1 \tag{3.19}$$

Las ecuaciones (3.16), (3.17), (3.18) y (3.19) permiten obtener las diferencias de tensiones normales y la tensión cortante en función de $\hat{\bar{\Psi}}$.

3.2.2. Función de energía de deformación propuesta por Vaishnav et al. [2]

Vaishnav et al. [**2**] proponen un modelo bidimensional con tres variantes de la función de la energía de deformación, todas ellas mediante expresiones polinómicas de tres, siete y nueve parámetros. La expresión de tres parámetros es muy inexacta para una investigación, mientras que la de doce parámetros no presenta ventajas notables sobre la de siete. Se muestra el modelo de siete parámetros

$$\hat{\Psi} = c_1\bar{E}_{\Theta\Theta}^2 + c_2\bar{E}_{\Theta\Theta}\bar{E}_{ZZ} + c_3\bar{E}_{ZZ}^2 + c_4\bar{E}_{\Theta\Theta}^3 + c_5\bar{E}_{\Theta\Theta}^2\bar{E}_{ZZ} + c_6\bar{E}_{\Theta\Theta}\bar{E}_{ZZ}^2 + c_7\bar{E}_{ZZ}^3 \qquad (3.20)$$

en donde c_i son parámetros adimensionales del material y $\bar{E}_{IJ}$ son las componentes del tensor modificado de Green-Lagrange en coordenadas polares. En este caso la función de energía de deformación no es convexa para ninguna combinación de valores de los parámetros debido a los términos cúbicos de la función.

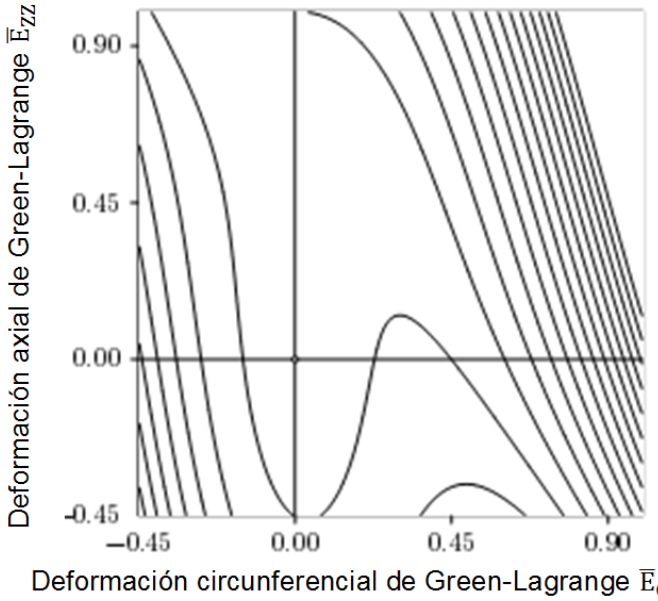

*Figura 3.3 – Curvas isopotenciales de (3.20) c_1 = -24,385 kPa, c_2 = -3,589 kPa, c_3 = -1,982 kPa, c_4 = 46,334 kPa, c_5 = 32,321 kPa, c_6 =3,743 kPa y c_7 = 3,266 kPa. Tomada de [**8**].*

Tras realizar pruebas numéricas con este modelo, se demostró que dos sets de parámetros del material completamente diferentes pueden representar la respuesta mecánica de una misma arteria. Esto hace que el modelo sea problemático. Se demostró que las soluciones a la ecuación de equilibrio no son únicas, como consecuencia directa de la no convexidad del potencial. A pesar de que este potencial es un primer intento para describir el comportamiento mecánico anisótropo de las arterias, su aplicación es limitada.

3.2.3. Función de energía de deformación propuesta por Fung et al. [4]

La función exponencial de energía de deformación debida a Fung et al. ha sido propuesta en forma bidimiensional así

$$\hat{\Psi} = \frac{1}{2}c\left[\exp(\hat{Q}) - 1\right], \quad \text{siendo } \hat{Q} = b_1\bar{E}_{\Theta\Theta}^2 + b_2\bar{E}_{ZZ}^2 + 2b_4\bar{E}_{\Theta\Theta}\bar{E}_{ZZ} \qquad (3.21)$$

en donde c es un parámetro con unidades de tensión y b_i parámetros adimensionales que no pueden ser escogidos arbitrariamente, como en el caso tridimensional y por los mismos motivos, si se requiere mantener la convexidad de la función.

Esta fórmula es capaz de modelar las características principales del comportamiento de las arterias, salvo en el caso de bajas presiones. Además se encontró que es un modelo muy sensible a las tensiones residuales.

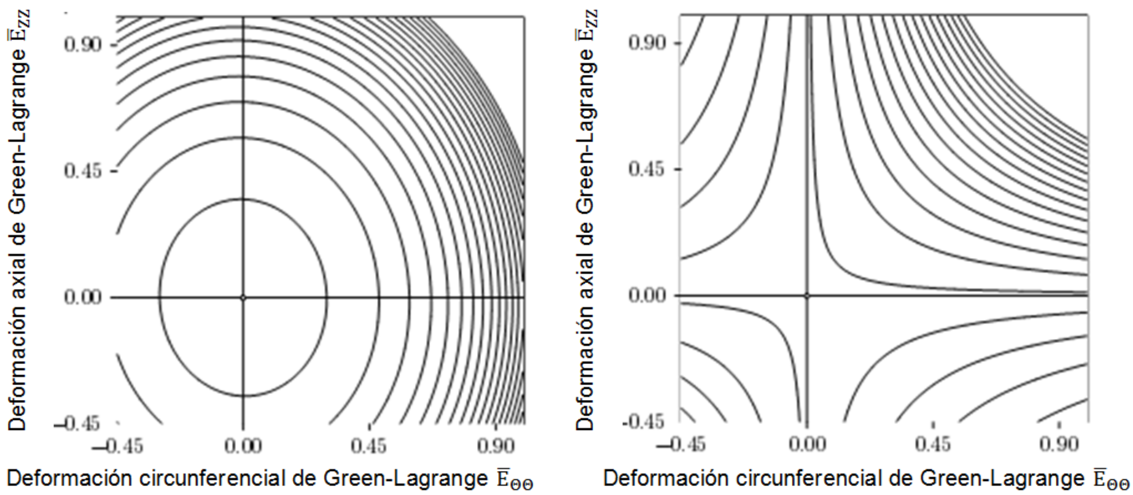

*Figura 3.4 – Curvas isopotenciales de (3.21). (Izq.) Parámetros c = 28,58 kPa,b_1 = 0,8329, b_2 = 0,6004 y b_3 = 0,016. (Der.) Conjunto de parámetros para los cuales (3.21) no resulta en convexa. Tomada de [**8**]*

3.2.4. Función de energía de deformación propuesta por Takamizawa y Hayashi

Otra forma bidimensional de función de energía de deformación para las arterias es la propuesta por Takamizawa y Hayashi, la cual tiene forma logarítmica

$$\hat{\bar{\Psi}} = -c\ln(1-\psi) \qquad (3.22)$$

en donde *c* es un parámetro tipo tensión y la función ψ es dada en la forma

$$\psi = \frac{1}{2}b_1\bar{E}_{\Theta\Theta}^2 + \frac{1}{2}b_2\bar{E}_{ZZ}^2 + b_4\bar{E}_{\Theta\Theta}\bar{E}_{ZZ} \qquad (3.23)$$

Los parámetros b_i son adimensionales. Esta formulación no evita que ψ sea la unidad, en cuyo caso la función de energía $\hat{\bar{\Psi}}$ tendería a infinito para ciertos estados de deformación. Además para ψ>1 el argumento de la función logarítmica es negativo y la función no queda bien definida. Es por esto que la función se limita a un estrecho rango de estados de deformación. Por otra parte el potencial es convexo bajo condiciones similares a la de los potenciales mencionados en otros apartados (Figura 3.5).

Esta función permite representar de forma adecuada la respuesta de las arterias excepto para casos de baja presión. Se observó en el estudio que las tensiones residuales tienen una influencia alta en el comportamiento mecánico de la pared. Por esto, es probable que se presenten inconvenientes en el uso de formulaciones de elementos finitos con control por desplazamiento.

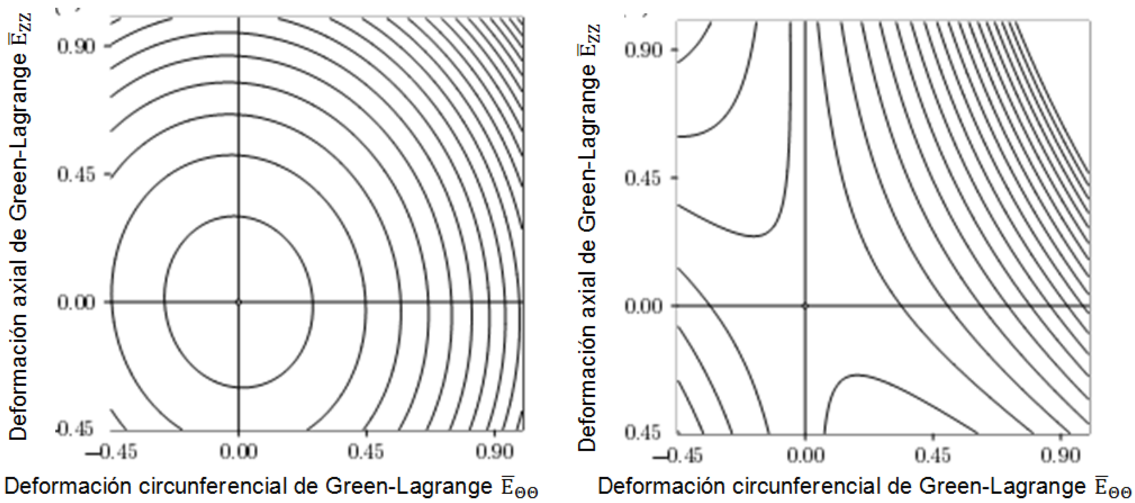

*Figura 3.5 – Curvas isopotenciales de (3.23). (Izq.) Parámetros c = 57,94 kPa, b_1 = 0,0,6311, b_2 = 0,4728 y b_3 = 0,0301. (Der.) Conjunto de parámetros para los cuales (3.23) no resulta en convexa. Tomada de [**8**]*

3.3. MODELO DE GASSER-OGDEN-HOLZAPFEL [9] [8] [15]

Holzapfel et al. [**8**] proponen un potencial que modele cada capa de la arteria como un material compuesto fibroreforzado. La idea fundamental es un modelo constitutivo que incorpore la información histológica, como lo es las direcciones de las fibras y su dispersión. Esta característica se observa como única, comparada con los modelos expuestos hasta el momento. Por lo tanto es un modelo basado en la teoría de la mecánica de los materiales compuestos fibrorefozados, utilizando también las simetrías del material ortótropo cilíndrico.

3.3.1. Modelo constitutivo para las capas de la arteria

Como las arterias están compuestas por capas (de pared gruesa), el modelo representa cada capa con una función de energía de deformación diferente. De igual forma, desde el punto de vista ingenieril, cada capa debe considerarse como un compuesto reforzado por dos familias de fibras de colágeno, las cuales estan dispuestas en espirales simétricas (Figura 3.6).

Cada capa tiene características similares, por lo tanto se usa la misma función de energía de deformación, solo que con parámetros del material diferentes. Se formula la función de energía $\bar{\Psi}$, dividiéndola en una parte asociada a la deformación isótropa $\bar{\Psi}_{\text{iso}}$ y otra asociada a la deformación anisótropa $\bar{\Psi}_{\text{aniso}}$. Como las fibras onduladas de colágeno de la pared arterial no están activas con bajas presiones (no guardan energía de deformación), se asocia $\bar{\Psi}_{\text{iso}}$ con la respuesta mecánica de la matriz no colágena del material, que se asume isótropa. La resistencia a la deformación a alta presión es casi absolutamente debida a las fibras de colágeno y por ello es asociada a la función $\bar{\Psi}_{\text{aniso}}$. Por tanto se puede escribir el potencial como

$$\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}\,, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) = \bar{\Psi}_{\text{iso}}\,(\bar{\mathbf{C}}) + \bar{\Psi}_{\text{aniso}}(\bar{\mathbf{C}}\,, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) \qquad (3.24)$$

donde las familias de fibras de colágeno están caracterizadas por las dos direcciones de los vectores $\mathbf{a}_{01}$ con $|\mathbf{a}_{01}| = 1$. Como medida de la deformación se utiliza $\bar{\mathbf{C}}$ y no $\bar{\mathbf{E}}$ como hasta el momento.

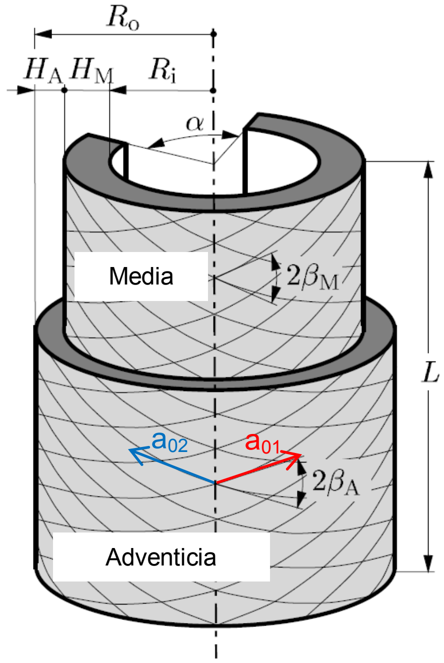

*Figura 3.6 – Modelo bicapa. Tomada de [**8**].*

Para completar el modelo se incorporan dos tensores $\mathbf{A}_i$, tales que $\mathbf{A}_i = \mathbf{a}_{0\mathrm{i}} \otimes \mathbf{a}_{0\mathrm{i}}$. Los invariantes que se implementan son entonces

$$\bar{\mathrm{I}}_1(\bar{\mathbf{C}}) = \mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{C}}, \qquad \bar{\mathrm{I}}_2(\bar{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{C}})^2 - \mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{C}}^2\right], \qquad \bar{\mathrm{I}}_3(\bar{\mathbf{C}}) = \det\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{1}, \tag{3.25}$$

$$\bar{\mathrm{I}}_4(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{a}_{01}) = \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{A}_1, \qquad \bar{\mathrm{I}}_5(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{a}_{01}) = \bar{\mathbf{C}}^2 : \mathbf{A}_1 \tag{3.26}$$

$$\bar{\mathrm{I}}_6(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{a}_{02}) = \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{A}_2, \qquad \bar{\mathrm{I}}_7(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{a}_{02}) = \bar{\mathbf{C}}^2 : \mathbf{A}_2 \tag{3.27}$$

$$\bar{\mathrm{I}}_8(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) = (\mathbf{a}_{01} \cdot \mathbf{a}_{02})\mathbf{a}_{01} \cdot \bar{\mathbf{C}}\,\mathbf{a}_{02}, \qquad \bar{\mathrm{I}}_9(\mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) = (\mathbf{a}_{01} \cdot \mathbf{a}_{02})^2 \tag{3.28}$$

Como los invariantes $\bar{\mathrm{I}}_3$ e $\bar{\mathrm{I}}_9$ son constantes se puede expresar el potencial como

$$\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \bar{\Psi}_{\mathrm{iso}}(\bar{\mathrm{I}}_1, \bar{\mathrm{I}}_2) + \bar{\Psi}_{\mathrm{aniso}}(\bar{\mathrm{I}}_1, \bar{\mathrm{I}}_2, \bar{\mathrm{I}}_4, \ldots, \bar{\mathrm{I}}_8) \tag{3.29}$$

Los invariantes $\bar{\mathrm{I}}_4$ e $\bar{\mathrm{I}}_6$ son el cuadrado de los alargamientos en las direcciones $\mathbf{a}_{01}$ y $\mathbf{a}_{02}$ respectivamente, por lo que son medidas del alargamiento de las fibras y, por tanto tienen interpretación física clara. Por simplicidad se considera la forma reducida de (3.29) como

$$\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \bar{\Psi}_{\mathrm{iso}}(\bar{\mathrm{I}}_1) + \bar{\Psi}_{\mathrm{aniso}}(\bar{\mathrm{I}}_4, \bar{\mathrm{I}}_6) \tag{3.30}$$

Entonces la anisotropía se manifiesta tan sólo a través de los invariantes $\bar{\mathrm{I}}_4$ e $\bar{\mathrm{I}}_6$, lo cual es suficiente para recoger la respuesta típica de las arterias.

Finalmente las partes isótropa entonces y anisótropa $\bar{\Psi}_{\mathrm{aniso}}$ de la función han de ser particularizadas para ajustarse al material de las capas de la pared arterial. Para la componente isótropa se utiliza un modelo neohookeano (clásico)

$$\bar{\Psi}_{\mathrm{iso}}\,(\bar{\mathrm{I}}_1) = \frac{\mathrm{c}}{2}(\bar{\mathrm{I}}_1 - 3) \qquad (3.31)$$

donde *c > 0* es parámetro tensional. El fuerte efecto de rigidización de cada capa bajo altas presiones hace que se use una función exponencial para la descripción de la energía de deformación almacenada en las fibras de colágeno, quedando

$$\bar{\Psi}_{\mathrm{aniso}}(\bar{\mathrm{I}}_4, \bar{\mathrm{I}}_6) = \frac{\mathrm{k}_1}{2\mathrm{k}_2}\sum_{\mathrm{i}=4,6}\{\exp[\mathrm{k}_2(\bar{\mathrm{I}}_{\mathrm{i}} - 1)^2] - 1\} \qquad (3.32)$$

donde $k_1 > 0$ es un parámetro tensional del material y $k_2 > 0$ es un parámetro adimensional. Una adecuada selección de estos dos parámetros permite que se cumpla la hipótesis de que las fibras de colágeno no influyen en la respuesta mecánica de la arteria en el dominio de las bajas presiones.

Finalmente lo que se determina en este apartado es la expresión de la tensión, en este caso en la descripción euleriana, como

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathrm{c}\ \mathrm{dev}\,\bar{\mathbf{b}} + \sum_{\mathrm{i}=4,6} 2\,\bar{\Psi}_{\mathrm{i}}\mathrm{desv}\,(\mathbf{a}_{\mathrm{i}} \otimes \mathbf{a}_{\mathrm{i}}) \qquad (3.33)$$

donde

$$\bar{\Psi}_4 = \frac{\partial\bar{\Psi}_{\mathrm{aniso}}}{\partial\bar{\mathrm{I}}_4}, \quad \bar{\Psi}_6 = \frac{\partial\bar{\Psi}_{\mathrm{aniso}}}{\partial\bar{\mathrm{I}}_6} \qquad (3.34)$$

denotan las funciones de respuesta (escalares).

3.3.1.1.Distribución de las fibras orientadas

En este apartado se introduce el concepto que permite tener en cuenta la dirección de las fibras, representándola de forma continua. El concepto se basa en la definición de *tensor de estructura generalizado*.

Se asume la existencia de una función de densidad $\rho\,(\mathbf{M})$, referida algunas veces a una función de densidad de orientación, la cual caracteriza la distribución de las fibras en la configuración de referencia respecto a la orientación de referencia $\mathbf{M}$. El vector $\boldsymbol{M}$ es un vector unitario localizado en el espacio tridimensional *Euleriano*, por lo cual $|\mathbf{M}| = 1$. Si se caracteriza $\mathbf{M}$ en términos de dos ángulos *Eulerianos* $\boldsymbol{\Theta} \in [0, \pi]$ y $\boldsymbol{\Phi} \in [0,2\pi]$ se obtiene

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Phi}) = \mathrm{sen}\boldsymbol{\Theta}\,\cos\boldsymbol{\Phi}\,\mathbf{e_1} + \mathrm{sen}\boldsymbol{\Theta}\,\mathrm{sen}\boldsymbol{\Phi}\,\mathbf{e_2} + \cos\boldsymbol{\Theta}\,\mathbf{e_3} \qquad (3.35)$$

donde $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ definen los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares (Figura 3.7). Debe notarse que cada fibra se cuenta de forma doble, lo que indica que para cada $\mathbf{M}$, $-\mathbf{M}$ se incluye también.

La función de densidad $\rho\,(\mathbf{M})$ se define de forma tal que $\rho\,(\mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Phi}))\mathrm{sen}\boldsymbol{\Theta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}$ representa el número de fibras (normalizado) con orientaciones en el rango $[\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Theta} + \mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}]$, $[\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Phi} + \mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}]$, y que obedece el requerimiento de simetría $\rho\,(\mathbf{M}) \equiv \rho\,(-\mathbf{M})$. Además se asume que $\rho\,(\mathbf{M})$ está normalizado tal que

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\omega} \rho\,\big(\mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Phi})\big)\mathrm{d}\omega = 1 \qquad (3.36)$$

donde ω es la esfera unitaria y $\mathrm{d}\omega = \mathrm{sen}\boldsymbol{\Theta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}$. De la misma forma, $\rho\,(\mathbf{M})$ está limitada a distribuciones generales ortótropas, donde se asume que las direcciones preferenciales de la distribución coinciden con los ejes $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ del sistema de coordenadas cartesianas.

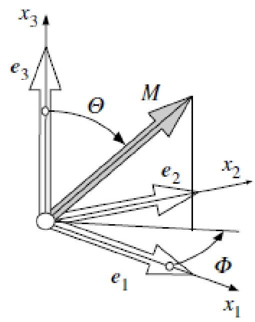

Figura 3.7 – Caracterización de un vector unitario arbitrario $\boldsymbol{M}$*. Tomada de [**9**].*

Se introduce así el tensor de estructura generalizado (simétrico) de segundo orden, definido por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int_{\omega} \rho\,\big(\mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Phi})\big)\, \mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Phi}) \otimes \mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Phi})\, \mathrm{d}\omega \qquad (3.37)$$

el cual representa la distribución de las fibras. Usando (3.35) el tensor de estructura generalizado se puede escribir de forma compacta

$$\mathbf{H} = \alpha_{ij}\, e_i \otimes e_j \qquad (3.38)$$

donde los subíndices varían de 1 a 3 y los coeficientes $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ están definidos por

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{1}{4\pi}\int_{\omega} \rho\,(\mathbf{M})\, \mathrm{sen}^3\boldsymbol{\Theta}\, \cos^2\boldsymbol{\Phi}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Phi} \\
\alpha_{22} &= \frac{1}{4\pi}\int_{\omega} \rho\,(\mathbf{M})\, \mathrm{sen}^3\boldsymbol{\Theta}\, \mathrm{sen}^2\boldsymbol{\Phi}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Phi} \qquad (3.39) \\
\alpha_{33} &= \frac{1}{4\pi}\int_{\omega} \rho\,(\mathbf{M})\, \cos^2\boldsymbol{\Theta}\, \mathrm{sen}\, \boldsymbol{\Theta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}
\end{aligned}$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi}\int_{\omega} \rho\,(\mathbf{M})\,\mathrm{sen}^3\boldsymbol{\Theta}\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{\Phi}\cos\boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}$$

$$\alpha_{23} = \frac{1}{4\pi}\int_{\omega} \rho\,(\mathbf{M})\,\mathrm{sen}^2\boldsymbol{\Theta}\cos\boldsymbol{\Theta}\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}$$

$$\alpha_{13} = \frac{1}{4\pi}\int_{\omega} \rho\,(\mathbf{M})\,\mathrm{sen}^2\boldsymbol{\Theta}\cos\boldsymbol{\Theta}\cos\boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}$$

3.3.1.1.1.Representación transversalmente isótropa de la familia de fibras de colágeno

Se asume que en cada capa arterial están embebidas dos familias de fibras de colágeno. Cada familia de fibras está distribuida con simetría rotacional alrededor de una dirección media preferencial, a_0 (vector unitario), de tal forma que la familia hace que el material responda de forma transversalmente isótropa. Se toma como dirección preferencial a_0 al vector base del sistema cartesiano e_3. Con esto, la función de densidad es independiente de $\boldsymbol{\Phi}$, con lo cual la función de energía queda $\rho\,(\boldsymbol{\Theta})$. La condición de normalización (3.36) se reduce a $\int_0^{\pi} \rho\,(\boldsymbol{\Theta})\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{\Theta}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Theta} = 2$, con lo que las componentes no diagonales de $\mathbf{H}$, $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{13}$, desaparecen y los términos que quedan están dados por

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1 - 2\kappa, \qquad \kappa = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \rho\,(\boldsymbol{\Theta})\,\mathrm{sen}^3\boldsymbol{\Theta}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Theta} \tag{3.40}$$

donde se introduce el término κ. De igual forma el tensor de estructura generalizado $\mathbf{H}$, se puede definir en su forma compacta como

$$\mathbf{H} = \kappa\mathbf{I} + (1 - 3\kappa)\,a_{0i} \otimes a_{0i} \tag{3.41}$$

donde $\mathbf{I}$ es el tensor identidad. De aquí que $\mathbf{H}$ dependa solo del parámetro de dispersión estructural, κ, el cual representa de forma integral la distribución de las fibras y describe el “grado de anisotropía” del material (Figura 3.8). Se debe subrayar que cada distribución de fibras transversalmente isótropa se puede representar como una combinación lineal de $\mathbf{I}$ y de $a_{0i} \otimes a_{0i}$, de acuerdo con (3.41).

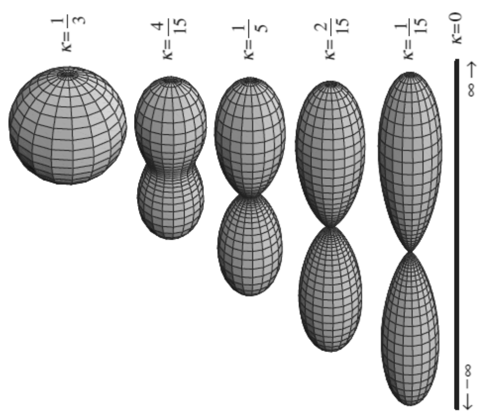

*Figura 3.8 – Representación gráfica de la orientación de las fibras de colágeno basadas en una función de densidad transversalmente isótropa. Tomada de [**9**].*

3.3.1.2.Formulación hiperelástica anisótropa

Aplicando las expresiones definas hasta el momento, se procede a modificar la función de energía de deformación, para incluir el parámetro κ.

Usando (3.24) y (3.41) se redefine la función de energía de deformación

$$\overline{\Psi}(\bar{\mathbf{C}},\mathbf{H}_{\mathrm{i}}) = \overline{\Psi}_{\mathrm{iso}}(\bar{\mathbf{C}}) + \sum_{\mathrm{i}=1,2} \overline{\Psi}_{\mathrm{anis}}(\bar{\mathbf{C}},\mathbf{H}_{\mathrm{i}}(\mathbf{a}_{0\mathrm{i}},\kappa)) \qquad (3.42)$$

donde $\mathbf{H}$ es el tensor de estructura generalizado según (3.41) y depende de la orientación media de la familia de fibras, $\mathbf{a}_{0\mathrm{i}}$, así como también del parámetro de dispersión κ.

Tomando la matriz de naturaleza no colagenosa como un material incompresible isótropo neohookeano de acuerdo con (3.31), y definiendo la parte anisótropa (aportación de las fibras), se tiene que

$$\overline{\Psi}_{\mathrm{aniso}}(\bar{\mathbf{C}},\mathbf{H}_{\mathrm{i}}) = \frac{\mathrm{k}_1}{2\mathrm{k}_2} \sum_{\mathrm{i}=1,2} \left\{\exp\left(\mathrm{k}_2 \overline{\mathrm{E}}_{\mathrm{i}}{}^2\right) - 1\right\} \qquad (3.43)$$

con

$$\overline{\mathrm{E}}_{\mathrm{i}} = \mathbf{H}_{\mathrm{i}}:\bar{\mathbf{C}} - 1 \qquad (3.44)$$

aquí $\mathbf{H}_{\mathrm{i}}:\bar{\mathbf{C}}$ denota un invariante del tensor de estructura generalizado, $\mathbf{H}_{\mathrm{i}}$, y del tensor simétrico modificado de Cauchy-Green por la derecha, $\bar{\mathbf{C}}$. Se debe tener en cuenta que $\mathbf{H}_{\mathrm{i}}:\mathbf{I} = 1$. Además se usa la expresión de deformación Green-Lagrange $\overline{\mathrm{E}}_{\mathrm{i}} = \mathbf{H}_{\mathrm{i}}:\bar{\mathbf{C}} - 1$, la cual caracteriza la deformación en la dirección de la orientación media de cada grupo de familias.

Una hipótesis fundamental del modelo es que las fibras no pueden soportar ningún tipo de carga a compresión. Esto no solo se basa en razones físicas sino en razones de estabilidad demostradas por Holzapfel et al. [**15**]. Para adaptar este supuesto al potencial (3.43), se asume que la parte anisótropa $(1-3\kappa)\,\mathrm{a}_{0\mathrm{i}}\otimes\mathrm{a}_{0\mathrm{i}}$ contribuye a $\mathbf{H}$ solo si la dirección de $\mathrm{a}_{0\mathrm{i}}$ es positiva, es decir si $\bar{\mathbf{C}}:(\mathrm{a}_{0\mathrm{i}}\otimes\mathrm{a}_{0\mathrm{i}}) > 1$.

Finalmente se muestra la función de energía de deformación, con los factores de dispersión y orientación de las fibras incluidos

$$\overline{\Psi}(\bar{\mathbf{C}},\mathbf{H}_{\mathrm{i}}) = \frac{\mathrm{c}}{2}(\bar{\mathrm{I}}_1 - 3) + \frac{\mathrm{k}_1}{2\mathrm{k}_2} \sum_{\mathrm{i}=4,6} \{\exp(\mathrm{k}_2[\kappa\bar{\mathrm{I}}_1 + (1-3\kappa)\bar{\mathrm{I}}_{\mathrm{i}} - 1]^2) - 1\} \qquad (3.45)$$

se muestra claramente como la parte anisótropa del potencial depende de $\bar{\mathrm{I}}_1$ además de $\bar{\mathrm{I}}_4$ e $\bar{\mathrm{I}}_6$ ($\bar{\mathbf{C}}:\mathrm{a}_{01}\otimes\mathrm{a}_{01}$ y $\bar{\mathbf{C}}:\mathrm{a}_{02}\otimes\mathrm{a}_{02}$ respectivamente). Cabe resaltar que para $\kappa = 0$, (3.45) equivale a (3.32).

3.4. BIFURCACIÓN DE EQUILIBRIO DE CILINDROS BAJO PRESIÓN INTERNA Y CARGA AXIAL [5] [6] [7]

El proceso de inflación de tubo tipo membrana y el problema de bifurcación y inestabilidad asociado a éste, es un caso de estudio clásico que ha sido estudiado en muchos artículos y libros. En la literatura está documentado que para tubos cilíndricos tipo membrana bajo presión interna y con los extremos impedidos de desplazamiento en el eje axial, conforme el radio de la sección media aumenta, la presión pasa por un máximo (la presión limitante), tras lo cual decrece, fenómeno observado también en membranas esféricas. Kydoneifs y Spencer observaron también, en el caso de un tubo tipo membrana de material neohookeano, la tendencia a la formación de un bulbo esférico en el centro del cilindro [**16**]. En los próximos apartados se mostraran planteamientos analíticos realizados para acercarse y entender mejor la bifurcación de equilibrio de los problemas mencionados.

3.4.1. Análisis de la influencia del fenómeno de ablandamiento por deformación localizado en la bifurcación de cilindros de pared delgada bajo presión interna y estiramiento axial [5]

En este artículo se investiga las características del comportamiento de un modelo con material que presenta ablandamiento por deformación localizado, LSS por sus siglas en ingles (*Localized Strain Softening materials*), con un énfasis particular en el efecto que tiene el ablandamiento por deformación localizado en el material comparado con un material tipo goma modelado con una función de energía de deformación neohookeana. Se estudian las inestabilidades que causan cambios significativos en el diámetro y/o espesor de un tubo y como éstas pueden estar relacionadas con los cambios en el comportamiento del tejido blando debidos a enfermedades como el síndrome de Marfan o problemas de las válvulas cardiacas.

Se considera una membrana cilíndrica circular cuya superficie media es su configuración de referencia no deformada está descrita por las ecuaciones

$$\mathbf{X} = \mathrm{R}\mathbf{E}_\mathrm{R}(\Theta) + \mathrm{Z}\mathbf{E}_\mathrm{Z}\,, \qquad 0 \le \Theta < 2\pi\,, \quad -\frac{\mathrm{L}}{2} \le \mathrm{Z} \le \frac{\mathrm{L}}{2} \tag{3.46}$$

donde (R, Θ, Z), son coordenadas cilíndricas y $\mathbf{E}_\mathrm{R}$, $\mathbf{E}_\Theta$ y $\mathbf{E}_\mathrm{Z}$ son los vectores unitarios en las direcciones radial, circunferencial y longitudinal. La longitud, L ,del cilindro puede ser finita o infinita.

Luego de que la membrana es inflada y estirada axialmente, la superficie media de ésta se describe mediante las expresiones

$$\mathbf{x} = \mathrm{r}\mathbf{e}_\mathrm{r}(\theta) + \mathrm{z}\mathbf{e}_\mathrm{z}\,, \qquad 0 \le \theta < 2\pi\,, \quad -\mathrm{l}/2 \le \mathrm{z} \le \mathrm{l}/2 \tag{3.47}$$

donde $(\mathrm{r}, \theta = \Theta, \mathrm{z})$ y $\{\mathbf{e}_\mathrm{r}, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\mathrm{z}\}$ tienen similar significado al descrito anteriormente. El tensor gradiente de deformaciones $\mathbf{F}$ es diagonal con componentes λ_r, λ_θ y λ_z. Sin embargo, debido a la incompresibilidad del material, $\mathrm{J}\ \det\mathbf{F} = \lambda_\mathrm{r}\lambda_\theta\lambda_\mathrm{z} = 1$, con lo cual se puede expresar el alargamiento principal en dirección radial como $\lambda_\mathrm{r} = {\lambda_\theta}^{-1}{\lambda_\mathrm{z}}^{-1}$. Aquí $\lambda_\theta = r/R > 0$ es el alargamiento circunferencial principal y $\lambda_\mathrm{z} = \mathrm{l}/\mathrm{L}$ es el alargamiento axial.

Para este material las tensiones de Cauchy pueden expresarse en como

$$\sigma_{ii} = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p\,, \qquad i = r, \theta, z \tag{3.48}$$

siendo p un valor arbitrario de tensión asociado a la condición impuesta de incompresibilidad. Utilizando la hipótesis de pared delgada ($\sigma_{rr} \cong 0$) las tensiones son

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda_\theta \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_\theta}, \qquad \sigma_{zz} = \lambda_z \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_z} \tag{3.49}$$

en donde la función de energía de deformación está tan sólo en función de λ_θ y λ_z

$$\widehat{W}\,(\lambda_\theta, \lambda_z) = W(\lambda_\theta^{-1}\lambda_z^{-1}, \lambda_\theta, \lambda_z) \tag{3.50}$$

De la ecuación de equilibrio del tubo de pared delgada bajo presión interior se obtiene ésta como

$$P = \frac{H}{R} \frac{\widehat{W}_{\lambda_\theta}\,(\lambda_\theta, \lambda_z)}{\lambda_\theta\, \lambda_z} \tag{3.51}$$

en donde H es el espesor del tubo en la configuración no deformada. Se expresa $\partial\widehat{W}/\partial\lambda_\theta$ como $\widehat{W}_{\lambda_\theta}$ y, con la misma notación, para derivadas segundas ($\widehat{W}_{\lambda_\theta \lambda_z}$).

La función de energía de deformación implementada para este estudio es del tipo simple, incompresible e isótropa, expresada por

$$W = \frac{\mu}{2}\left[I_1 - e^{-\beta(I_1-3)^2} - 2\right] \tag{3.52}$$

donde $I_1 = {\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + {\lambda_3}^2$ es la primera invariante principal de $\mathbf{FF^T}$, $\beta \geq 0$ es un parámetro del material y μ (> 0) es el modulo a cortante en estado fundamental del material. Con ésta función de energía, al igualar $\beta = 0$, se puede obtener la reconocida función del material neohookeano, es por esto que con este parámetro se puede controlar el grado de ablandamiento por deformación. Cuando $I_1 \cong 3$, así como cuando I_1 es muy diferente de 3, el termino exponencial en (3.52) no tiene casi influencia. Solo tiene influencia el término exponencial cuando I_1 está cercano a 3.

Mediante un cálculo simple usando la notación usada hasta el momento, se obtiene que las componentes no nulas del tensor de tensiones de Cauchy están dadas por

$$\sigma_{\theta\theta} = \mu\left({\lambda_\theta}^2 - {\lambda_\theta}^{-2}{\lambda_z}^{-2}\right)\left[1 + 2\beta(I_1 - 3)e^{-\beta(I_1-3)^2}\right] \tag{3.53}$$

$$\sigma_{zz} = \mu\left({\lambda_z}^2 - {\lambda_\theta}^{-2}{\lambda_z}^{-2}\right)\left[1 + 2\beta(I_1 - 3)e^{-\beta(I_1-3)^2}\right] \tag{3.54}$$

En la Figura 3.9 se puede observar como para cualquier valor de $\beta \neq 0$ (material neohookeano) las curvas tienen un forma sigmoidal, característico del comportamiento de ablandamiento localizado por deformación.

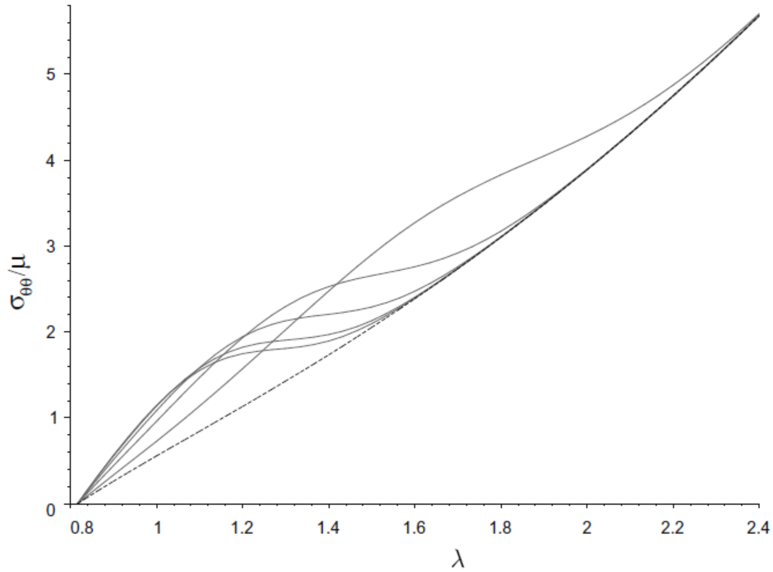

*Figura 3.9 – Curvas de $\sigma_{\theta\theta}/\mu$ vs. λ_θ para λ_z = 1.5 fijo. La línea punteada corresponde a $\beta = 0$ (material neohookeano) y las otras líneas corresponden a $\beta = 0, 0.25, 0.75, 1.25, 1.75, 2.0$ Tomada de [**5**].*

Para mostrar los distintos modos de bifurcación del inflamiento del cilindro, se consideran desplazamientos incrementales de la forma

$$\delta\mathbf{u} = \delta u_r(\theta, z)\,\mathbf{e}_r + \delta u_\theta(\theta, z)\,\mathbf{e}_\theta + \delta u_z(\theta, z)\,\mathbf{e}_z \tag{3.55}$$

Según el modo de bifurcación considerado se considerarán solamente algunos términos. En el presente trabajo, es relevante la posible aplicación a la formación de un aneurisma, por lo tanto el modo que interesa es el de abultamiento. Para este caso el campo de desplazamientos depende solo de z y tiene la forma

$$\delta\mathbf{u} = \delta u_r(z)\,\mathbf{e}_r + \delta u_z(z)\,\mathbf{e}_z \tag{3.56}$$

El modo de abultamiento tiene como característica la formación de un bulbo en la parte central del tubo. Para un tubo de longitud infinita, el criterio de bifurcación es

$$\lambda_z{}^2\widehat{W}_{\lambda_z\lambda_z}\left(\lambda_\theta{}^2\widehat{W}_{\lambda_\theta\lambda_\theta} - \lambda_\theta\widehat{W}_{\lambda_\theta}\right) - \left(\lambda_z\lambda_\theta\widehat{W}_{\lambda_z\lambda_\theta} - \lambda_\theta\widehat{W}_{\lambda_\theta}\right)^2 = 0 \tag{3.57}$$

La parte izquierda de (3.57) puede ser negativa o positiva, dependiendo del primer término. Usando (3.49) este primer término se puede escribir como

$$\lambda_z{}^2\widehat{W}_{\lambda_z\lambda_z}\left(\lambda_\theta{}^2\widehat{W}_{\lambda_\theta\lambda_\theta} - \lambda_\theta\widehat{W}_{\lambda_\theta}\right) = \left(\lambda_z\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial\lambda_z} - \sigma_{zz}\right)\left(\lambda_\theta\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\lambda_\theta} - 2\sigma_{\theta\theta}\right) \tag{3.58}$$

Mediante análisis específicos, se observa como la curvatura de las gráficas $\sigma_{\theta\theta}$ vs. λ_θ y σ_{zz} vs. λ_z tienen una influencia considerable en el modo de abultamiento.

Se observa en la Figura 3.10 que el modo de abultamiento es bastante sensible al valor de β, pues para valores pequeños de β alargamientos pequeños λ_z, se requieren valores más grandes de λ_θ , conforme aumenta β, para alcanzar el punto de bifurcación (λ_z fijo). Para valores más altos de λ_z sucede lo contrario.

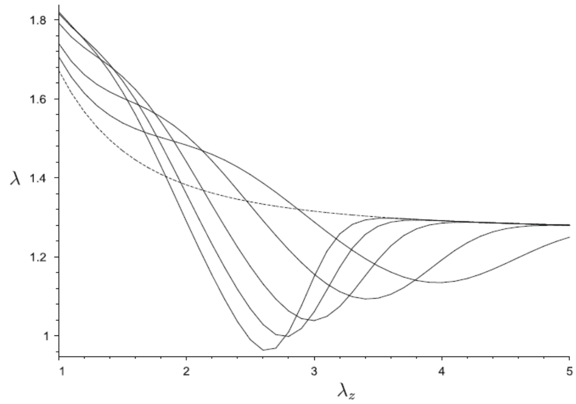

*Figura 3.10 – Curvas de bifurcación para tubo de longitud infinita en modo de abultamiento para $\beta = (0, 0.01, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08)$, donde $\beta = 0$ corresponde a un material neohookeano (curva discontinua). La curva con el mínimo más pequeño corresponde a $\beta = 0.08$ y el mínimo incrementa conforma β decrece. Tomada de [**5**].*

En la Figura 3.11 se observan las mismas curvas que en la Figura 3.10, solo que para valores más grandes de β. También se observa la curva discontinua que corresponde a presión cero, en cuyo caso el material membrana está bajo un estado uniaxial de alargamiento con $\lambda_\theta = 1/\sqrt{\lambda_z}$. Se observa como para valores lo suficientemente grandes de β, el cilindro se puede volver inestable sin ninguna presión interna, así como para valores de β mayores a los de la figura, el cilindro está siempre desestabilizado.

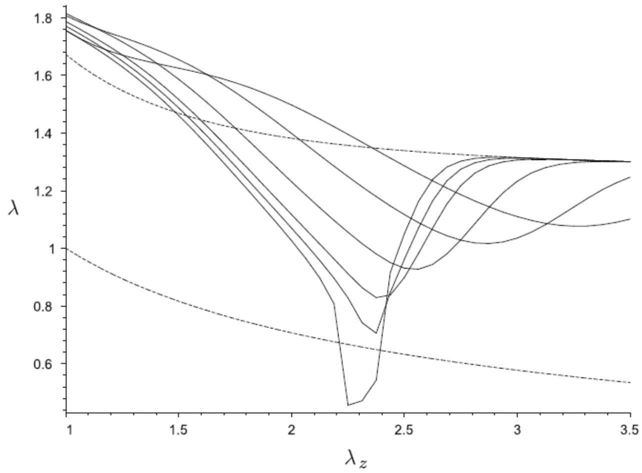

*Figura 3.11 - Curvas de bifurcación para tubo de longitud infinita en modo de abultamiento para $\beta = (0, 0.025, 0.05, 0.1, 0.15, 0.175, 0.2)$, donde $\beta = 0$ corresponde a un material neohookeano (curva discontinua superior). La curva con el mínimo más pequeño corresponde a $\beta = 0.2$ y el mínimo incrementa conforma β decrec. Tomada de [**5**].*

Para observar si la inestabilidad sin presión interna depende del supuesto de longitud infinita, se examina el criterio de bifurcación para tubos con longitud finita [**17**], usando la expresión

$$\lambda_z{}^2\widehat{W}_{\lambda_z\lambda_z}\left(\lambda_\theta{}^2\widehat{W}_{\lambda_\theta\lambda_\theta} - \lambda_\theta\widehat{W}_{\lambda_\theta}\right) - \left(\lambda_z\lambda_\theta\widehat{W}_{\lambda_z\lambda_\theta} - \lambda_\theta\widehat{W}_{\lambda_\theta}\right)^2 - \upsilon^2\,\lambda_\theta{}^2\widehat{W}_{\lambda_z\lambda_z}\,\lambda_z\widehat{W}_{\lambda_z} = 0 \qquad (3.59)$$

donde

$$v = \frac{2\pi R}{L} \qquad (3.60)$$

En la Figura 3.12 se muestra el papel importante que juega la longitud del tubo sobre todo para valores altos de λ_z. Se observa como el de modo de abultamiento sin presión interna no depende de longitud del tubo. Se concluye que la bifurcación asociada a abultamiento sigue el efecto fisiológico debido al ablandamiento por deformación

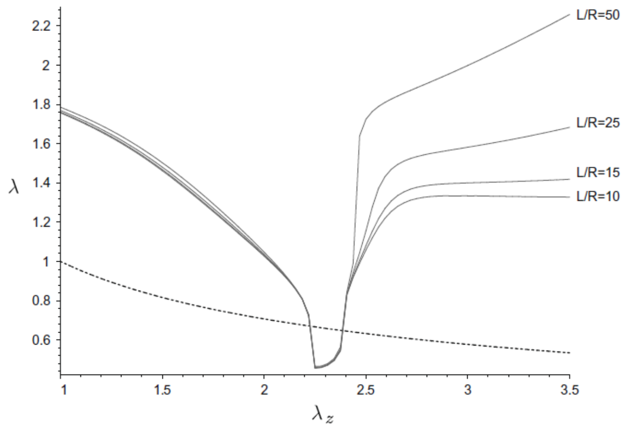

Figura 3.12 – Curvas de bifurcación del modo abultamiento para $\beta = 0.2$ y para tubos con longitud finita con $L/R = 10, 15, 25, 50$. La curva discontinua corresponde a presión interna nula.

3.4.2. Análisis de la influencia del fenómeno de ablandamiento por deformación localizado en la bifurcación de cilindros de pared gruesa bajo presión interna y estiramiento axial [6]

Como ampliación de [**5**], en este apartado se muestra el trabajo de Merodio y Haughton para cilindros de pared gruesa. Esta ampliación es necesaria ya que los pacientes con síndrome de Marfan, pueden desarrollar aneurismas aórticos, en cuyo caso la pared arterial se engruesa y el diámetro de la aorta aumenta, con lo cual el análisis de pared delgada no permite capturar este mecanismo.

El material con el que se trabaja es el mismo definido mediante (3.52), con el cual se realiza un análisis para observar la bifurcación en sus distintos modos. Se mostrará el modo de bifurcación por abultamiento, que es el relevante para el presente trabajo.

Este análisis requiere que la longitud del cilindro sea finita y un parámetro adicional, el espesor de la pared del tubo. El vector de posición de un punto material está definido por

$$\mathbf{X} = \mathrm{R}\mathbf{E}_\mathrm{R}(\Theta) + \mathrm{Z}\mathbf{E}_\mathrm{Z}\,, \quad \mathrm{A} \leq \mathrm{R} \leq \mathrm{B}, \quad 0 \leq \Theta \leq 2\pi\,, \quad -\mathrm{L}/2 \leq \mathrm{Z} \leq \mathrm{L}/2 \qquad (3.61)$$

en coordenadas de referencia no deformadas, donde $(\mathrm{R}, \Theta, \mathrm{Z})$ son coordenadas cilíndricas. Tras ser sometido a presión interna y extensión axial, el cilindro mantiene su sección circular. En la configuración deformada el cilindro está descrito por

$$\mathbf{x} = \mathrm{r}\mathbf{e}_{\mathrm{r}}(\theta) + \mathrm{z}\mathbf{e}_{\mathrm{z}}\,, \qquad a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\,, \quad -l/2 \leq z \leq l/2 \tag{3.62}$$

donde $(\mathrm{r}, \theta = \Theta, \mathrm{z})$ son las coordenadas cilíndricas y l es la longitud deformada del cilindro. Debido a la incompresibilidad del material, el tensor de deformaciones $\mathbf{F}$ tiene componentes $\mathrm{diag}\left(\lambda_\theta{}^{-1}\lambda_z{}^{-1}, \lambda_\theta, \lambda_z\right)$. El tensor de tensiones de Cauchy está definido por (3.48), siendo W la función de energía de deformación y p la presión hidrostática arbitraria debido a la condición de incompresibilidad. Usando la ecuación de equilibrio

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{rr}}}{\mathrm{dr}} + \frac{\sigma_{\mathrm{rr}} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \tag{3.63}$$

y asumiendo que la superficie externa, $\mathrm{R} = \mathrm{B}$, se encuentra libre de tracción, la presión interna P aplicada en la cara interna del cilindro $\mathrm{R} = \mathrm{A}$ se puede escribir como

$$\mathrm{P} = \int_a^b \lambda_\theta \widehat{\mathrm{W}}_{\lambda_\theta} \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}} = \int_{\lambda_{\theta b}}^{\lambda_{\theta a}} \frac{\widehat{\mathrm{W}}_{\lambda_\theta}}{\left(\lambda_\theta{}^2\,\lambda_z - 1\right)} \tag{3.64}$$

con la misma notación de (3.50) y teniendo en cuenta que

$$\lambda_{\theta a} = \lambda_\theta(A) = \frac{a}{A}, \qquad \lambda_{\theta b} = \lambda_\theta(B) = \frac{b}{B} \tag{3.65}$$

En la Figura 3.13 se observan los efectos que tienen el espesor de la pared, el alargamiento axial λ_z y el parámetro material β sobre la presión interna P. Se grafica la presión adimensional $2\mathrm{P}/\mu$ versus el alargamiento circunferencial en la superficie interna $\lambda_{\theta a}$. En cada caso, el material neohookeano presenta una presión con incremento monótono (curvas discontinuas). Para materiales tipo goma este no es un comportamiento típico, ya que usualmente la presión presenta un máximo local y luego un mínimo antes de seguir con un crecimiento monótono. El ablandamiento exponencial añade este efecto al comportamiento del material. Se puede además observar que para valores lo suficientemente altos de λ_z, el efecto de β es limitado, pues la presión interna tiende al valor asociado al material neohookeano.

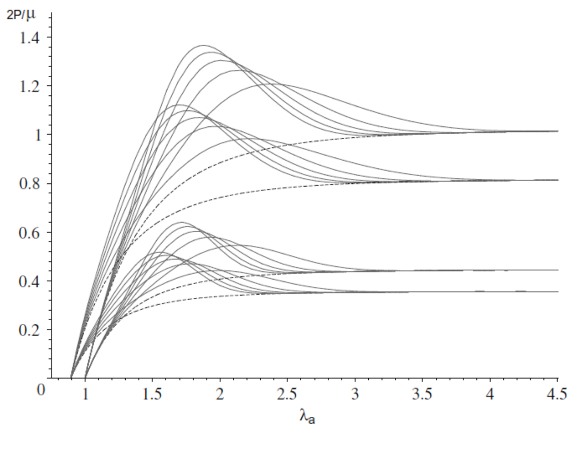

*Figura 3.13 – Presión interna adimensional $2P/\mu$ versus $\lambda_{\theta a}$ para $\lambda_z = 1, 1.25$ con $\beta = 0(0.15)0.75$ para cada familia de curvas. Las dos familias de curvas que cortan el eje $\lambda_{\theta a}$ en 1, corresponden a $\lambda_z = 1$, cada una asociada a un espesor de pared $(A/B = 0.6, 0.8)$. Para un mismo λ_z y $\lambda_{\theta a}$ determinado, paredes más gruesas requieren presiones mayores. Las curvas discontinuas representan un material neohookeano $\beta = 0$. Las curvas con los mayores máximos locales de cada familia están asociados con $\beta = 0.75$, decreciendo el máximo con el valor de β. Tomada de [**6**].*

Para observar el efecto que tiene el parámetro β en la tensión circunferencial, en la Figura 3.14 se grafican curvas de tensión circunferencial adimensional versus alargamiento circunferencial interno $\lambda_{\theta a}$, tanto para la superficie interna como externa en un cilindro de pared gruesa $(A/B = 0.5)$, con un alargamiento axial constante ($\lambda_z = 1$). Se observa como para el material neohookeano ($\beta = 0$) la curva es cóncava y de crecimiento monótono, mientras que para valores β lo suficientemente altos, la curva adopta una forma de "S" con dos cambios de curvatura.

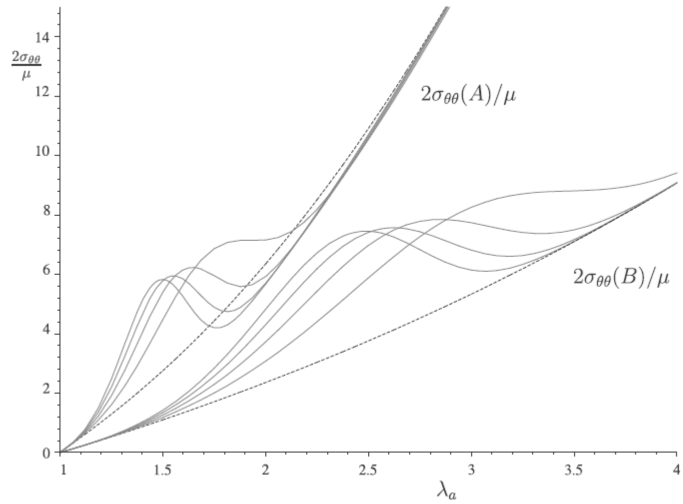

*Figura 3.14 – Tensión circunferencial adimensional $2\sigma_{\theta\theta}/\mu$ evaluada en las superficies interna y externa del cilindro versus $\lambda_{\theta a}$. Se muestran dos familias de curvas, una para cada superficie. El espesor del cilindro es $A/B = 0.5$ y $\lambda_z = 1$. En cada familia hasy cinco curvas correspondientes a $\beta = 0(0.25)1$, siendo $\beta = 0$ el material neohookeano (curvas discontinuas). Tomada de [**6**].*

Con el objetivo de analizar el cambio de curvatura y de considerar la influencia del espesor del cilindro en el comportamiento mecánico, se grafica la segunda derivada de la tensión circunferencial respecto de λ_θ evaluado en la superficie interna del cilindro (Figura 3.15). Se utilizan dos espesores $A/B = 0.5$ y $A/B = 0.9$ (curvas discontinuas), así como un alargamiento axial $\lambda_z = 1.5$.

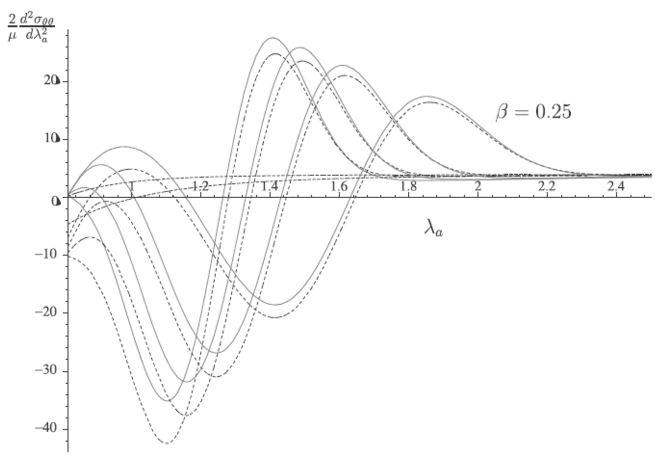

*Figura 3.15 – Segunda derivada de la tensión circunferencial adimensional $2/\mu\ d^2\sigma_{\theta\theta}/d^2\lambda_{\theta a}$ evaluada en la superficie interna del cilindro versus $\lambda_{\theta a}$. Las curvas continuas corresponden a $A/B = 0.5$ y las discontinuas corresponden a $A/B = 0.9$. En ambos casos $\beta = 0(0.25)1$, siendo $\beta = 0$ un material neohookeano (curvas discontinuas - crecimiento monótono). Tomada de [**6**].*

De la Figura 3.15 se pueden observar varias características importantes. Primero, se nota que no hay una gran diferencia en el comportamiento de los cilindros de diferente espesor, sin embargo para el material neohookeano de pared más gruesa se cumple siempre que $\mathrm{d}^2\sigma_{\theta\theta}/\mathrm{d}^2\lambda_{\theta a} > 0$, mientras que para el mismo material, pero más delgado, se presenta un cambio de curvatura mientras el cilindro es inflado. También se observa que para valores pequeños de $\lambda_{\theta a}$ (fase inicial de inflado) el espesor del cilindro determina cuantas veces ocurre un cambio de curvatura debido al parámetro β. Por ejemplo, para $A/B = 0.5$, el material neohookeano siempre cumple que $\mathrm{d}^2\sigma_{\theta\theta}/\mathrm{d}^2\lambda_{\theta a} > 0$, mientras que para $\beta = 0.25$, hay dos raíces para $\mathrm{d}^2\sigma_{\theta\theta}/\mathrm{d}^2\lambda_{\theta a}$. En comparación, cuando $A/B = 0.9$, el material neohookeano tiene una única raíz para $\mathrm{d}^2\sigma_{\theta\theta}/\mathrm{d}^2\lambda_{\theta a}$, mientras que para $\beta = 0.25$, $\mathrm{d}^2\sigma_{\theta\theta}/\mathrm{d}^2\lambda_{\theta a}$ tiene tres raíces, lo cual le da la forma de "S" a la curva. Para cilindros de pared más delgada, el cambio de curvatura es bastante sutil, para el material neohookeano que tiene una única raíz para $\mathrm{d}^2\sigma_{\theta\theta}/\mathrm{d}^2\lambda_{\theta a}$.

Para mostrar los resultados de la bifurcación, se consideran los desplazamientos diferenciales planteados en (3.55). Específicamente se muestran los resultados del modo de abultamiento, en el cual se implementan los desplazamientos diferenciales de la forma (3.56), los cuales dependen solo de z. Este modo de bifurcación se observa como un bulbo o globo inflado en el centro del tubo cilíndrico. El criterio de bifurcación se obtiene numéricamente de la solución de las ecuaciones incrementales [**18**]. El procedimiento de solución requiere la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas de cuarto orden con cuatro condiciones de borde de segundo orden. El parámetro crítico en el sistema, es aquel para el que sean posibles soluciones no triviales.

En la Figura 3.16 se observan los puntos de bifurcación axisimétrica en el plano $\lambda_z - \lambda_{\theta a}$ para un cilindro en particular. Se muestran curvas para diferentes valores de β, y se incluye una curva (discontinua - inferior) correspondiente a presión interna cero. Se pude observar como para valores lo suficientemente altos de β, el cilindro en proceso de alargamiento se puede volver inestable sin la aplicación de ninguna presión interna. Se observa similitud cualitativa entre el comportamiento mecánico de estas curvas y las de la Figura 3.11.

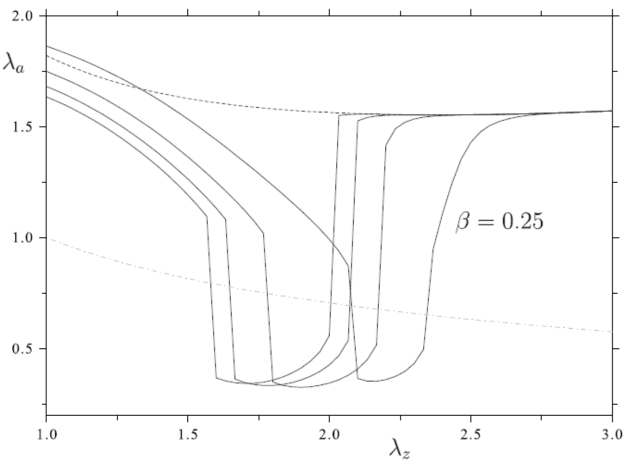

*Figura 3.16 – Puntos de bifurcación axisimétrica en términos de $\lambda_{\theta a}$ versus λ_z. $L/B = 10$, $A/B = 0.8$ y β entre 0 y 0.25. La curva discontinua superior corresponde a un material neohookeano ($\beta = 0$) y la curva discontinua inferior corresponde a presión interna cero. Tomada de [**6**].*

En la Figura 3.17 se muestran también bifurcaciones axisimétricas con el objetivo de observar los efectos de la longitud y espesor del cilindro.

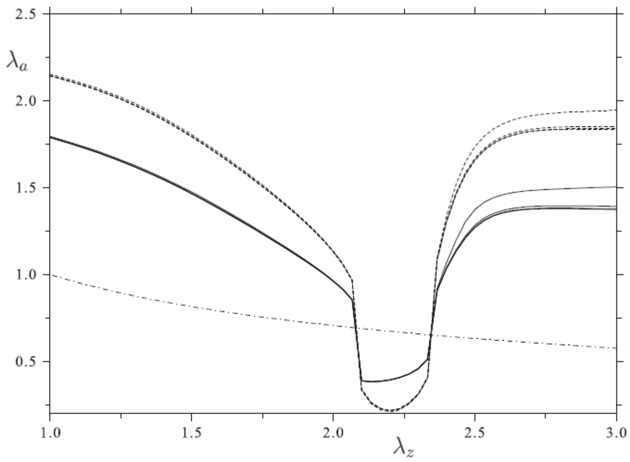

*Figura 3.17 - Puntos de bifurcación axisimétrica en términos de $\lambda_{\theta a}$ versus λ_z. Dos familias de cuatro curvas cada una para dos espesores de pared diferentes. Las curvas punteadas corresponden a $A/B = 0.5$, mientras que sólidas son para $A/B = 0.9$. En cada familia se tiene $L/B = 10{,}20{,}50{,}100$. $\beta = 0.25$ en todos los casos. La línea discontinua inferior corresponde a presión interna cero. Tomada de [**6**].*

A pesar de que se sabe poco acerca del estado natural de alargamiento axial en arterias enfermas, se sugiere que trabajan bajo un alargamiento menor que en arterias sanas. Estas últimas suelen trabajar en un rango de λ_z entre 1.1 y 1.5.

En las Figuras Figura 3.16 y Figura 3.17 se observa como para el rango mencionado de λ_z, mientras λ_z aumenta $\lambda_{\theta a}$ disminuye. Es posible que valores no homogéneos del alargamiento axial a través de la sección transversal de la pared arterial sean los causantes de la iniciación del abultamiento dentro del espesor de la pared. Esto es una posible explicación del mecanismo de deformación doble asociado con el desarrollo de aneurismas, en el cual simultáneamente la pared arterial se engruesa y el diámetro aumenta, ya que cambios en el alargamiento axial λ_z están relacionados con cambios en el alargamiento circunferencial λ_θ.

3.4.3. Análisis de las condiciones de bifurcación de cilindros de pared delgada bajo presión interna y estiramiento axial, basado en el modelo de Holzapfel et al. [7] [8]

Rodríguez y Merodio proponen un análisis de la inestabilidad de arterias bajo fuerza axial y presión interna para el modelo de Holzapfel et al. [**8**]. Consideran la arteria como un cilindro de una sola capa con n familias de fibras con idénticas características mecánicas y dispuestas simétricamente con respecto al eje axial del cilindro. En el análisis se muestra que las fibras de colágeno son las que aportan el comportamiento anisótropo al comportamiento mecánico de las arterias, causando el mecanismo de rigidización por deformación. También se muestra que la pérdida de anisotropía en el tejido, con ablandamiento por deformación de las fibras de colágeno, juegan un papel importante en la iniciación de aneurismas.

3.4.3.1.Ecuaciones de la bifurcación por abultamiento

Al igual que en apartados anteriores, se considera un cilindro de pared delgada, definido en su configuración de referencia por (3.46) en coordenadas cilíndricas y con la base de vectores unitarios $\{\mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\Theta, \mathbf{E}_Z\}$ en las direcciones radial, circunferencial y axial. La longitud L del cilindro puede ser finita o infinita. Similarmente, en su configuración deformada, tras ser sometido a presión interna P y a un alargamiento axial (mediante la fuerza N), la superficie media de la membrana está descrita por (3.46), siendo $(\mathrm{r}, \theta = \Theta, \mathrm{z})$ las coordenadas cilíndricas en esta configuración y $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ los vectores unitarios en cada eje coordenado.

La condición de incompresibilidad permite definir el tensor de deformaciones $\mathbf{F}$ mediante las componentes $\mathrm{diag}(\lambda_\theta{}^{-1}\lambda_z{}^{-1}, \lambda_\theta, \lambda_z)$. Así mismo, el tensor de tensiones de Cauchy queda definido por (3.48). Como se está asumiendo que el cilindro es tipo membrana ($\sigma_{rr} \cong 0$), las tensiones circunferencial y axial quedan definidas por (3.49), teniendo en cuenta que $\overline{\Psi}\,(\lambda_\theta, \lambda_z) = \Psi(\lambda_\theta^{-1}\lambda_z^{-1}, \lambda_\theta, \lambda_z)$. Las ecuaciones de equilibrio permiten obtener la presión de equilibrio mediante (3.51), siendo H el espesor del tubo en la configuración no deformada. Se expresa $\partial\overline{\Psi}/\partial\lambda_\theta$ como $\overline{\Psi}_{\lambda_\theta}$ y, con la misma notación, para derivadas segundas ($\overline{\Psi}_{\lambda_\theta\lambda_z}$). La fuerza axial por unidad de área no deformada (N) está dado por

$$\frac{\mathrm{r\,h}\,\sigma_{zz}}{\mathrm{R\,H}} = \overline{\Psi}_{\lambda_z} \tag{3.66}$$

Al igual que en los apartados anteriores, para el análisis de las bifurcaciones, se utilizan desplazamiento incrementales definidos por (3.55). Específicamente para analizar el modo de bifurcación por abultamiento, los desplazamientos diferenciales axisimétricos tienen la forma (3.56).

El equilibrio de un elemento infinitesimal de volumen en la dirección longitudinal (Figura 3.18) se expresa mediante

$$\frac{\partial}{\partial z}\big(\delta(\sigma_{zz}hr)\big)\,d\theta\,dz - pr\,d\theta\,dz\frac{\partial\delta u_r}{\partial z} = 0 \tag{3.67}$$

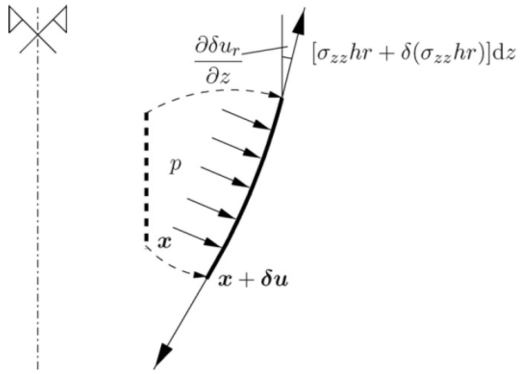

*Figura 3.18 – Balance de fuerzas para el modo de abultamiento. Tomada de [**7**].*

El primer término representa la variación de la fuerza debido a la tensión longitudinal entre ambos extremos del elemento infinitesimal, siendo $\delta(\sigma_{zz}hr)$ el incremento de fuerza por unidad de ángulo en el extremo del elemento. El segundo término es la componente axial de la presión interna, existente por estar deformada la pared arterial, razón por la cual no lleva dirección radial.

La ecuación de equilibrio en dirección radial es

$$\delta(\mathrm{pr})\, d\theta\, dz - \delta(\sigma_{\theta\theta} h)\, d\theta\, dz + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{zz} hr\, d\theta\, \frac{\partial \delta u_r}{\partial z}\right) dz = 0 \qquad (3.68)$$

El primer término representa el incremento de fuerza debido a la presión, el segundo, el incremento debido a la tensión circunferencial y el tercer término es debido al incremento de fuerza en la dirección radial debido a la tensión longitudinal.

A partir de las expresiones de la tensión en función de los alargamientos principales y de las derivadas de la función de energía se pueden obtener las ecuaciones de equilibrio axial y radial, respectivamente, como

$$\left(\bar{\Psi}_{\lambda_\theta \lambda_z} - \frac{\bar{\Psi}_{\lambda_\theta}}{\lambda_z}\right)\frac{\partial \delta\lambda_\theta}{\partial z} + \bar{\Psi}_{\lambda_z \lambda_z}\frac{\partial \delta\lambda_z}{\partial z} = 0 \qquad (3.69)$$

$$\bar{\Psi}_{\lambda_z} R^2 \frac{\partial^2 \delta\lambda_\theta}{\partial z^2} + \left(\frac{\bar{\Psi}_{\lambda_\theta}}{\lambda_\theta \lambda_z} - \frac{\bar{\Psi}_{\lambda_\theta \lambda_\theta}}{\lambda_z}\right)\delta\lambda_\theta + \left(\frac{\bar{\Psi}_{\lambda_\theta}}{\lambda_z^2} - \frac{\bar{\Psi}_{\lambda_\theta \lambda_z}}{\lambda_z}\right)\delta\lambda_z = 0 \qquad (3.70)$$

Del sistema de ecuaciones anterior se tiene que existe una solución de la bifurcación cuando $\delta\lambda_z$ es nula y $\delta\lambda_\theta$ es uniforme y está asociada a la presión

$$P = \frac{H}{R}\frac{\bar{\Psi}_{\lambda_\theta \lambda_\theta}}{\lambda_z} \qquad (3.71)$$

Por otra parte, cuando λ_z y $\delta\lambda_\theta$ son uniformes, utilizando $\lambda_\theta = r/R$ y $\lambda_\theta = l/L$ y las ecuaciones (3.69) y (3.70) se obtiene que

$$\frac{\delta r}{\delta l} = \frac{r}{l}\left(\frac{\lambda_z \bar{\Psi}_{\lambda_\theta \lambda_z} - \bar{\Psi}_{\lambda_\theta}}{\bar{\Psi}_{\lambda_\theta} - \lambda_\theta \bar{\Psi}_{\lambda_\theta \lambda_\theta}}\right) \qquad (3.72)$$

Esta relación establece el cambio del radio del cilindro respecto a la longitud para presión interna constante.

Por parte, para soluciones de bifurcación no uniformes, la ecuación característica del sistema de ecuaciones diferenciales de equilibrio es

$$\det\begin{pmatrix} \left(\bar{\Psi}_{\lambda_\theta \lambda_z} - \dfrac{\bar{\Psi}_{\lambda_\theta}}{\lambda_z}\right)\alpha & \bar{\Psi}_{\lambda_z \lambda_z}\alpha \\ \bar{\Psi}_{\lambda_z} R^2 \alpha^2 + \left(\dfrac{\bar{\Psi}_{\lambda_\theta}}{\lambda_\theta \lambda_z} - \dfrac{\bar{\Psi}_{\lambda_\theta \lambda_\theta}}{\lambda_z}\right) & \dfrac{\bar{\Psi}_{\lambda_\theta}}{\lambda_z^2} - \dfrac{\bar{\Psi}_{\lambda_\theta \lambda_z}}{\lambda_z} \end{pmatrix} = 0 \qquad (3.73)$$

donde α es el exponente del desplazamiento de la solución de tipo exponencial $e^{\alpha z}$. El valor nulo de α está asociado a la solución de desplazamiento uniforme. Centrándose en un cilindro de longitud infinita, la bifurcación está asociada a las soluciones armónicas de α. Eliminando este parámetro de la primera línea de (3.73), la condición de bifurcación resulta

$$f(\bar{\Psi},\, \lambda_\theta, \lambda_z) = 0 \qquad (3.74)$$

donde

$$f(\bar{\Psi}, \lambda_\theta, \lambda_z) = \lambda_z^2 \bar{\Psi}_{\lambda_z\lambda_z}(\lambda_\theta^2 \bar{\Psi}_{\lambda_\theta\lambda_\theta} - \lambda_\theta \bar{\Psi}_{\lambda_\theta}) - (\lambda_\theta \lambda_z \bar{\Psi}_{\lambda_\theta\lambda_z} - \lambda_\theta \bar{\Psi}_{\lambda_\theta})^2 \tag{3.75}$$

Analizando la condición de bifurcación en ausencia de presión (sólo la fuerza axial), si el Hessiano de $\bar{\Psi}$ es definido positivo, entonces (3.75) es positivo y la configuración deformada se encuentra en equilibrio estable. Si se incluye la presión interna, los puntos estacionarios de la presión, dados por la (3.51), $f \leq 0$ porque el término no cuadrático de f es nulo, por definición de (3.51) y (3.71), por lo cual el inicio de la inestabilidad precede a los puntos estacionarios de la presión. Para la fuerza axial el punto estacionario se produce cuando

$$\bar{\Psi}_{\lambda_z\lambda_z} = 0 \tag{3.76}$$

por lo cual, la bifurcación también se produce antes que estos puntos.

Si se consideran cilindros de longitud finita, con las nuevas condiciones de contorno el primer modo corresponde a $\alpha = (2\pi/l)\sqrt{-1}$. Con esto junto a (3.73) se obtiene el criterio de bifurcación, definido por

$$f(\bar{\Psi}, \lambda_\theta, \lambda_z) + \left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 \lambda_\theta^2 \, \lambda_z \bar{\Psi}_{\lambda_z} \bar{\Psi}_{\lambda_z\lambda_z} = 0 \tag{3.77}$$

Esto indica que para una extensión dada las soluciones que producen abultamiento según la anterior ecuación están asociadas a valores de presión interna mayores que los de la ecuación para longitud infinita. Esto indica que hace falta una mayor presión para llegar a la inestabilidad cuando se considera longitud finita.

*3.4.3.2. Abultamiento aplicado al modelo de Holzapfel et al. [**8**]*

Se considera la pared arterial como un tubo de material incompresible ortótropo con dos familias de fibras simétricas respecto al eje del tubo. Se utiliza como medida de las deformaciones el tensor derecho de Cauchy-Green $\mathbf{C}$ y las familias de fibras se representan por sus direcciones mediante los vectores $\mathbf{a}_{01}$ y $\mathbf{a}_{02}$. Los invariantes que se manejan son

$$I_1 = \mathrm{tr}\,\mathbf{C}, \qquad I_2 = \mathrm{tr}\,(\mathbf{C}^{-1}), \qquad I_4 = \mathbf{a}_{01} \cdot (\mathbf{C}\,\mathbf{a}_{01}), \qquad I_5 = \mathbf{a}_{01} \cdot (\mathbf{C}^2\,\mathbf{a}_{01}) \tag{3.78}$$

$$I_6 = \mathbf{a}_{02} \cdot (\mathbf{C}\,\mathbf{a}_{02}), \qquad I_7 = \mathbf{a}_{02} \cdot (\mathbf{C}^2\,\mathbf{a}_{02}), \qquad \bar{I}_8 = (\mathbf{a}_{01} \cdot \mathbf{a}_{02})[\mathbf{a}_{01} \cdot (\mathbf{C}\,\mathbf{a}_{02})] \tag{3.79}$$

siendo $I_4 = I_6$ e $I_5 = I_7$, debido a la simetría de las dos familias de fibras, mientras que I_8 tiene en cuenta el acoplamiento entre las dos familias de fibras. I_3 no se muestra debido a que es igual a 1, gracias a la incompresibilidad. La función de energía de deformación para materiales reforzados con fibras consta de dos términos, el primero de los cuales es una función isótropa y el segundo una función anisótropa, como ya se vio en un apartado anterior

$$\Psi = \Psi_{\mathrm{iso}}(I_1, I_2) + \Psi_{\mathrm{aniso}}(I_4, I_5, I_6, I_7, I_8) \tag{3.80}$$

Con esta ecuación, usando $\mathbf{F}$ y definiendo $\overline{\Psi}_{iso}\,(\lambda_\theta, \lambda_z)$ y $\overline{\Psi}_{aniso}\,(\lambda_\theta, \lambda_z)$, se define la notación para las tensiones como

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{i\theta\theta} + \sigma_{a\theta\theta} = \lambda_\theta \frac{\partial \overline{\Psi}_{iso}}{\partial \lambda_\theta} + \lambda_\theta \frac{\partial \overline{\Psi}_{aniso}}{\partial \lambda_\theta} \tag{3.81}$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{izz} + \sigma_{azz} = \lambda_z \frac{\partial \overline{\Psi}_{iso}}{\partial \lambda_z} + \lambda_z \frac{\partial \overline{\Psi}_{aniso}}{\partial \lambda_z} \tag{3.82}$$

Para $\overline{\Psi}_{iso} + \overline{\Psi}_{aniso}$ la condición de bifurcación (3.77) está dada por

$$\begin{aligned} f(\overline{\Psi}_{aniso}, \lambda_\theta, \lambda_z) + f(\overline{\Psi}_{iso}, \lambda_\theta, \lambda_z) + \left(\lambda_z \frac{\partial \sigma_{izz}}{\partial \lambda_z} - \sigma_{izz}\right)\left(\lambda_\theta \frac{\partial \sigma_{a\theta\theta}}{\partial \lambda_\theta} - 2\sigma_{a\theta\theta}\right) \\ + \left(\lambda_z \frac{\partial \sigma_{azz}}{\partial \lambda_z} - \sigma_{azz}\right)\left(\lambda_\theta \frac{\partial \sigma_{i\theta\theta}}{\partial \lambda_\theta} - 2\sigma_{i\theta\theta}\right) \\ - 2\left(\lambda_z \frac{\partial \sigma_{i\theta\theta}}{\partial \lambda_z} - \sigma_{i\theta\theta}\right)\left(\lambda_z \frac{\partial \sigma_{a\theta\theta}}{\partial \lambda_z} - 2\sigma_{a\theta\theta}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.83}$$

en donde el término anisótropo dominará el abultamiento en materiales altamente anisótropos, mientras que el término isótropo dominará en materiales casi isótropos. Los términos cruzados serán importantes en el resto de los casos intermedios.

Si se considera una función de energía formada por la isótropa y los invariantes cuatro y seis y se toman estos últimos iguales por simetría, se puede escribir

$$\overline{\Psi}(I_4) + \overline{\Psi}(I_6) = 2\overline{\Psi}_f(I_f) \tag{3.84}$$

indicando el subíndice *f* que se refiere a las fibras de ambas familias. El invariante de alargamiento de las fibras I_f (tanto para I_4 como para I_6) puede expresarse a partir de $\mathbf{F}$ como

$$I_f = \lambda_z^2 \cos^2 \varphi + \lambda_\theta^2 \mathrm{sen}^2\, \varphi \tag{3.85}$$

siendo φ el ángulo entre las fibras y el eje axial del cilindro. La condición de bifurcación para un material altamente anisótropo con fibras simétricas queda entonces

$$6\lambda_z^2 \cos^2 \varphi\, \Psi_f'' - \Psi_f' = 0 \tag{3.86}$$

siendo $\varphi \neq 0$, $\Psi_f' > 0$, $\Psi_f' = \partial\Psi_f/\partial I_f$ y $\Psi_f'' = \partial^2\Psi_f/\partial {I_f}^2$. Al realizar el mismo procedimiento con los invariantes cinco y siete se puede obtener otra expresión de la condición de bifurcación para un material del mismo tipo. La consideración de estos dos invariantes conlleva un comportamiento diferente del abultamiento, obteniendo diferentes resultados en el análisis de la elipticidad del material.

3.4.3.3. Aneurismas en geometría cilíndrica: abultamiento en arterias

Usando la función de energía de deformación definida anteriormente e implementando el modelo de Holzapfel et al. se tiene que

$$\Psi = \Psi_{iso}\,(I_1) + \Psi_{aniso}\,(I_4, I_6) = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2}\sum_{i=4,6}\{\exp[k_2(I_i - 1)^2] - 1\} \qquad (3.87)$$

Se definió que no se producirá inestabilidad si se cumple $6\lambda_z^2\cos^2\varphi\, W_f'' - W_f' > 0$. Como la inestabilidad por abultamiento es muy sensible a la rigidización por deformación, es más, la ausencia de esta rigidización podría ser el detonante del comienzo de la inestabilidad. Ya que esta rigidización está asociada a la anisotropía de los tejidos arteriales, su pérdida está relacionada con pérdida de anisotropía. Es por esto que cuando esto sucede, el análisis de bifurcación por abultamiento no debería considerar solo el material altamente anisótropo, con o cual se deberían considerar los términos cruzados de la condición de inestabilidad.

Implementando (3.86) y conociendo que la pared arterial en condiciones fisiológicas normales trabaja con $\lambda_z \geq 1$, se tiene que la inestabilidad por abultamiento no ocurre si

$$\frac{W_f''}{W_f'} > \frac{1}{6\lambda_z^2\cos^2\varphi} \qquad (3.88)$$

Considerando la parte anisótropa de (3.87), es decir que se asume que la función de energía de las fibras es

$$\Psi_f = \frac{k_1}{2k_2}\left(\exp[k_2(I_f - 1)^2] - 1\right) \qquad (3.89)$$

Sustituyendo (3.89) en (3.88), se tiene que

$$\frac{2k_2 I_f^2 - 4k_2 I_f + 2k_2 + 1}{I_f - 1} > \frac{1}{6\lambda_z^2\cos^2\varphi} \qquad (3.90)$$

El término izquierdo de (3.90) tiene un mínimo con respecto a I_f, con valor $2\sqrt{2k_2}$ para el mínimo $I_f = 1 + 1/\sqrt{2k_2}$. Con esto y (3.90) no se presenta abultamiento cuando

$$k_2 \geq \frac{1}{288\cos^4\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} k_{2c} \qquad (3.91)$$

Ahora se considera la función de energía total definida por (3.87). Usando (3.74) y la parte isótropa de (3.87), se tiene que el abultamiento ocurre cuando

$$-\lambda_\theta^8\lambda_z^4 + 6\lambda_\theta^4 + 4\lambda_\theta^2\lambda_z^4 + 3 = 0 \qquad (3.92)$$

Se comprueba usando (3.92) que para $\lambda_z = 1$, $\lambda_\theta = 1.672$. Conforme λ_z aumenta, usando (3.92), λ_θ decrece de forma monótona a 1.260.

Usando (3.87) y (3.74) el criterio de bifurcación es

$$g(\lambda_\theta, \lambda_z, k_1/\mu, k_2, \varphi) = 0 \qquad (3.93)$$

donde

$$g\left(\lambda_\theta,\lambda_z,\frac{k_1}{\mu},k_2,\varphi\right)=g_0(\lambda_\theta,\lambda_z)+g_1(\lambda_\theta,\lambda_z,k_2,\varphi)\left(\frac{k_1}{\mu}\right)+g_2(\lambda_\theta,\lambda_z,k_2,\varphi)\left(\frac{k_1}{\mu}\right)^2 \quad (3.94)$$

y

$$g_0(\lambda_\theta,\lambda_z)=-\lambda_\theta^8\lambda_z^4+6\lambda_\theta^4\lambda_z^2+4\lambda_\theta^2\lambda_z^4+3 \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} g_1(\lambda_\theta,\lambda_z,k_2,\varphi) &= 8\lambda_\theta^6\lambda_z^2\,\mathrm{sen}^4\varphi\exp[k_2(I_f-1)^2]\left(\lambda_\theta^2\lambda_z^4+3\right)[1+2k_2(I_f-1)^2] \\ &+16\lambda_\theta^2\lambda_z^4\cos^2\varphi\,\exp[k_2(I_f-1)^2]\{2\lambda_z^2\cos^2\varphi[1+2k_2(I_f-1)^2]+I_f-1\} \\ &-8\lambda_\theta^4\lambda_z^2\,\mathrm{sen}^2\varphi\exp[k_2(I_f-1)^2]\left(3-\lambda_\theta^4\lambda_z^2\right)\{2\lambda_z^2\cos^2\varphi[1+2k_2(I_f-1)^2]-I_f+1\} \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} g_2(\lambda_\theta,\lambda_z,k_2,\varphi) &= 16\lambda_\theta^8\lambda_z^4\,\mathrm{sen}^4\varphi\,\exp[2k_2(I_f-1)^2]\,(I_f-1) \\ &\{6\lambda_z^2\cos^2\varphi[1+2k_2(I_f-1)^2]-I_f+1\} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Con estas expresiones, se buscan los valores de k_1/μ que no producen bifurcación por abultamiento. Para un ángulo dado φ se busca el valor mínimo de k_1/μ tal que (3.94) > 0 con las condiciones independientes $\lambda_z \geq 1$ y $\lambda_\theta \geq 1$, sin ser ambas simultánea iguales a 1.Los autores resuelven este sistema de ecuaciones mediante un algoritmo en Maple. Los resultados se muestran en la Figura 3.19.

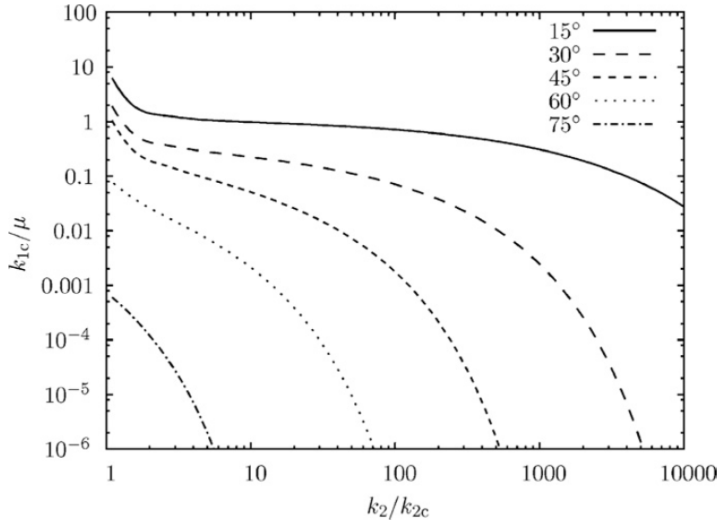

*Figura 3.19 – Curvas k_{1c}/μ vs. k_2/k_{2c} para distintos φ. Cada curva es una línea de transición: coordenadas que estén por encima o a la derecha de cada curva, dan parámetros del material que no permiten el modo de inestabilidad por abultamiento. Coordenadas que estén contenidas en la región delimitada por la curva (inclusive), dan parámetros del material que se asocian con abultamiento para deformaciones que cumplan $\lambda_z \geq 1$ y $\lambda_\theta \geq 1$ .Tomada de **[7]**.*

Cápitulo 4.
ANÁLISIS NÚMERICO DE INESTABILIDAD DE BIFURCACIÓN PARA CILINDROS DE PARED DELGADA Y GRUESA CON MATERIAL DE HOLZAPFEL ET AL [9]

En este capítulo se analiza la pared arterial como un modelo cilíndrico en tres dimensiones implementando el material anisótropo hiperelástico de GOH, mediante el programa de modelación de elementos finitos ABAQUS. Se realiza un estudio orientado a la influencia que tienen los diferentes parámetros, tanto materiales como geométricos, en la formación de aneurismas en la pared arterial, relacionados directamente con la bifurcación en modo abultamiento. Se realizan modelos para observar la influencia de los siguientes parámetros:

- Espesor
- Longitud del cilindro
- Dispersión de las fibras
- Orientación de las fibras

Primero se explica de forma resumida el método de los elementos finitos así como el método de ríos, usado para encontrar la bifurcación en los modelos. Posteriormente se explica la metodología implementada para realizar los modelos y efectuar los análisis. Luego se indican los resultados del estudio así como el análisis de los resultados. Por último se presentan las conclusiones y observaciones.

4.1. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS [19] [20]

El método de los elementos finitos (MEF o FEM por sus siglas en ingles *"Finite Element Method"*) es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy utilizado en diversos problemas de ingeniería y física.

Este método permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio (medio continuo), sobre el cual están definidas una serie de ecuaciones diferenciales en forma débil o integral, que caracterizan el comportamiento físico del problema, dividiéndolo en un número elevado de subdominios no intersecantes entre sí denominados "elementos finitos". El conjunto de estos elementos, forman una partición del dominio, la cual suele llamarse también discretización (Figura 4.1). Cada elemento tiene una serie de puntos representativos llamados nodos. Se consideran que dos nodos pertenecen a un mismo elemento si son adyacentes entre sí, además se considera que un nodo en la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos. Al conjunto de nodos, considerando sus relaciones de adyacencia, se le llama malla. Los elementos pueden tener forma triangular y rectangular en dos dimensiones y tetraédrica y paralelepipédica en tres dimensiones (Figura 4.2).

Los cálculos se realizan sobre esta malla, cuyos puntos sirven a su vez de base para la discretización del dominio en elementos finitos. Estas mallas se realizan mediante software generadores de mallas, los cuales permiten realizar discretizaciones según el tipo de problema. A esta etapa se le llama pre-proceso. En este paso, las relaciones de adyacencia o conectividad permiten asignar a cada nodo las incógnitas definidas, las cuales se conocen como grados de libertad. Con esto, se construye un sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz se llama matriz de rigidez del sistema. Existe una relación de proporcionalidad entre el número de ecuaciones y el número de ecuaciones del sistema. Cada elemento tiene a su vez puntos de integración, en los cuales se calcula la rigidez para obtener una solución.

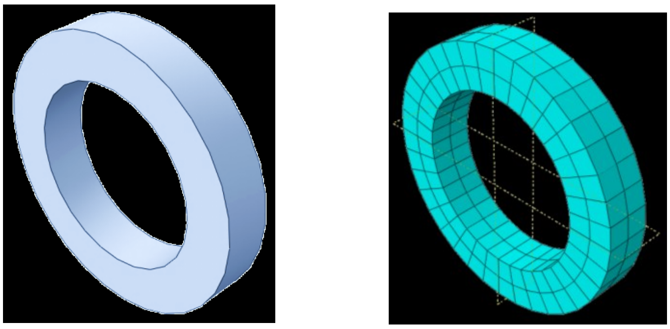

Figura 4.1 – Modelo físico idealizado de una arandela (Izq.). Discretización y mallado del modelo (Der.).

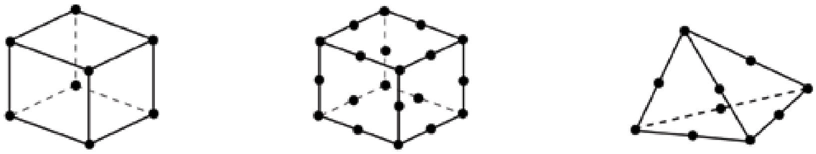

*Figura 4.2 – Tipos de elementos: Hexaedro de 8 nodos (izq.), cuadrático de 20 nodos (cent.) y tetraedro de 10 nodos (Derecha). Tomada de [**21**].*

Según sea el campo del problema, existen tipos de elementos que son más adecuados que otros para llegar a una solución exacta. Es por esto que se debe tener especial cuidado a la hora de elegir el tipo de elemento que se usa, teniendo en cuenta la geometría del problema (cuerpos sólidos, barras, láminas, vigas, barras, axisimetría), el tipo de cálculo (estático, dinámico, térmico) o las propiedades del material (no linealidad, hiperelasticidad, plasticidad), pues la exactitud de los resultados depende parcialmente de esto.

Usualmente el análisis de los elementos finitos se programa computacionalmente para calcular el campo de desplazamientos, gracias al cual, a través de relaciones cinemáticas y constitutivas, se pueden obtener las deformaciones y las tensiones del modelo. La importancia y característica especial de este actual método, es la posibilidad de reproducir pruebas mecánicas de modelos complejos en los diversos campos de aplicación, lo cual ha hecho que muchas pruebas sean parcial o totalmente remplazadas por modelos de elementos finitos. Sin embargo, para que estos sean exitosos, se deben tener en cuenta factores tan importantes como las condiciones de borde, los casos de carga, así como una buena discretización y una buena elección del elemento a usar.

Para una ampliación y explicación de lo que es el método de los elementos finitos, su formulación y principios básicos, se puede observar el Apéndice A.

4.2. EL MÉTODO DE RIKS [22]

El método de Riks se utiliza generalmente para predecir el colapso geométrico o inestabilidad no lineal de una estructura. Este permite incluir materiales y condiciones de contorno no lineales. Usualmente realiza un análisis de pandeo de autovalores para mostrar la información correspondiente al colapso de la estructura analizada. Es por esto que cuando se deben analizar modelos que incluyen no linealidad en sus materiales, una geometría no lineal que anteceda al pandeo o una respuesta inestable post-pandeo, es necesario utilizar este método para investigar de forma más detallada el fenómeno. Por esto se implementa este método para hallar la bifurcación de los modelos de la pared arterial realizados.

Este método permite obtener los estados de equilibrio durante la fase de inestabilidad en los casos en los que la carga es proporcional, es decir, cuando la magnitud de la carga está controlada por un solo parámetro escalar. Además se asume que la solución es lo suficientemente suave, es decir, sin bifurcaciones repentinas. El método utiliza la magnitud de la carga como una variable desconocida adicional y resuelve simultáneamente para cargas y desplazamientos. Por ello, el progreso de la solución es cuantificado mediante una cantidad llamada «longitud de arco», medida a lo largo de la trayectoria de equilibrio estático en el campo de carga-desplazamiento.

Se puede analizar un problema post-crítico, aunque no directamente debido a la respuesta discontinua en el punto de pandeo. Para resolverlo, el problema se transforma de tal manera que tenga una respuesta continua en vez de bifurcación de equilibrio, introduciendo una imperfección geométrica de manera que haya una pequeña respuesta antes de que se alcance la carga crítica, así el programa sabe hacia dónde seguir.

La carga se cuantifica como

$$\mathrm{P_{total}} = \mathrm{P_0} + \lambda(\mathrm{P_{ref}} - \mathrm{P_0}) \qquad (4.1)$$

en donde P_{total} es la carga en un momento del análisis, P_0 la carga prexistente, P_{ref} el vector de cargas de referencia y λ el factor de proporcionalidad de carga (LPF "*Load Proportional Factor*" por sus siglas en ingles), hallado como parte de la solución. Para resolver las ecuaciones de equilibrio no lineales se utiliza el método de Newton. El método de Riks utiliza solamente una extrapolación del 1% del incremento de deformación. El incremento de longitud de arco a lo largo de la trayectoria de equilibrio se define automáticamente, especificándose solo la magnitud del incremento inicial, o se puede acotar entre unos límites máximo y mínimo, introduciéndolos en el código.

4.3. MODELOS DE LA PARED ARTERIAL MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

De acuerdo con los modelos implementados por varios autores [**5**] [**6**] [**7**] [**8**], la pared arterial se puede representar como un cilindro hueco, ya sea de pared delgada o gruesa (Figura 4.3.a). Todos los modelos están descritos por tres parámetros geométricos básicos: el radio interno *R*, el espesor *e* y la longitud *L* (Figura 4.3.b). La geometría base tiene los siguientes parámetros: *R= 4 mm*, *e=0.2 mm* y *L=20 ms.* De acuerdo con lo sugerido por [**22**], como se trata de un problema en el cual se busca encontrar la bifurcación del sistema, es necesario realizar el análisis en dos fases: en la primera se encuentra cual es la deformación que tiende a producirse cuando ocurre la inestabilidad, mientras que en la segunda fase, esa deformación se introduce como imperfección en el modelo (Figura 4.4). Con los resultados de la fase I del análisis, se diseñaron cuatro tipos de imperfección, con el objetivo de observar la influencia de la geometría global en los resultados.

Los modelos son en tres dimensiones, con sistema de coordenadas cilíndricas. Debido a la geometría de la artería, se puede considerar simetría respecto del eje axial, con lo cual, lo que se genera es una cuña tridimensional, revolucionada un ángulo muy pequeño (cuya magnitud depende del diámetro y del espesor y el número de elementos en este) respecto al eje axial o longitudinal (Figura 4.5). Más adelante se explican detalladamente las condiciones de contorno, sin embargo se puede mencionar que la cuña tiene restricción del desplazamiento respecto al eje circunferencial en toda la geometría, con lo cual se puede considerar como una cuña "axisimétrica" 3D.

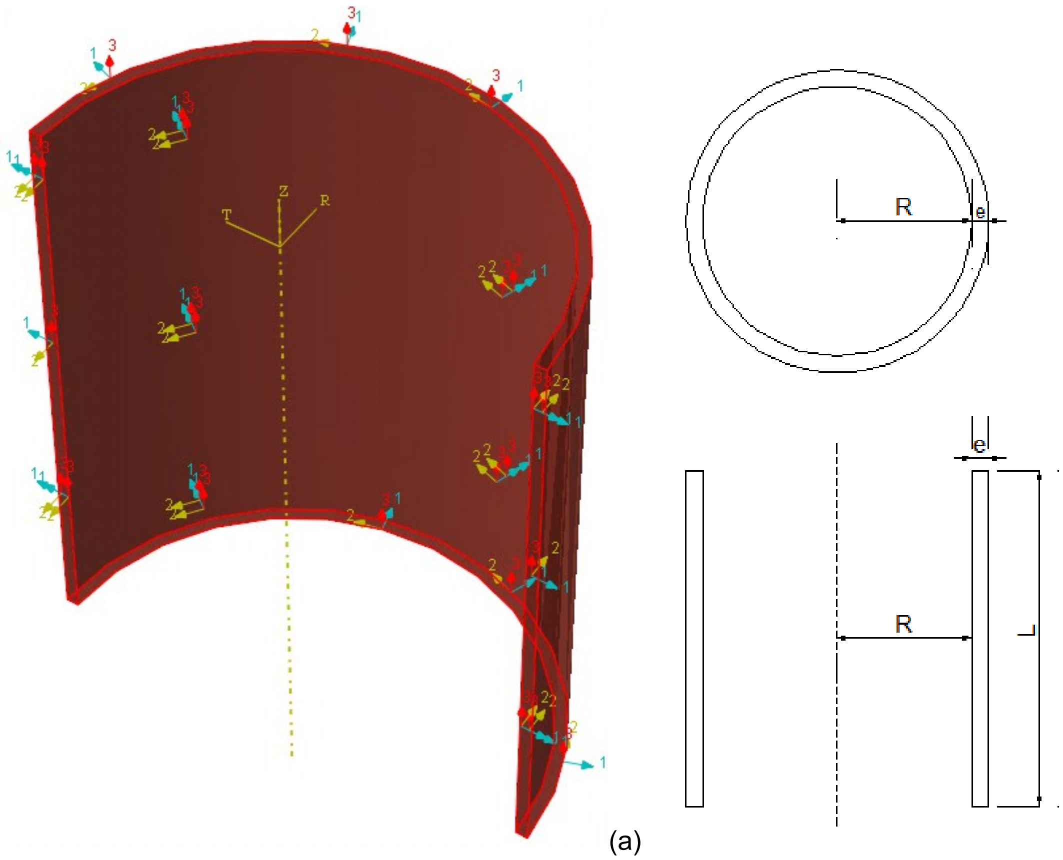

Figura 4.3 – (a) Modelo de arteria con sistema de coordenadas cilíndricas: 1 – eje radial, 2 – eje circunferencial y 3 – eje axial. (b) Medidas principales del modelo.

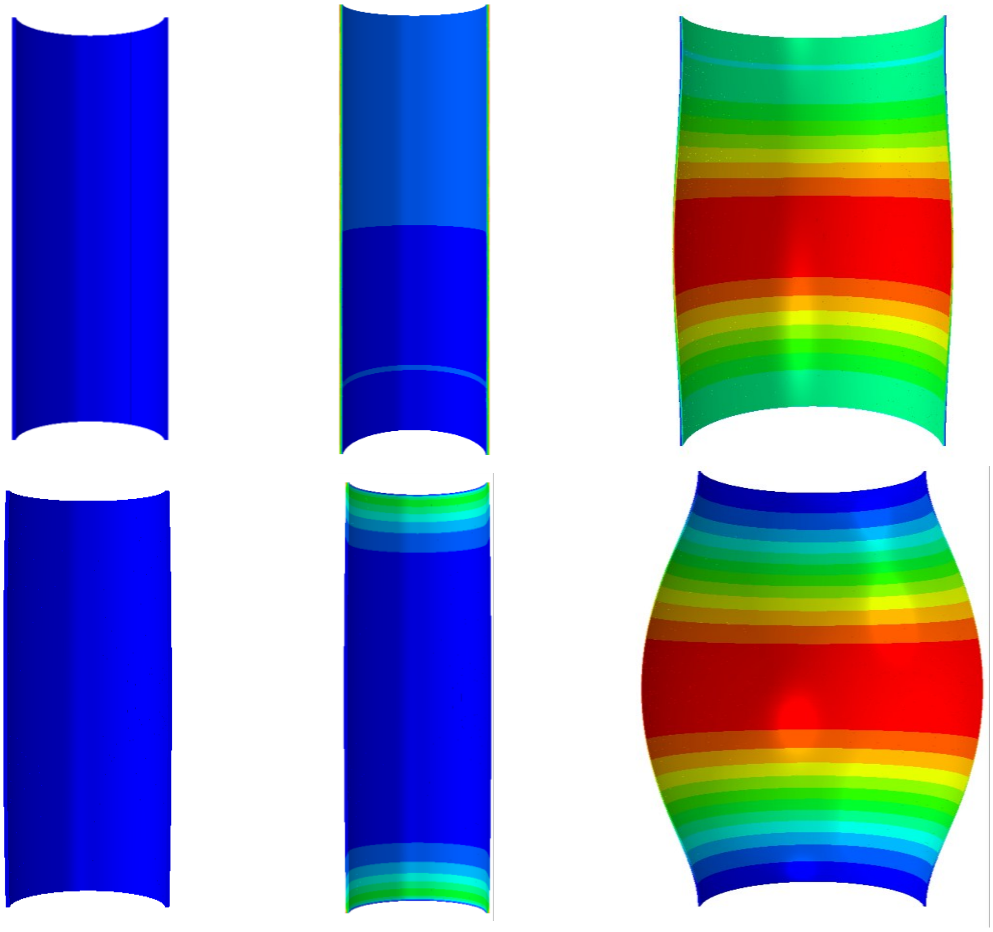

Figura 4.4 – Fases del análisis de inestabilidad. Fase I (Sup.): Cilindro sin presión (izq.), alargamiento axial impuesto y prolongado durante el análisis (centro) y modo de pandeo buscado debido a presión interna (der.). Fase 2 (Inf.): Inestabilidad por abultamiento.

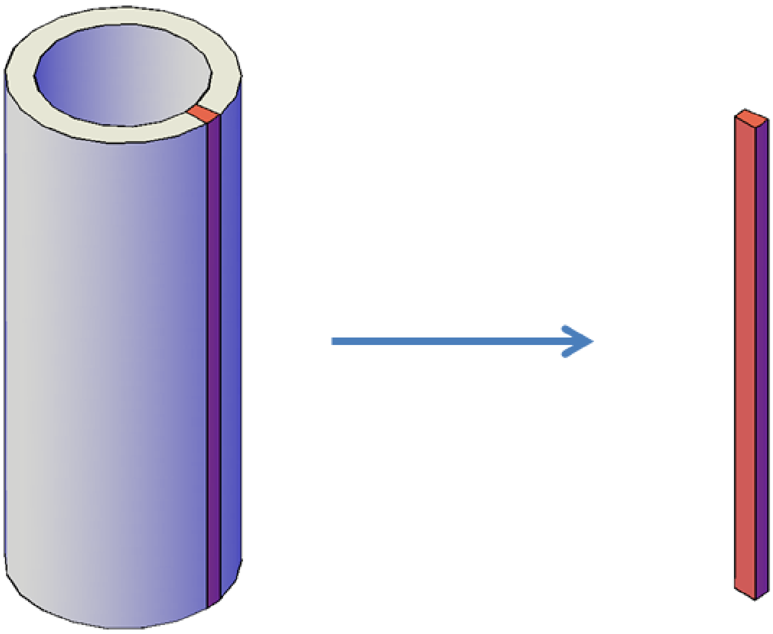

Figura 4.5 – "Cuña" axisimétrica debida a la simetría respecto al eje axial.

4.3.1. Geometrías globales y variaciones geométricas

Luego de analizar la deformación del cilindro en la fase I, se diseñaron cinco geometrías para introducir la imperfección en el modelo (Figura 4.6). Todas las geometrías tienen un radio interno, $R = 0.4\,mm,$ de acuerdo con [**23**]. La geometría *(a)* representa un trozo de arteria, sin simetría respecto al plano $r - \theta$, definida por medio de arcos de circunferencia concéntricos con curvaturas muy pequeñas. Las geometrías *(b), (c)*, *(d)* y *(e)* son simétricas respecto del plano $r - \theta$, con lo cual la longitud de las mismas es la mitad de la geometría *(a)*. El modelo *(b)* tiene la imperfección marcada en la parte inferior, definida de manera similar al modelo *(a)*. En cuanto a los modelos *(c)* y *(d)*, tienen una reducción y un aumento en la zona inferior respectivamente, correspondientes a la pared arterial. Esta reducción y ampliación equivalen a un 10 % del espesor. Por su parte la geometría *(e)* se diseñó con el objetivo de realizar un modelo bicapa, con un espesor total de $e = 0.4\,mm$: $e_M = 0.26\,mm$ (capa media) y $e_A = 0.14\,mm$ (capa adventicia). Luego de realizar análisis, que se detallan más adelante, se elige la geometría *(a)*, por presentar un buen comportamiento para todo los tipos de variaciones que se implementan, reflejado en la inestabilidad del modelo. Una vez elegida esta geometría, se realizaron dos tipos de modificaciones geométricas básicas: variaciones de espesor y de longitud.

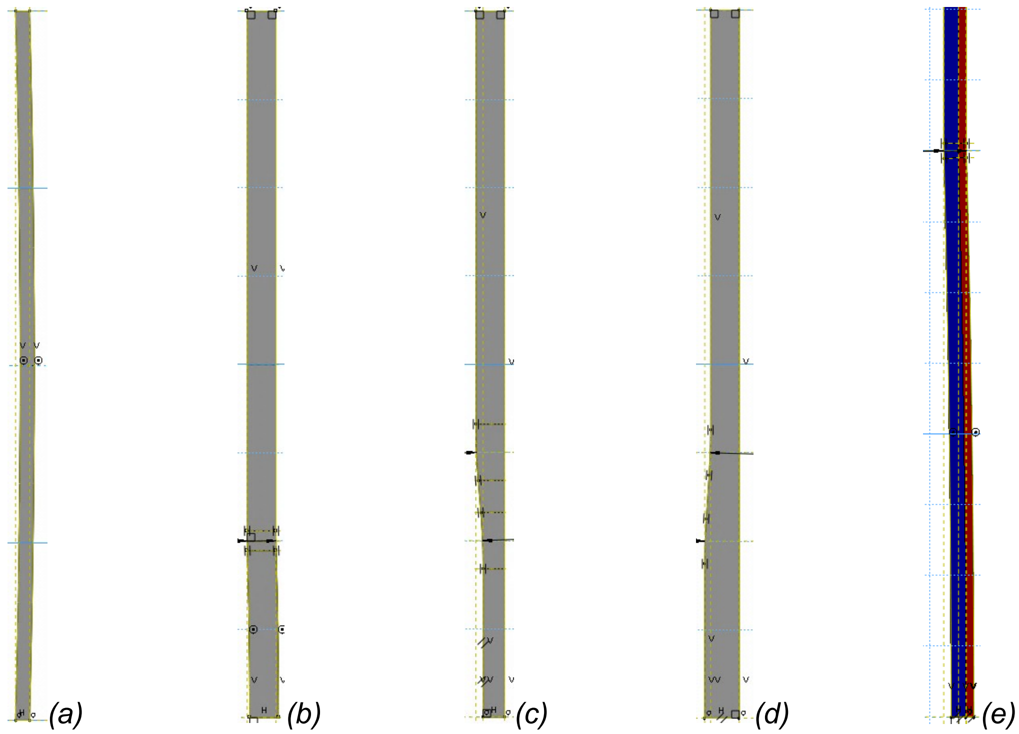

Figura 4.6 – Geometrías diseñadas para implementar la imperfección al modelo.

4.3.1.1. Variaciones de espesor

Respecto a las variaciones de espesor, se realizan desde 0.1 *mm* hasta 0.5 *mm*, cada 0.1 *mm*, esto es [0.1, 0.2, 0.3, 0.4 0.5] mm (Figura 4.7), con el principal objetivo de recorrer desde cilindros de pared delgada $(R/e\ >\ 20)$ hasta cilindros de pared gruesa $(R/e\ >\ 20)$ y ver su influencia en la bifurcación del modelo.

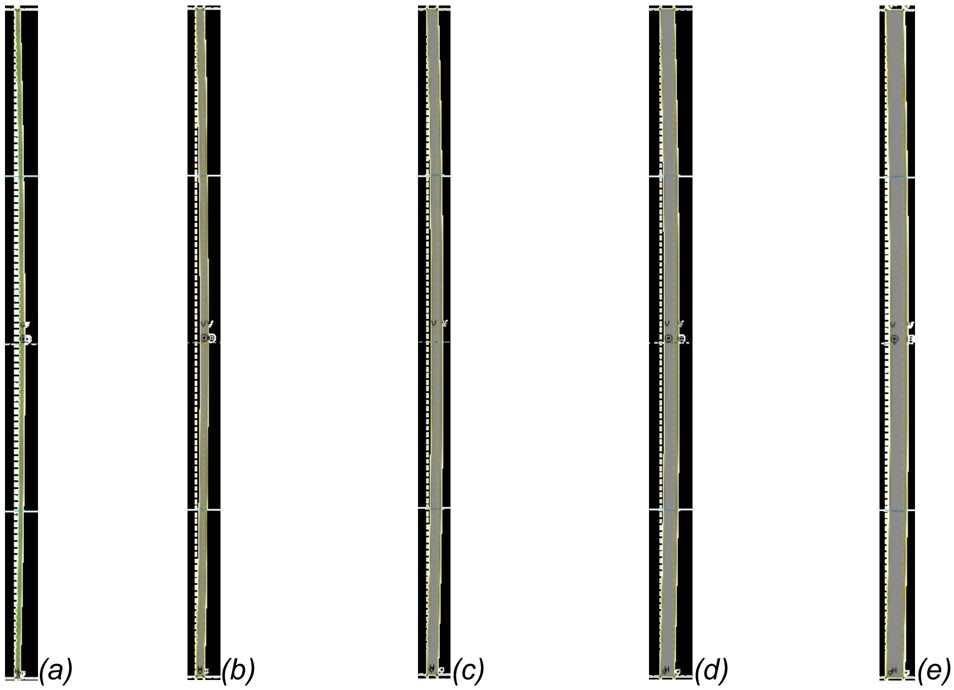

Figura 4.7 – Variaciones de espesor. $e = [0.1\ (a), 0.2\ (b), 0.3\ (c), 0.4\ (d), 0.5\ (e)]$ *mm.*

4.3.1.2.Variaciones de longitud

En cuanto a la longitud, se realizaron tres tipos de modelos: *L=20 mm, L=80 mm* y *L=200*. Esto con el objetivo de observar la influencia de la longitud finita o "infinita" del cilindro ($\mathrm{L/R} = [5, 20, 50]$). Los modelos de 80 y 200 *mm* tienen la forma geométrica del modelo de la Figura 4.6.b, así como un espesor intermedio equivalente a $e = 0.2$*mm*. El modelo de 20 *mm* tiene la geometría de la Figura 4.6.a.

4.3.2.Parámetros del material

El material de GOH [**9**], tiene seis parámetros principales:

- C_{10} , parámetro relacionado con la matriz neohookeana ($C_{10} = \mu/2$). Unidades de tensión.
- D , parámetro relacionado con la incompresibilidad ($D = 0$, material incompresible para este estudio).
- k_1y k_2, parámetros relacionados con la anisotropía aportada por las fibras de colágeno. $k_1$tiene unidades de tensión, mientras que k_2 es adimensional
- κ, parámetro relacionado con la dispersión de las fibras. $0 \le \kappa \le 1/3$.
- φ, parámetro que indica la orientación de una familia de fibras respecto al eje axial. Unidades de grados.

Se tienen dos grupos de variables, unos que se toman como fijos y otros que se modifican para cumplir con los objetivos planteados. Los parámetros fijos se eligen tras realizar un análisis, que se comenta detalladamente más adelante, y son C_{10}, D, k_1y k_2. Por lo tanto los parámetros que se varían son κ y φ; $\kappa = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$ y $\varphi = [15°, 30°, 60°, 75°]$.

4.3.3. Condiciones de contorno, cargas y pasos

Todos los modelos comparten las mismas condiciones de contorno, así como el tipo de carga. De igual manera, los modelos tienen dos tipos de pasos, uno estático normal que considera la no linealidad y otro estático que aplica el método de Riks. Cada modelo tiene tres condiciones de contorno definidas, referidas todas a un sistema de coordenadas cilíndricas:

- Restricción de desplazamiento respecto al eje axial (z) en la base (Figura 4.8.a).
- Restricción de desplazamiento respecto al eje circunferencial (θ) en toda la geometría (Figura 4.8.b).
- Desplazamiento axial impuesto en la cara superior. Este produce un alargamiento axial en el modelo. Se resuelve mediante el método estático normal (Figura 4.8.c).

En cuanto a la carga, se define una presión interna en la pared interior de la cuña, con un valor de referencia de *26.66 kPa* equivalente a 2*00 mmHg*, la cual se considera una presión arterial alta (Figura 4.8.d). Se resuelve mediante el método Riks, el cual considera también la no linealidad modelo, así como las características que ya fueron explicadas en 4.2.

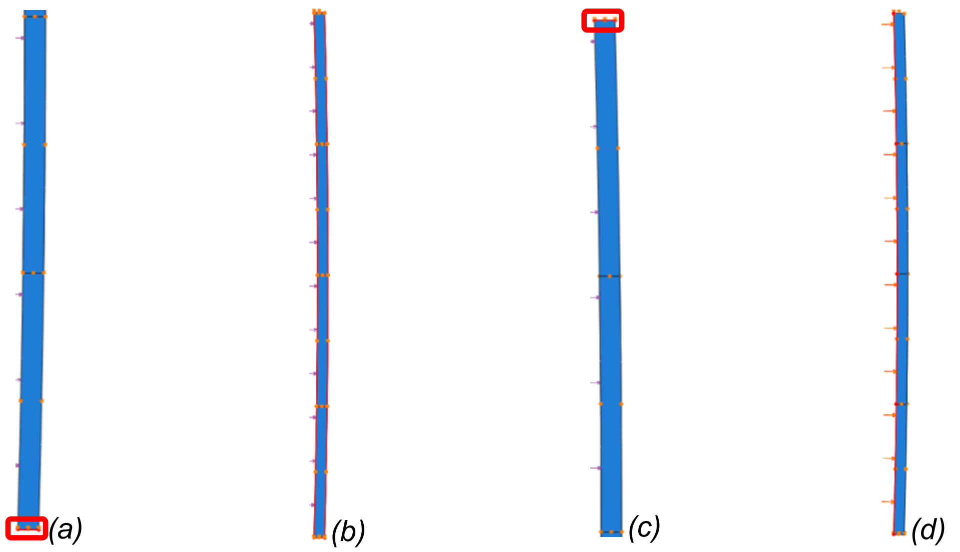

Figura 4.8 – Condiciones de contorno y carga. (a) Restricción desplazamiento eje axial; (b) Desplazamiento impuesto en dirección axial; (b) Restricción desplazamiento circunferencial; (d) Presión interna.

4.3.4. Malla y elemento implementados

Para elegir la malla utilizada se realizó un análisis de convergencia (Figura 4.9). La malla elegida para la mayoría de modelos contiene aproximadamente 6000 elementos. En las diferentes geometrías, varían el número de elementos, lo cual se basó en sus respectivos análisis de convergencia. Se eligió un tipo de malla estructurada con concentración de elementos en el centro de la cuña, diez elementos a lo largo del espesor y un elemento en la dirección circunferencial, con el objetivo de representar adecuadamente la cuña “axisimétrica” (Figura 4.10).

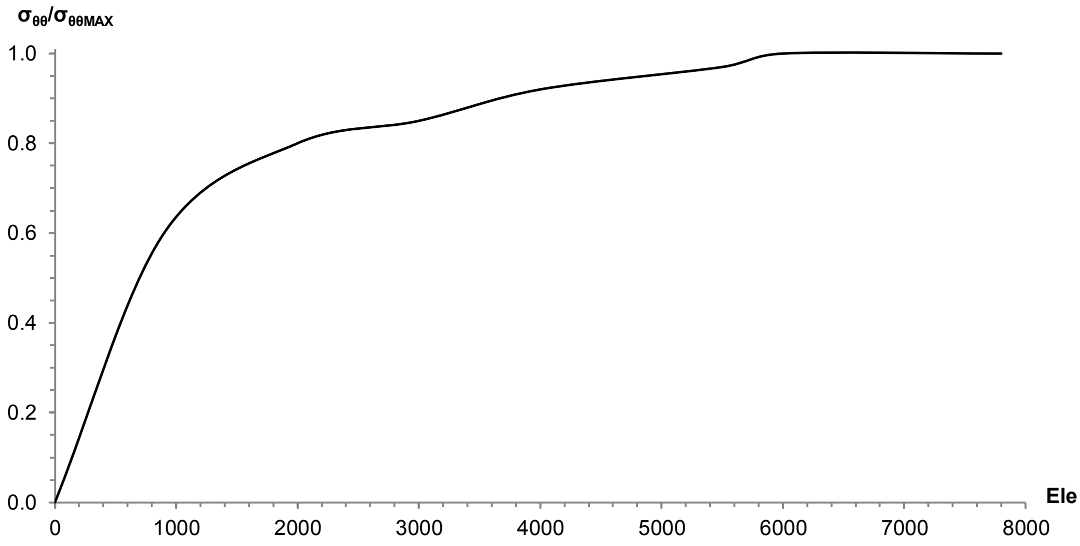

Figura 4.9 – Análisis de convergencia para elección de malla.

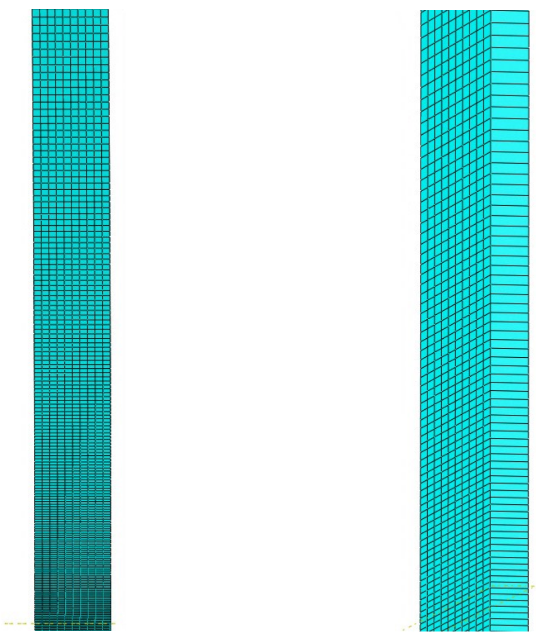

Figura 4.10 – Malla estructurada.

Debido a la condición de incompresibilidad del problema, surge un inconveniente: la solución no puede ser obtenida solamente en términos de la historia de los desplazamientos, ya que podría añadirse un término correspondiente a una presión hidrostática, sin causar variaciones en los desplazamientos. Con esto, pequeñas variaciones en el campo de los desplazamientos puede provocar grandes cambios de presión, de aquí la gran sensibilidad de soluciones basadas únicamente en los desplazamientos. Esto se evita manipulando la presión como una variable solución interpolada de forma independiente y acoplada a la solución de los desplazamientos mediante las ecuaciones constitutivas y las condiciones de compatibilidad, mediante el acoplamiento por medio de un multiplicador de Lagrange. Esta interpolación independiente es la base de los elementos con formulación mixta o híbridos, los cuales utilizan una mezcla de variables de desplazamiento y presión con un principio variacional aumentado que permite aproximar tanto las ecuaciones de equilibrio como las condiciones de compatibilidad, evitando así el problema de bloqueo volumétrico.

Adicionalmente se puede mencionar que se utiliza integración reducida a un punto único, basada en la formulación de deformación uniforme. En esta, las deformaciones se obtienen analíticamente como la deformación media en el elemento de volumen y no en el punto de Gauss de primer orden, como suele ser. Las ventajas de implementar esta integración se reflejan en una disminución de cálculos vinculados con la obtención del tensor de deformaciones, al igual que se disminuyen los cálculos de las fuerzas nodales debido a la antisimetría del tensor. Además la integración reducida contribuye a la solución del bloqueo de los elementos debido a la incompresibilidad, esto se debe a un menor número de coacciones introducidas por el elemento que responde a las coacciones internas impuestas por el medio continuo. Sin embargo, usar esta integración tiene inconvenientes: la matriz de rigidez tiene un rango insuficiente, lo que produce el modo hourglass (respuestas no físicas que pueden propagarse sino se controlan). Frente a esto, el software utilizado (Abaqus) implementa los métodos de rigidez artificial y amortiguamiento artificial de Flanagan y Belytschko, los cuales controlan los modos hourglass, calculando las fuerzas resistentes de hourglass. Debe tenerse en cuenta que para casos altamente no lineales no logra controlar este fenómeno.

Debido a lo mencionado anteriormente se usaron elementos C3D8RH. Estos son hexaedros híbridos de 8 nodos, continuos, de primer orden, con integración reducida y con control de hourglass.

4.4. ANÁLISIS MEDIANTE MODELOS DE LA PARED ARTERIAL

Como se ha mencionado, para analizar la influencia de los parámetros geométricos y del material, se realizaron varios tipos de análisis. El primero que se realizó fue una validación de la formulación para la bifurcación de membranas cilíndricas [**7**] explicada en 3.4.3. Posteriormente se observó la influencia del parámetro κ tanto para pared delgada como para gruesa. Se eligió un valor para el parámetro $\mathrm{C}_{10} = 7.64\,kPa$, basado en [**9**]. A continuación se analizó la influencia del espesor de la pared del modelo en la bifurcación. Así mismo se estudió la influencia del parámetro φ en la inestabilidad del modelo. Finalmente se realizaron modelos para analizar la influencia de las distintas imperfecciones geométricas y longitudes. En este apartado se explica la metodología y se muestran los resultados obtenidos para cada familia de modelos.

4.4.1. Validación de la formulación analítica para las condiciones de bifurcación de cilindros huecos sometidos a carga axial y presión interna [7]

Mediante las expresiones (3.93) a (3.97) y con la ayuda gráfica de la Figura 3.19, se realizaron modelos para validar la formulación realizada por los autores. Se fijó un valor de la relación $\mathrm{k}_2/\mathrm{k}_{2c}$, sabiendo que el valor de k_{2c} varía y está definido por (3.91), para así hallar el parámetro adimensional k_{1c}/μ, mediante las expresiones correspondientes. Se presentan estos parámetros para los distintos valores del ángulo de la orientación de las fibras φ.

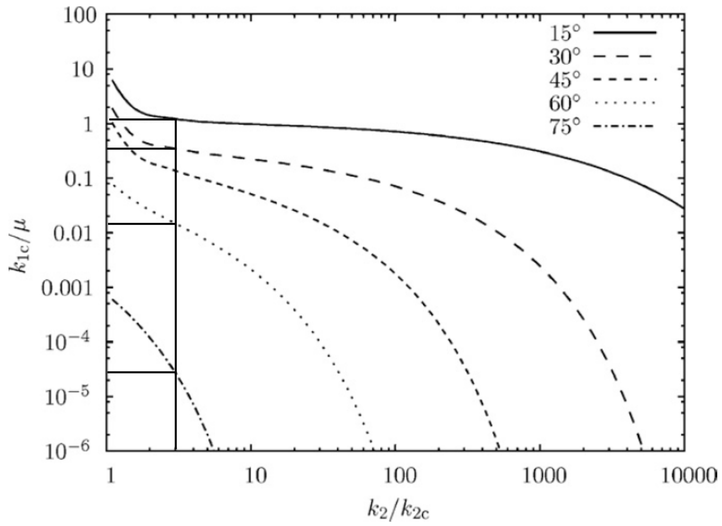

Figura 4.11 – Metodología utilizada para encontrar k_{1c}.

Tabla 4.1 – Parámetros del material de Holzapfel que permiten la bifurcación según ángulo de las fibras

Ángulo de las fibras respecto al eje axial (φ – [°])	k_2	k_{1c}
15	0.012	1.834 E-02
30	0.019	6.112 E-03
60	0.167	7.640 E-05
75	2.321	3.820 E-06

Para validar estos parámetros mediante los modelos de elementos finitos y, que efectivamente permitieran que la bifurcación de la solución se presentase, se usó la información que provee Abaqus acerca del factor proporcional de carga (*LPF*). Esta curva y sus respectivos datos permiten observar cuando ocurre la bifurcación del modelo, representándose esto en una disminución del factor (disminución de l apresiópn aplicada), como lo muestra la Figura 4.12. El momento en el cual ocurre la bifurcación de la solución se observa en la curva como el máximo valor de LPF.

Se realizaron modelos con los parámetros de la Tabla 4.1 y se observó que con esos parámetros exactos, la mayoría de los modelos no presentó inestabilidad. Esto se puede atribuir al hecho que por medio de las expresiones utilizadas los valores hallados son el límite superior para que no ocurra la bifurcación. Es por esto que para validar correctamente los modelos se procedió a disminuir ligeramente los valores calculados y así poder capturar la inestabilidad.

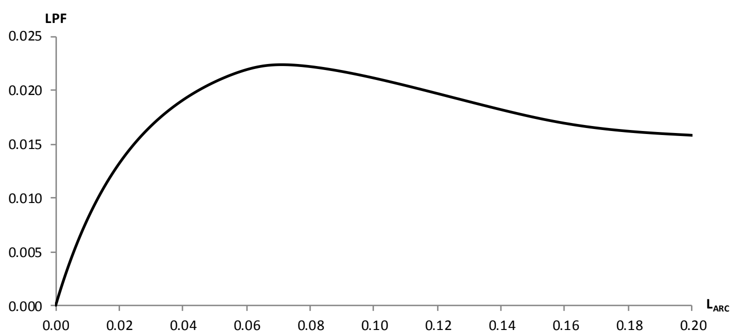

Figura 4.12 – Curva LPF vs. Longitud de arco típica de modelo que presenta inestabilidad numérica.

Se pudo observar como para un ángulo de orientación de las fibras de $15°$, un espesor $e = 0.1\,mm$ (pared delgada $R/e\,(40) \geq 20$) y parámetros $\mathrm{k}_1 = 0.005$ y $\mathrm{k}_2 = 0.012$, se produjo la bifurcación del modelo (Figura 4.13). Se observa que es una bifurcación menos pronunciada a la de la Figura 4.12. Se puede atribuir esto a la cercanía de los parámetros a la zona en la que no se produce la inestabilidad. En la Figura 4.13 se observa como al variar el espesor no ocurre la inestabilidad para valores de espesor mayores que $0.2\,mm$ ($R/e = 20$). Estudios análogos se realizaron para orientaciones de $30, 60$ y 75 grados encontrando resultados con las mismas tendencias. Con base en esto se puede decir que la formulación es válida aplicada a los modelos de pared delgada ($R/e \geq 20$). Para ejecutar los análisis de los apartados posteriores se buscaron los parámetros que permiten la inestabilidad para el caso más desfavorable ($\varphi = 75°$) y se mantuvieron constantes en todos los modelos de manera que pudiesen ser comparables entre sí. Se eligieron los parámetros $\mathrm{k}_1 = 6\mathrm{E}\text{-}04\ kPa$, $\mathrm{k}_2 = 0.12$, $\mathrm{D} = 0.0$ (incompresibilidad) y $\mathrm{C}_{10} = 7.64\ kPa$. Este último parámetro con base en [**9**].

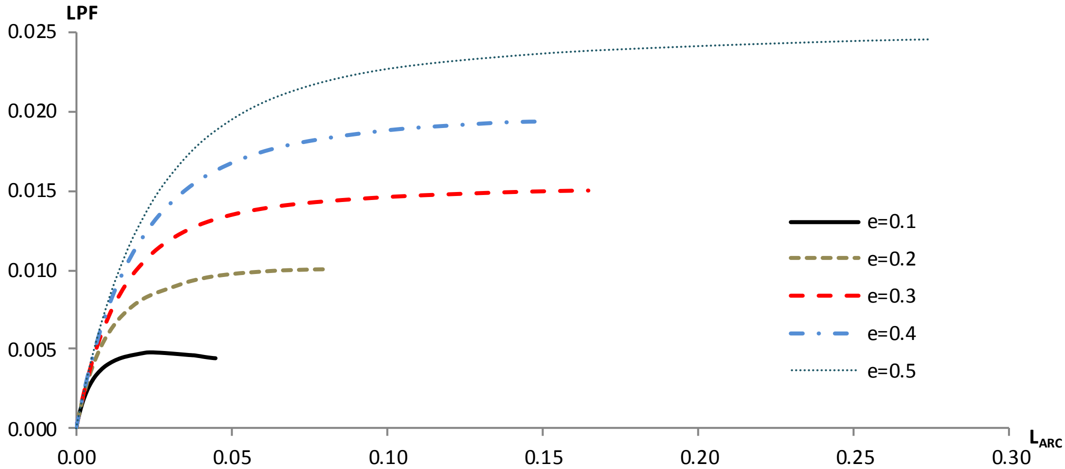

Figura 4.13 – Curvas LPF versus Longitud de arco para diversos espesores desde pared delgada a pared gruesa.

4.4.2. Influencia del parámetro de dispersión de las fibras (κ) en cilindros de pared delgada

Para realizar este análisis se tomó como base el modelo de la Figura 4.7.a, pues representa un cilindro de pared delgada ($e = 0.1\,mm$y $R/e\,(40) > 20$). Para observar el comportamiento del modelo se acotó el alargamiento axial λ_z entre valores de 1.0 y 2.0, considerando que una arteria sana trabaja bajo alargamientos longitudinales entre 1.05 y 1.15 [**8**], además que en la literatura es común encontrar estudios entre este rango de valores [**5**] [**6**] [**7**] [**8**]. Con base en esta geometría se realizaron cambios en el parámetro de dispersión de las fibras κ de $[0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$, haciendo énfasis en que $\kappa = 0.0$ responde a una dispersión de las fibras nula, con lo cual todas las fibras están perfectamente alineadas, y $\kappa = 1/3$ responde a una dispersión total de las fibras (Figura 3.8). Así mismo se incluyó en los análisis el material neo-hookeano ($k_1 = 0$).

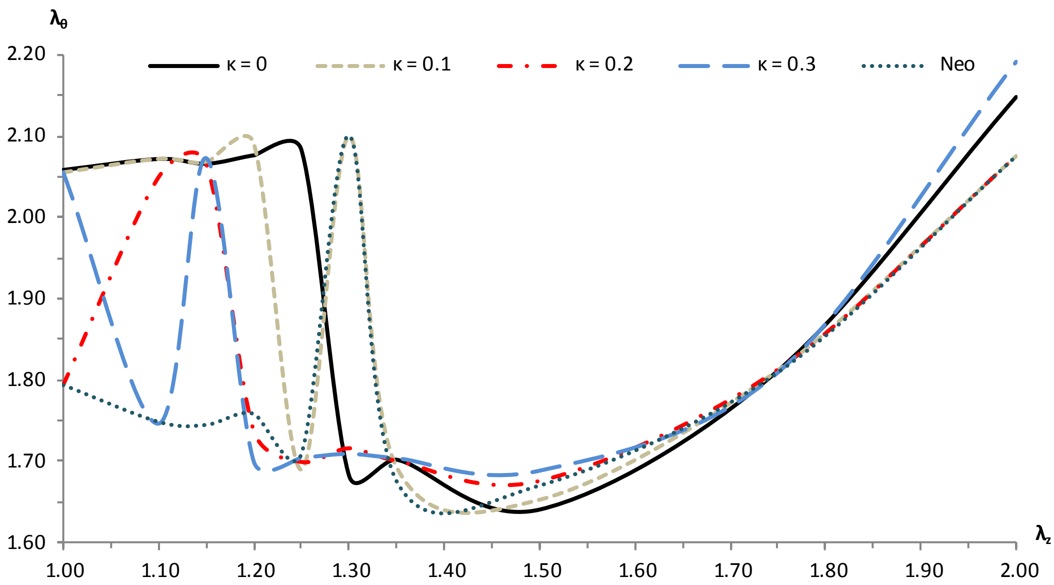

Figura 4.14 – λ_θ vs. λ_z con variaciones de $\kappa = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$. $e = 0.1mm$; $\varphi = 15°$.

En la Figura 4.14 se puede observar que el alargamiento circunferencial (λ_θ) tiene un comportamiento similar para todos los factores de dispersión κ para valores de λ_z superiores a 1.5, con tendencia ascendente. Para este rango de alargamientos axiales, los alargamientos circunferenciales se encuentran acotados por el material neo-hookeano (límite inferior) y el material de GOH con mayor dispersión de fibras ($\kappa = 0.3$, limite superior). Por su parte, para alargamientos λ_z inferiores a 1.5, se observa claramente la influencia de la dispersión de las fibras; para el material con mayor anisotropía (línea negra continua) el máximo local se alcanza para $\lambda_z = 1.25$, con un valor $\lambda_\theta = 2.08$, tras lo cual el alargamiento circunferencial desciende marcadamente hasta $\lambda_\theta = 1.70$ ($\lambda_z = 1.35$). Posteriormente entre λ_z 1.35 y 1.5, λ_θ cambia de curvatura alcanzando un máximo local. Al aumentar κ a 0.1, se observa como el máximo λ_θ (2.09) se alcanza con un valor de $\lambda_z = 1.2$ (0.5 menor que para $\kappa = 0$). Para $\lambda_z = 1.25$, este material presenta un mínimo local (1.69), tras lo cual asciende hasta un valor de 2.1 (para $\lambda_z = 1.3$), punto a partir del cual empieza a crecer. Conforme el material pierde anisotropía ($\kappa = 0.2$ y 0.3) se observa una retracción del comportamiento mencionado.

Se destaca que el comportamiento para $\kappa\, 0.2$ y 0.3 es heterogéneo desde $\lambda_\theta = 1$ hasta 1.15. Para $\kappa = 0.2$, el alargamiento circunferencial para $\lambda_z = 1$ es idéntico que el correspondiente al material neo-hookeano; tras esto asciende hasta alcanzar la curva del material altamente anisótropo ($\kappa = 0$) ($\lambda_\theta = 2.07$ en $\lambda_z = 1.15$), y a partir de allí muestra el mismo comportamiento que el material mencionado. Por su parte, para $\kappa = 0.3$, el alargamiento circunferencial para $\lambda_z = 1.0$ tiene un valor muy cercano al material altamente anisótropo ($\lambda_\theta = 1.15$), disminuyendo hasta alcanzar el límite inferior (material neo-hookeano) ($\lambda_\theta = 1.75$ en $\lambda_z = 1.10$). A partir de ese punto, asciende, alcanza la curva del material altamente anisótropo ($\lambda_\theta = 2.07$ en $\lambda_z = 1.15$), y adquiere el mismo comportamiento que el material $\kappa = 0.2$.Se observa similitud cualitativa entre la Figura 4.14 y la Figura 3.10. Además se observa que para valores de λ_z pequeños, la inestabilidad se alcanza más fácilmente para dispersiones altas de las fibras ($\kappa = 0.3$) que para materiales más anisótropos, mientras que para valores altos λ_z ocurre otro fenómeno: la inestabilidad se alcanza más fácilmente (λ_θ más pequeños) para materiales con dispersiones de fibras intermedias, exceptuando la dispersión nula, para la cual es más difícil alcanzar la inestabilidad, así como para las dispersiones altas ($\kappa \geq 0.3$).

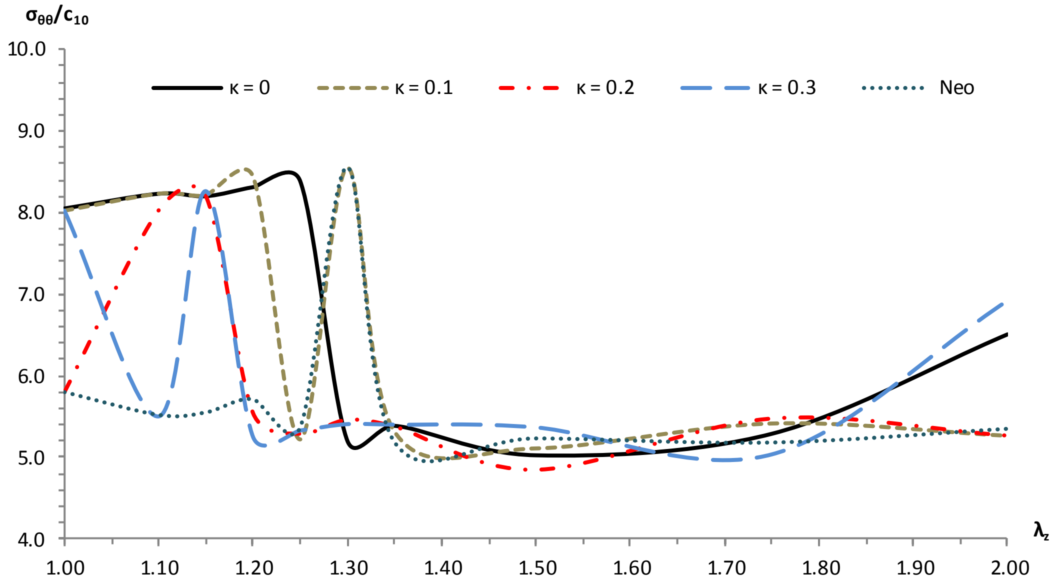

Figura 4.15 – $\sigma_{\theta\theta}/C_{10}$*vs.* λ_z *con variaciones de* $\kappa = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$. $e = 0.1mm$; $\varphi = 15°$.

En la Figura 4.15 se observa como el comportamiento de la tensión circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ con variaciones de λ_z es muy similar al de λ_θ. Sin embargo se observa que para alargamientos λ_z mayores que 1.8 la tensión circunferencial tiene dos tendencias distintas: una tendencia ascendente para $\kappa = 0.0$ y 0.3 y otra relativamente constante para el resto de los materiales. En el caso ascendente se observa que para $\kappa = 0.3$, la tensión circunferencial alcanza un valor de $52.9\,kPa$, mientras que para $\kappa = 0.0$, la tensión tiene un valor $49.7\,kPa$, un $6\,\%$ menor. Para todos los otros materiales, la tensión circunferencial media tiene un valor de $40.4\ \pm 0.4\,kPa$. Específicamente para un alargamiento $\lambda_z = 1.10$ se observa que si el material tiene una dispersión de fibras alta ($\kappa = 0.3$), la tensión circunferencial que se alcanza en bifurcación es de $42.0\,kPa$, mientras que para el resto de materiales esta tensión alcanza un valor medio de $62.4 \pm 0.8\,kPa$ bajo el mismo alargamiento.

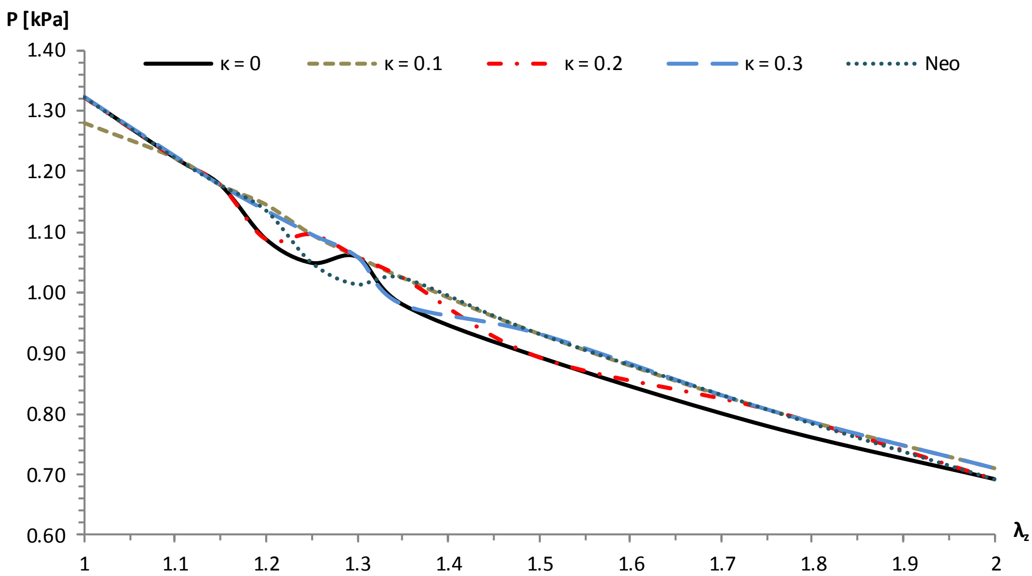

Figura 4.16 – Presión aplicada P vs. λ_z *con variaciones de* $\kappa = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$. $e = 0.1mm$; $\varphi = 15°$.

En cuanto a la presión aplicada, en la Figura 4.16 se observa como para valores de λ_z mayores a 1.35 no se percibe una influencia importante del parámetro de dispersión de las fibras. Sin embargo para alargamientos axiales menores a ese valor, se percibe una ligera influencia de la dispersión de las fibras. En todo momento los valores de la presión están acotados por el material más anisótropo ($\kappa = 0.0$, limite superior) y el material neo-hookeano (limite inferior), con una variación del $3\ \%$ entre si. En términos generales, la presión aplicada tiene comportamiento cualitativo similar al de la tensión circunferencial.

Una posible explicación a estas variaciones, puede atribuirse a la forma como se encuentran orientadas las fibras en el momento de la bifurcación de los modelos. Se eligieron tres valores de λ_z en los cuales se observaron diferencias relevantes: 1.1, 1.25 y 2.0 (Tabla 4.2). Para $\lambda_z = 1.10$ se observa que el rango de ángulos al momento de la bifurcación ($22.1\ ° - 23.6\ °$) del material menos anisótropo ($\kappa = 0.3$) es menor que para los otros materiales ($10.3\ \%$). Para $\lambda_z = 1.25$ el rango de ángulos varía entre $22.2\ ° - 24.6\ °$ para $\kappa = 0.0$, mientras que los otros materiales estos valores son mayores (14.9%). Finalmente, para λ_z 2.0, para los materiales $\kappa = 0.0$ y 0.3 el rango de valores del ángulo es $11.9\ ° - 13.6\ °$, mientras que para los otros dos materiales ($\kappa = 0.1$ y 0.2) el rango es $11.8\ ° - 12.6°$ ($4\ \%$ de diferencia). Se puede concluir entonces que el comportamiento del material en tensiones y alargamientos circunferenciales en la bifurcación es altamente sensible a la orientación de las fibras, pues pequeños cambios en la orientación de las fibras se ve reflejados en grandes cambios de las variables mencionadas.

Tabla 4.2 – Orientación de las fibras en la bifurcación respecto al eje axial para valores críticos de λ_z. Pared delgada.

	φ_{ines}					
	λ_z	1.10	λ_z	1.25	λ_z	2.00
	MIN	MAX	MIN	MAX	MIN	MAX
κ = 0.0	24.1	27.2	22.2	24.6	11.9	13.6
κ = 0.1	24.1	27.2	19.4	20.3	11.8	12.6
κ = 0.2	24.2	27.0	19.5	20.4	11.8	12.6
κ = 0.3	22.4	23.6	19.5	20.4	11.9	13.5

Se apunta que en el análisis de bifurcación se observaron cuatro mecanismos de inestabilidad (Figura 4.17). Las cuatro formas son igual de validas, pues representan el abultamiento típico asociado con este tipo de inestabilidad. Se observa que una vez ha ocurrido la bifurcación, la mayoría de los modelos continuaban con la solución del método, llegando a mostrar configuraciones muy deformadas. En varias de ellas, se puede observar como el espesor de la pared en el lugar donde ocurre tanto el mayor alargamiento circunferencial, como la mayor tensión circunferencial se reduce hasta un rango de $45 - 55\%$ en el momento de inestabilidad, llegando a alcanzar incluso un rango re reducción de $65 - 75\%$ al final del análisis (Figura 4.18).

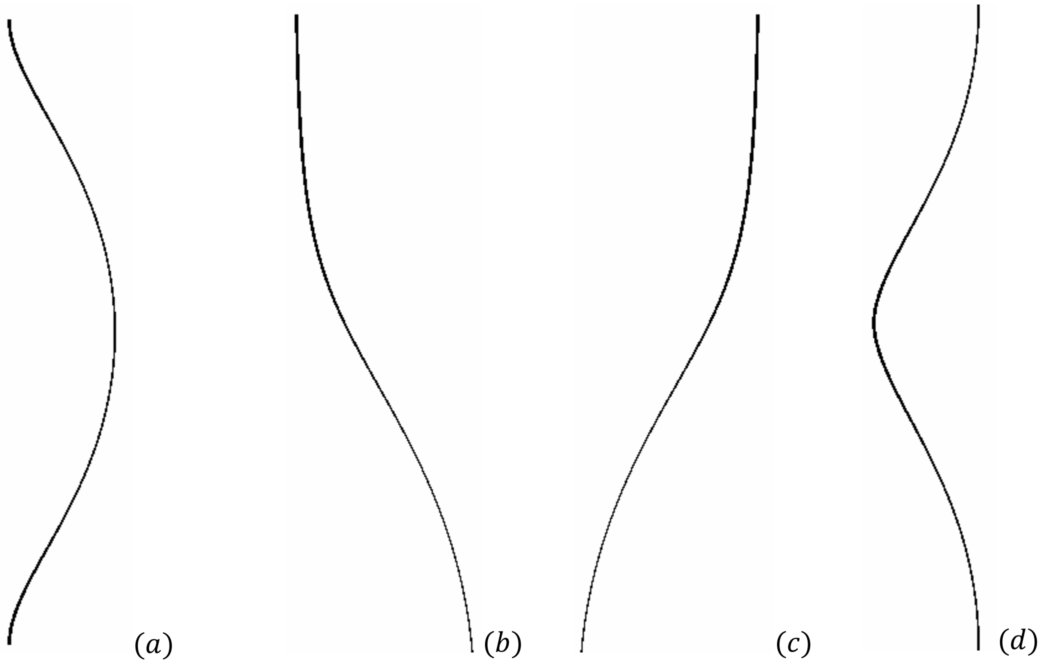

Figura 4.17 – Mecanismos geométricos de la bifurcación.

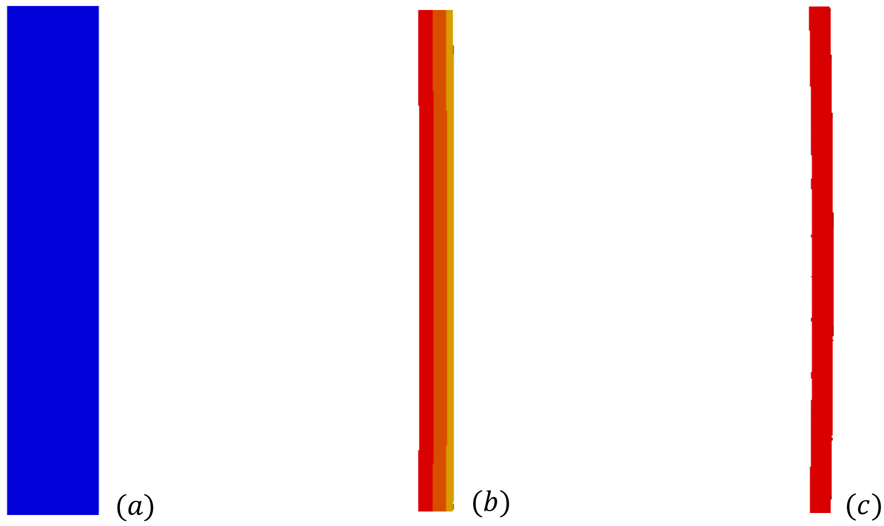

Figura 4.18 – Reducción de la pared desde el estado inicial (a) hasta la inestabilidad (b) y final del análisis (c).

4.4.3. Influencia del parámetro de dispersión de las fibras (κ) en cilindros de pared gruesa

Para realizar este análisis se tomó como base la geometría de la Figura 4.7.d. Este tiene un espesor $e = 0.4\,mm$, el cual se considera de pared gruesa ($R/e(10) < 20$). En cuanto a la variación del factor de dispersión de las fibras κ y los valores de alargamiento axial λ_z son iguales que los del análisis de 4.4.2.

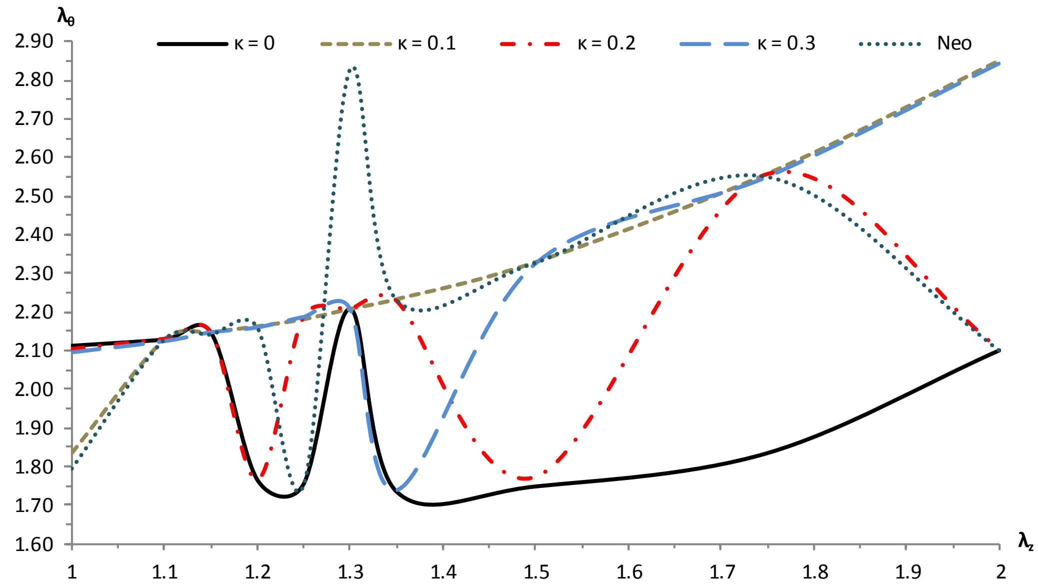

Figura 4.19 – λ_θ vs. λ_z con variaciones de $\kappa = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$. $e = 0.4mm$; $\varphi = 15°$.

En la Figura 4.19 se observa la variación de λ_θ para diferentes valores de λ_z y κ. Entre $\lambda_z = 1.0$ y 1.15 solo el material con $\kappa = 0.1$ muestra un comportamiento similar al del resto de materiales.. Se eligen tres alargamiento λ_z para analizar el comportamiento de λ_θ: 1.25, 1.50 y 1.75. Para $\lambda_z = 1.25$ se observa como el material altamente anisótropo ($\kappa = 0.0$) sufre la inestabilidad con un alargamiento circunferencial más pequeño ($\lambda_\theta = 1.75$) que para los otros materiales ($\lambda_\theta = 2.19 \pm 0.003$). Con $\lambda_z = 1.50$, $\kappa = 0.2$ junto con $\kappa = 0.0$ tienen el mismo comportamiento, la inestabilidad ocurre para valores más pequeños de λ_θ (1.77 y 1.75 respectivamente) que para los otros materiales ($\lambda_\theta = 2.33$). Por último para $\lambda_z = 1.75$, se repite el comportamiento para $\kappa = 0.0$ de nuevo, la bifurcación ocurre con un valor λ_θ mucho menor que para el resto de materiales.

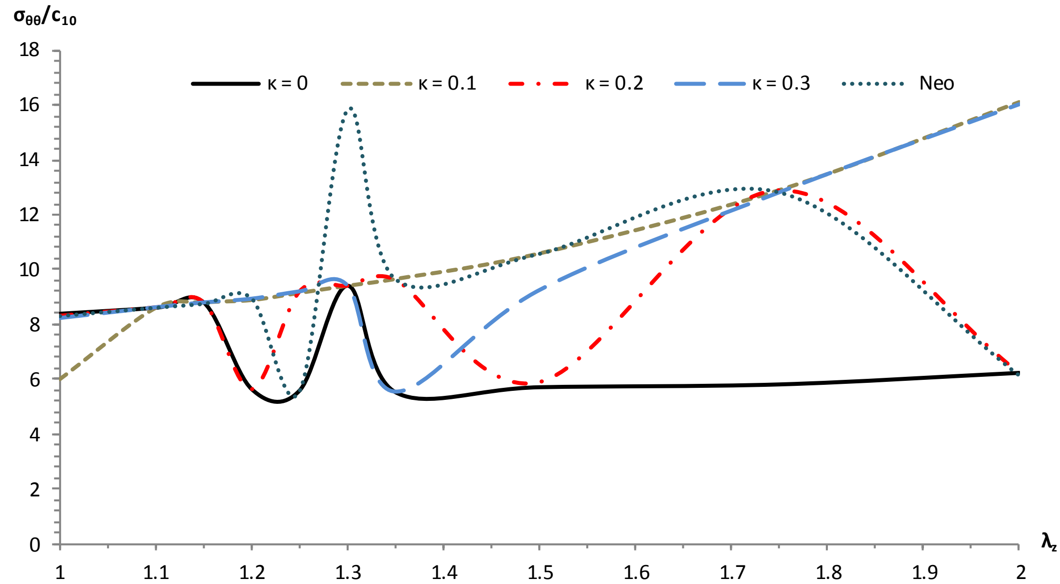

Figura 4.20 – $\sigma_{\theta\theta}/C_{10}$vs. λ_z con variaciones de $\kappa = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$. $e = 0.4mm$; $\varphi = 15°$.

La tensión circunferencial tiene un comportamiento cualitativo prácticamente idéntico al del alargamiento circunferencial. Una diferencia notoria, es la tensión circunferencial para el material $\kappa = 0.0$, para alargamientos λ_z mayores que 1.35, pues la tensión se mantiene prácticamente constante con un valor $\sigma_{\theta\theta} = 43.6\ kPa$, mientras que el alargamiento circunferencial en el mismo rango de λ_z, crecía de forma controlada. Al igual que para pared delgada, se puede proponer que estas variaciones comunes a ambos parámetros, están relacionadas con la posición de las fibras en el momento de la bifurcación. Esto se comprueba posteriormente.

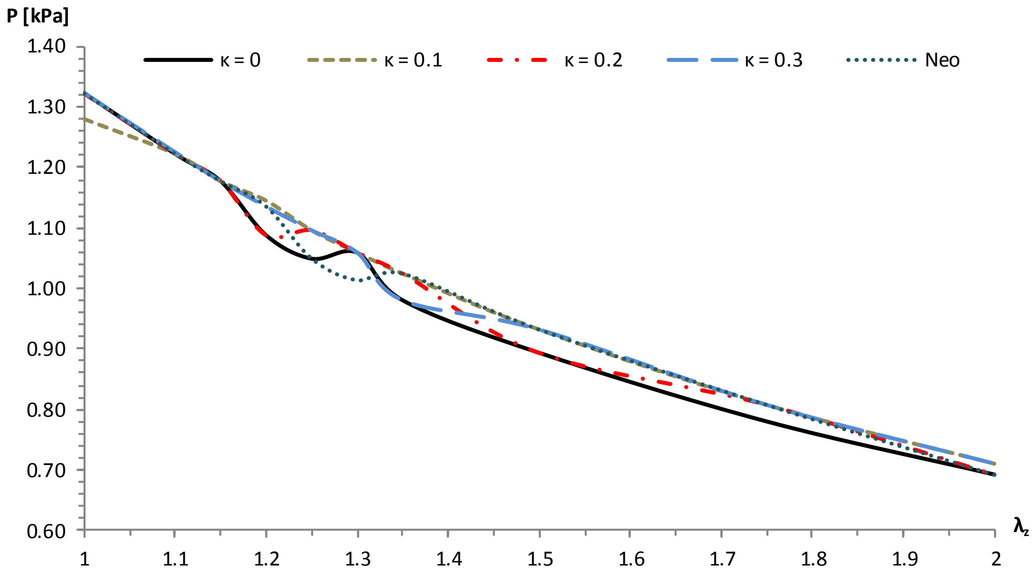

Figura 4.21 – Presión aplicada P vs. λ_z con variaciones de $\kappa = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$. $e = 0.1mm$; $\varphi = 15°$.

La presión aplicada en el momento de la bifurcación se presenta en la Figura 4.21. Se observa como la dispersión de las fibras en pared gruesa tiene una influencia poco relevante. Se observa como para alargamientos axiales inferiores a 1.1, las presiones son idénticas para todos los materiales excepto para $\kappa = 0.1$, para el cual son un poco más pequeñas, pero tienden a alcanzar el valor de los otros materiales ($P = 1.22\ kPa$). Se observa como las presiones, a partir de $\lambda_z = 1.1$, están acotadas en todo momento por el material altamente anisótropo (límite inferior) y por el material con menos anisotropía ($\kappa = 0.3$, límite superior), excepto para $\lambda_z = 1.3$, en donde el límite inferior está representado por el material neo-hookeano.

Con base en el análisis realizado para pared delgada, se realizó un análisis de la orientación de las fibras en la bifurcación para alargamientos axiales críticos, escogidos con base en los resultados de las Figura 4.19-Figura 4.21: 1.20, 1.50 y 1.75. En la Tabla 4.3 se puede observar exactamente la misma influencia de la orientación de las fibras en el momento de bifurcación en el comportamiento mecánico del modelo: con valores de orientación prácticamente iguales, se produce el mismo alargamiento y tensión circunferenciales. Por ejemplo para $\lambda_z = 1.20$, las tensiones y alargamientos circunferenciales son casi iguales para $\kappa = 0.0$ y 0.2, diferentes de los valores para κ 0.1 y 0.3, lo cuales también coinciden entre sí. En la Tabla 4.3 y en la Figura 4.22, se observa que este comportamiento coincide exactamente con la posición de los ángulos en cada uno de los materiales en el momento de la bifurcación. Se registraron valores de reducción de la pared del cilindro entre $59 - 64\%$ para el momento de la inestabilidad, y entre $78 - 91\%$ al final de los análisis.

Se observa que para la Figura 4.22 el eje de las abscisas está en términos de $\mathrm{L_{ARC}}$. Ya que el análisis para la presión interna fue resuelto por medio del método de Riks, todas las variaciones y evolución de parámetros obtenibles de los modelos se encuentra en términos de la longitud de arco. Este término se relaciona directamente con el número de pasos que se realizaron en el análisis, que a su vez está relacionado directamente con el factor LPF para cada modelo. Se hará entonces referencia siempre a la longitud de arco ($\mathrm{L_{ARC}}$) para mostrar la evolución de los alargamientos, tensiones y orientación de las fibras.

Tabla 4.3 – Orientación de las fibras en la bifurcación respecto al eje axial para valores críticos de λ_z. Pared gruesa.

	φ_{mes}					
	λ_z	1.20	λ_z	1.50	λ_z	1.75
	MIN	MAX	MIN	MAX	MIN	MAX
κ = 0.0	19.9	22.1	15.5	17.6	13.4	15.3
κ = 0.1	22.6	26.6	20.2	23.5	19.4	22.3
κ = 0.2	19.9	22.1	15.5	17.6	19.4	22.3
κ = 0.3	22.2	27.3	20.2	23.4	19.4	22.2

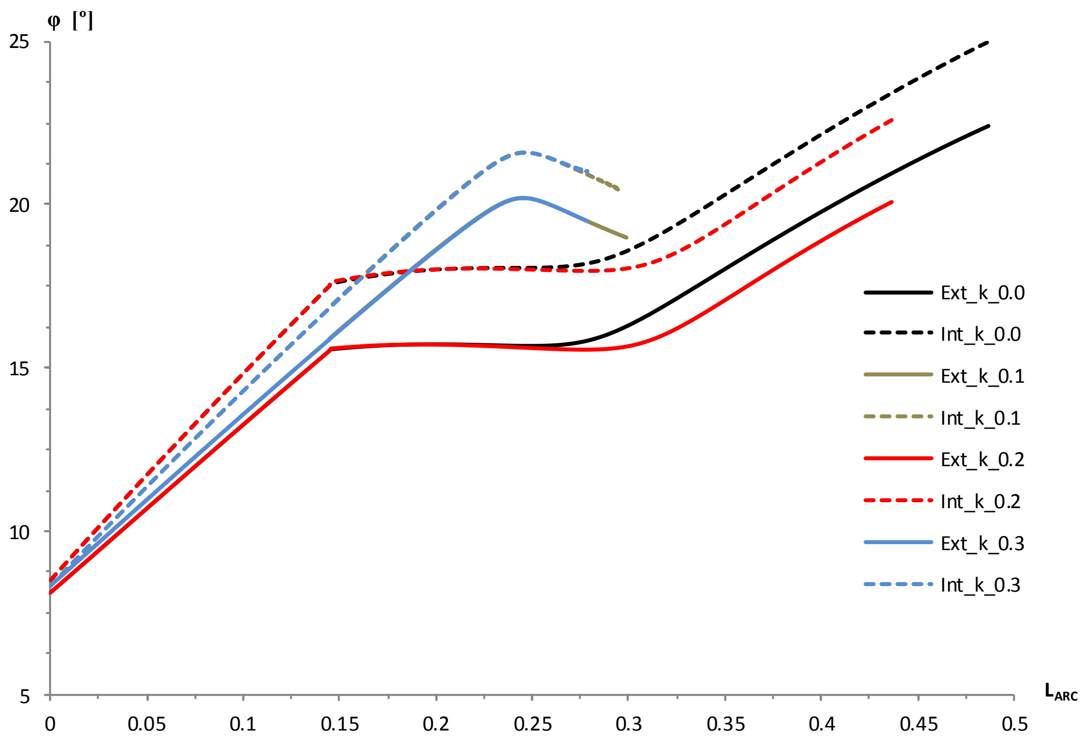

Figura 4.22 – Variación de la orientación de las fibras (φ) respecto del eje axial vs. Longitud de arco para diferentes parámetros κ en la cara interna de la pared (líneas discontinuas) y en la cara externa (líneas continuas) para $\lambda_z = 1.5$.

4.4.4. Influencia del espesor de la pared

Para este análisis se fijaron los parámetros κ (0.0) y φ ($15°$) y se aplicó la metodología usada hasta ahora a los modelos geométricos de la Figura 4.7 (variaciones del espesor de 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5). En este caso todas las fibras están completamente alineadas, lo que hace que en todos los casos el material sea completamente anisótropo.

En la Figura 4.23 se aprecia la influencia del espesor en el comportamiento del alargamiento circunferencial. Se observa como el alargamiento circunferencial entre valores de λ_z 1.35 y 1.75 para espesores de 0.1, 0.2 y 0.4 mm tienen un comportamiento similar. A partir de $\lambda_z = 1.75$ todos los modelos, excepto el de espesor $0.5\ mm$, coinciden y tienen una misma tendencia ascendente. Sin embargo el comportamiento para λ_z menores que 1.35 es muy heterogéneo. Se puede analizar cómo, entre $\lambda_z = 1.0$ y 1.25, el alargamiento circunferencial es casi constante (2.07) en cilindros de pared muy delgada ($e = 0.1\ mm$). Entre λ_z 1.0 y 1.15, se puede observar como para cilindros de pared gruesa, el alargamiento circunferencial es mayor y con tendencia ascendente entre 2.04 y 2.16 que para los cilindros de pared delgada (espesores 0.2 y 0.3). Para estos, λ_θ disminuye hasta alcanzar un mínimo local (1.77 para $\lambda_z = 1.10$), tras lo cual asciende hasta interceptar la curva del cilindro de pared más delgada. Se anota que el cilindro con espesor igual a 0.3 y $0.5\ mm$ presentan un comportamiento especialmente particular para λ_z mayores que 1.30.

Para comparar valores de alargamiento circunferencial se eligen tres puntos críticos de λ_z: 1.10, 1.35 y 1.75. Para λ_z 1.10, se observa cómo, para espesores 0.4y $0.5\ mm$, se produce un alargamiento $\lambda_\theta = 2.11$, mientras que, para espesores 0.2 y 0.3, el alargamiento circunferencial alcanza un valor de 1.76. Por otra parte, para λ_z igual a 1.35, se observa como, para e 0.1, 0.2 y 0.4, λ_θ es igual a 1.72, mientras que para e igual a 0.5 es 2.29 y para e 0.3 alcanza un valor de 2.2. Finalmente para λ_z 1.75, todos los espesores al alcanzar la inestabilidad presentan un λ_θ igual a 1.82, excepto para e igual a 0.5, para el cual λ_θ es 2.6.

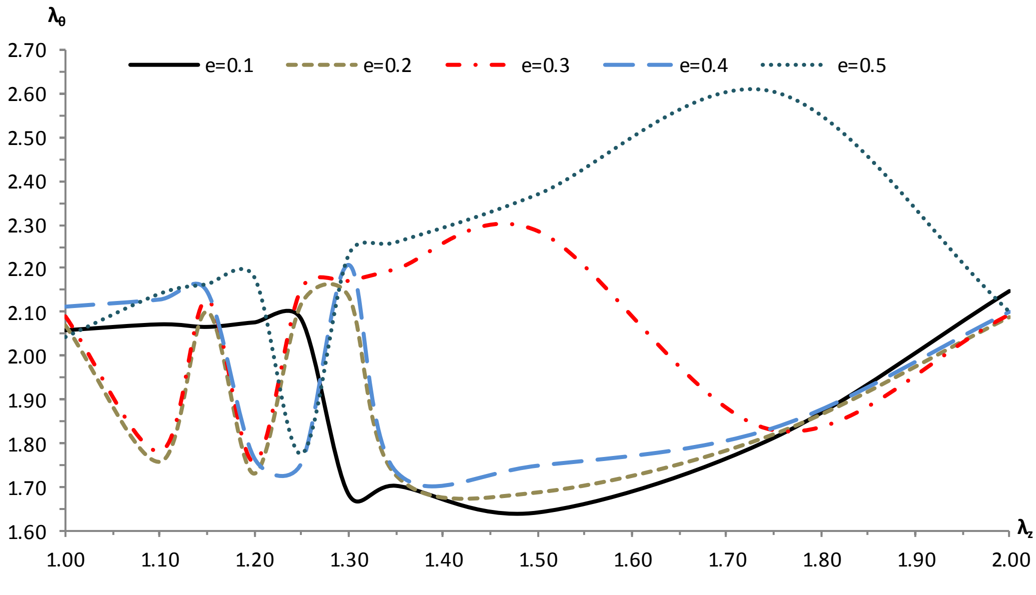

Figura 4.23 – λ_θ vs. λ_z con variaciones de $e = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]mm$. $\kappa = 0.0$; $\varphi = 15°$.

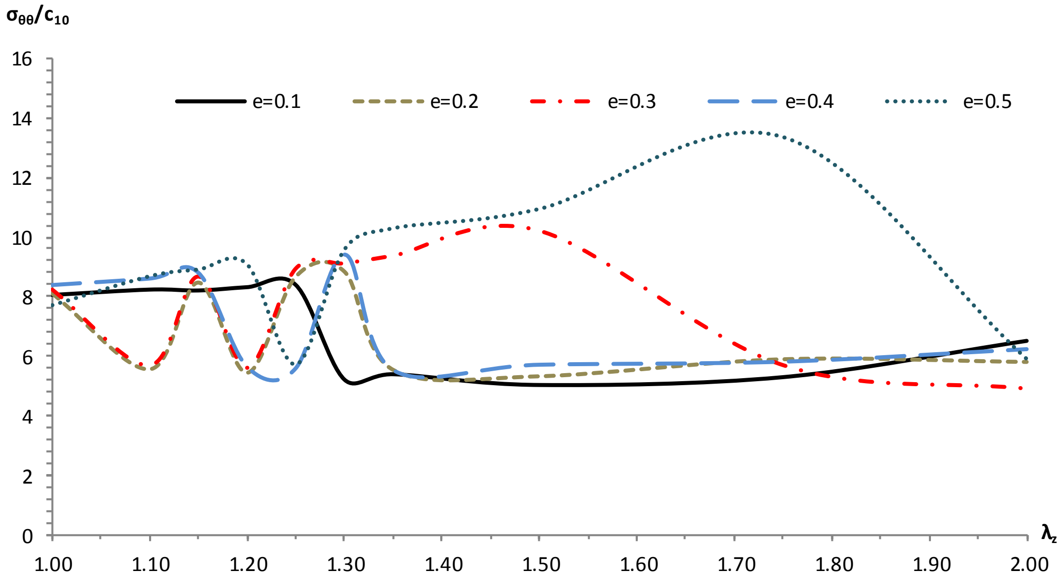

Figura 4.24 – $\sigma_{\theta\theta}/C_{10}$vs. λ_z con variaciones de $e = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]mm$. $\kappa = 0.0$; $\varphi = 15°$.

El comportamiento de la tensión circunferencial es cualitativamente parecido al del alargamiento circunferencial (Figura 4.24). La diferencia radica en que a partir de λ_z 1.35 la tensión tiende a ser constante para e igual a 0.1, 0.2 y $0.4\,mm$, y no ascendente, como para el alargamiento circunferencial. Esto indica que a partir de este valor de λ_z los cilindros mencionados alcanzan la inestabilidad con tensiones muy cercanas entre sí ($\sigma_{\theta\theta} = 43.77\ kPa$).

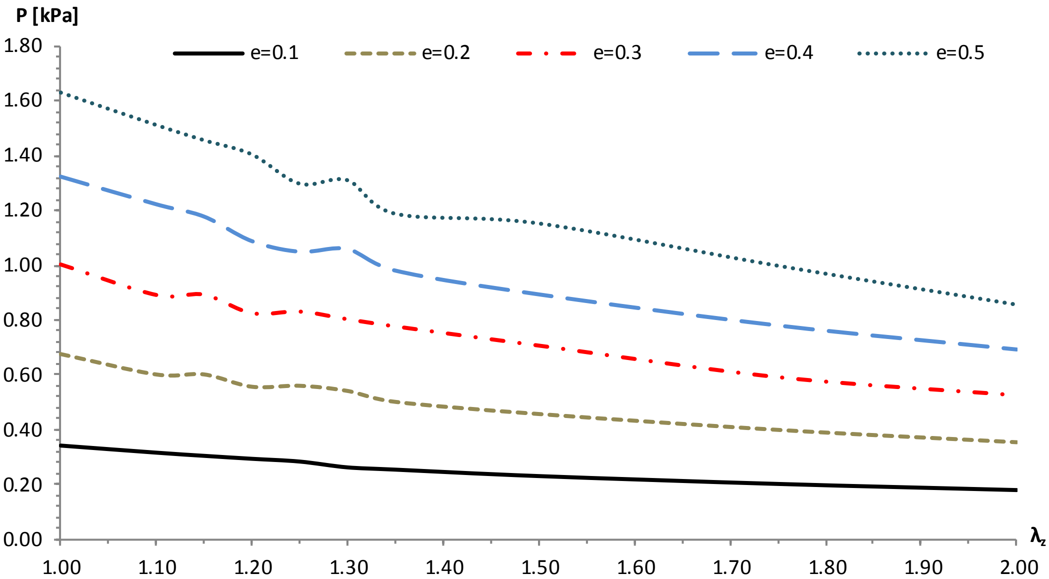

Figura 4.25 – Presión aplicada P vs. λ_z con variaciones de $e = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]mm$. $\kappa = 0.0$; $\varphi = 15°$.

En la Figura 4.25 se observa la influencia del espesor de la pared en la presión aplicada para que se produjera la bifurcación. Se observa claramente como, conforme aumenta el espesor de la pared, aumenta también la presión necesaria para producir la inestabilidad en cada modelo. Por ejemplo para λ_z igual a 1.15, la presión interna necesaria para provocar la inestabilidad en un cilindro de espesor $0.5\,mm$ es de

$1.51\ kPa$, mientras que para un cilindro de pared delgada ($e = 0.1\ mm$) la presión es $0.34\ kPa$, 79 % menor. Aumentos en el alargamiento axial muestran una disminución de la presión aplicada para un mismo material, siendo más pronunciada la disminución para paredes más gruesas que para paredes delgadas.

Tabla 4.4 – Orientación de las fibras en la bifurcación respecto al eje axial para valores críticos de λ_z. Variación de espesor.

	φ_{ines} (°)					
	λ_z	1.10	λ_z	1.35	λ_z	1.75
	MIN	MAX	MIN	MAX	MIN	MAX
e = 0.1	24.1	27.2	17.8	18.8	13.6	14.4
e = 0.2	22.3	23.9	17.6	19.1	13.6	14.8
e = 0.3	22.1	24.1	21.1	24.3	13.5	15.0
e = 0.4	23.9	28.1	17.4	19.5	13.4	15.3
e = 0.5	23.7	28.3	23.0	25.6	19.4	22.2

Siguiendo la metodología se eligieron tres puntos críticos de λ_z para observar el comportamiento de la orientación de las fibras: 1.10, 1.35 y 1.75 (Tabla 4.4 y Figura 4.26). Se comprueba de nuevo como el comportamiento del alargamiento y tensión circunferenciales, está directamente relacionado con la posición de las fibras en el momento de la bifurcación. Por lo tanto para λ_z 1.35, la orientación de las fibras en el instante de la inestabilidad es muy cercano entre los espesores 0.1, 0.2 y $0.4\ mm$ (entre 17.8 y 19.5 °), y esto se ve reflejado en el comportamiento de λ_θ y $\sigma_{\theta\theta}$, que es muy similar también. Para e 0.3 y $0.5\ mm$ los ángulos son mayores ($21.1 - 24.3°$ y $23.0 - 25.6°$) y, efectivamente, los valores de λ_θ y $\sigma_{\theta\theta}$ son mayores también.

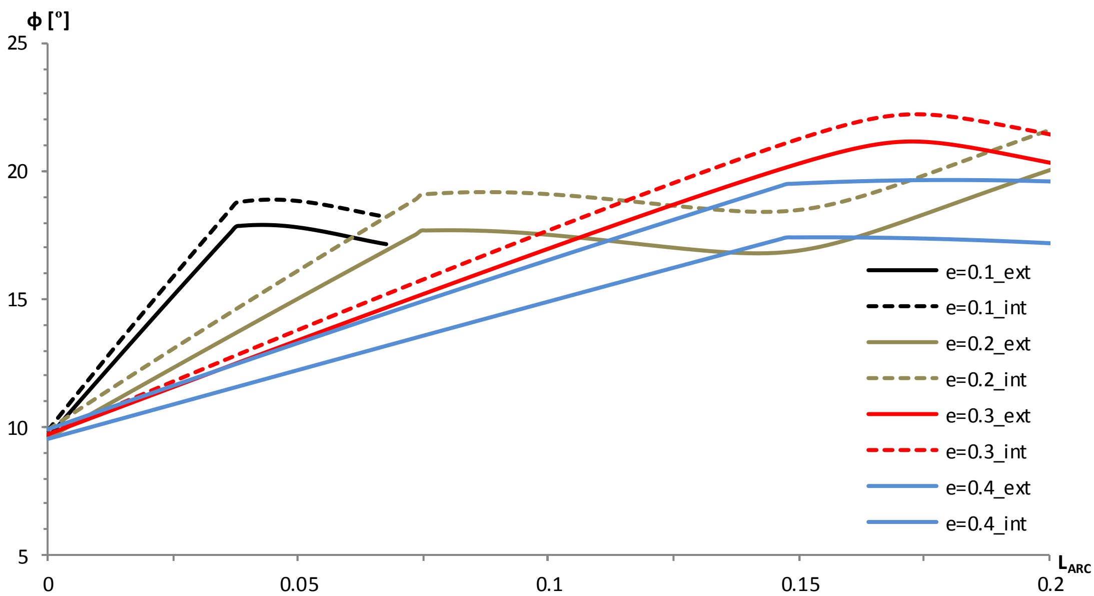

Figura 4.26 – Variación de la orientación de las fibras (φ) respecto del eje axial vs. Longitud de arco para diferentes espesores en la cara interna de la pared (líneas discontinuas) y en la cara externa (líneas continuas) para $\lambda_z = 1.35$.

Se analiza la tensión radial, que para pared delgada se desprecia. En la Figura 4.28 y Figura 4.28 se observa que para pared delgada ($e = 0.1$ y $0.2\ mm$) las tensiones radiales son pequeñas comparadas con las tensiones circunferenciales ($0.6 - 0.8\%$). Sin embargo al incrementar el espesor de la pared se observa como las tensiones radiales se incrementan alcanzando incluso un $2.5 - 3.5\ \%$. En la Figura 4.28no se observan los valores máximos para los espesores 0.4 y $0.5\ mm$, por la diferencia entre estos y los correspondientes a espesores menores.

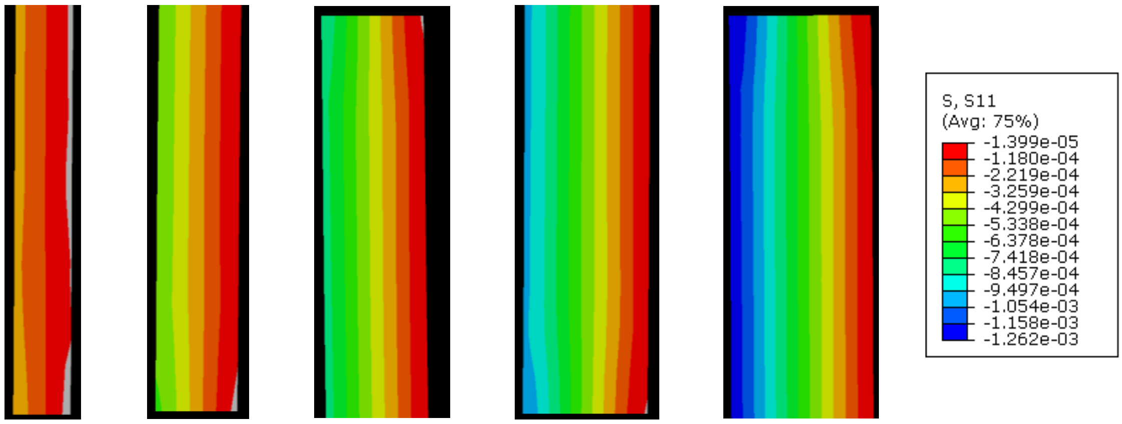

Figura 4.27 – Variación de la tensión radial σ_{rr} para diferentes espesores en el momento de la bifurcación.

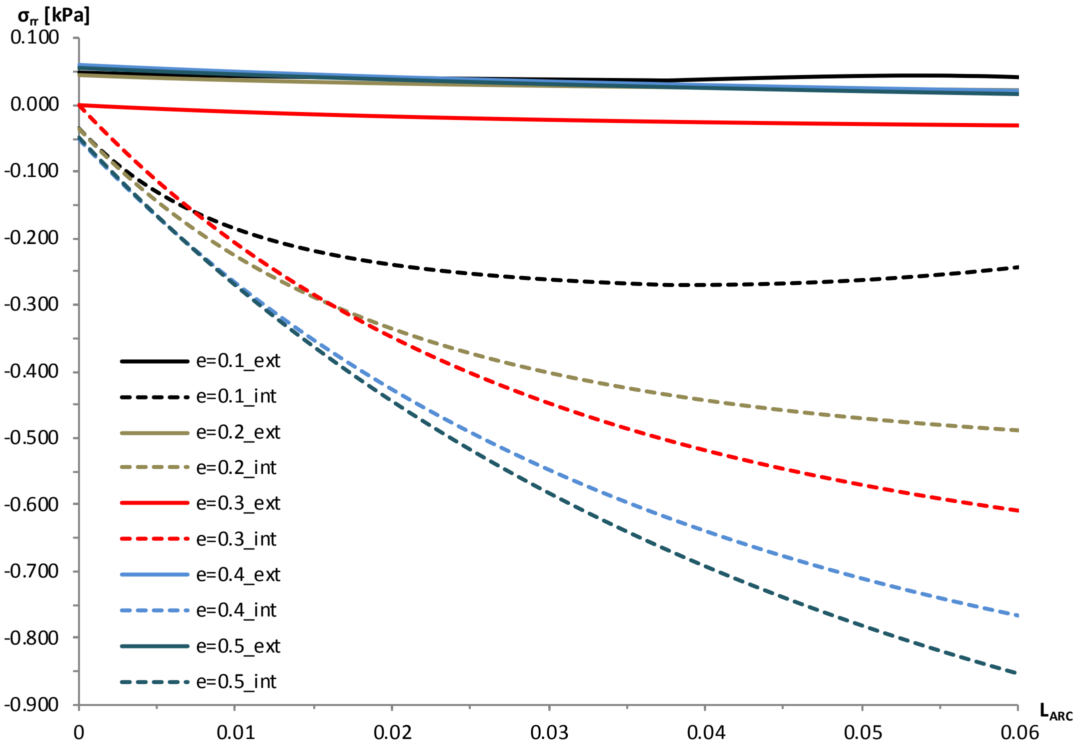

Figura 4.28 - Tensión radial σ_{rr}vs. Longitud de arco para diferentes valores del espesor en la pared interna (línea discontinua) y en la pared externa (línea continua).

4.4.5. Influencia de la orientación de las fibras φ

Para analizar la influencia de la orientación de las fibras, se eligió la geometría de la Figura 4.7.e, equivalente a un cilindro de pared gruesa ($e = 0.4\,mm$). Se implementó la misma metodología usada en secciones anteriores, esta vez variando la orientación de las fibras respecto del eje axial en $15°$, $30°$, $60°$ y $75°$, con dispersión nula de las mismas ($\kappa = 0.0$, material completamente anisótropo).

En la Figura 4.29 se observa la variación del alargamiento circunferencial bajo distintos alargamientos axiales. Se observa como esta variación influye en la aparición de máximos y mínimos locales; para φ igual a $15°$ la curva presenta 4 puntos críticos (2 máximos y 2 mínimos); para $30°$ ocurren 5 puntos críticos (3 máximos y 2 mínimos) trasladados ligeramente hacia atrás; para $60°$ se presentan 6 puntos críticos (3 máximos y 3 mínimos), igualmente trasladados ligeramente hacía atrás respecto de la curva para $30°$; y para $75°$, aunque el número de puntos críticos disminuye a 5 (2 máximos y 3 mínimos) estos también están trasladados ligeramente hacia atrás. El material neo-hookeano muestra también 5 puntos críticos, trasladados ligeramente hacia adelante respecto del material con ángulo $15°$.

Es importante mencionar que para alargamientos λ_z mayores que 1.50 no se presenta bifurcación para la orientación de 75° (Figura 4.30). Se observa como para alargamientos axiales pequeños, por ejemplo $\lambda_z = 1.1$, un aumento del ángulo de las fibras es desfavorable, pues permite que la inestabilidad ocurra a menores alargamientos circunferenciales. Sin embargo para λ_z intermedios ($1.1 \leq \lambda_z \leq 1.5$) debido al número de máximos y mínimos locales no se puede generalizar un enunciado semejante. Pero para λ_z mayores que 1.5, lo que si ocurre es que para materiales con fibras casi circunferenciales (75°), la inestabilidad ocurre para valores más altos que para otro tipo de orientación de fibras, es decir que favorece la estabilidad del modelo. Para este análisis se eligen tres puntos críticos de λ_z: 1.10, 1.30 y 1.75. Para λ_z 1.10, como ya se mencionó, con un ángulo de $75°$, λ_θ es menor ($\lambda_\theta = 1.81$) que para las otras orientaciones ($\lambda_\theta = 2.11$). Con λ_z 1.30, sucede lo mismo pero para la orientación de $30°$, con un alargamiento circunferencial igual 1.74 menor que para las otros ángulos (2.21). Finalmente para λ_z igual a 1.75, se tiene que para orientaciones de 15 y $30°$, el alargamiento circunferencial es 1.84, mucho menor que para $30°$ (2.56).

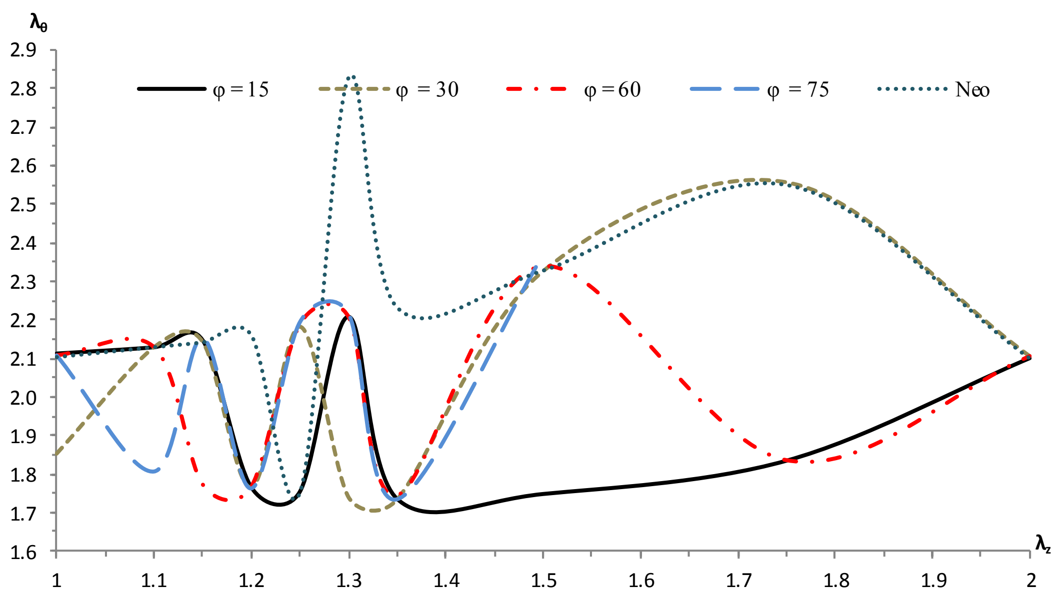

Figura 4.29 - λ_θ vs. λ_z con variaciones de $\varphi = [15, 30, 60, 75]°$. $\kappa = 0.0$; $e = 0.4\,mm$.

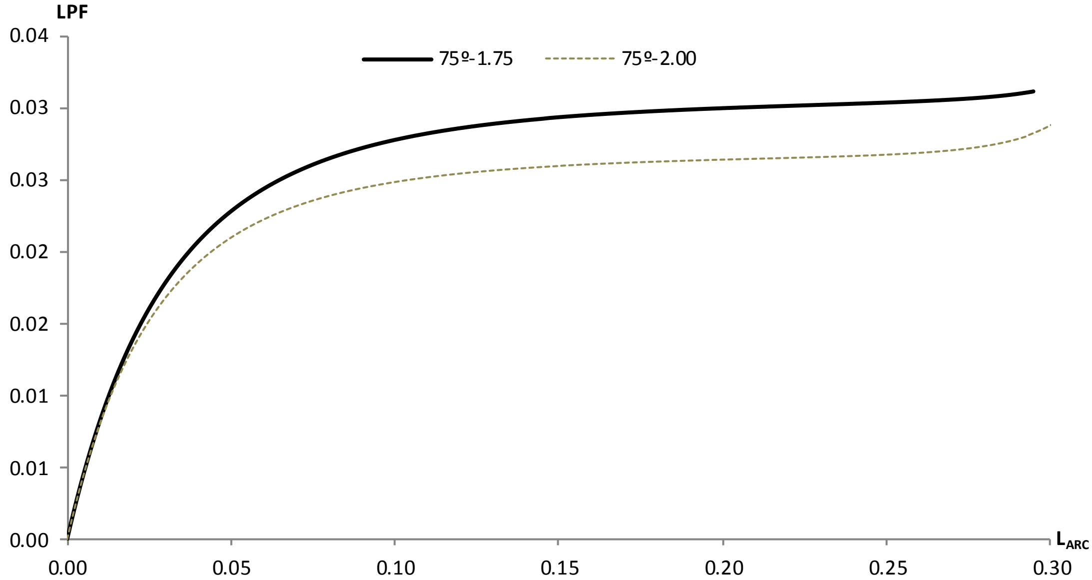

*Figura 4.30 – Curvas del Factor Proporcional de Carga (LPF) para orientación de las fibras*75 *para* $\lambda_\theta = 1.75, 2.00$*. Modelos estables.*

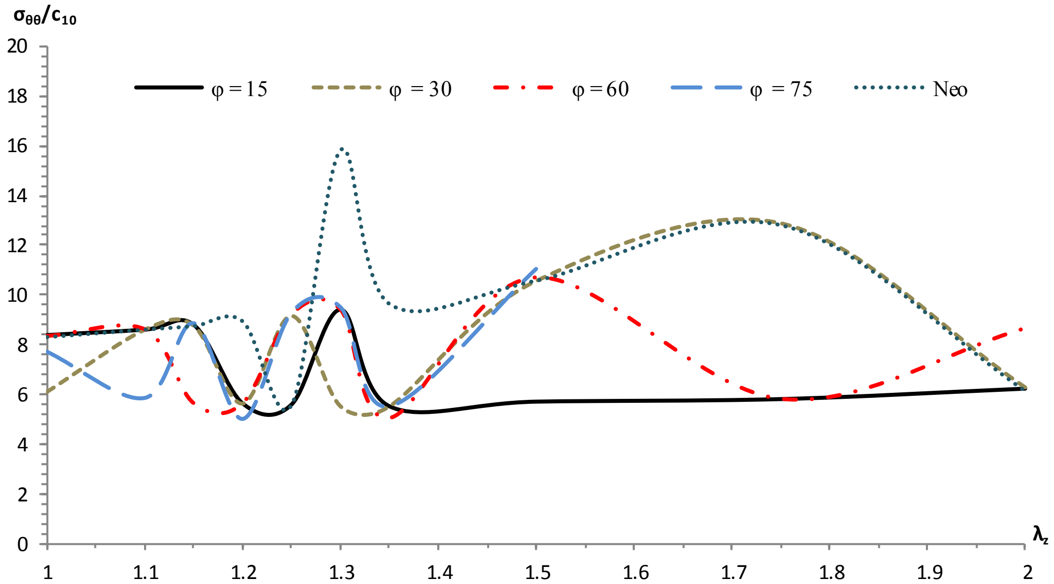

Figura 4.31 - $\sigma_{\theta\theta}/C_{10}$*vs.* λ_z *con variaciones de* $\varphi = [15, 30, 60, 75]°$*.* $\kappa = 0.0$*;* $e = 0.4\,mm$*.*

Como se ha visto hasta este punto, en la Figura 4.31 se observa como el comportamiento de la tensión circunferencial es cualitativamente semejante al del alargamiento circunferencial. Solo se notan pequeñas diferencias, como por ejemplo que la tensión circunferencial para λ_z igual a 2.0 con orientación $30°$ ($\sigma_{\theta\theta} = 66.18\,kPa$), es mayor que para las otras orientaciones ($\sigma_{\theta\theta} = 47.97\,kPa$).

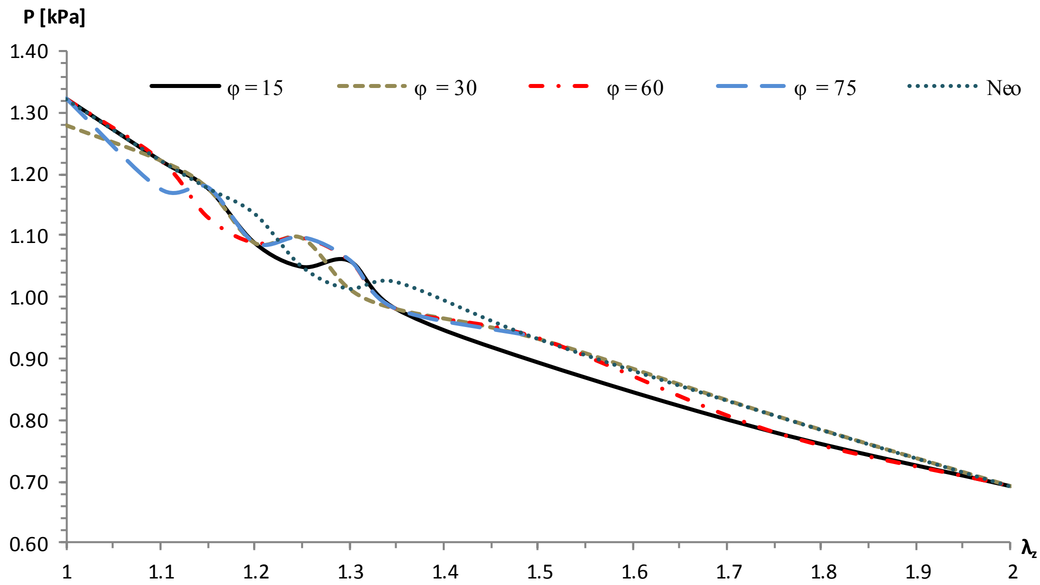

Figura 4.32 - Presión aplicada P vs. λ_z *con variaciones de* $\varphi = [15, 30, 60, 75]°$. $\kappa = 0.0$ *;* $e = 0.4\ mm$.

En cuanto a la presión aplicada se puede observar que la variación de la orientación de las fibras no tiene una influencia relevante, a pesar que se observa el mismo comportamiento que para la tensión y alargamiento circunferenciales, en cuanto a máximos y mínimos locales. Dichas oscilaciones no superan en ningún caso un coeficiente de variación de 3% para cada alargamiento axial, con lo cual se podría incluso tomar un valor promedio para cada λ_z.

Para ratificar que el comportamiento de la tensión y alargamiento circunferenciales depende de la orientación de las fibras en el momento de la bifurcación se retoman los puntos críticos de λ_z elegidos en párrafos anteriores: 1.1, 1.3 y 1.75. Al observar la Tabla 4.5 y la Figura 4.33, se nota que para este caso no existe ninguna relación entre el comportamiento mecánico y la orientación de las fibras en el momento de la bifurcación, pues ningún rango de orientaciones es semejante ni está cercano a otro, para ningún λ_z. Sin embargo al detallar la Figura 4.33, la cual muestra la evolución de la orientación de las fibras para diferentes ángulos iniciales de refuerzo bajo $\lambda_z 1.10$, se observa como para los ángulos $60, 30$ y $15°$ la bifurcación (instante en el que la curva desciende al final) ocurre en la misma (o cercana) longitud de arco.

Para $75°$, la bifurcación ocurre antes, viéndose esto reflejado en el comportamiento mecánico (alargamiento y tensión circunferencial). Es por esto que para los mismos λ_z críticos se registraron las longitudes de arco en el momento de la bifurcación en la Tabla 4.6. En esta tabla se observa cómo, efectivamente, el comportamiento mecánico también está relacionado directamente con el momento en el que ocurre la inestabilidad. Así se observa como para λ_z 1.10, las longitudes de arco son casi iguales (0.2176) para los ángulos $15, 30$ y 60, mientras que es distinta para $75°$ (0.15859). Esto coincide exactamente con el comportamiento mecánico de $\sigma_{\theta\theta}$, λ_θ y P. Igual ocurre para los otros dos puntos críticos.

Tabla 4.5 – Orientación de las fibras en la bifurcación respecto al eje axial para valores críticos de λ_z. Variación de la orientación de las fibras.

	φ_{Ines} (°)					
	λ_z	1.10	λ_z	1.35	λ_z	1.75
	MIN	MAX	MIN	MAX	MIN	MAX
φ = 15°	23.9	28.1	17.4	19.5	13.4	15.3
φ = 30°	43.6	49.0	34.0	37.3	27.2	30.5
φ = 60°	70.0	74.2	63.7	66.4	57.0	60.5
φ = 75°	79.9	81.0	77.1	78.5	-	-

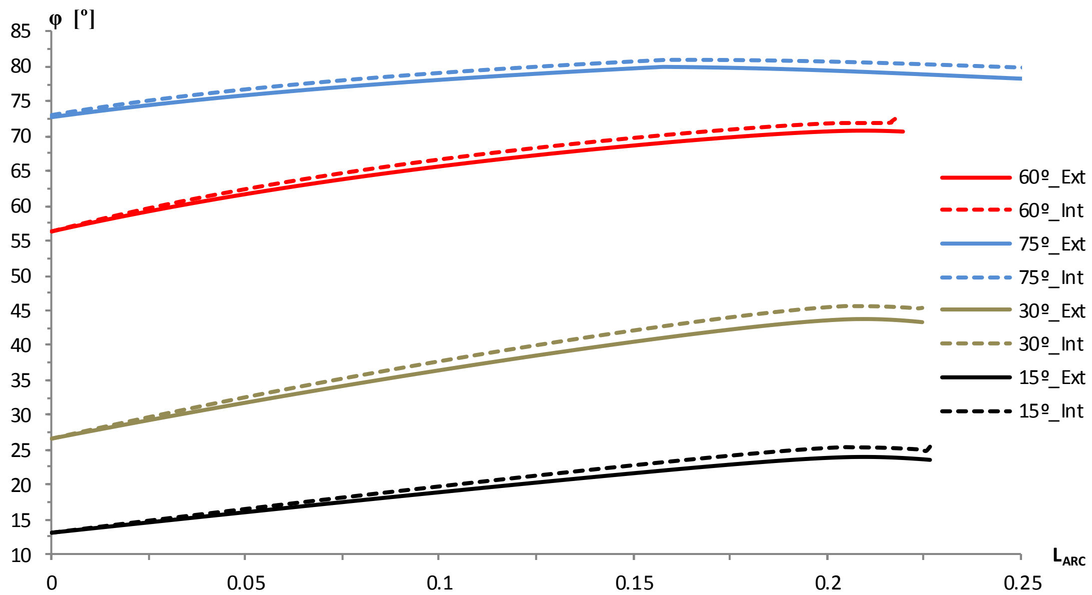

Figura 4.33 – Variación de la orientación de las fibras (φ) respecto del eje axial vs. Longitud de arco para diferentes orientaciones de la fibras en la cara interna de la pared (líneas discontinuas) y en la cara externa (líneas continuas) para $\lambda_z = 1.10$.

Tabla 4.6 – Longitud de arco en la bifurcación para valores críticos de λ_z. Variación de la orientación de las fibras.

	$L_{ARC\ Ines}$		
	λ_z 1.10	λ_z 1.35	λ_z 1.75
φ = 15°	0.218	0.148	0.147
φ = 30°	0.218	0.148	0.276
φ = 60°	0.218	0.149	0.146
φ = 75°	0.159	0.148	-

Para observar la influencia de la dispersión de las fibras en la orientación de las mismas se eligió el alargamiento axial 1.30 para variar su dispersión a un factor κ igual a 0.3. En las Tabla 4.7-Tabla 4.9 se observan los alargamientos y tensiones circunferenciales y las presiones aplicadas respectivamente. Se observa como el comportamiento de cambia ligeramente. Los alargamientos circunferenciales pasan ser casi iguales, esto se refleja en la información de la Tabla 4.10, en donde se observa que los valores de longitud de arco son iguales para todos los modelos con κ

0.3. Lo mismo sucede para las tensiones circunferenciales, para las que se observan valores muy cercanos entre sí. Una diferencia se nota y es la tensión circunferencial correspondiente a $60°$, la cual es ligeramente menor (0.22%). Esto se le puede atribuir a la pequeña variación del momento en el que ocurre la inestabilidad (longitud de arco), la cual difiere por una milésima. Esto indica la sensibilidad de la inestabilidad respecto del momento en el que ocurre. Se observa que la presión aplicada para producir inestabilidad, para fibras dispersas, no se ve afectada por la orientación de las fibras, pues es constante. En la Tabla 4.11 se observan que ocurren cambios significativos de variación de los ángulos en el momento de la inestabilidad solo para $30°$, para el cual el rango pasa de estar entre $(35.2 - 38.5°)$ para dispersión nula, a estar entre $(40.4 - 45.5°)$.

Tabla 4.7 – Influencia de la dispersión de fibras en alargamientos circunferenciales con variación de orientación de las fibras. $\lambda_z = 1.30$.

	λ_θ			
λ_z=1.3	15	30	60	75
κ=0.0	2.208	1.739	2.208	2.216
κ=0.3	2.208	2.208	2.205	2.209

Tabla 4.8 – Influencia de la dispersión de fibras en tensiones circunferenciales con variación de orientación de las fibras. $\lambda_z = 1.30$.

	$\sigma_{\theta\theta}/C_{10}$			
λ_z=1.3	15	30	60	75
κ=0.0	9.408	5.519	9.418	9.506
κ=0.3	9.412	9.407	9.386	9.416

Tabla 4.9 – Influencia de la dispersión de fibras en presión aplicada con variación de orientación de las fibras. $\lambda_z = 1.30$.

	P [kPa]			
	15	30	60	75
κ=0.0	1.059	1.013	1.060	1.061
κ=0.3	1.059	1.059	1.059	1.059

Tabla 4.10 – Longitud de arco en el momento de la bifurcación para diferentes orientaciones y dispersiones de las fibras. $\lambda_z = 1.30$.

	$L_{ARC\ Ines}$	
	κ 0.0	κ 0.3
φ = 15°	0.230	0.230
φ = 30°	0.149	0.230
φ = 60°	0.230	0.229
φ = 75°	0.231	0.230

Tabla 4.11 – Orientación de las fibras en el momento de la bifurcación para diferentes orientaciones y dispersiones de las fibras. $\lambda_z = 1.30$.

	φ_{mes} (°)			
	κ	0.0	κ	0.3
	MIN	MAX	MIN	MAX
φ = 15°	21.5	25.3	21.5	25.3
φ = 30°	35.2	38.5	40.4	45.5
φ = 60°	68.6	71.9	68.0	72.9
φ = 75°	79.7	81.4	79.7	81.4

4.4.6. Influencia de la longitud del cilindro

Para realizar este análisis se tomó el modelo de la Figura 4.7.b, el cual tiene un espesor de $0.2\ mm$, un factor de dispersión de las fibras, $\kappa = 0.0$ y una orientación de las fibras respecto del eje axial de $30°$. Con base en este se realizaron modelos con relaciones longitud-radio $(\mathrm{L/R})$ de $5, 20$ y 50, esto es longitudes de $20, 80$ y $200\ mm$ $(\mathrm{R} = 4\ mm)$.

En la Figura 4.34 se está descrito el comportamiento del alargamiento circunferencial, haciendo uso de la metodología implementada hasta el momento. Se observa que para una relación $\mathrm{L/R}$ de 5, se requiere un λ_θ mayor para alcanzar la inestabilidad (para $\lambda_z < 1.75$) que para las otras dos relaciones $\mathrm{L/R}$. Así mismo se nota que para $\mathrm{L/R}\ 20$ se necesitan λ_θ más altos que para $\mathrm{L/R}\ 50$, siempre con $\lambda_z < 1.75$. Para $\lambda_z \geq 1.75$ se tiene que la longitud del cilindro no tiene influencia, ya que los alargamientos circunferenciales tienen la misma tendencia ascendente. Para $\lambda_z > 1.75$ la relación $\mathrm{L/R}\ 5$ no presenta inestabilidad. Llama la atención el hecho que para $\mathrm{L/R}\ 5$ se presente un máximo local para $\lambda_z\ 1.35$ ($\lambda_\theta = 2.17$). Este comportamiento se explica más adelante.

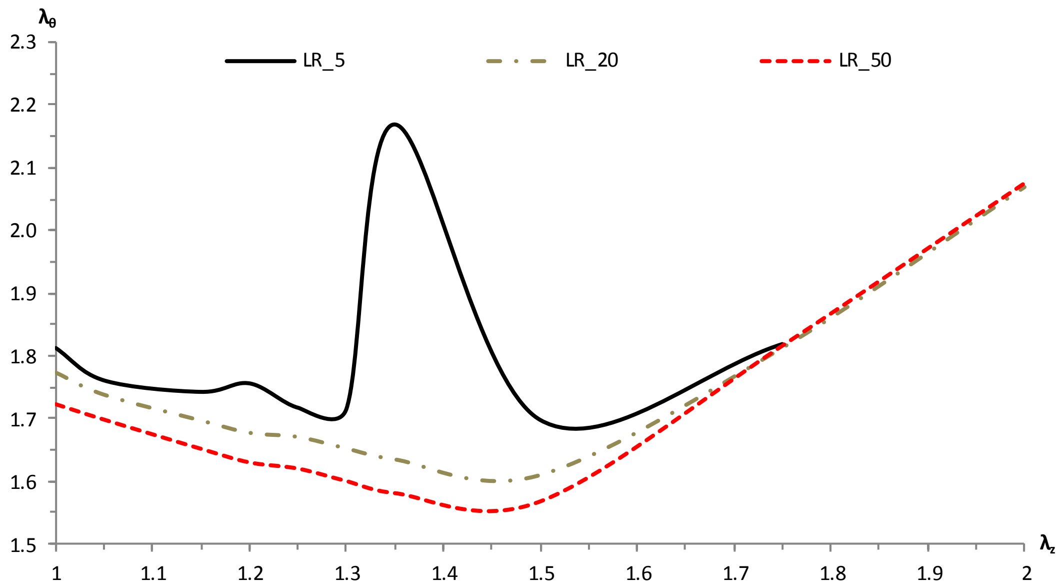

Figura 4.34 - λ_θ vs. λ_z con variaciones con variaciones de $L/R = [5, 20, 50]$. $\kappa = 0.0$; $e = 0.2\ mm$; $\varphi = 30°$.

El comportamiento de la tensión circunferencial es cualitativamente semejante al del alargamiento circunferencial (Figura 4.35). No obstante, la tendencia ascendente de λ_θ tras sobrepasar λ_z 1.75, no se observa en la tensión circunferencial, en la cual la tendencia es descendente, casi constante, para $\mathrm{L/R}$ 20 y 50. Para $\mathrm{L/R}$ 5, el comportamiento se mantiene, solo que el ascenso a partir de $\lambda_z = 1.5$ es menos pronunciado que para λ_θ. Para λ_z 1.35, la tensión circunferencial alcanza $69.8\ kPa$, casi el doble que para las otras longitudes ($36.16\ \pm 2.02\ kPa$).

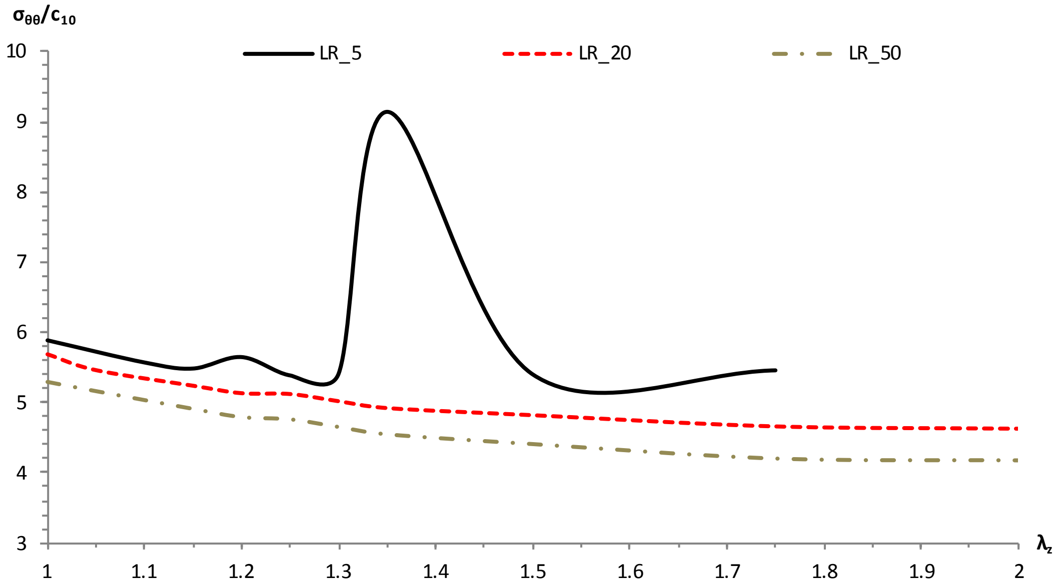

Figura 4.35 - $\sigma_{\theta\theta}/C_{10}$ vs. λ_z con variaciones con variaciones de $L/R = [5, 20, 50]$. $\kappa = 0.0$; $e = 0.2\ mm$; $\varphi = 30°$.

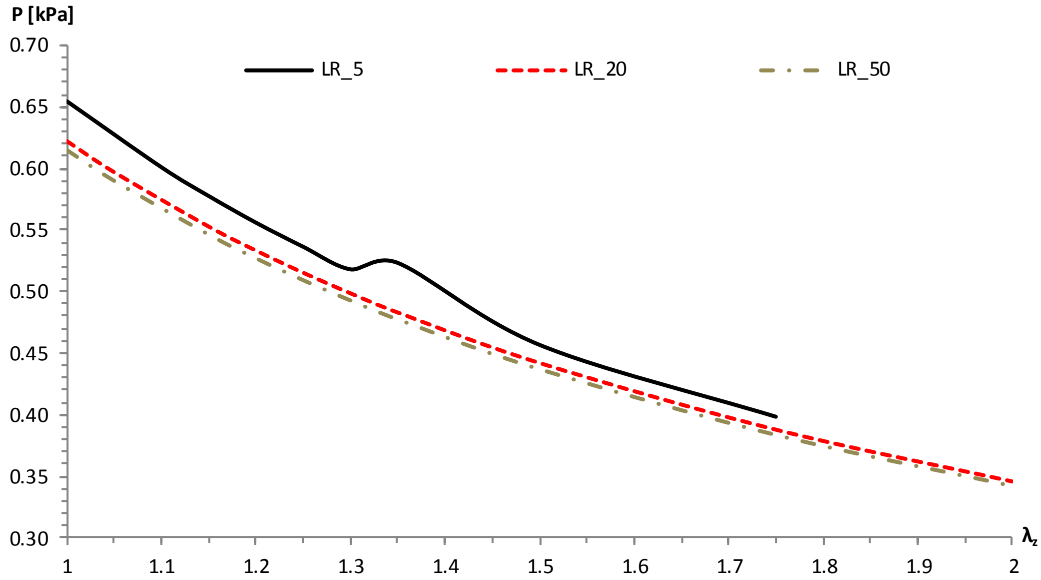

Figura 4.36 - Presión aplicada P vs. λ_z con variaciones con variaciones de $L/R = [5, 20, 50]$. $\kappa = 0.0$; $e = 0.2\ mm$; $\varphi = 30°$.

Respecto a la presión aplicada que produce la bifurcación, se puede observar como conforme la longitud del tubo aumenta esta disminuye con tendencia a converger en una misma curva para λ_z mayores que 1.75 (Figura 4.36). De igual forma se anota que la diferencia de presión para $\mathrm{L/R}\ 5$ es mayor comparada con la de las otras longitudes.

Para observar la causa de las diferencias críticas entre el comportamiento de las diferentes longitudes, se tomaron dos λ_z: 1.35 y 1.75. En las Tabla 4.12 y Tabla 4.13 se observa que para λ_z 1.35 tanto el rango de ángulo de las fibras como el momento en el que ocurre la inestabilidad son diferentes para $\mathrm{L/R}\ 5$, lo cual cambia el comportamiento en λ_θ y $\sigma_{\theta\theta}$ respectivamente. Se confirma esto analizando lo que ocurre para λ_z 1.75. Se observa como el rango de la orientación de las fibras es muy homogéneo para todas las longitudes, viéndose esto reflejado en un alargamiento circunferencial casi igual; sin embargo, el momento en el que ocurre la inestabilidad ($\mathrm{L_{ARC}}$) es muy diferente para $\mathrm{L/R}\ 5$, comparado con la diferencia entre las longitudes $\mathrm{L/R}\ 20$ y 50, lo cual se traduce en un cambio en la tensión circunferencial (Figura 4.35).

Tabla 4.12 – Orientación de las fibras en el momento de la bifurcación para diferentes longitudes. $\varphi = 30°$.

	φ_{ines} (°)			
	λ_z 1.35		λ_z 1.75	
	MIN	MAX	MIN	MAX
L/R 5	39.9	43.8	24.4	26.8
L/R 20	31.3	33.4	23.9	26.6
L/R 50	30.9	32.7	23.5	25.8

Tabla 4.13 – Longitud de arco en el momento de la bifurcación para diferentes longitudes. $\varphi = 30°$.

	$\mathrm{L_{ARC\ Ines}}$	
	λ_z 1.35	λ_z 1.75
L/R 5	0.11659	0.07269
L/R 20	0.06558	0.06258
L/R 50	0.06158	0.05858

Por medio de los modelos con $\mathrm{L/R}\ 20$ y 50 se puede observar mucho mejor la formación del aneurisma (inestabilidad por abultamiento) (Figura 4.37). Esta mejor percepción se fundamente básicamente en la visualización global del fenómeno, pues se observa como la forma y tamaño es semejante para los tres modelos. Otra característica que se puede observar por medio de los modelos es la propagación axial de la inestabilidad tras ocurrir la bifurcación, fenómeno analizado en [**16**] [**24**]. Se eligieron cinco nodos a lo largo de la pared externa del cilindro con las características de la Tabla 4.14. Se puede observar en la Figura 4.38, como antes de la bifurcación ($\mathrm{L_{ARC}} < 0.062$) los desplazamientos de todos los nodos en el eje X son idénticos. Sin embargo, tras la bifurcación se observa como para el nodo 15 (ubicado en el lugar geométrico donde se manifiesta la inestabilidad) los desplazamientos siguen incrementándose hasta converger. Una tendencia similar se observa para el nodo 20613, el cual sigue desplazándose tras la bifurcación, menos que el nodo 15, y para pasos cercanos al final del análisis, también converge al mismo valor del nodo mencionado. Los nodos 20267y 20139 presentan un desplazamiento diferente, pues tras la bifurcación apenas continúan desplazándose (el bulbo aún no se propaga lo suficiente) hasta una $\mathrm{L_{ARC}}$ de 0.18, momento en el cual ya se ha propagado el abultamiento. A partir de ese instante se observa como los nodos se empiezan a desplazar hasta tender a converger al desplazamiento de los primeros nodos. Esto no sucede para el nodo 19313, el cual se encuentra lo suficientemente alejado del centro para observar tras la bifurcación una disminución de desplazamiento, e iniciar de nuevo su desplazamiento casi al final del análisis. Si el análisis hubiese continuado, se puede esperar que el desplazamiento converja al valor de referencia del nodo 15.

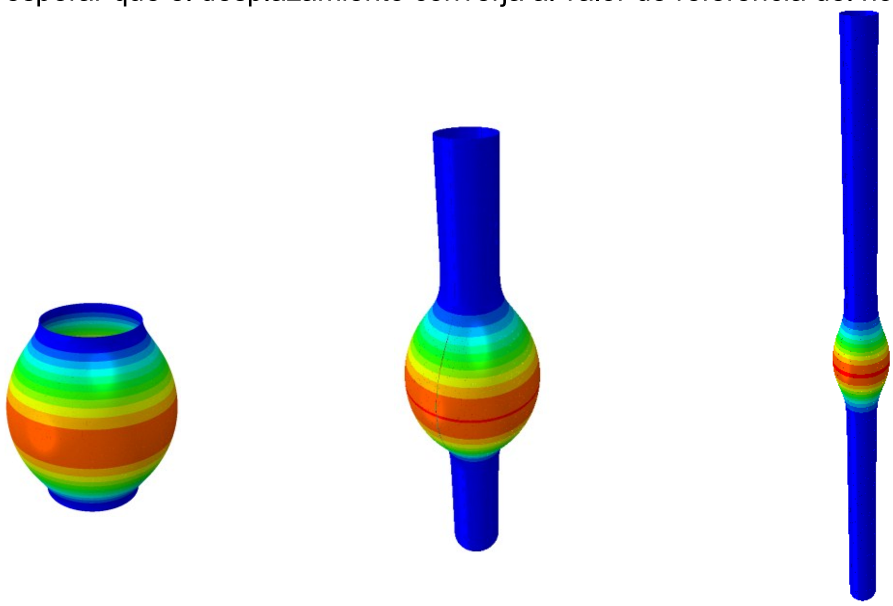

Figura 4.37 – Formación de aneurisma por bifurcación tipo abultamiento para L/R $5, 20$ y 50.

Tabla 4.14 - Distancia (mm) de nodos de la pared externa desde el plano de simetría $r - \theta$.

NODO				
15	20613	20267	20139	19313
0.00	3.44	7.74	9.34	20.23

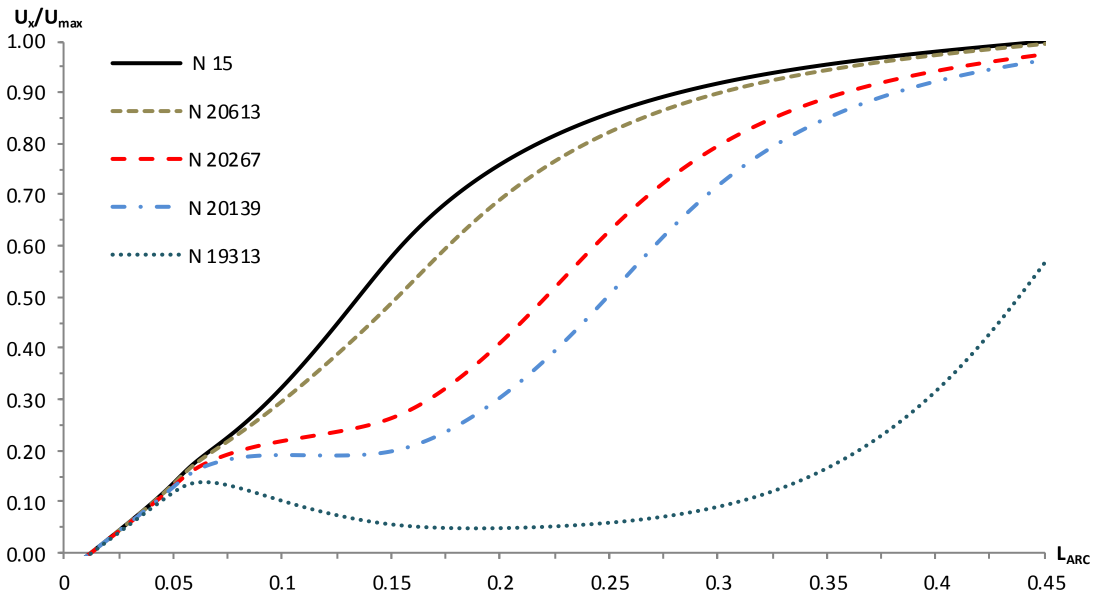

Figura 4.38 – Desplazamiento en el eje X para diferentes nodos posicionados en la pared externa a diferentes distancias a partir del punto de propagación del abultamiento.

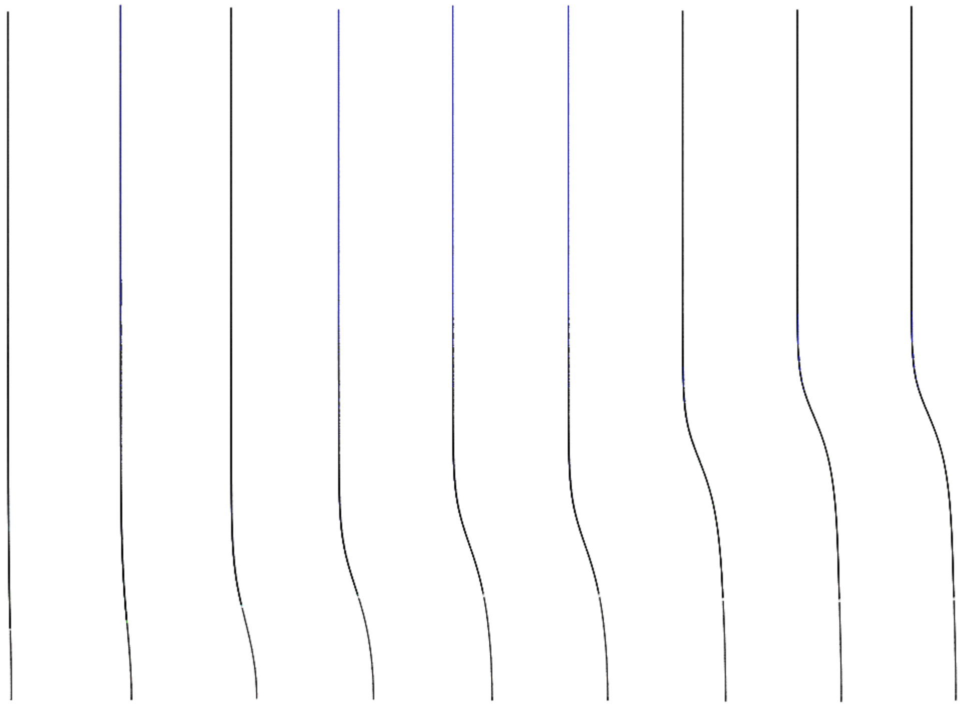

Figura 4.39 – Propagación axial post bifurcación para L/R 50 *y* $\lambda_z = 1.75$.

4.4.7. Influencia de la geometría de la pared

Este análisis se realiza con las geometrías descritas en la Figura 4.6. Estas tienen un espesor de $0.1\,mm$ y distintas imperfecciones introducidas. A la geometría de la Figura 4.6.a, el elegido para realizar todos los otros análisis, se le da el nombre de *normal*. Al de la Figura 4.6.b, *reducido*, al c., *enfatizado* y al d., *aumentado*. El ángulo de la orientación ($\varphi = 60°$) y la dispersión ($\kappa = 0.0$) de las fibras se mantiene constante.

Al detallar el comportamiento del alargamiento circunferencial (Figura 4.40), se puede observar como para alargamientos λ_z menores a 1.25, el comportamiento de todos los modelos se considera homogéneo. Sin embargo para valores mayores de λ_z, el comportamiento es diferente para cada modelo. Para los modelos *reducido*, *enfatizado* y *aumentado*, λ_θ tiende a aumentar conforme aumenta λ_z. Ocurre lo contrario para el modelo *normal*, en el cual se presenta un mínimo local λ_θ igual a 1.68 para $\lambda_z = 1.30$, seguidamente se presenta un máximo local ($\lambda_\theta = 1.70$) para λ_z 1.35, para finalmente presentar otro mínimo local $\lambda_\theta = 1.641$ en λ_z 1.35. Posteriormente el comportamiento de este modelo, *normal*, es ascendente también. Se destaca que este comportamiento coincide cualitativamente y de forma parcial con el comportamiento de las Figura 3.16 y Figura 3.17. Es por esto que se tomó la decisión de trabajar con este tipo de modelo para realizar todos los otros análisis.

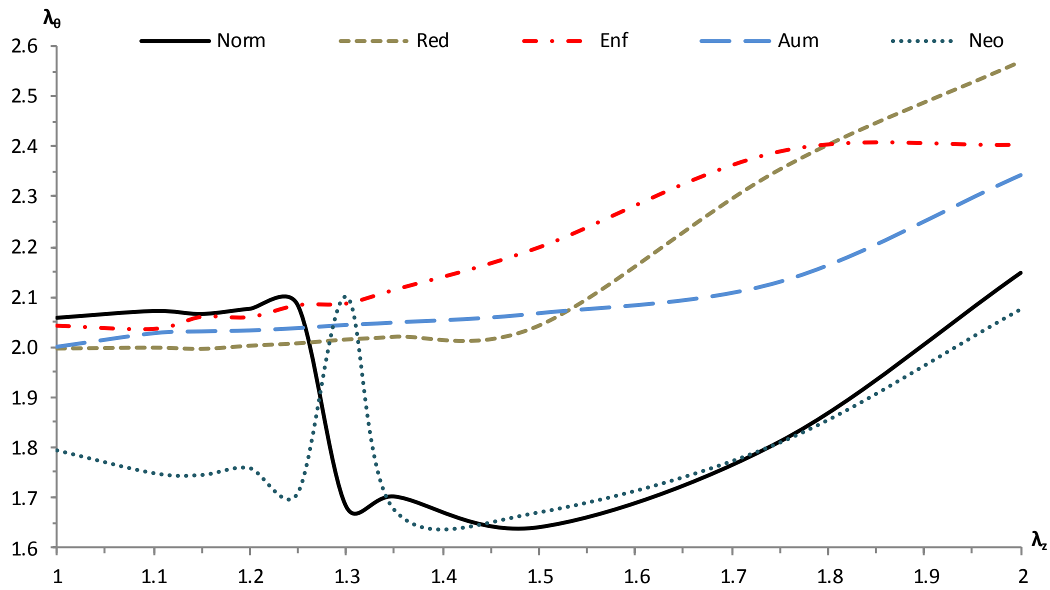

Figura 4.40 - λ_θ vs. λ_z para distintas geometrías. $\kappa = 0.0$; $e = 0.1\,mm$; $\varphi = 60°$.

La tensión circunferencial tiene un comportamiento cualitativo semejante al del alargamiento circunferencial, como ya se ha podido observar hasta el momento (Figura 4.41). Se puede decir de la tensión que presenta unas tendencias ascendentes menos pronunciadas que las correspondientes a los alargamientos. Se puede observar como en el modelo *enfatizado*, se generan las mayores tensiones circunferenciales cuando se alcanza la inestabilidad para λ_z mayor a 1.25. En general se puede observar que, para λ_z menores que 1.25, se alcanza la inestabilidad más fácilmente para modelos diferentes al normal; contrario sucede para λ_z mayores a 1.25, donde es más fácil alcanzar la inestabilidad para el modelo *normal*.

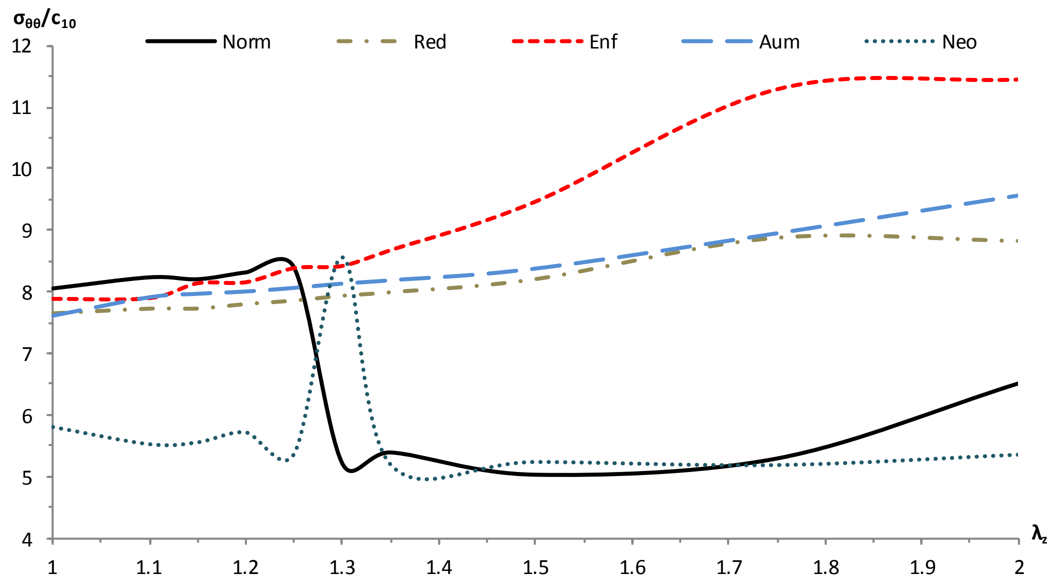

Figura 4.41 - $\sigma_{\theta\theta}/C_{10}$vs. λ_z para distintas geometrías. $\kappa = 0.0$; $e = 0.1\,mm$; $\varphi = 60°$.

Respecto a la presión aplicada, se puede observar que el modelo que requirió menores valores de esta, fue el *reducido*, mientras que los que más presión interna necesitaron fueron los modelos *enfatizado* y *aumentado*. La presión del modelo normal se encuentra acotada entre esos dos rangos de presión en todo momento. El aumento de presión en los modelos *enfatizado* y *aumentado* se pueden atribuir a la distribución de pared que cada uno tiene, pues en el caso del *aumentado*, la pared tiene un espesor de $0.1\ mm$ y presenta un aumento de $10\ \%$, lo cual, como se observó en la sección 4.4.4, influye directamente en la presión, incrementándola al aumentar el espesor de la pared. Similar sucede con el modelo *reducido*, para el cual la pared se reduce, disminuyendo la presión interna de bifurcación.

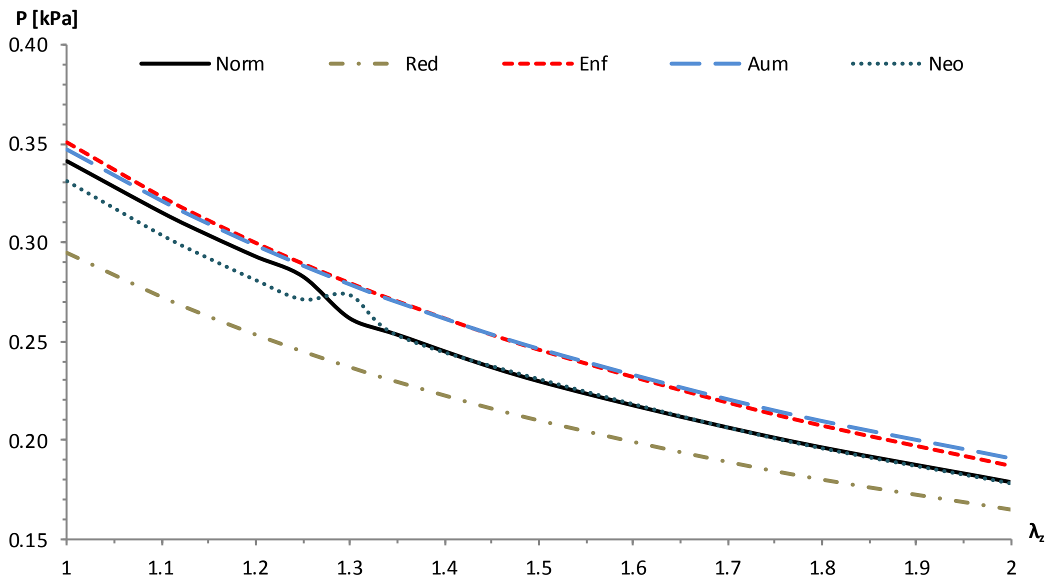

Figura 4.42 - Presión aplicada P vs. λ_z para distintas geometrías. $\kappa = 0.0$; $e = 0.1\ mm$; $\varphi = 60°$.

Llama la atención, específicamente para el modelo *aumentado*, que el abultamiento se propaga siempre por la parte con menor espesor de pared, en este caso por la parte superior (Figura 4.43). Esto permite decir que, debido a que en personas con síndrome de Marfan la pared arterial tiende a engrosarse y el diámetro de las arterias aumenta, puede suceder que en algún punto de la misma el crecimiento no se homogéneo, lo cual crearía una diferencia de espesor de pared, y esto a su vez incrementa el riesgo de que se presente un aneurisma arterial.

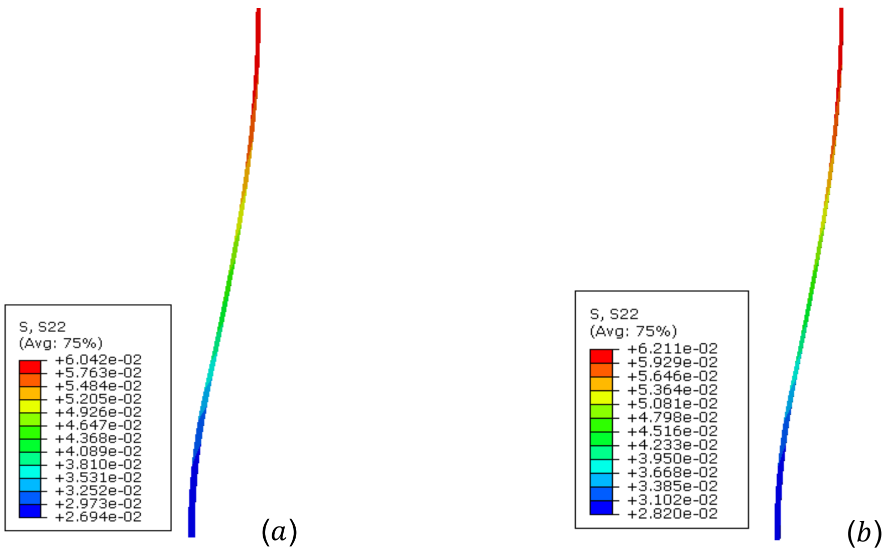

Figura 4.43 – Abultamiento en modelo aumentado. Propagación del abultamiento siempre por la parte superior, donde la pared es más delgada. (a) $\lambda_z = 1.1$ y (b) $\lambda_z = 1.35$.

4.4.8. Influencia de varias capas en el espesor

Como análisis final se realizan modelos con una y dos capas basados en la geometría de la Figura 4.7.b. para una sola capa ($e = 0.26\ mm$) y en [**8**] para el modelo bicapa. Para los modelos de una sola capa, el espesor se define como $e = 0.26\ mm$, con el objetivo de observar el comportamiento de cada capa independientemente. Por lo tanto se realiza un modelo con los parámetros de la capa adventicia y otro, independiente, con los parámetros de la capa media (Tabla 4.15). Para el modelo bicapa el espesor de la capa media es $e_M = 0.26\ mm$ y el de la capa adventicia es $e_A = 0.14\ mm$. Los parámetros de este modelo se encuentran en la Tabla 4.16. En la Figura 4.44 se puede observar el modelo bicapa.

Tabla 4.15 – Parámetros para modelos de una sola capa. $e = 0.26\ mm$.

	C_{10} $[kPa]$	k_1 $[kPa]$	k_2	κ	φ [º]
Adv_1 capa	7.64	6.0E-04	0.12	0.0	28
Media_1 capa	7.64	6.0E-04	0.12	0.0	61

Tabla 4.16 – Parámetros para modelo bicapa.

	C_{10} $[kPa]$	k_1 $[kPa]$	k_2	κ	φ [º]
Media	7.64	6.0E-04	0.12	0.0	61
Adventicia	7.64E-01	6.0E-04	0.12	0.0	28

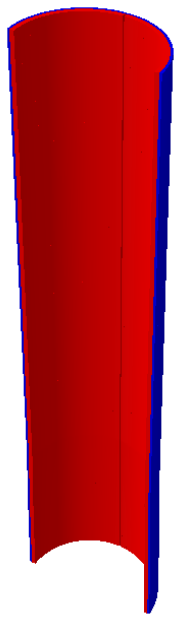

Figura 4.44 – Modelo bicapa.

El alargamiento circunferencial no presenta diferencias relevantes entre los tres modelos para λ_z menores que 1.5 (Figura 4.45). Pasado este limite, el modelo de una capa media y el modelo bicapa siguen presentando el mismo comportamiento. Sin embargo, entre los materiales mencionados y el modelo de una capa adventicia, el alargamiento circunferencial presenta un comportamiento diferente, tanto cualitativa como cuantitativamente.

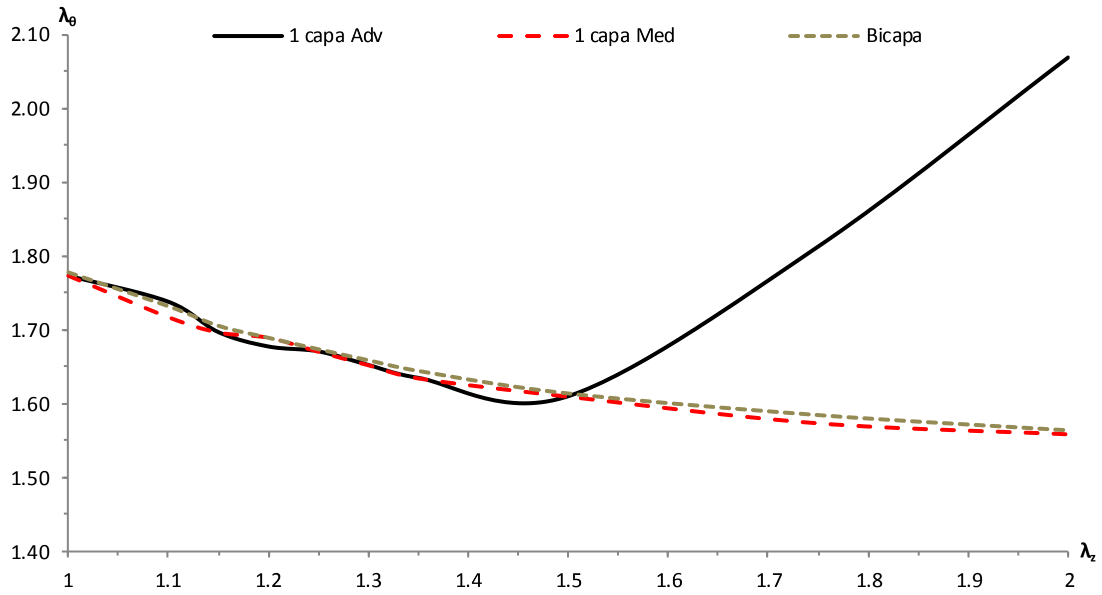

Figura 4.45 -λ_θ vs. λ_z para una y dos capas en la pared arterial.$L/R = 20$. $\kappa = 0.0$. Espesor total de la pared $e = 0.4\,mm$.

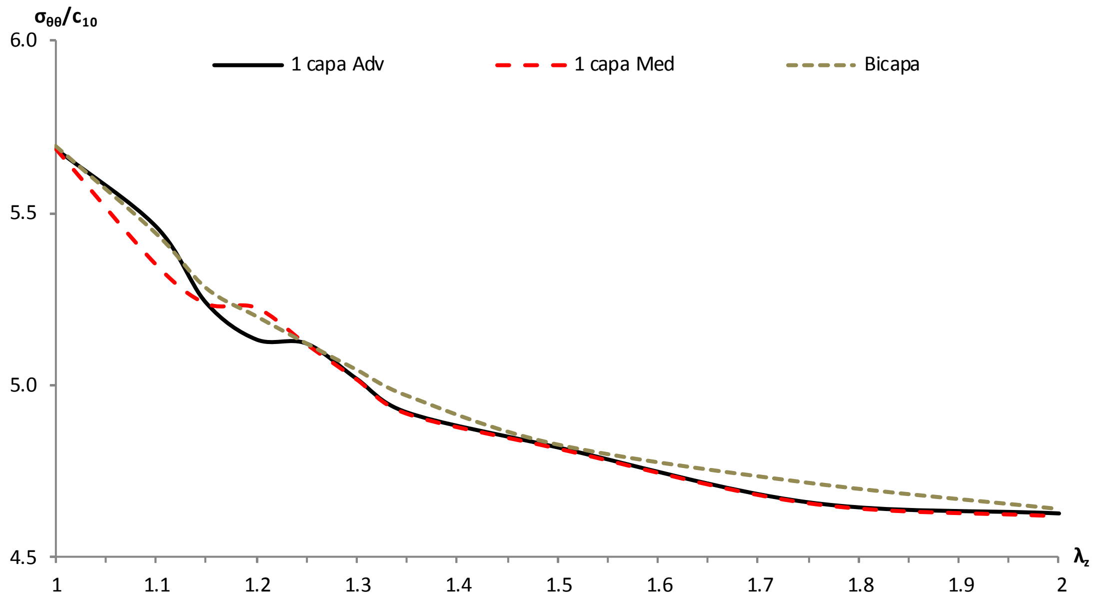

Figura 4.46 - $\sigma_{\theta\theta}/C_{10}$ vs. λ_z para una y dos capas de la pared arterial. $L/R = 20$. $\kappa = 0.0$. Espesor total de la pared $e = 0.4\,mm$.

La tensión circunferencial no muestra diferencias relevantes respecto de los modelos implementados (Figura 4.46).

En el comportamiento de la presión se puede observar como para dos capas se requiere una mayor presión para alcanzar la inestabilidad en todo el rango de alargamientos axiales estudiados (Figura 4.47). Esto se puede atribuir principalmente a que el $66\ \%$ del espesor presenta fibras orientadas a $61°$ respecto del eje axial. Esto hace que el material requiera más presión para alcanzar la inestabilidad, por tener un refuerzo orientado a favor de la dirección circunferencial, lo que de una manera u otra confina más el material.

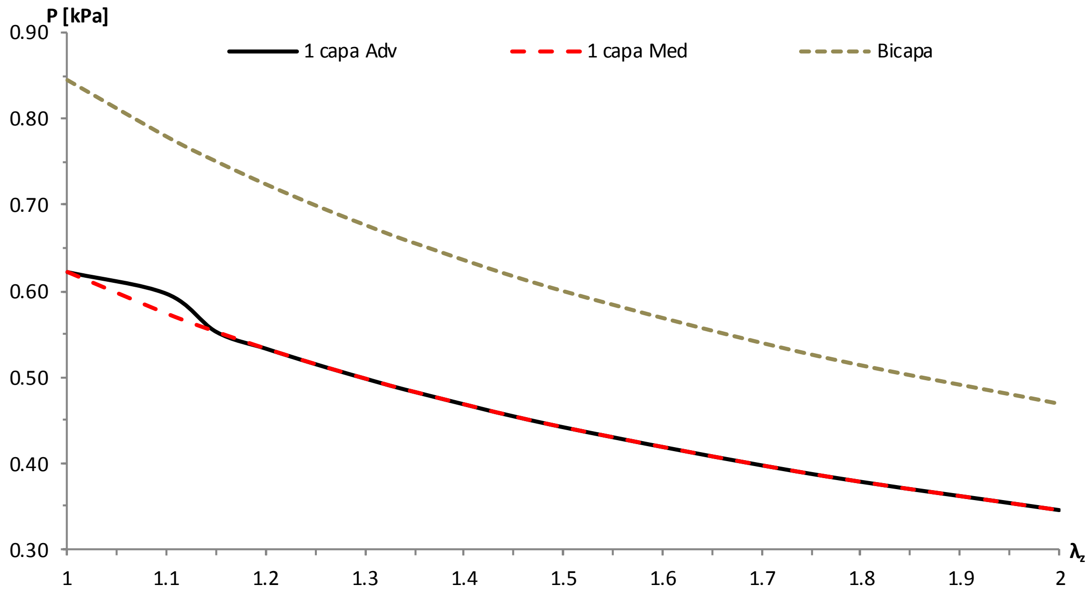

Figura 4.47 - Presión aplicada P vs. λ_z *para una y dos capas en la pared arterial.* $L/R = 20$. $\kappa = 0.0$. *Espesor total de la pared* $e = 0.4\,mm$.

Se seleccionaron dos puntos de λ_z para analizar las orientaciones y las longitudes de arco en el momento de la bifurcación (Tabla 4.17-Figura 3.18Tabla 4.18). Se puede observar para λ_z 1.25 como el rango de los ángulos para una capa media y para la media del modelo bicapa son similares. Respecto del momento en el que ocurre la inestabilidad (parámetro L_{ARC}) se puede apuntar que esto influye en la presión aplicada para la inestabilidad, por estar relación con el factor LPF: a mayor L_{ARC}, mayor LPF y por lo tanto mayor presión aplicada al modelo. Un comportamiento semejante se observa para λ_z 1.75 (Figura 4.48). Del comportamiento observado se pude plantear que un modelo de una sola capa con las características de la media, es capaz de capturar el mismo comportamiento en la bifurcación que un modelo bicapa.

Tabla 4.17 – Orientación de las fibras en el momento de la bifurcación para diferente número de capas. $e = 0.4\,mm$.

	ϕ_{ines} (°)			
	λ_z	1.25	λ_z	1.75
	MIN	MAX	MIN	MAX
1 CAPA ADV	33.9	35.9	23.9	26.6
1 CAPA MED	63.6	65.2	53.0	56.4
BICAPA MEDIA	64.5	66.2	54.0	57.6

Tabla 4.18 – Longitud de arco en el momento de la bifurcación para diferente número de capas. $e = 0.4\,mm$.

	$L_{ARC\ Ines}$	
	λ_z 1.25	λ_z 1.75
1 CAPA ADV	0.06758	0.06258
1 CAPA MED	0.06758	0.06258
BICAPA	0.09156	0.08556

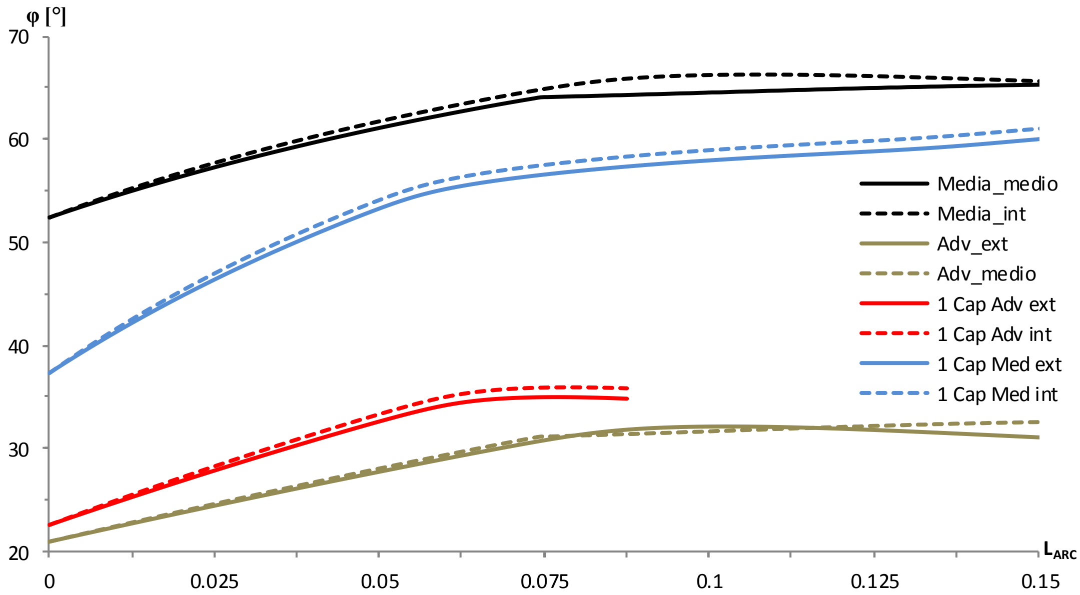

Figura 4.48 – Evolución de los ángulos en cada modelo y capa. $\lambda_z = 1.75$.

Para hacer un análisis de tensiones en la pared de la arteria, se eligen 13 nodos, (numerados de 1 a 13 para facilitar la interpretación de los resultados) ubicados desde la pared interna (nodo 1) hasta la pared externa (nodo 13) (Figura 4.49). En estos nodos se registran las tensiones radiales (Figura 4.50), circunferenciales (Figura 4.51) y axiales (Figura 4.52). Esta información se analiza solo durante la aplicación de la presión interna. Las tensiones radiales tienden a aumentar (en este caso a volverse menos negativas, con lo cual la magnitud disminuye), conforme se alejan de la pared interna. Esto sucede en ambas capas e indica que en la dirección radial se está ejerciendo compresión, lo cual concuerda con la reducción de la pared del cilindro. Se alcanza a percibir un salto entre las tensiones de la capas, pero este se ilustra mejor en las otras componentes tensoriales.

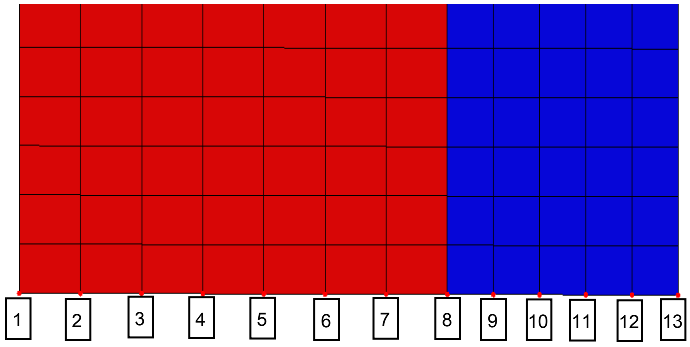

Figura 4.49 – Nodos en el espesor de la pared para analizar tensiones.

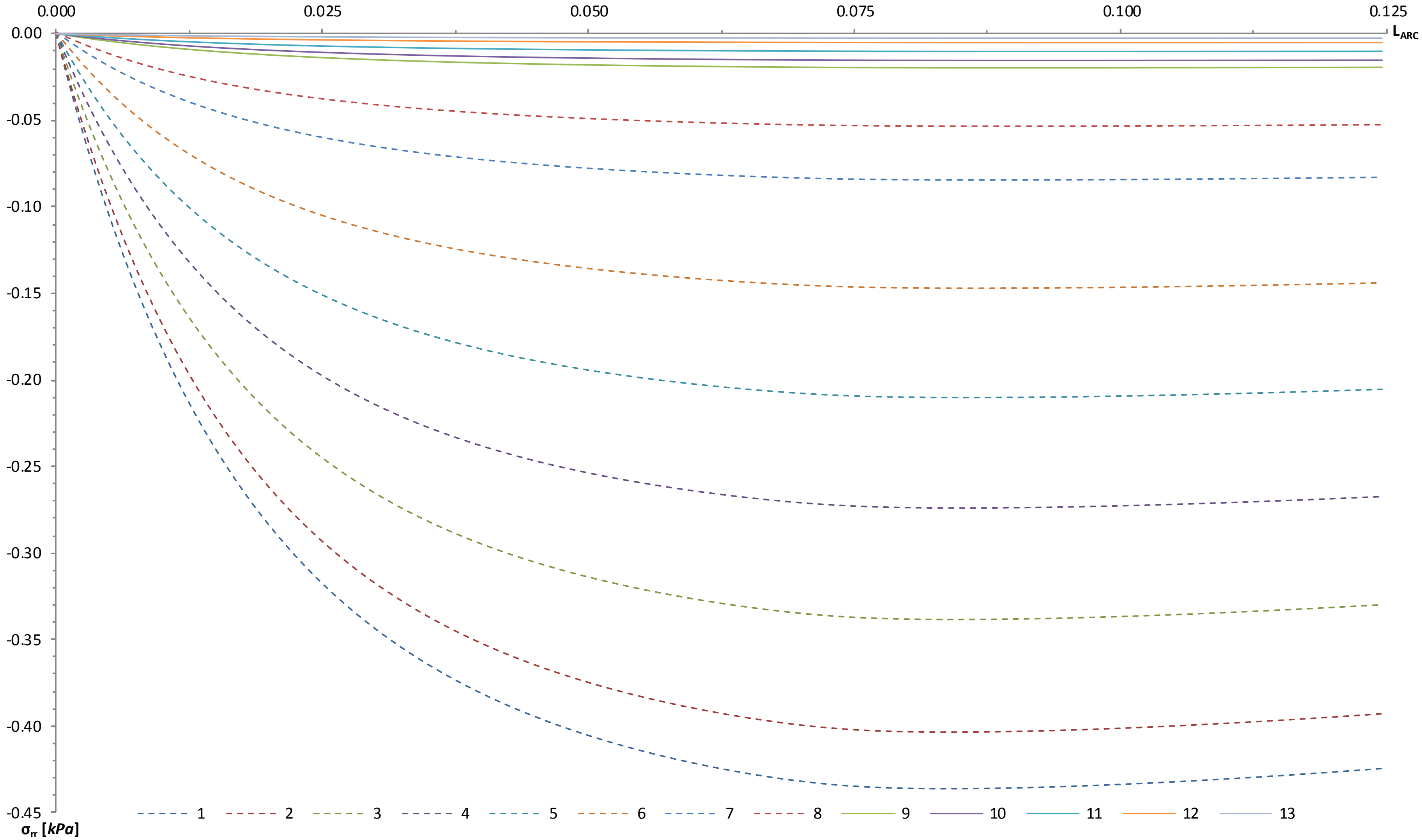

Figura 4.50 – Evolución de tensiones radiales σ_{rr} $[kPa]$ *en la pared de la arteria: capa media (Nodos* $1-8$*) y capa adventicia (Nodos* $9-13$*).* $\lambda_z = 1.75$.

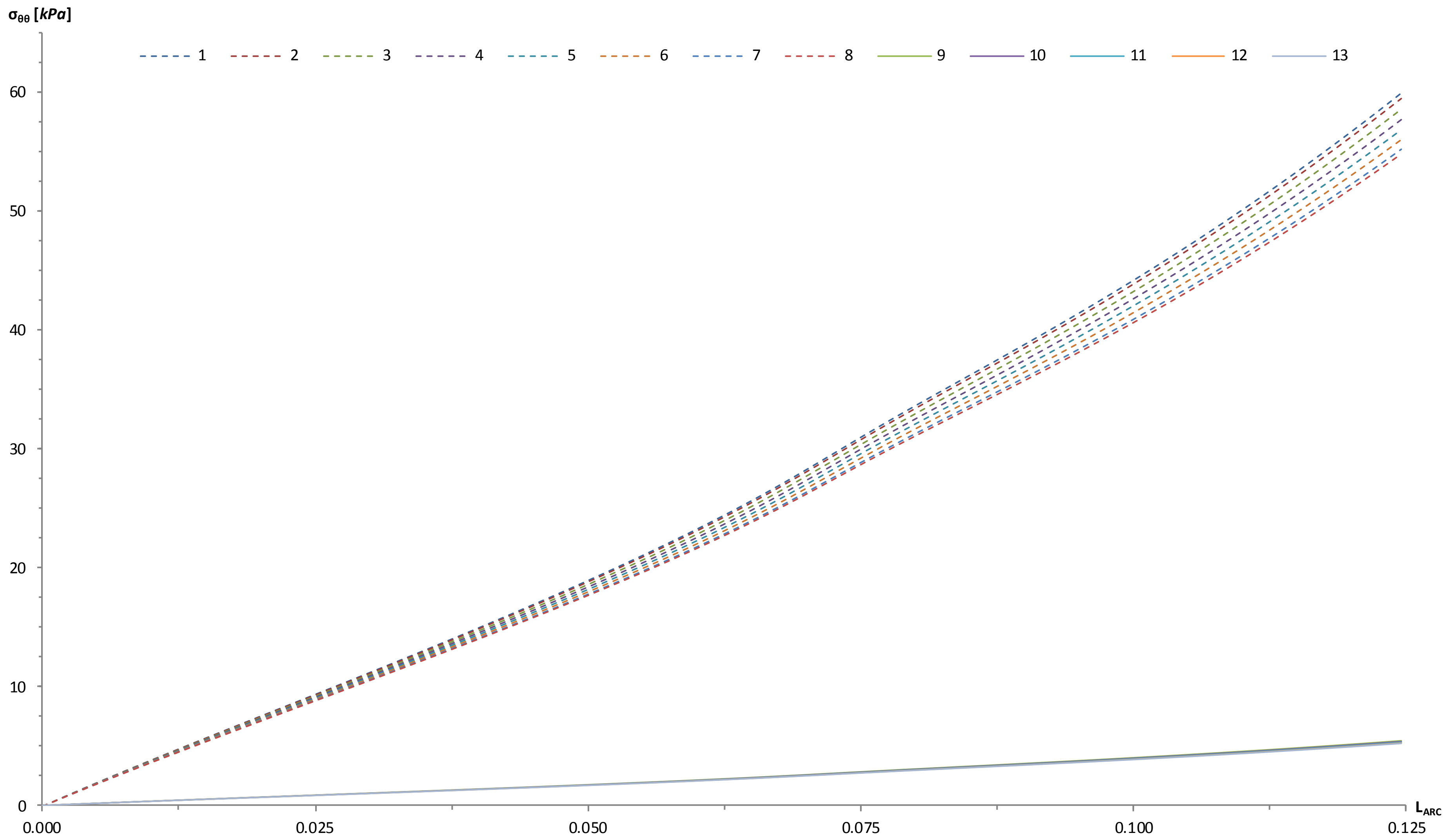

Figura 4.51 – Evolución de tensiones radiales $\sigma_{\theta\theta}$ $[kPa]$ *en la pared de la arteria: capa media (Nodos* $1-8$*) y capa adventicia (Nodos* $9-13$*).* $\lambda_z = 1.75$.

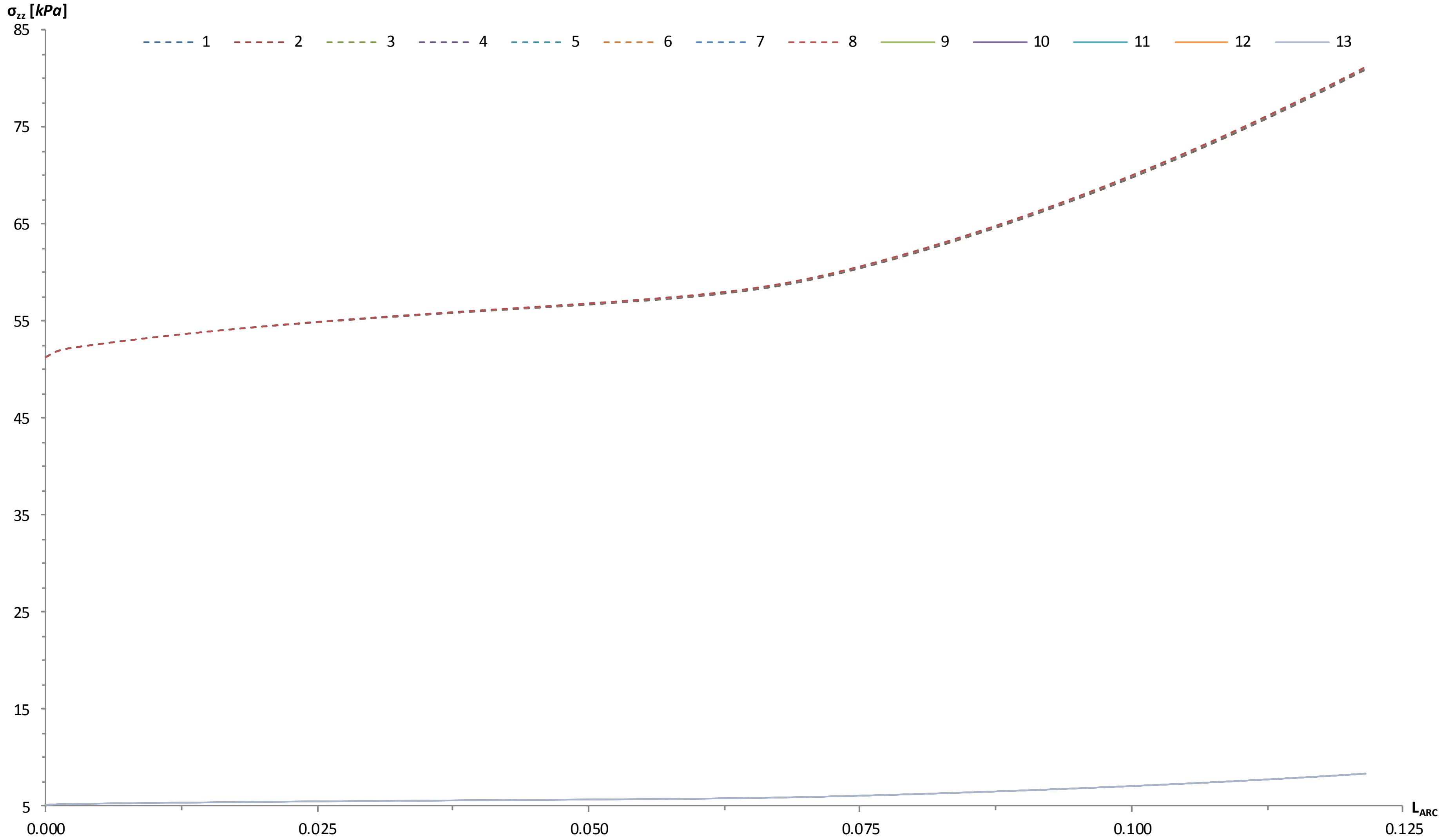

Figura 4.52 – Evolución de tensiones radiales $\sigma_{\theta\theta}$ $[kPa]$ *en la pared de la arteria: capa media (Nodos* $1-8$*) y capa adventicia (Nodos* $9-13$*).* $\lambda_z = 1.75$

En cuanto a las tensiones circunferenciales estas tienden a incrementar conforme se aplica la tensión interna, pero disminuye conforme se aleja de la pared interna (Figura 4.51). En esta figura se puede observar mucho mejor el salto entre las tensiones de la capa media (líneas discontinuas) y las de la capa adventicia (líneas continuas). Como ya se mencionó, estas diferencias se atribuyen principalmente a la diferencia en el módulo de la matriz neohookeana de la capa adventicia, pues solo es un $10\ \%$ del de la capa media.

Por su parte, las tensiones axiales muestran el mismo comportamiento ascendente respecto a la aplicación de la presión (Figura 4.52). Contrario al comportamiento en el espesor de las otras tensiones, se observa un aumento de las tensiones axiales conforme se aleja de la pared interna. Igual que para $\sigma_{\theta\theta}$, se observa un salto brusco entre las tensiones correspondientes a la capa media y a la capa adventicia.

Para detallar mejor lo mencionado anteriormente, en la Figura 4.53 se grafican las tres componentes de tensión ($\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$) para cada nodo elegido en el momento de la bifurcación. Se aprecia claramente el salto que sufren las tensiones en el nodo compartido para las dos capas (nodo 8). Como ya se mencionó, esto se puede atribuir principalmente a la diferencia entre los parámetros de C_{10} de la media y de la adventicia ($C_{10ADV} = C_{10MED}$).

Con estos análisis se comprueba lo planteado por varios autores [**8**]: la media es la que soporta la mayor parte de las tensiones, mientras que la adventicia juega un papel de confinamiento y refuerzo en la pared arterial, permitiéndole soportar mayores presiones que para modelos equivalentes pero de una sola capa.

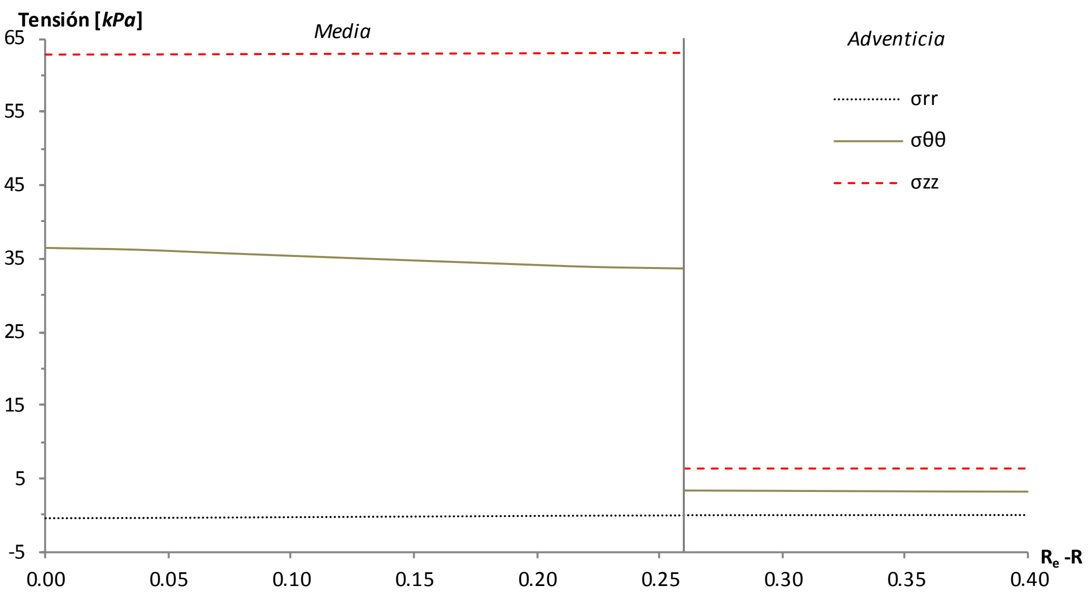

Figura 4.53 – Tensiones radiales, circunferenciales y axiales en sus respectivas direcciones principales vs. Distancia desde la pared interior hasta la exterior. $\lambda_z = 1.75$.

4.5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En cada sección anterior se analizó la influencia de diferentes parámetros geométricos y mecánicos del material implementado. Se procede entonces a resumir las características e influencias principales de los parámetros en la bifurcación observadas en los análisis.

En primer lugar se observa como la formulación para la bifurcación propuesta en [**7**] para el material de Holzapfel, efectivamente es válida para cilindros de pared delgada. El estudio permitió observar cómo, al implementar las expresiones que permiten hallar los valores críticos de k_1 y k_2 para los que se produce la inestabilidad, en cilindros con espesores pequeños (entre 0 y $0.2\ mm$), se produce la inestabilidad. Sin embargo para relaciones de radio espesor $\mathrm{R/e}$ menores que 20 (pared gruesa), los valores críticos no permiten que se produzca la inestabilidad (Figura 4.13). De acuerdo con la literatura [**8**] [**9**] [**13**] [**15**] y como se pudo comprobar, los parámetros k_1 y k_2 de este material para una persona con paredes arteriales sanas, evitan la bifurcación, y por ende la aparición de aneurismas arteriales

En todos los análisis se pudo observar un comportamiento cualitativo del alargamiento circunferencial, λ_θ , similar al observado en las Figura 3.10-Figura 3.11Figura 3.12 y Figura 3.16, las cuales muestran curvas de λ_θ-λ_z para un material que presenta ablandamiento por deformación localizado. La similitud de estas curvas con las obtenidas en este capitulo se observa en la aparición de mínimos locales en el rango de alargamientos axiales estudiados. También se observan similitudes en el rango de alargamientos circunferenciales obtenidos.

El análisis de la dispersión de fibras en pared delgada mostró que para alargamientos axiales mayores que 1.35, este parámetro no influye significativamente en el comportamiento del alargamiento y tensión circunferenciales que producen la bifurcación. Sin embargo, para λ_z menores que 1.35, el comportamiento mecánico es altamente heterogéneo. Este comportamiento indica un acoplamiento entre λ_θ y λ_z para los que se produce la bifurcación. Dicho acoplamiento modifica sustancial y cualitativamente los resultados, indicando una dependencia de la bifurcación a ambos valores.

En este análisis también se observó como la orientación de las fibras en el momento de la bifurcación tiene una influencia alta en los alargamientos circunferenciales para los cuales se produce la bifurcación. Se observó como el λ_θ que produce la bifurcación para un determinado λ_z depende directamente de la orientación de las fibras en el momento que se produce la inestabilidad. Así, si se analiza un grupo de modelos bajo el mismo λ_z, se produce la bifurcación con λ_θ menores para los modelos que presenten una orientación de las fibras menor en la inestabilidad y viceversa. Por otra parte la presión aplicada que produce la inestabilidad no es afectada por la dispersión de las fibras.

Se observó como la orientación de las fibras disminuye durante el alargamiento axial, mientras que en la etapa de inflado, éstas tienden a regresar e, incluso, sobrepasar su orientación inicial (Figura 4.54). Para λ_z altos, la orientación de las fibras en el momento de la bifurcación ni siquiera ha alcanzado su orientación original.

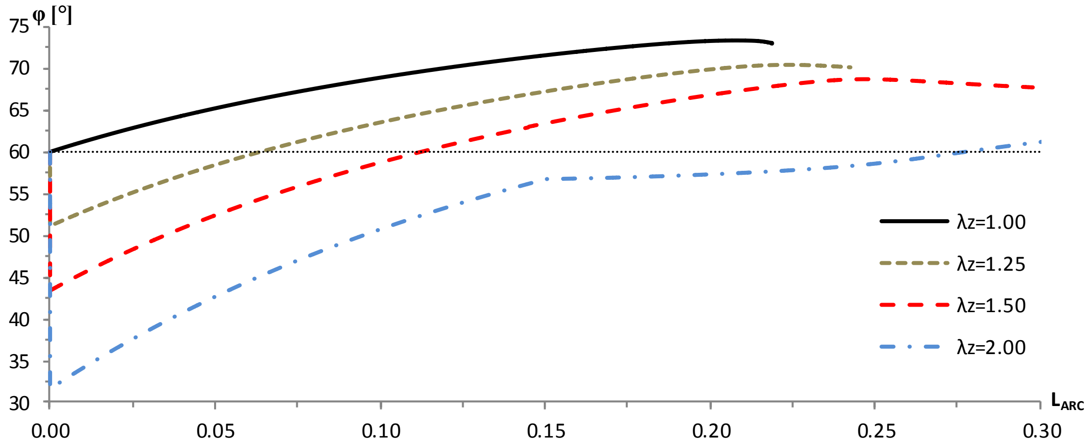

Figura 4.54 – Evolución de la orientación de las fibras para diferentes alargamientos axiales. Orientación inicial de las fibras $60°$.

Para pared gruesa, los resultados reflejan aún más el acoplamiento ya mencionado entre los λ_θ y λ_z que producen la bifurcación. En este análisis se estudio un poco más la influencia de la orientación de las fibras en el momento de la inestabilidad, llegando a la misma conclusión que para pared gruesa. Así mismo se observó influencia del momento en el que ocurre la bifurcación ($\mathrm{L_{ARC}}$) en la tensión circunferencial y en la presión aplicada. Se pudo observar en las curvas del factor proporcional de carga, como para pared gruesa, la inestabilidad tiende a producirse con más dificultad para alargamientos axiales altos.

En cuanto a la variación del espesor se observaron diferencias significativas en cuanto a la presión aplicada en el momento de la inestabilidad. Cuanto más gruesa la pared, mayor es la presión necesaria para que el cilindro alcance la inestabilidad. Esta diferencia se puede observar no solo en los valores de presión sino también por medio de la variable $\mathrm{L_{ARC}}$. No se observó influencia de la dispersión de las fibras para cilindros con espesores menores o iguales a $0.4\ mm$, bajo λ_z mayores que 1.75.

Por medio de estos modelos se pudo observar como la tensión radial depende directamente del espesor del cilindro. Conforme se aumentó el grosor de la pared arterial, la magnitud de la tensión radial también aumentó. Las tensiones tenían naturaleza compresiva, razón por la cual se registraron valores de reducción de la pared de hasta $65\ \%$.

Respecto a la variación de la orientación de las fibras, se obtuvieron datos con un comportamiento bastante heterogéneo. Sin embargo en dos rangos de valores de λ_z ($1.20 \geq \lambda_z \geq 1.25$ y $1.35 \geq \lambda_z \geq 1.50$), se observa como para φ mayores que $15°$, tanto λ_θ, $\sigma_{\theta\theta}$ como la presión presentan el mismo comportamiento. Se observó como para para una orientación de las fibras de $75°$ respecto del eje axial (refuerzo casi circunferencial) el modelo no presentó bifurcación para λ_z mayores que 1.5. Esto se debe a que esta magnitud de alargamientos axiales crea un efecto de confinamiento en el cilindro, evitando o retrasando en algunos casos la bifurcación.

En este análisis de variación de ángulo se encontró la relación directa entre las variaciones del momento en el que ocurre la inestabilidad (por medio de la variable longitud de arco) y el comportamiento de las tensiones y alargamientos circunferenciales. Todo debido a que se trabajó con diferentes orientaciones de las fibras, y en el momento de la inestabilidad el ángulo de orientación de las mismas era diferente para todos los modelos. Con lo cual se analizaron otras posibles causas para las diferencias en el comportamiento, siendo el momento en el que ocurre la bifurcación la solución que daba respuestas lógicas.

Al variar la longitud del cilindro se pudo percibir mejor el abultamiento característico de este tipo de inestabilidad. Se observó como para cilindros de longitud pequeña, entre λ_z 1.3 y 1.5 el comportamiento de λ_θ y $\sigma_{\theta\theta}$ es cualitativa y cuantitativamente diferente. Para alcanzar la bifurcación existe una relación inversamente proporcional entre la longitud del tubo y la presión interna aplicada para producir la bifurcación. Un fenómeno interesante que se pudo analizar, es el fenómeno post bifurcación de propagación axial de la bifurcación.

Las diferentes geometrías permitieron observar que la mayoría de casos de bifurcación se presentan donde la pared arterial presenta reducciones, o, visto desde otro punto de análisis, donde un trozo de pared arterial mantiene su espesor normal y los segmentos adyacentes se engruesan, por ejemplo, lo que sucede para pacientes con síndrome de Marfan.

Finalmente la variación de capas en el espesor permitió analizar que un modelo de una sola capa con las características de la capa media, tiene el mismo comportamiento de λ_θ y $\sigma_{\theta\theta}$ que un modelo con dos capas con características de media y adventicia. En el modelo bicapa se observó como la media es la capa que soporta la mayor parte de las tensiones (cerca del $90\ \%$). La adventicia tiene el papel fundamental de confinar la capa media, lo cual se ve reflejado en un aumento de la presión que soporta antes de alcanzar la bifurcación.

En general se pudo observar como a partir de alargamientos axiales mayores que 1.50 , rango que no es fácilmente superar en condiciones de funcionamiento fisiológicas normales, la bifurcación aparece más tardíamente o incluso no llega a presentarse. Tendencias similares se observaron el espesor y la orientación de las fibras respecto del eje axial.

Cápitulo 5.
CONCLUSIONES

Se estudió el comportamiento y las condiciones de bifurcación del material hiperelástico anisótropo de Holzapfel, así como también el comportamiento del material hiperelástico isótropo neo-hookeano.

Mediante simulaciones numéricas se validó la formulación de las condiciones de bifurcación para cilindros de pared delgada sometidos a inflado y carga axial. Se pudo observar como para cilindros de pared con un espesor mayor que $0.2\,mm$ y radio interno $4\,mm(\mathrm{R/e} > 20\ )$, la bifurcación no se presenta. De este análisis se anota que los parámetros k_1 y k_2 del material Holzapfel que producen la bifurcación, para diferentes orientaciones de la fibra con respecto al eje axial, tienen valores muy inferiores a los valores de estos parámetros para la pared arterial sana [**13**]. Con base en esto se puede decir que las arterias sanas evitan el abultamiento, característico del modelo de inestabilidad estudiado.

Se observó como el material de Holzapfel implementado en un cilindro hueco, sometido a presión interna y carga axial, permite reproducir la formación de aneurismas, al producirse la bifurcación tipo abultamiento. Esto tiene una importancia bastante relevante, ya que permite analizar detalladamente el comportamiento ya mencionado sin necesidad de tener una arteria real, a la cual es complicado y difícil de acceder.

Por medio de simulaciones numéricas mediante elementos finitos, se estudió la influencia de diferentes parámetros, tanto del material como de la geometría, en la bifurcación del material de Holzapfel y neo-hookeano (como referencia y particularización de la función de densidad de energía del material de Holzapfel). Principalmente se observó que los resultados muestran un acoplamiento entre el alargamiento circunferencial (λ_θ) y el alargamiento axial (λ_z) para los que se produce la bifurcación. Este acoplamiento modifica sustancial y cualitativamente los resultados, que mostraron una fuerte dependencia para los dos valores mencionados. Por lo tanto es difícil realizar generalizaciones de la influencia específica que tiene cada parámetro estudiado. Si bien para rangos particulares de λ_z, el comportamiento λ_θ presenta algunas tendencias marcadas, y viceversa, no es lo suficientemente general para permitir definir comportamientos debidos a la influencia de cada parámetro. Lo mismo sucede para la tensión circunferencial.

La bifurcación para este material es altamente sensible a la orientación de las fibras en el momento en que se produce. Así mismo se observó que los valores de alargamiento y tensión circunferencial y presión interna aplicada tienen una relación directa tanto con la orientación de las fibras en el momento de la bifurcación, como con el momento del análisis en el que ocurre esta.

En cuanto al espesor se pudo observar que al aumentarlo en los modelos, se incrementa la presión necesaria para producir la bifurcación, lo cual concuerda con la teoría de cilindros huecos.

El modelo bicapa, si bien permite analizar las tensiones en las dos capas de la pared arterial, puede ser remplazado, al menos para estudiar la bifurcación del material, por un modelo de una sola capa con los parámetros de la capa media. Se observó como las tensiones y alargamientos circunferenciales que producen la bifurcación son casi iguales para los modelos mencionados. Por su parte, la presión interna que produce la inestabilidad es mayor para el modelo bicapa comparada con la de los otros modelos. Esto se debe al efecto de confinamiento que aporta la capa adventicia, aumentando el espesor de la pared. Se observó como la capa media soporta el mayor porcentaje de tensiones, comparada con la capa adventicia.

En general se pudo observar como un régimen alto de alargamientos circunferenciales ($\lambda_z > 1.5$) la bifurcación aparece más tardíamente o incluso llega a no presentarse. Una explicación de este fenómeno es la especie de confinamiento que aporta esta magnitud de λ_z.

Con base en los resultados obtenidos para diferentes imperfecciones introducidas en la geometría, se pudo observar como, en la mayoría de los casos, el punto de bifurcación se localiza en partes de la pared arterial en las cuales el espesor es menor. Esta reducción se puede producir por desgaste o adelgazamiento de la pared arterial o debido a un aumento de la misma, quedando tramos de pared con espesor normal, pero menor al de tramos adyacentes. Esto se puede presentar, por ejemplo, en arterias de pacientes con enfermedades como el síndrome de Marfan.

Un trabajo futuro interesante puede enfocarse en ampliar aun más el análisis, de tal forma que para cada grupo de parámetros se realice un estudio con variaciones de los parámetros más pequeñas. Así mismo, puede ser muy interesante desarrollar la formulación analítica del material de Holzapfel para cilindros de pared gruesa.

Apéndice A.
MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS [19] [20]

A.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ELÁSTICO

Considere la configuración espacial de un cuerpo deformable arbitrario definido por un volumen V y una superficie $\partial\mathrm{V}$ (Figura A.1). El planteamiento global de la elasticidad involucra tres ecuaciones, que deben satisfacerse en todo punto del dominio V, y las condiciones de contorno definidas en la superficie $\partial\mathrm{V}$. Las condiciones que deben satisfacerse son

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \quad \text{Equilibrio} \tag{A.1}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{Compatibilidad} \tag{A.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E}) \quad \text{Equilibrio} \tag{A.3}$$

donde $\mathbf{b}$ es una fuerza de volumen (por unidad de volumen), $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy, $\mathbf{E}$ es el tensor lagrangiano de deformación y $\mathbf{C}$ es el tensor de Cauchy-Green por la derecha.

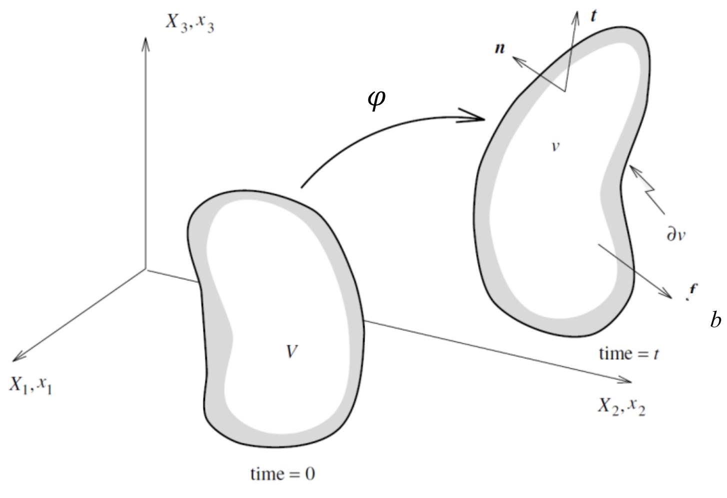

*Figura A.1 – Equilibrio de cuerpo continúo. Tomada de [**19**].*

Las condiciones de contorno se consideran como

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{en } \partial\mathrm{V}^t \tag{A.4}$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{en } \partial\mathrm{V}^u \tag{A.5}$$

donde $\mathbf{t}$ es un vector de tracciones por unidad de área y se cumple que $\partial V^t \cup \partial V^u = \partial V$. Con el objetivo de prever situaciones de equilibro que no se alcanzan durante el análisis, (A.1) permite introducir el concepto de fuerza residual por unidad de volumen ($\mathbf{r}$) como

$$\mathbf{r} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \tag{A.6}$$

A.2. FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA

El método de los elementos finitos está basado en la formulación débil de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema. Esta forma débil es conocida como el principio del trabajo virtual en la mecánica de sólidos. Para definir este principio, se define una velocidad virtual en la configuración actual, $\delta\mathbf{v}$ (Figura A.2). El trabajo virtual por unida de volumen, $\delta \mathrm{w}$, realizado por la fuerza residual $\mathbf{r}$ durante el desplazamiento virtual es La ecuación de equilibrio escrita como principio de trabajos virtuales es $\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{v}$, lo cual basado en el equilibrio implica que

$$\delta \mathrm{w} = \mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \tag{A.7}$$

(A.7) debe cumplirse para todo campo de velocidades virtuales, es decir que las tres componentes de $\mathbf{r}$ sean cero.

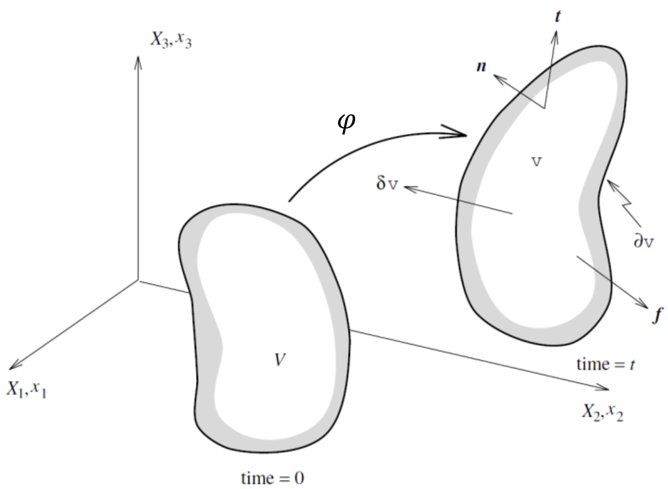

*Figura A.2 – Principio del trabajo virtual. Tomada de [**19**].*

Usando (A.7)(A.6) e integrando sobre el volumen, se obtiene la formulación débil de las ecuaciones de equilibrio mediante

$$\int_v (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{v} \, \mathrm{d}v = 0 \tag{A.8}$$

A partir de (A.8) y usando la propiedad

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}\delta\mathbf{v}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla\delta\mathbf{v} \tag{A.9}$$

Se puede obtener, aplicando también el teorema de la divergencia, que

$$\int_{\partial v} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \delta\mathbf{v}\, \mathrm{d}a - \int_{v} \boldsymbol{\sigma}: \nabla\delta\mathbf{v}\, \mathrm{d}v + \int_{\mathrm{v}} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v}\, \mathrm{d}v = 0 \quad (A.10)$$

El gradiente de $\delta\mathbf{v}$ es, por definición, el gradiente de velocidad virtual $\delta\mathbf{l}$. Este gradiente y el tensor $\boldsymbol{\sigma}$, son simétricos, lo que permite rescribir (A.10) como

$$\delta\mathrm{W} = \int_{v} \boldsymbol{\sigma}: \delta\mathbf{d}\, \mathrm{d}v - \int_{v} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v}\, \mathrm{d}v - \int_{\partial v} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v}\, \mathrm{d}a = 0 \quad (A.11)$$

siendo $\delta\mathbf{d}$, la parte simétrica de $\delta\mathbf{l}$. Por definición el trabajo virtual recibe aportes de fuerzas externas e internas, este concepto permite rescribir (A.11) de la siguiente forma

$$\delta\mathrm{W} = \delta\mathrm{W}_{int} - \delta\mathrm{W}_{ext} \quad (A.12)$$

siendo

$$\delta\mathrm{W}_{int} = \int_{v} \boldsymbol{\sigma}: \delta\mathbf{d}\, \mathrm{d}v \quad (A.13)$$

$$\delta\mathrm{W}_{int} = \int_{v} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v}\, \mathrm{d}v + \int_{\partial v} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v}\, \mathrm{d}a \quad (A.14)$$

Con la solución particularizada para una deformada (φ), que satisface las condiciones de equilibrio, se procede a generalizar la solución para diversas configuraciones. Para esto, y como es común usar el método de Newton, es necesario linealizar primero las ecuaciones. Se considera una solución intermedia (φ_i), para la cual (A.11) puede ser linealizada en dirección de un incremento de $\boldsymbol{u}$ de la siguiente manera

$$\delta\mathrm{W}(\varphi_i, \delta\mathbf{v}) + \mathrm{D}\delta\mathrm{W}(\varphi_i, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] = 0 \quad (A.15)$$

en la cual

$$\mathrm{D}\delta\mathrm{W}(\varphi_i, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] = \mathrm{D}\delta\mathrm{W}_{int}(\varphi_i, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] + \mathrm{D}\delta\mathrm{W}_{ext}(\varphi_i, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] \quad (A.16)$$

Tras varias operaciones tensoriales, teniendo en cuenta que el modelo de GOH es un modelo hiperelástico, se muestra la linealización de los aportes de las fuerzas internas, definidas por

$$\mathrm{D}\delta\mathrm{W}_{int}(\varphi_i, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] = \int_{v} \delta\mathbf{d}: \boldsymbol{c}: \boldsymbol{\varepsilon}\ \mathrm{d}v + \int_{v} \boldsymbol{\sigma}: [(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{v}]\, \mathrm{d}v \quad (A.17)$$

donde $\boldsymbol{c}$ es el tensor constitutivo tangente en la configuración espacial (tensor de cuarto orden).

A.3. DISCRETIZACIÓN MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

La solución al problema elástico mediante EF se basa en espacios funcionales finitos, en donde la discretización posee unas funciones base denominadas funciones de base. Mediante estas funciones, las variables cinemáticas se pueden expresar como una combinación lineal de las variables nodales y las funciones de forma, mediante las siguientes expresiones

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N_i}\, \mathbf{x}_i \qquad (A.18)$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N_i}\, \mathbf{u}_i \qquad (A.19)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N_i}\, \boldsymbol{v}_i \qquad (A.20)$$

donde n es el número de nodos del elemento, $\mathrm{N_i}$ es la función de forma del nodo i, y los vectores $\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \boldsymbol{v}_i$ son los vectores de posición, desplazamiento y velocidad del nodo i.

Es común, en la derivación de las formulaciones de los elementos finitos, usar la notación de Voight, la cual resulta muy útil para representar tensores simétricos tales como $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{d}$ en forma de vectores. Por ejemplo, el vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ en esa notación sería

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \qquad (A.21)$$

Otra definición importante es la de la matriz $\boldsymbol{B_a}$, la cual contiene las derivadas de la función de forma del nodo i. Por medio de esa matriz se puede entonces definir

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{B_i u_a} \qquad (A.22)$$

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{B_i v_a} \qquad (A.23)$$

Por su parte, para discretizar las ecuaciones de equilibrio en la configuración espacial, se usa (A.11). Para esto, se considera la contribución de una sola velocidad virtual nodal $\delta\mathbf{v}_{\boldsymbol{i}}$, en el nodo i del elemento j, a $\delta\mathrm{W}(\varphi, \delta\mathbf{v})$

$$\delta\mathrm{W}^{(j)}(\varphi, \mathrm{N_i}\, \delta\mathbf{v}_{\boldsymbol{i}}) = \int_{v^{(j)}} \boldsymbol{\sigma} : (\delta\mathbf{v}_{\boldsymbol{i}} \otimes \boldsymbol{\nabla}\mathrm{N_i})\mathrm{d}v - \int_{v^{(j)}} \mathbf{f} \cdot (\mathrm{N_i}\boldsymbol{v}_i)\mathrm{d}v - \int_{\partial v^{(j)}} \mathbf{t} \cdot (\mathrm{N_i}\boldsymbol{v}_i)\, \mathrm{d}a \qquad (A.24)$$

Observando que las velocidades virtuales en los nodos son independientes de la integración y que se puede usar la propiedad $\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma v}$, (A.24) se puede rescribir como

$$\delta\mathrm{W}^{(j)}(\varphi, \mathrm{N_i}\, \delta\mathbf{v}_{\boldsymbol{i}}) = \delta\mathbf{v}_{\boldsymbol{i}} \cdot \left(\int_{v^{(j)}} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla}\mathrm{N_i}\mathrm{d}v - \int_{v^{(j)}} \mathrm{N_i}\mathbf{f}\, \mathrm{d}v - \int_{\partial v^{(j)}} \mathrm{N_i}\mathbf{t}\, \mathrm{d}a \right) \qquad (A.25)$$

El trabajo virtual por elemento (j) en cada nodo (i) se puede expresar también en términos de fuerzas externas e internas $\mathbf{T}^{(j)}{}_{\mathrm{i}}$ y $\mathbf{F}^{(j)}{}_{\mathrm{i}}$, mediante

$$\delta \mathrm{W}^{(j)}(\varphi, \mathrm{N_i}\, \delta \mathbf{v}_i) = \delta \mathbf{v}_i \cdot \left(\mathbf{T}^{(j)}{}_{\mathrm{i}} - \mathbf{F}^{(j)}{}_{\mathrm{i}}\right) \qquad (A.26)$$

donde,

$$\mathbf{T}^{(j)}{}_{\mathrm{i}} = \int_{v^{(j)}} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nabla} \mathrm{N_i} \mathrm{d}v \qquad (A.27)$$

$$\mathbf{T}^{(j)}{}_{\mathrm{i,k}} = \sum_{m=1}^{3} \int_{v^{(j)}} \sigma_{km} \frac{\partial \mathrm{N_i}}{\partial x_m} \mathrm{d}v \qquad (A.28)$$

$$\mathbf{F}^{(j)}{}_{\mathrm{i}} = \int_{v^{(j)}} \mathrm{N_i} \mathbf{f}\, \mathrm{d}v + \int_{\partial v^{(j)}} \mathrm{N_i} \mathbf{t}\ \mathrm{d}a \qquad (A.29)$$

La contribución a $\delta \mathrm{W}(\varphi, \mathrm{N_i}\, \delta \mathbf{v}_i)$ de todos los elementos (j) de (1 a m_i) que contienen el nodo (i) $(j \ni i)$ es

$$\delta \mathrm{W}(\varphi, \mathrm{N_i}\, \delta \mathbf{v}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ni i}}^{m_i} \delta \mathrm{W}^{(j)}(\varphi, \mathrm{N_i}\, \delta \mathbf{v}_i) = \delta \mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{T}_{\mathrm{i}} - \mathbf{F}_{\mathrm{i}}) \qquad (A.30)$$

donde las fuerzas nodales equivalentes ensambladas son

$$\mathbf{T}_{\mathrm{i}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ni i}}^{m_i} \mathbf{T}^{(j)}; \qquad \mathbf{F}_{\mathrm{i}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ni i}}^{m_i} \mathbf{F}^{(j)} \qquad (A.31)$$

La contribución a $\delta \mathrm{W}(\varphi, \delta \mathbf{v})$ de todos los nodos N en la malla de elementos finitos es

$$\delta \mathrm{W}(\varphi, \delta \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{N} \delta \mathrm{W}(\varphi, \mathrm{N_i}\, \delta \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{N} \delta \mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{T}_{\mathrm{i}} - \mathbf{F}_{\mathrm{i}}) = 0 \qquad (A.32)$$

Debido a la condición de que la ecuación del trabajo virtual debe ser satisfecha para cualquier velocidad nodal arbitraria, las ecuaciones de equilibrio discretizadas, en términos de la fuerza residual nodal $\mathbf{R}_i$, resulta como

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{T}_{\mathrm{i}} - \mathbf{F}_{\mathrm{i}} \qquad (A.33)$$

Es por esto que las fuerzas nodales internas equivalentes se encuentran en equilibrio con las fuerzas externas equivalentes en cada nodo $i = 1,2,3..N$. Por conveniencia todas las fuerzas equivalentes se ensamblan en un arreglo matricial (matriz columna) para definir las fuerzas internas y externas totales, $\mathbf{T}$ y $\mathbf{F}$, de la misma manera que la fuerza residual total $\mathbf{R}$. Con esto, (A.32) se puede rescribir como,

$$\delta \mathrm{W}(\varphi, \delta \mathbf{v}) = \delta \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \mathbf{R} = \delta \mathbf{v}^{\mathrm{T}} (\mathbf{T} - \mathbf{F}) = 0 \qquad (A.34)$$

donde, el vector de velocidades virtuales es $\delta\mathbf{v}^T = [\delta\mathbf{v}_1{}^T, \delta\mathbf{v}_2{}^T, \delta\mathbf{v}_3{}^T \ldots, \delta\mathbf{v}_N{}^T]$.

Como las fuerzas equivalentes internas son funciones no lineales de las posiciones nodales de $\boldsymbol{x}_i$, se puede definir un vector de incógnitas $\mathbf{x}$ que contenga todas las posiciones nodales, de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \tag{A.35}$$

Con esto el conjunto total de ecuaciones de equilibrio no lineales se puede ensamblar de forma simbólica, de la siguiente manera

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{A.36}$$

Son estas las ecuaciones que representan la discretización mediante elementos finitos de la ecuación (A.6).

Con la ecuación (A.36) se representa un sistema de ecuaciones lineales con incógnitas de posiciones nodales. La solución de este sistema de ecuaciones se alcanza mediante la iteración de Newton, la cual involucra las ecuaciones de equilibrio linealizadas ((A.15)(A.16)y(A.17)). La linealización del trabajo virtual interno se puede dividir a su vez en dos partes, una componente constitutiva y otra componente de tensiones, así

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\delta\mathrm{W}_{int}(\varphi_i, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] &= \mathrm{D}\delta\mathrm{W}_c(\varphi_i, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] + \mathrm{D}\delta\mathrm{W}_\sigma(\varphi_i, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] \\ &= \int_v \delta\mathbf{d} : \boldsymbol{c} : \boldsymbol{\varepsilon}\ \mathrm{d}v + \int_v \boldsymbol{\sigma} : [(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{v}]\,\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{A.37}$$

La componente constitutiva en forma matricial se puede escribir como

$$\mathrm{D}\delta\mathrm{W}_c(\varphi_i, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] = \int_v \delta\mathbf{d}^T\mathbf{D}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\ \mathrm{d}v \tag{A.38}$$

donde $\mathbf{D}$ es un tensor de segundo orden obtenido a partir del tensor de cuarto orden $\boldsymbol{c}$, implementando la notación de Voight. Tras esto, por medio de (A.22) y (A.23), se puede calcular la contribución del elemento (j) asociados a los nodos i y h, por medio de

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\delta\mathrm{W}^{(j)}{}_c(\varphi, \mathrm{N_i}\ \delta\mathbf{v}_{\boldsymbol{i}})[\mathrm{N_h}\ \boldsymbol{u}_h] &= \int_{v^{(j)}} (\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{i}}\delta\mathbf{v}_{\boldsymbol{i}})^T\mathbf{D}(\boldsymbol{B}_h\boldsymbol{u}_h)\ \mathrm{d}v \\ &= \delta\mathbf{v}_{\boldsymbol{i}} \cdot \left(\int_{v^{(j)}} \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{i}}{}^T\mathbf{D}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{h}}\ \mathrm{d}v\right)\boldsymbol{u}_h \end{aligned} \tag{A.39}$$

El termino entre paréntesis es el que define la componente constitutiva de la matriz tangente relacionando los nodos i y h del elemento (j), mediante

$$\boldsymbol{K}^{(j)}{}_{c,ih} = \int_{v^{(j)}} \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{i}}{}^T\mathbf{D}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{h}}\ \mathrm{d}v \tag{A.40}$$

La componente de tensiones queda definida entonces por

$$\boldsymbol{K}^{(j)}{}_{\sigma,ih} = \int_{v^{(j)}} (\boldsymbol{\nabla} N_i \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\nabla} N_i)\boldsymbol{I}\ \mathrm{d}v \qquad (A.41)$$

Luego a partir de los términos linealizados del trabajo virtual, incluyendo $\mathrm{D\delta W}_{ext}(\varphi_i, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}]$ (no descrito por razones ya mencionadas), se puede calcular la matriz tangente elemental que permite relacionar los nodos i y h mediante

$$\boldsymbol{K}^{(j)}{}_{ih} = \boldsymbol{K}^{(j)}{}_{c,ih} + \boldsymbol{K}^{(j)}{}_{\sigma,ih} - \boldsymbol{K}^{(j)}{}_{p,ih} \qquad (A.42)$$

donde el término $\boldsymbol{K}^{(j)}{}_{p,ih}$ incluye los aportes de las fuerzas externas. Finalmente, se puede ensamblar la matriz tangente global a partir de las contribuciones elementales, para que se cumpla que

$$\mathrm{D\delta W}(\varphi, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] = \delta\mathbf{v}^T\ \mathbf{K}\ \mathbf{u} \qquad (A.43)$$

donde $\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez tangente y $\mathbf{u}^T = [\boldsymbol{u}_1{}^T, \boldsymbol{u}_2{}^T, \boldsymbol{u}_3{}^T \dots, \boldsymbol{u}_N{}^T]$ es una matriz que contiene los desplazamientos nodales.

Apéndice B.
TABLAS CORRESPONDIENTES A FIGURAS DE ANÁLISIS

B.1. INFLUENCIA DE LA DISPERSIÓN DE LAS FIBRAS EN PARED DELGADA.

Tabla B.1 – Alargamiento circunferencial con variación de dispersión de fibras. $e = 0.1mm.$

e	0.1			φ	15
			λ_θ		
λ_z	κ = 0	κ = 0.1	κ = 0.2	κ = 0.3	Neo
1.00	2.058	2.055	1.794	2.055	1.794
1.10	2.072	2.072	2.049	1.746	1.749
1.15	2.066	2.067	2.066	2.073	1.745
1.20	2.076	2.091	1.737	1.700	1.758
1.25	2.083	1.690	1.699	1.704	1.709
1.30	1.682	2.100	1.716	1.709	2.100
1.35	1.702	1.692	1.701	1.704	1.675
1.50	1.641	1.653	1.676	1.688	1.670
1.75	1.811	1.812	1.813	1.809	1.809
2.00	2.148	2.075	2.075	2.191	2.075

Tabla B.2 – $\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$ *con variación de dispersión de fibras.* $e = 0.1mm.$

e	0.1			φ	15
			$\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$		
λ_z	κ = 0	κ = 0.1	κ = 0.2	κ = 0.3	Neo
1.00	8.052	8.025	5.799	8.026	5.800
1.10	8.232	8.233	8.030	5.502	5.520
1.15	8.202	8.215	8.202	8.263	5.551
1.20	8.313	8.441	5.542	5.249	5.712
1.25	8.387	5.220	5.289	5.328	5.367
1.30	5.203	8.550	5.460	5.407	8.556
1.35	5.386	5.314	5.377	5.400	5.185
1.50	5.024	5.109	4.847	5.366	5.232
1.75	5.288	5.414	5.475	5.036	5.182
2.00	6.508	5.264	5.266	6.921	5.350

Tabla B.3 – Presión aplicada con variación de dispersión de fibras. $e = 0.1mm.$

e	0.1			φ	15
			P [kPa]		
λ_z	κ = 0	κ = 0.1	κ = 0.2	κ = 0.3	Neo
1.00	0.341	0.341	0.331	0.341	0.331
1.10	0.315	0.315	0.315	0.304	0.304
1.15	0.304	0.304	0.304	0.304	0.292
1.20	0.293	0.293	0.281	0.280	0.281
1.25	0.283	0.271	0.271	0.271	0.271
1.30	0.261	0.273	0.262	0.262	0.273
1.35	0.253	0.253	0.253	0.253	0.253
1.50	0.230	0.230	0.228	0.231	0.231
1.75	0.201	0.201	0.202	0.200	0.201
2.00	0.179	0.178	0.178	0.178	0.178

B.2. INFLUENCIA DE LA DISPERSIÓN DE LAS FIBRAS EN PARED GRUESA.

Tabla B.4 – Alargamiento circunferencial con variación de dispersión de fibras. $e = 0.4mm.$

e	0.4			φ	15
	λ_θ				
λ_z	κ = 0	κ = 0.1	κ = 0.2	κ = 0.3	Neo
1.00	2.112	1.834	2.104	2.096	1.794
1.10	2.129	2.129	2.131	2.124	2.129
1.15	2.147	2.147	2.147	2.147	2.141
1.20	1.766	2.163	1.766	2.160	2.160
1.25	1.754	2.181	2.187	2.187	1.751
1.30	2.208	2.208	2.208	2.208	2.828
1.35	1.735	2.233	2.229	1.738	2.232
1.50	1.748	2.329	1.773	2.325	2.328
1.75	1.834	2.558	2.558	2.550	2.550
2.00	2.100	2.851	2.104	2.844	2.100

Tabla B.5 – $\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$ *con variación de dispersión de fibras.* $e = 0.4mm.$

e	0.4			φ	15
	$\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$				
λ_z	κ = 0	κ = 0.1	κ = 0.2	κ = 0.3	Neo
1.00	8.385	5.999	8.314	8.232	8.302
1.10	8.604	8.604	8.621	8.624	8.604
1.15	8.798	8.797	8.798	8.799	8.744
1.20	5.635	8.886	5.635	8.937	8.938
1.25	5.589	9.148	9.206	9.204	5.566
1.30	9.408	9.408	9.408	9.412	15.828
1.35	5.521	9.654	9.618	5.546	9.639
1.50	5.706	10.587	5.896	9.253	10.572
1.75	5.808	12.897	12.891	12.817	12.809
2.00	6.229	16.106	6.234	16.029	6.136

Tabla B.6 – Presión aplicada con variación de dispersión de fibras. $e = 0.4\ mm.$

e	0.4			ϕ	15
	P [kPa]				
λ_z	κ = 0	κ = 0.1	κ = 0.2	κ = 0.3	Neo
1.00	1.323	1.280	1.322	1.323	1.322
1.10	1.222	1.222	1.222	1.225	1.222
1.15	1.177	1.177	1.177	1.177	1.177
1.20	1.088	1.145	1.088	1.135	1.135
1.25	1.049	1.096	1.096	1.096	1.049
1.30	1.059	1.059	1.059	1.059	1.013
1.35	0.980	1.024	1.024	0.980	1.024
1.50	0.893	0.932	0.893	0.932	0.932
1.75	0.780	0.807	0.807	0.807	0.807
2.00	0.692	0.710	0.692	0.710	0.692

B.3. INFLUENCIA DEL ESPESOR.

Tabla B.7 – Alargamiento circunferencial con variación de espesor. $\kappa = 0.0$.

κ	0.00			φ	15
	λ_θ				
λ_z	e=0.1	e=0.2	e=0.3	e=0.4	e=0.5
1.00	2.058	2.069	2.090	2.112	2.043
1.10	2.072	1.757	1.781	2.129	2.142
1.15	2.066	2.101	2.128	2.147	2.164
1.20	2.076	1.730	1.756	1.766	2.180
1.25	2.083	2.119	2.154	1.754	1.775
1.30	1.682	2.136	2.172	2.208	2.231
1.35	1.702	1.726	2.199	1.735	2.260
1.50	1.641	1.687	2.286	1.748	2.369
1.75	1.811	1.820	1.830	1.834	2.605
2.00	2.148	2.088	2.094	2.100	2.101

Tabla B.8 – $\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$ *con variación de dispersión de espesores* $\kappa = 0.0$.

κ	0.00			φ	15
	$\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$				
λ_z	e=0.1	e=0.2	e=0.3	e=0.4	e=0.5
1.00	8.052	8.099	8.231	8.385	7.706
1.10	8.232	5.553	5.686	8.604	8.681
1.15	8.202	8.468	8.671	8.798	8.907
1.20	8.313	5.436	5.602	5.635	9.080
1.25	8.387	8.668	8.940	5.589	5.717
1.30	5.203	8.832	9.115	9.408	9.583
1.35	5.386	5.531	9.372	5.521	10.293
1.50	5.024	5.317	10.209	5.706	10.943
1.75	5.288	5.890	5.693	5.808	13.359
2.00	6.508	5.800	4.901	6.229	5.901

Tabla B.9 – Presión aplicada con variación de dispersión de espesor. $\kappa = 0.0$.

K	0.00			ϕ	15
	P [kPa]				
λ_z	e=0.1	e=0.2	e=0.3	e=0.4	e=0.5
1.00	0.341	0.675	1.003	1.323	1.631
1.10	0.315	0.601	0.891	1.222	1.512
1.15	0.304	0.601	0.892	1.177	1.456
1.20	0.293	0.556	0.825	1.088	1.404
1.25	0.283	0.560	0.831	1.049	1.298
1.30	0.261	0.541	0.803	1.059	1.310
1.35	0.253	0.501	0.776	0.980	1.188
1.50	0.230	0.456	0.706	0.893	1.153
1.75	0.201	0.399	0.591	0.780	0.998
2.00	0.179	0.353	0.525	0.692	0.856

B.4. INFLUENCIA DE LA ORIENTACIÓN DE LAS FIBRAS.

Tabla B.10 – Alargamiento circunferencial con variación de orientación de fibras. $e = 0.4\ mm.$

κ	0.00			e	0.4
	λ_θ				
λ_z	φ = 15	φ = 30	φ = 60	φ = 75	Neo
1.00	2.112	1.853	2.108	2.108	2.103
1.10	2.129	2.128	2.129	1.806	2.129
1.15	2.147	2.143	1.773	2.152	2.141
1.20	1.766	1.765	1.767	1.762	2.160
1.25	1.754	2.182	2.188	2.194	1.751
1.30	2.208	1.739	2.208	2.216	2.828
1.35	1.735	1.734	1.745	1.734	2.232
1.50	1.748	2.326	2.339	2.369	2.328
1.75	1.834	2.557	1.836	2.699	2.550
2.00	2.100	2.106	2.106	2.841	2.100

Tabla B.11 – $\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$ con variación de dispersión de orientación de fibras. $e = 0.4\ mm.$

κ	0.00			e	0.4
	$\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$				
λ_z	φ = 15	φ = 30	φ = 60	φ = 75	Neo
1.00	8.385	6.099	8.350	7.714	8.302
1.10	8.604	8.601	8.616	5.856	8.604
1.15	8.798	8.762	5.642	8.862	8.744
1.20	5.635	5.629	5.647	5.010	8.938
1.25	5.589	9.157	9.225	9.287	5.566
1.30	9.408	5.519	9.418	9.506	15.828
1.35	5.521	5.514	5.047	5.518	9.639
1.50	5.706	10.560	10.708	11.048	10.572
1.75	5.808	12.885	5.821	15.380	12.809
2.00	6.229	6.279	8.662	19.940	6.136

Tabla B.12 – Presión aplicada con variación de orientación de fibras. $e = 0.4\ mm.$

κ	0.00			e	0.4
	P [kPa]				
λ_z	φ = 15	φ = 30	φ = 60	φ = 75	Neo
1.00	1.323	1.280	1.323	1.324	1.322
1.10	1.222	1.223	1.223	1.176	1.222
1.15	1.177	1.178	1.130	1.179	1.177
1.20	1.088	1.088	1.088	1.088	1.135
1.25	1.049	1.096	1.097	1.098	1.049
1.30	1.059	1.013	1.060	1.061	1.013
1.35	0.980	0.980	0.981	0.981	1.024
1.50	0.893	0.932	0.933	0.935	0.932
1.75	0.780	0.807	0.780	0.830	0.807
2.00	0.692	0.692	0.692	0.703	0.692

B.5. INFLUENCIA DE LA GEOMETRÍA DEL MODELO.

Tabla B.13 – Alargamiento circunferencial con variación de la geometría del modelo. $e = 0.1mm.$

φ	15			e	0.1
			λ_θ		
λ_z	Norm	Red	Enf	Aum	Neo
1.00	2.058	1.997	2.042	2.001	1.794
1.10	2.072	1.999	2.036	2.027	1.749
1.15	2.066	1.996	2.060	2.031	1.745
1.20	2.076	2.003	2.060	2.033	1.758
1.25	2.083	2.007	2.084	2.038	1.709
1.30	1.682	2.015	2.087	2.044	2.100
1.35	1.702	2.020	2.114	2.049	1.675
1.50	1.641	2.043	2.199	2.067	1.670
1.75	1.811	2.354	2.390	2.130	1.809
2.00	2.148	2.570	2.404	2.343	2.075

Tabla B.14 – $\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$ *con variación de variación de la geometría del modelo.* $e = 0.1mm.$

φ	15			e	0.1
			$\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$		
λ_z	Norm	Red	Enf	Aum	Neo
1.00	8.052	7.647	7.881	7.609	5.800
1.10	8.232	7.723	7.894	7.908	5.520
1.15	8.202	7.726	8.135	7.965	5.551
1.20	8.313	7.798	8.153	8.002	5.712
1.25	8.387	7.855	8.382	8.061	5.367
1.30	5.203	7.932	8.418	8.130	8.556
1.35	5.386	7.990	8.674	8.185	5.185
1.50	5.024	8.204	9.463	8.375	5.232
1.75	5.288	8.875	11.287	8.948	5.182
2.00	6.508	8.825	11.447	9.562	5.350

Tabla B.15 – Presión aplicada con variación de la geometría del modelo. $e = 0.1mm.$

φ	15			e	0.1
			P [kPa]		
λ_z	Norm	Red	Enf	Aum	Neo
1.00	0.341	0.295	0.351	0.347	0.331
1.10	0.315	0.272	0.323	0.321	0.304
1.15	0.304	0.263	0.311	0.309	0.292
1.20	0.293	0.253	0.300	0.299	0.281
1.25	0.283	0.245	0.289	0.288	0.271
1.30	0.261	0.237	0.279	0.279	0.273
1.35	0.253	0.229	0.270	0.270	0.253
1.50	0.230	0.210	0.246	0.246	0.231
1.75	0.201	0.184	0.213	0.215	0.201
2.00	0.179	0.165	0.187	0.191	0.178

B.6. INFLUENCIA DE LA LONGITUD DEL CILINDRO.

Tabla B.16 – Alargamiento circunferencial con variación de la longitud del cilindro. $e = 0.2mm.$

e	φ		R
0.2	30		4
	λ_θ		
1.00	LR_5	LR_20	LR_50
1.10	1.812	1.773	1.723
1.15	1.761	1.738	1.698
1.20	1.743	1.697	1.652
1.25	1.756	1.677	1.630
1.30	1.717	1.671	1.620
1.35	1.715	1.652	1.600
1.50	2.169	1.635	1.581
1.75	1.698	1.610	1.568
2.00	1.819	1.813	1.816
1.00	-	2.069	2.075

Tabla B.17 – $\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$ *con variación de la longitud del cilindro.* $e = 0.2mm.$

e	φ		R
0.2	30		4
	$\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$		
λ_z	LR_5	LR_20	LR_50
1.00	5.885	5.687	5.293
1.10	5.570	5.461	5.161
1.15	5.484	5.239	4.909
1.20	5.647	5.132	4.791
1.25	5.385	5.120	4.760
1.30	5.413	5.018	4.651
1.35	9.142	4.920	4.546
1.50	5.400	4.819	4.407
1.75	5.458	4.659	4.201
2.00	-	4.626	4.175

Tabla B.18 – Presión aplicada con variación de la longitud del cilindro. $e = 0.2mm.$

e	φ		R
0.2	30		4
	P [kPa]		
λ_z	LR_5	LR_20	LR_50
1.00	0.654	0.622	0.615
1.10	0.601	0.597	0.590
1.15	0.578	0.553	0.546
1.20	0.556	0.533	0.527
1.25	0.536	0.515	0.509
1.30	0.518	0.498	0.493
1.35	0.523	0.483	0.477
1.50	0.457	0.442	0.437
1.75	0.398	0.388	0.383
2.00	-	0.346	0.342

B.7. INFLUENCIA DEL NÚMERO DE CAPAS.

Tabla B.19 – Alargamiento circunferencial con variación de número de capas.

e		$e_{mº}$	e_a
0.26		0.26	0.14
	λ_θ		
λ_z	1 capa Adv	1 capa Med	Bicapa
1.00	1.773	1.773	1.778
1.10	1.738	1.717	1.732
1.15	1.697	1.696	1.705
1.20	1.677	1.689	1.689
1.25	1.671	1.670	1.674
1.30	1.652	1.652	1.659
1.35	1.635	1.634	1.644
1.50	1.610	1.609	1.614
1.75	1.813	1.573	1.584
2.00	2.069	1.558	1.564

Tabla B.20 – $\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$ con variación de dispersión de variación de número de capas.

e		e_m	e_a
0.26		0.26	0.14
	$\sigma_{\theta\theta}/c_{10}$		
λ_z	1 capa Adv	1 capa Med	Bicapa
1.00	5.687	5.687	5.694
1.10	5.461	5.350	5.440
1.15	5.239	5.236	5.282
1.20	5.132	5.224	5.200
1.25	5.120	5.118	5.120
1.30	5.018	5.016	5.044
1.35	4.920	4.916	4.969
1.50	4.819	4.815	4.827
1.75	4.659	4.656	4.715
2.00	4.626	4.618	4.639

Tabla B.21 – Presión aplicada con variación de variación de número de capas.

e	º	e_m	e_a
0.26		0.26	0.14
	P [kPa]		
λ_z	1 capa Adv	1 capa Med	Bicapa
1.00	0.622	0.622	0.845
1.10	0.597	0.574	0.779
1.15	0.553	0.553	0.751
1.2	0.533	0.533	0.724
1.25	0.515	0.515	0.700
1.30	0.498	0.499	0.677
1.35	0.483	0.483	0.656
1.50	0.442	0.442	0.600
1.75	0.388	0.388	0.526
2.0	0.346	0.346	0.469

BIBLIOGRAFÍA

[1] A. Delfino, N. Stergiopulos, J.J. Moore, and J.J. Meister, "Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite element model of the human carotid bifurcation," *Biomech.*, 1997.

[2] R.N. Vaishnav, J.T. Young, and D.J. Patel, "Distribution of stresses and of strain-energy density through the wall thickness in a canine aortic segment," *Circ. Rees.*, 1973.

[3] H. Demiray, "A note on the Elasticity of Soft Biological Tissues," *Journal of Biomechanics*, 1972.

[4] Y.C. Fung, K. Fronek, and P. Patitucci, "Pseudoelasticity of arteries and the choice of its mathematical expression," *Am. J. Physio.*, 1979.

[5] D.M. Haughton and J. Merodio, "The elasticity of arterial tissue affected by Marfan's syndrome," *Mechanics Research Communications*, 2009.

[6] J. Merodio and D.M. Haughton, "Bifurcation of thick-walled cylindrical shells and the mechanical response of arterial tissue affected by Marfan's syndrome," *Mechanics Research Communications*, 2009.

[7] J. Rodríguez and J. Merodio, "A new derivation of the bifurcation conditions of inflated cylindrical membranes of elasticmaterialunderaxialloading.Application to aneurysm formation," *MechanicsResearchCommunications*, 2011.

[8] G. Holzapfel, T. Gasser, and R. Ogden, "A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models," *Journal of Elasticity*, 2000.

[9] T. Gasser, R. Ogden, and G. Holzapfel, "Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations," *Journal of The Royal Society interface*, 2006.

[10] R. Putz and R. Pabst, *Sobotta Atlas der Anatomie des Menschen*. München: Elsevier Gmbh, 2006.

[11] P. Adamo and C. Whitney, *Las enfermedades cardiovasculares*.: Obelisco, 2007.

[12] R.E. Klabunde, *Cardiovascular Physiology Concepts*. Baltimore: Wolters Kluwer- Lppincott Williams & Wilkins, 2012.

[13] J. Ródriguez, Modelos numéricos para mecánica cardiovascular de las paredes areteriales y sus procesos de adaptación, 2003.

[14] C. Yokochi, J. Rohen, and E: Weinreb, *Atlas fotografico de anatomia del cuerpo humano*. Interamericana Mc Graw Hill, 1991.

[15] G. Holzapfel, G. Sommer, and P. Regitnig, "Anisotropic Mechanical Properties of Tissue Components in Human Atherosclerotic Plaques," *Journal of Biomechanical Engineering*, 2004.

[16] Y.B. Fu, S.P. Pearce, and K.K. Liu, Post-bifurcation analysis of a thin-walled hyperelastic tube under inflation, 2008.

[17] D.M. Haughton and R.W. Ogden, "Bifurcation of inflated circular cylinders of elastic material under axial loading I. Exact theory for thin-walled tubes," *J. Mech. Phys. Solids*, 1979.

[18] D.M. Haughton and R.W. Ogden, "Bifurcation of inflated circular cylinders of elastic material under axial loading II. Exact theory for thick-walled tubes," *J. Mech. Phys. Solids*, 1979.

[19] J. Bonet and R. Wood, *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1997.

[20] G.T. Mase and G.E. Mase, *Continuum Mechanichs for Engineers*. Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.

[21] Abaqus, *Analysis User's Manual. Part VI: Elements*.: Version 6.11. SIMULIA (Dassault Systemès), 2011.

[22] Abaqus, *Analysis User's Manual. Part III:Analysis Procedures, Solutions and Control*.: Version 6.11. SIMULIA (Dassault Systemès), 2011.

[23] C. Schulze-Bauer, C. Mörth, and G. Holzapfel, "Passive Biaxial Mechanical Response of Aged HUman Iliac Arteries," *J. Biomech. Eng.*, 2003.

[24] S.P. Pearce and Y.B. Fu, "Characterization and stability of localized bulging/necking in inflated membrane tubes," *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. 75 , no. 4, pp. 581-602, 2010.