



Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos,
Canales y Puertos

**Modelos numéricos para
mecánica cardiovascular de las
paredes arteriales y sus
procesos de adaptación**

Tesis doctoral

Javier Rodríguez Soler
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Madrid, Junio 2003



**Departamento de Mecánica de Medios
Continuos y Teoría de Estructuras**

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos,
Canales y Puertos

Universidad Politécnica de Madrid

**Modelos numéricos para
mecánica cardiovascular de las
paredes arteriales y sus
procesos de adaptación**

Tesis doctoral

Javier Rodríguez Soler
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Director: José María Goicolea Ruigómez
Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Madrid, Junio 2003

Modelos numéricos para mecánica cardiovascular de las
paredes arteriales y sus procesos de adaptación

Tesis doctoral
Universidad Politécnica de Madrid

Madrid, Junio 2003

La composición del texto ha sido realizada usando (L^A)T_EX
y aplicaciones GNU/Linux

Javier Rodríguez Soler
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Director: José María Goicolea Ruigómez
Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Universidad Politécnica de Madrid
Profesor Aranguren s/n
Madrid 28040

Teléfono: (+34) 91 336 6760
Fax: (+34) 91 336 6702
Correo electrónico: jrs@mecanica.upm.es
Página web: <http://w3.mecanica.upm.es>

Tribunal nombrado por el Mgfco. y Excmo. Sr. Rector de la
Universidad Politécnica de Madrid, el día
de de 2003.

Presidente D.

Vocal D.

Vocal D.

Vocal D.

Secretario D.

Realizado el acto de defensa y lectura de la Tesis el día
de de 2003
en

Calificación:

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO

DEDICADO A MIS PADRES,
José Antonio y Victoria Isabel,
A MI HERMANO, *Álvaro,*
Y A *Els Claes*

*Los conceptos y principios fundamentales de la ciencia
son invenciones libres del espíritu humano*

ALBERT EINSTEIN

Resumen

La *importancia social* de las *enfermedades cardiovasculares* motiva el interés en desarrollar *modelos numéricos* de las *paredes arteriales* que aporten información para la práctica médica. Esto se refuerza por la consideración de que dichas patologías están fuertemente relacionadas con *factores mecánicos*, como son los estados de deformación y de tensión. La tesis se centra en el desarrollo de modelos matemáticos y algoritmos de comportamiento mecánico de las paredes arteriales, desarrollándose en un *marco multidisciplinar*.

La hipótesis indicada de relación entre variables mecánicas y aspectos de importancia clínica, se refuerza realizando un estudio estadístico de la *correlación* entre la *tensión tangencial* en la íntima (superficie interna) y el *espesor* de la pared arterial.

Como punto de partida para la formulación de modelos constitutivos, se desarrollan materiales de comportamiento *no lineal* con *grandes deformaciones* e *hiperelásticos* (no disipan energía al deformarse). Algunos son de tipo *isótropo*, adecuados para la simulación de la placa ateromatosa, y otros de tipo *anisótropo*, adecuados para las capas de las paredes arteriales sanas. Dada la dificultad en la experimentación de arterias humanas y con objeto de aprovechar la información existente, se presenta un método no lineal de *correlación de parámetros* entre este tipo de modelos.

Posteriormente, se incorporan planteamientos que consideran la disipación de la energía de deformación en el tiempo (*viscoelasticidad*), presentándose un método de ajuste de parámetros para ensayos cíclicos lentos. Además, se describe un modelo de daño continuo (*pseudoelástico*) aplicable al proceso de angioplastia.

La *remodelación* constituye un aspecto clave en la simulación de la estenosis y de la aterosclerosis. Se define como el cambio de la geometría (*crecimiento*, esto es, modificaciones en volumen o forma) o de las propiedades mecánicas respecto a un estado considerado homeostático. Se han documentado modelos de crecimiento que consideran parámetros globales de las arterias para geometrías y acciones simplificadas. En esta tesis se desarrolla un modelo volumétrico (crecimiento local) adecuado para la simulación de *geometrías arbitrarias tridimensionales*.

Las configuraciones de referencia de las arterias no se encuentran habitualmente libres de tensiones, presentando generalmente niveles significativos de *tensiones iniciales* en estado fisiológico. Esto motiva la modificación de los modelos constitutivos para un análisis más realista. Este aspecto se considera en la tesis revisando los modelos existentes y presentando nuevos planteamientos.

Abstract

The *social importance* of *cardiovascular diseases* motivates the interest in developing *numerical models* for *arterial walls* in order to provide information for medical practice. This is enhanced by considering that those pathologies are strongly related to *mechanical factors*, such as the deformation and stress states. The thesis focuses on the development of mathematical models and algorithms of the mechanical behaviour of the arterial walls, which is developed in a *multidisciplinary framework*.

The above hypothesis of relation between mechanical variables and aspects of clinical importance, is enhanced by developing a statistical study of the *correlation* between the *shear stress* in the intima (internal surface) and the *thickness* of the arterial wall.

The starting point for the formulation of constitutive models is the development of materials of *non-linear* behaviour for *large strains* and *hyperelasticity* (there is no dissipation of energy with deformation). Some of them are *isotropic*, suitable for the simulation of the atheromatous plaque, and others are *anisotropic*, suitable for the layers of healthy arteries. Due to the difficulty in testing arteries and in order to take advantage of existing information, a method is presented for non-linear correlation between those kinds of models.

Then, schemes are included that consider the dissipation of energy with deformation in time (*viscoelasticity*), showing a method for the adjustment of parameters for slowly cycling testings. Also, a model of continuum damage (*pseudoelastic*) suitable for angioplasty processes, is described.

Remodelling constitutes a key feature in order to interpret stenosis and atherosclerosis. It is defined as the change of either geometry (*growth*, i.e. alterations in mass or shape) or mechanical properties with respect to a so-called homeostatic reference state. Several models have been proposed for growth by other authors, mostly considering global parameters of the artery for simplified geometries and loads. In this thesis, a volumetric model is developed suitable for *arbitrary three dimensional geometries*.

Reference configurations for arteries are not usually stress-free, on the contrary they generally have significant levels of *pre-stress* in the physiological state. This motivates the modification of constitutive models for a realistic analysis. This aspect is considered in the thesis reviewing existing models and showing new schemes.

Résumé

L'importance sociale des maladies cardio-vasculaires motive le développement des modèles numériques pour des parois artérielles afin d'obtenir des informations pour la pratique médicale.

Ceci est renforcé en considérant que ces pathologies sont liées fortement aux facteurs mécaniques, comme la déformation et les situations de stress. La thèse se concentre au développement de modèles mathématiques et d'algorithmes de comportement mécanique des parois artérielles, développés dans un cadre multidisciplinaire.

L'hypothèse indiquée, concernant le rapport entre des variables mécaniques et des aspects d'importance clinique, se renforce en développant une étude statistique de la corrélation entre la tension tangentielle dans l'intima (surface interne) et l'épaisseur de la paroi artérielle.

Comme point initial pour formuler des modèles constitutives, on développe des matériaux non linéaires, avec une grande déformation et hyperélastiques (en se déformant, il n'y a pas de dissipation d'énergie). Quelques matériaux sont isotropes, applicables à la simulation de la plaque athéromateuse. D'autres sont anisotropes, appropriés aux couches d'artères saines. A cause de la difficulté d'expérimenter les artères humaines et en profitant de l'avantage d'informations existantes, une méthode est présentée pour une corrélation de paramètres non linéaire entre ce type de modèles.

Ensuite, des schémas, considérant la dissipation d'énergie avec la déformation au cours du temps (viscoélasticité), sont incorporés, en présentant une méthode d'ajustement de paramètres pour des testes de cycle lent. De plus, un modèle d'un damage continu (pseudo élasticité) est décrit, applicables aux procédés angioplasties.

Le remodelage constitue d'un aspect-clé dans la simulation de la sténose et de l'athérosclérose. Il est défini comme le changement de la géométrie (croissance, i.e. changements de volume ou de forme) ou des propriétés mécaniques par rapport à un état de référence homéostatique. Plusieurs modèles de croissance ont été proposés par d'autres auteurs qui, en général, considèrent des paramètres globaux des artères pour des géométries et des charges simplifiées. En cette thèse, un modèle volumétrique (croissance locale) a été développé, qui est applicable pour des géométries trois dimensionales arbitraires.

Dans la plupart des cas, les configurations veineuses de référence ne sont pas libres de tension. Au contraire, ils ont généralement des niveaux significatifs de tensions initiales dans l'état physiologique. Ceci motive la modification des modèles constitutifs pour une analyse réaliste. Cet aspect est considéré dans la thèse en révisant des modèles existants et en présentant de nouveaux schémas.

Índice general

Resumen	VII
Abstract	IX
Résumé	XI
Índice de figuras	XVII
Índice de cuadros	XXI
Agradecimientos	XXIII
Notaciones	XXV
1. Introducción, objetivos y alcance	1
1.1. Motivación	1
1.2. Aproximación biológica y médica	2
1.2.1. Biología, medicina y biomecánica	2
1.2.2. Tejidos biológicos blandos	3
1.2.3. El sistema cardiovascular	5
1.2.4. Estructura de la pared arterial	6
1.2.5. Patologías cardiovasculares	7
1.2.6. La aterosclerosis	8
1.3. Aspectos mecánicos relevantes	11
1.4. Estado de la técnica	13
1.5. Objetivos, alcance y aportaciones de la tesis	14
1.5.1. Objetivos	14
1.5.2. Alcance y aportaciones de la tesis	17
1.6. Entorno de simulación	19
1.6.1. Reconstrucción geométrica tridimensional	19
1.6.2. Modelización del fluido	20
1.6.3. Propiedades de las paredes arteriales	21
1.6.4. Modelos de cálculo de las paredes arteriales	21

2. Correlación de variables mecánicas con aspectos clínicos	23
2.1. Introducción y objetivos	23
2.2. Geometría	24
2.3. Acciones	26
2.4. Tratamiento estadístico	32
2.5. Resultados	34
2.6. Criterios de correlación	37
3. Materiales hiperelásticos para paredes arteriales	49
3.1. Mecánica de medios continuos e hiperelasticidad	50
3.1.1. Cinemática	50
3.1.2. Tensiones	51
3.1.3. Potencia de deformación	52
3.1.4. Hiperelasticidad	52
3.2. Hiperelasticidad isótropa	54
3.2.1. Función de los invariantes	54
3.2.2. Función de los alargamientos principales	55
3.2.3. Algunos materiales hiperelásticos isótropos	57
3.2.4. Implementación	58
3.2.5. Ensayos	59
3.3. Hiperelasticidad anisótropa	71
3.3.1. Isotropía transversal	71
3.3.2. Anisotropía con dos familias de fibras	74
3.3.3. Algunos materiales hiperelásticos anisótropos	74
3.3.4. Implementación	76
3.3.5. Ensayos	78
3.4. Comentarios a los modelos	83
3.5. Correlación entre modelos constitutivos hiperelásticos	85
3.5.1. Introducción y objetivos	85
3.5.2. Método de correlación no lineal de modelos	86
3.5.3. Ejemplos de aplicación	89
4. Viscoelasticidad y pseudoelasticidad en paredes arteriales	97
4.1. Viscoelasticidad	97
4.1.1. Viscoelasticidad generalizada de Maxwell	98
4.1.2. Viscoelasticidad generalizada de Kelvin-Voigt	100
4.1.3. Comparación entre modelos viscoelásticos	102
4.1.4. Método de ajuste de parámetros	103
4.1.5. Implementación	107
4.1.6. Ensayos	107
4.1.7. Comentarios a los modelos viscoelásticos	110
4.2. Pseudoelasticidad y daño en paredes arteriales	111
4.2.1. Pseudoelasticidad y efecto Mullins	111
4.2.2. Daño isótropo	112
4.2.3. Implementación	114

4.2.4. Ensayo	114
4.2.5. Mejora del modelo	114
5. Remodelación y presolicitación en paredes arteriales	117
5.1. Introducción a la remodelación y objetivos	117
5.2. Aproximación fenomenológica a la remodelación	118
5.2.1. Variación de la presión	120
5.2.2. Variación del flujo	122
5.3. Formulación de modelos de crecimiento	123
5.3.1. Modelo de crecimiento de Fung	124
5.3.2. Formulación general del crecimiento volumétrico	124
5.4. Modelo de crecimiento de Taber	126
5.5. Modelo generalizado de crecimiento	127
5.5.1. Observaciones al modelo	130
5.5.2. Complementos al modelo generalizado de crecimiento	131
5.6. Implementación del modelo de crecimiento	136
5.7. Ensayos de crecimiento	136
5.8. Presolicitación en paredes arteriales	151
5.8.1. Introducción y objetivos	153
5.8.2. Método de apertura en ángulo	155
5.8.3. Desarrollo del modelo	155
5.8.4. Relación entre el crecimiento y la presolicitación	158
6. Aplicaciones	161
6.1. Ajuste de modelos a partir de experimentos	161
6.1.1. Metodología y resultados del ajuste mecánico	162
6.1.2. Metodología y ajuste del ángulo de apertura	169
6.2. Aplicación en geometrías simplificadas con tensiones residuales	174
6.2.1. Desarrollo del modelo	174
6.2.2. Incorporación del modelo de presolicitación	180
6.3. Modelización de una arteria coronaria de geometría real	184
6.3.1. Parámetros adoptados	184
6.3.2. Tratamiento de la geometría	185
6.3.3. Acciones consideradas	187
6.3.4. Resultados	187
6.3.5. Incorporación de crecimiento	191
6.4. Modelización de un proceso de estenosis	196
6.4.1. Planteamiento del modelo	196
6.4.2. Resultados	198
6.4.3. Comentarios a los resultados	200
7. Conclusiones, aportaciones y trabajo futuro	205
7.1. Conclusiones	205
7.2. Principales aportaciones	208
7.3. Futuras líneas de investigación	209

A. Convexidad y estabilidad material	211
A.1. Conceptos iniciales	211
A.2. Estabilidad sin cambio en los ejes principales de deformación	212
A.3. Convexidad	213
A.4. Estabilidad bajo cargas muertas: caso general	213
A.5. Conceptos relacionados con estabilidad y convexidad	214
A.6. Estudio de la estabilidad de materiales	216
A.7. Representación gráfica de funciones de densidad de energía	217
A.7.1. Materiales isótropos	217
A.7.2. Materiales anisótropos	221
B. El proyecto MOTRICO	223
B.1. Resumen de la propuesta del proyecto MOTRICO	223
B.1.1. Beneficio social	223
B.1.2. Objetivos	223
B.2. Equipo de trabajo	225
C. Implementación en un sistema de elementos finitos	227
C.1. Acerca de FEAP	227
C.2. Relación de instrucciones y subrutinas	228
D. Conceptos fundamentales de hemodinámica	233
D.1. Introducción y objetivos	233
D.2. Ecuaciones de Navier-Stokes y fluidos newtonianos	234
D.3. Formulación débil del problema de Navier-Stokes	235
D.4. Los flujos de Poiseuille y de Womersley	236
D.5. Caracterización de flujo	238
D.6. Interacción fluido-estructura	240
E. Principios variacionales mixtos y elementos finitos	241
E.1. El principio de los trabajos virtuales	241
E.2. Principios de la energía potencial total estacionaria	243
E.2.1. Formulaciones en desplazamientos	243
E.2.2. Método de los multiplicadores de Lagrange	244
E.2.3. Principio variacional de Simó-Taylor-Pister	245
E.2.4. El principio variacional de Hu-Washizu	246
E.3. Formulación mixta del método de los elementos finitos	247
E.4. Ensayos	248
Bibliografía	251
Índice alfabético	263

Índice de figuras

1.1. Ligamento de unión del fémur con el peroné	3
1.2. Modelo de tejido blando	5
1.3. Estructura de la pared arterial	7
1.4. Angiografía y ultrasonidos	9
1.5. Esquema de evolución de la aterosclerosis	10
2.1. Superficie interna	25
2.2. Superficie externa	25
2.3. Parches de las superficies interna y externa	26
2.4. Mallado de un parche volumétrico	27
2.5. Parches volumétricos y contornos de la malla	27
2.6. Mallado en triángulos de la superficie interior	28
2.7. Detalle de la nube de puntos en los que se definen las acciones	30
2.8. Contorno de espesores nodales	30
2.9. Contorno de presiones nodales	31
2.10. Contorno de módulos de tensiones tangenciales nodales	31
2.11. Vectores tensión tangencial nodal	32
2.12. Diagrama de bloques del proceso de correlación	34
2.13. Correlación para el caso Ω -t	36
2.14. Correlación entre tensiones tangenciales	37
2.15. Esquema de estimación de la dirección y sentido del flujo	39
2.16. Espesores en el caso JFG	41
2.17. Módulos de tensiones tangenciales en el caso JFG	42
2.18. Errores de correlación del módulo del cortante en el caso JFG	42
2.19. Espesores en el caso JAB	43
2.20. Módulos de tensiones tangenciales en el caso JAB	43
2.21. Errores de correlación del módulo del cortante en el caso JAB	44
2.22. Espesores en el caso RCO	44
2.23. Módulos de tensiones tangenciales en el caso RCO	45
2.24. Errores de correlación del módulo del cortante en el caso RCO	45
2.25. Espesores en el caso RMS	46
2.26. Módulos de tensiones tangenciales en el caso RMS	46
2.27. Errores de correlación del módulo del cortante en el caso RMS	47
3.1. Cinemática y tensiones	51
3.2. Esquema de ensayo unidireccional	59
3.3. Ensayo unidireccional. Material de Saint Venant-Kirchhoff	64

3.4. Ensayo unidireccional. Material neohookeano	64
3.5. Ensayo unidireccional. Material neohookeano modificado . . .	65
3.6. Ensayo unidireccional. Material de Mooney-Rivlin	65
3.7. Ensayo unidireccional. Material de Yeoh	66
3.8. Ensayo unidireccional. Material de Blatz y Ko	66
3.9. Ensayo unidireccional. Material de Ogden	67
3.10. Ensayo unidireccional. Material de alargamiento logarítmico .	67
3.11. Esquema de inflado de un cilindro	69
3.12. Inflado de un cilindro. Tensiones circunferenciales	70
3.13. Inflado de un cilindro. Presiones interiores	70
3.14. Esquema de inflado de un globo	72
3.15. Inflado de un globo. Tensiones circunferenciales	72
3.16. Inflado de un globo. Presiones interiores	73
3.17. Generación automática de direcciones	78
3.18. Material de Weiss. Estiramiento sin coacción lateral	79
3.19. Material de Weiss. Estiramiento con coacción lateral	79
3.20. Material de Weiss. Estiramiento bidireccional	80
3.21. Material de Almeida. Acortamiento en dirección de las fibras .	81
3.22. Material de Almeida. Acortamiento en dirección transversal .	81
3.23. Material de Almeida. Acortamiento sin confinamiento	82
3.24. Geometría y propiedades de la arteria carótida de un conejo .	82
3.25. Ensayo de arteria carótida. Materiales de los modelos	83
3.26. Ensayo de arteria carótida. Esquema de la malla	84
3.27. Ensayo de arteria carótida. Evolución del radio	84
3.28. Modelos de Holzapfel ajustado y de Fung	91
3.29. Ajuste del modelo de Holzapfel. Error puntual del ajuste . . .	92
3.30. Ensayo unidireccional con $\lambda_z = 1,5$	92
3.31. Ensayo unidireccional con $\lambda_z = 1,7$	93
3.32. Ensayo unidireccional con $\lambda_z = 1,9$	93
3.33. Ajuste del modelo de Ogden. Error puntual del ajuste	94
3.34. Ajuste del modelo de Ogden. Ensayo unidireccional con $\lambda_z = 1,7$	95
4.1. Esquema del modelo generalizado de Maxwell	98
4.2. Esquema del modelo generalizado de Kelvin-Voigt	101
4.3. Viscoelasticidad generalizada de Maxwell. Ensayo de relajación	109
4.4. Viscoelasticidad generalizada de Maxwell. Ensayo de fluencia .	109
4.5. Viscoelasticidad de Kelvin-Voigt. Ensayo de relajación	110
4.6. Cargas cíclicas presentando el efecto Mullins	112
4.7. Proceso de angioplastia	113
4.8. Ensayo de tracción simple en un material con modelo de daño	116
5.1. Esquema de relación entre remodelación y tensiones residuales	118
5.2. Formas de crecimiento	120
5.3. Esquema del modelo de crecimiento según Fung	124
5.4. Esquema de la descomposición multiplicativa por crecimiento .	125

5.5. Esquema de las configuraciones consideradas por Taber	126
5.6. Esquema de los ejes fundamentales del crecimiento	128
5.7. Esquema del ensayo de crecimiento a nivel elemental	136
5.8. Desplazamiento impuesto. Evolución de la tensión σ_u	140
5.9. Desplazamiento impuesto. Evolución de la tensión σ_v	141
5.10. Desplazamiento impuesto. Crecimiento volumétrico	141
5.11. Fuerza impuesta. Evolución de la tensión σ_u	142
5.12. Fuerza impuesta. Evolución de la tensión σ_v	142
5.13. Fuerza impuesta. Crecimiento volumétrico	143
5.14. Ensayo de hipertensión. Evolución de la presión	144
5.15. Ensayo de hipertensión. Evolución del espesor	144
5.16. Ensayo de hipertensión. Velocidad de crecimiento volumétrico	145
5.17. Ensayo de hipertensión. Crecimiento volumétrico a los 60 días	146
5.18. Ensayo de hipertensión. Tensión circunferencial	147
5.19. Ensayo de hipertensión. Tensiones circunferenciales residuales	148
5.20. Esquema del ángulo de apertura del ensayo	148
5.21. Ensayo de hipotensión. Evolución de la presión	149
5.22. Ensayo de hipotensión. Evolución del espesor	149
5.23. Crecimiento por flujo. Configuraciones inicial y a los 60 días	150
5.24. Crecimiento por flujo. Evolución del radio interior	151
5.25. Crecimiento por flujo. Evolución del espesor	152
5.26. Crecimiento por flujo. Velocidad de crecimiento volumétrico	152
5.27. Crecimiento por flujo. Crecimiento volumétrico a los 60 días	153
5.28. Configuración abierta de un anillo arterial	156
5.29. Descomposición multiplicativa por tensiones iniciales	156
5.30. Configuraciones asociadas al crecimiento y a la presolicitación	160
6.1. Estructuras de las arterias carótida y esplénica	162
6.2. Dispositivo de ensayos	163
6.3. Ensayo de la arteria carótida	163
6.4. Detalles de la sujeción de la muestra	164
6.5. Resultados experimentales sobre distintas tipologías arteriales	165
6.6. Evolución experimental de la presión con el alargamiento . . .	165
6.7. Ajuste de los modelos de Ogden y de Holzapfel	167
6.8. Ajuste del modelo generalizado de viscoelasticidad de Maxwell	168
6.9. Imagen de la muestra cerrada y poligonales dato de los ajustes	170
6.10. Ajuste de los contornos de la muestra cerrada	171
6.11. Error del ajuste del contorno exterior de la muestra cerrada . .	171
6.12. Imagen de la muestra abierta y poligonal dato del ajuste . . .	172
6.13. Ajuste del contorno interior de la muestra abierta	173
6.14. Error del ajuste del contorno interior de la muestra abierta . .	173
6.15. Tensiones residuales. Perspectiva y configuración inicial	175
6.16. Tensiones residuales. Proceso de cierre e inflado	175
6.17. Tensiones principales máximas en el instante de cierre	176
6.18. Tensiones principales máximas para presión máxima	177

6.19. Inflado con tensiones residuales circunferenciales	177
6.20. Inflado sin tensiones residuales circunferenciales	178
6.21. Esfuerzo axil con tensiones residuales circunferenciales	178
6.22. Esfuerzo axil sin tensiones residuales circunferenciales	179
6.23. Presión interna. Comparación de casos	179
6.24. Esfuerzo axil. Comparación de casos	180
6.25. Sensibilidad de la presión a los ángulos de anisotropía	181
6.26. Sensibilidad del axil a los ángulos de anisotropía	181
6.27. Comparación de los casos con y sin presolicitación	183
6.28. Detalle de mallado de un parche volumétrico	185
6.29. Mallado de la pared arterial	186
6.30. Condiciones de contorno en la geometría	186
6.31. Vectores de desplazamiento en la configuración de referencia	187
6.32. Material de Ogden. Contornos de desplazamientos	188
6.33. Material de Ogden. Contornos de tensiones principales	188
6.34. Material de Ogden. Tensiones principales en sección media	189
6.35. Material de Holzapfel. Contornos de desplazamientos	189
6.36. Material de Holzapfel. Contornos de tensiones principales	190
6.37. Material de Holzapfel. Tensiones principales en sección media	190
6.38. Velocidad de crecimiento por tensiones locales	192
6.39. Coeficiente volumétrico por crecimiento bajo tensiones locales	193
6.40. Velocidad de crecimiento con sensibilidad al flujo	194
6.41. Coeficiente volumétrico por crecimiento sensible al flujo	195
6.42. Modelo de estenosis. Gráfico tridimensional de la malla	197
6.43. Modelo de estenosis. Sección transversal	197
6.44. Ley de tensiones tangenciales desde el extremo de estenosis	198
6.45. Modelo de estenosis. Evolución del radio interior	199
6.46. Modelo de estenosis. Evolución del espesor	199
6.47. Modelo de estenosis. Evolución del grado de estenosis	200
6.48. Modelo de estenosis. Contornos de tensiones principales	201
6.49. Modelo de estenosis. Contornos de velocidades de crecimiento	202
6.50. Modelo de estenosis. Contornos de coeficientes volumétricos	203
A.1. Convexidad. Material de Saint Venant-Kirchhoff	218
A.2. Convexidad. Material neohookeando	218
A.3. Convexidad. Material neohookeando modificado	219
A.4. Convexidad. Material de alargamientos logarítmicos	219
A.5. Convexidad. Material de Ogden	220
A.6. Convexidad. Material de Varga	220
A.7. Convexidad. Material de Weiss	221
A.8. Convexidad. Material de Almeida	222
A.9. Convexidad. Material de Holzapfel	222
E.1. Inflado de un cilindro. Tensiones circunferenciales	249
E.2. Inflado de un cilindro. Presiones interiores	250

Índice de cuadros

1.1. Propiedades mecánicas de algunos tejidos biológicos blandos . . .	4
1.2. Tamaño de arterias caninas	6
1.3. Composición de la media y adventicia para varias arterias . . .	7
1.4. Respuestas pasiva, activa y de remodelación	16
2.1. Generación de elementos triangulares a partir de hexaedros . .	27
2.2. Nombre y descripción de cada caso	35
2.3. Datos generales de la correlación	35
2.4. Correlación lineal para cada caso	35
2.5. Coeficientes de correlación y determinación múltiples	35
2.6. Estimación de la bondad del ajuste para cada caso	36
2.7. Niveles de significación para las distintas metodologías y casos	40
2.8. Error medio de los casos para las distintas metodologías	40
2.9. Error medio de los casos JFG, JAB y RMS	41
2.10. Coeficientes de correlación considerando el universo muestral .	41
3.1. Materiales isótropos en función de los invariantes	60
3.2. Materiales isótropos en función de los alargamientos principales	61
3.3. Código Fortran de materiales hiperelásticos isótropos	62
3.4. Resultados teóricos de ensayo unidireccional	63
3.5. Parámetros de inflado de un cilindro	68
3.6. Resultados teóricos de inflado de un cilindro	69
3.7. Resultados teóricos de inflado de un globo	71
3.8. Parámetros para la media y adventicia	76
3.9. Código Fortran de materiales hiperelásticos anisótropos	77
3.10. Parámetros utilizados en los ensayos con material de Weiss . .	78
3.11. Parámetros utilizados en los ensayos con material de Almeida	80
3.12. Expresión de los invariantes y pseudo-invariantes	87
3.13. Parámetros de Fung para las arterias carótidas de conejos . . .	90
3.14. Iteraciones del método para el ajuste del modelo de Holzapfel	90
3.15. Parámetros obtenidos en el ajuste del modelo de Holzapfel . .	91
4.1. Parámetros de viscoelasticidad de Maxwell y Kelvin-Voigt . .	102
4.2. Esquema de viscoelasticidad generalizada de Maxwell	108
4.3. Parámetros viscoelásticos de Maxwell para la media	111
4.4. Esquema de daño isótropo con evolución de Miehe	115

5.1.	Esquema general del modelo de crecimiento	135
5.2.	Esquema de implementación del modelo de crecimiento	137
5.3.	Cálculo de la rotación propia del gradiente de deformación	138
5.4.	Estimación de los valores no locales de influencia	139
5.5.	Parámetros del modelo de crecimiento para la media	143
5.6.	Esquema de cálculo para el modelo con presolicitud	157
6.1.	Diámetros en reposo de algunas muestras ensayadas	164
A.1.	Condiciones para los materiales de Ogden y de Holzapfel	217
C.1.	Materiales hiperelásticos isótropos implementados	229
C.2.	Materiales hiperelásticos anisótropos implementados	229
C.3.	Generación automática de direcciones, viscoelasticidad y daño	230
C.4.	Modelos de crecimiento y remodelación	230
C.5.	Subrutinas implementadas	231
D.1.	Variables hemodinámicas medias humanas	239

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco las aportaciones en el desarrollo de la tesis al profesor José M.^a Goicolea, y a los miembros y antiguos miembros del Grupo de Mecánica Computacional de la Universidad Politécnica de Madrid: Juan J. Arribas, Yolanda Cabrero, Francisco J. Calvo, Felipe Gabaldón, David García, Juan C. García, Adelardo González, Luis Lacoma, Luis Martínez, Antonio Martínez, Francisco Martínez, Santiago Muelas, Juan A. Navarro, Sosthène Ndikuriyo, Francisco Riquelme e Ignacio Romero.

Sin ánimo de aspirar a una lista extensiva, otros profesores e investigadores de la escuela a los que debo reconocer su apoyo son: Carlos Corona, Kátia Frassi, Elena González, Norberto Hurtado, Lee Margetts, Irene Revelo, Robert Rivera, Isabel Rodríguez y Francisco J. Rojo.

Expreso mi agradecimiento al resto de los componentes del proyecto *Modelado TRIdimensional y simulación de las arterias COronarias* (MOTRICO), financiado por el Ministerio de Educación y Cultura de España (n.º TIC2000-1635-C04-03); y al Departamento de Ciencia de Materiales de la E.T.S.I. Caminos, C. y P., especialmente a José M. Atienza, por su colaboración en el proyecto multidisciplinar *Modelización mecánica de vasos sanguíneos*, financiado por la Universidad Politécnica de Madrid (Ref. 14.585). Asimismo, agradezco la colaboración de la Fundación para la Investigación y Desarrollo en el Área Cardiovascular, especialmente a Javier Goicolea, Marcelo Sanmartín y Carlos García. En este contexto debo citar al Ministerio de Ciencia y Tecnología por haberme concedido una beca de Formación de Personal Investigador (FP2000-6558).

Expreso mi deuda con el Departamento de Investigación y Desarrollo de NECSO Entrecanales Cubiertas por haber permitido mi primer contacto con actividades de investigación y desarrollo tecnológico, especialmente a Juan M. Mieres, Sonia Bautista y Estrella Moreno.

Por último, destaco el hecho de que la tesis no se hubiese podido llevar a cabo sin un entorno familiar y afectivo adecuado; a mi familia va dedicada la tesis, y entre otras personas cercanas, si bien la lista no es en absoluto extensiva y en ella podrían aparecer muchas de las personas ya citadas, quisiera mencionar explícitamente a Els Claes, José M.^a Blanco, Carlos Nieves, Silvia Onsurbe, Jorge Pumariega, Pedro Sáenz, Fernando Vallano y Alejandro Yaniz.

Javier Rodríguez

Notaciones

A continuación se exponen las principales notaciones adoptadas en el desarrollo de la tesis, ordenadas según el contexto en el que aparecen:

\mathbb{R}	Cuerpo de los números reales
\mathbb{R}^n	Espacio euclídeo de dimensión n
δ_{ab}	Delta de Kronecker correspondiente a los índices a y b
$\mathbf{A}, [A_{ab}]$	Tensor de segundo orden y componentes
$\mathbb{A}, [\mathcal{A}_{abcd}]$	Tensor de cuarto orden y componentes
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{0}, \mathbf{1}$	Producto de tensores, tensor nulo y tensor identidad
\mathbf{Q}	Tensor ortogonal
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$	Aplicación de un tensor sobre un vector
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	Contracción doble de tensores
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	Producto tensorial de vectores
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	Producto vectorial
$ \mathbf{a} , \mathbf{A} $	Norma de un vector y de un tensor
$\text{adj } \mathbf{A}$	Tensor adjunto
\mathbf{A}^T	Tensor transpuesto
$M^{3 \times 3}$	Matrices cuadradas de orden 3
$M_+^{3 \times 3}$	Matrices cuadradas de orden 3 con determinante positivo
Ω	Universo muestral
n	Número de datos muestrales
\bar{x}, \bar{y}	Valor medio de los valores muestrales
gdl	Grados de libertad
β_0, β_1	Coefficientes de correlación
scrl	Suma de cuadrados debida a la regresión lineal
scarl	Suma de cuadrados alrededor de la regresión lineal
$F_{m,n}$	F de Snedecor con m y n grados de libertad
α	Nivel de significación
e	Espesor
Q_{ab}	Cuartil a respecto a la variable b
t	Tiempo
\mathcal{B}_t	Configuración en tiempo t
C^∞	Conjunto de funciones suaves
\mathbf{X}, \mathbf{x}	Vectores posición en las conf. inicial y deformada
$\{X_A\}, \{x_a\}$	Coordenadas en las conf. inicial y deformada
φ	Función transformación del movimiento
\mathbf{v}, \mathbf{a}	Vectores velocidad y aceleración

Grad, grad	Gradientes en las conf. inicial y deformada
\mathbf{F}	Gradiente de deformación
J	Determinante del jacobiano, coeficiente volumétrico
λ	Alargamiento
\mathbf{R}	Tensor rotación
\mathbf{U}, \mathbf{V}	Tensores de alargamiento derecho e izquierdo
$\{\mathbf{N}_a\}, \{\mathbf{n}_a\}$	Direcciones principales en las conf. inicial y deformada
$\{\lambda_a\}$	Alargamientos principales
\mathbf{C}, \mathbf{b}	Tensores de Cauchy-Green por la derecha y por la izquierda
\mathbf{E}	Tensor de Green
\mathbf{e}	Tensor de Almansi
ε	Parte simétrica del gradiente de desplazamientos en la conf. deformada
\mathbf{d}	Parte simétrica del gradiente de velocidades en la conf. deformada
$\{I_a\}$	Invariantes y pseudo-invariantes de anisotropía de \mathbf{C}
$\overline{\mathbf{C}}$	Tensor de Cauchy-Green por la derecha isocórico
$\{\bar{I}_a\}$	Invariantes y pseudo-invariantes de anisotropía isocóricos
\mathbf{f}, \mathbf{t}	Fuerza y tensión aplicadas sobre una superficie
\mathbf{N}, \mathbf{n}	Vectores normales unitarios en las conf. inicial y deformada
S, s	Superficies en las conf. inicial y deformada
V, v	Volúmenes en las conf. inicial y deformada
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensiones de Cauchy
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	Tensión corratacional de tensiones
\mathbf{P}, \mathbf{S}	Primer y segundo tensores de Piola-Kirchhoff
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de Kirchhoff
$\mathbf{S}^{(1)}$	Tensor de Biot
\mathbb{C}, \mathbf{c}	Tensores de elasticidad en las conf. inicial y deformada
\mathcal{P}_{int}	Potencia específica en la conf. deformada
Ψ	Densidad de energía libre en la conf. inicial
W	Densidad de trabajo realizado en la conf. inicial
W_{vol}	Densidad de trabajo volumétrico realizado en la conf. inicial
W_{iso}	Densidad de trabajo isocórico realizado en la conf. inicial
W^∞	Función densidad de energía a tiempo infinito
$\{\Upsilon_a\}$	Energías de disipación asociadas a variables internas
W^0	Función de densidad de energía a tiempo inicial
ϕ	Superficie de daño
\hat{W}	Función densidad de energía en la conf. inicial para tensión plana
E	Energía potencial de un sistema mecánico
$\{\Gamma_a, \mathbf{Q}_a\}$	Variables internas de deformación y tensión en visc. de Holzapfel
$\{\gamma_a, \mathbf{q}_a\}$	Variables internas de deformación y tensión en visc. de Simó

\mathcal{B}_g	Configuración virtual de crecimiento libre
$\mathbf{F}_e, \mathbf{F}_g$	Partes elástica y por crecimiento de \mathbf{F}
\mathcal{I}	Superficie de la íntima en la configuración de referencia
\mathbf{X}_{mci}	Punto más cercano a \mathcal{I}
κ_1, κ_2, H_M	Curvaturas máxima, mínima y media
\mathbf{L}, \mathbf{g}	Primera y segunda forma fundamental de una superficie
\mathbf{S}_W	Operador de Weingarten
$\vartheta(h)$	Señal de la íntima a distancia h
\mathcal{B}_0	Configuración de referencia con tensiones iniciales
\mathcal{B}_{zs}	Configuración virtual libre de tensiones
\mathbf{F}_0	Gradiente de deformación de \mathcal{B}_0 respecto a \mathcal{B}_{zs}
\mathbf{F}_r	Gradiente de deformación elástico respecto a \mathcal{B}_{zs}
E, ν	Módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson
λ, μ	Constantes de Lamé
K, G	Módulos volumétrico y tangente
$\{\tau_a, \beta_a^\infty\}$	Tiempos de relajación y factores de energía en visc. de Holzapfel
$\{\tau_a, \gamma_a^0\}$	Tiempos de relajación y factores de energía en visc. de Simó
ζ	Variable de daño continuo
α	Variable fenomenológica de daño
ζ_∞, ι	Máximo daño adimensional y parámetro de saturación al daño
σ_0, τ_0	Tensiones de equilibrio por crecimiento
α	Exponente de decrecimiento de la señal de la íntima
T_θ, T_r, T_τ	Parámetros temporales del modelo de crecimiento

Observaciones:

- Algunas notaciones aparecen repetidas, adoptando su significado según el contexto en el que aparecen.
- Salvo excepciones motivadas por una mayor claridad en la exposición, se hace uso de la misma notación para denotar funciones cuyas imágenes representan el mismo concepto físico, si bien sus variables independientes son distintas.
- Salvo excepciones, los índices de las componentes de vectores o tensores se denotan con letras mayúsculas ($A, B, C \dots$) en la configuración de referencia y con letras minúsculas ($a, b, c \dots$) en la configuración deformada.

Capítulo 1

Introducción, objetivos y alcance

En este capítulo se introducen los principales conceptos biológicos y médicos relacionados con la investigación de la presente tesis doctoral (secciones 1.1 y 1.2), prestándose especial atención a la relevancia de la *biomecánica* en la medicina cardiovascular.

Se presentan además los aspectos mecánicos más relevantes de las paredes arteriales, destacándose el comportamiento fuertemente *no lineal* con *grandes deformaciones*, *anisotropía* por la presencia de fibras de colágeno en direcciones preferentes, *adaptación* frente acciones externas, comportamiento *reológico* y presencia de *tensiones residuales* (sección 1.3). El estado de la técnica se muestra indicando algunos modelos mecánicos de importancia clínica (sección 1.4).

Posteriormente se desarrollan los objetivos de la tesis y se indican el alcance y las aportaciones más relevantes (sección 1.5), centrados principalmente en la formulación y ajuste de *modelos constitutivos*, y especialmente proponiendo un modelo de *crecimiento* aplicable a geometrías arbitrarias tridimensionales.

Por último se enmarca la investigación realizada, presentándose otras tecnologías necesarias para la simulación mecánica de las paredes arteriales, como es la reconstrucción geométrica, la modelización de la sangre-fluido, la adquisición de propiedades mecánicas y los métodos de resolución numérica (sección 1.6).

1.1. Motivación

Actualmente en España las *enfermedades cardiovasculares* son la primera causa de muerte a partir de los 75 años y la segunda entre los 15 y los 74 años (véase LLÁCER ET AL. [2002]). Sólo en la Comunidad de Madrid fallecen

anualmente por enfermedades cardiovasculares aproximadamente 13000 personas, lo que supone el 37,7% de los fallecimientos. En particular, la *aterosclerosis* (que no era una enfermedad común en la antigüedad y ahora supone aproximadamente un 10% de los fallecimientos) es cada vez más frecuente en nuestros días y puede dar lugar a *angina de pecho*, *infarto*, *embolia*, etc. Además, su tratamiento, basado en la *angioplastia transluminal percutánea*, presenta complicaciones (*reestenosis* en aproximadamente entre 50 y 60% de los casos, y entre 25 y 30% tras la introducción de *stent*).

La situación indicada justifica el interés en desarrollar modelos que evalúen la respuesta mecánica de la sangre (fluido) y de la pared arterial (sólidos), aportando información al *diagnóstico* y la *terapia* cardíaca. Uno de los componentes de mayor importancia en estos modelos son las relaciones entre el *estado tensional* y el de *deformación* (*ecuaciones constitutivas*), dada la relación existente entre estos estados y la aparición de enfermedades cardiovasculares.

La presente tesis doctoral se centra principalmente en dichas relaciones y en la modelización de los fenómenos de adaptación a cambios mecánicos (en particular a cambios en la presión y en el flujo sanguíneo). Los modelos son aplicables a geometrías arbitrarias reconstruidas a partir de imágenes médicas, aportando información acerca de la aparición y evolución de patologías.

1.2. Aproximación biológica y médica

En esta sección se recogen los principales conceptos biológicos y médicos relacionados con la investigación.

1.2.1. Biología, medicina y biomecánica

Esta tesis doctoral está en relación con diversas disciplinas (*marco multidisciplinar*), algunas de las cuales se indican a continuación:

- a) *Biología* es la ciencia de la vida. Este término fue introducido en Alemania en 1800 y popularizado por el naturalista francés Jean Baptiste de Lamarck con el fin de reunir en él un número creciente de disciplinas que se referían al estudio de las formas vivas.
- b) *Anatomía* es la rama de la biología relativa a la organización estructural de los seres vivos.
- c) *Fisiología* es la rama de la biología que se ocupa de los procesos físicos y químicos que tienen lugar en los organismos durante la realización de sus funciones vitales. Este término está íntimamente ligado al de anatomía, hablándose a veces de *anatomía funcional*.
- d) *Medicina* es la ciencia que trata de la curación y prevención de la enfermedad, así como del mantenimiento de la salud.

e) *Biomecánica* es la *mecánica* aplicada a la biología. Citando a FUNG [1993]:

«Biomechanics aims to explain the mechanics of life and living. From molecules to organism everything must obey the laws of mechanics.»

La biomecánica permite entender el funcionamiento normal de los organismos, predecir sus cambios debidos a alteraciones y proponer métodos de intervención artificial. Por tanto, el *diagnóstico* (determinación de la naturaleza de la enfermedad) y la *terapia* (tratamiento de la enfermedad) están íntimamente ligados a la biomecánica.

1.2.2. Tejidos biológicos blandos

Se entiende por *tejidos biológicos blandos* (*conectivos*) el conjunto de tejidos que une, soporta y protege a los organismos vivos, distinguiéndose de los *tejidos duros* (*mineralizados*) por su *gran flexibilidad* y *bajas propiedades mecánicas*. Ejemplos de tejidos blandos son los tendones, ligamentos, músculos, vasos sanguíneos y cartílagos articulares (véase la figura 1.1).

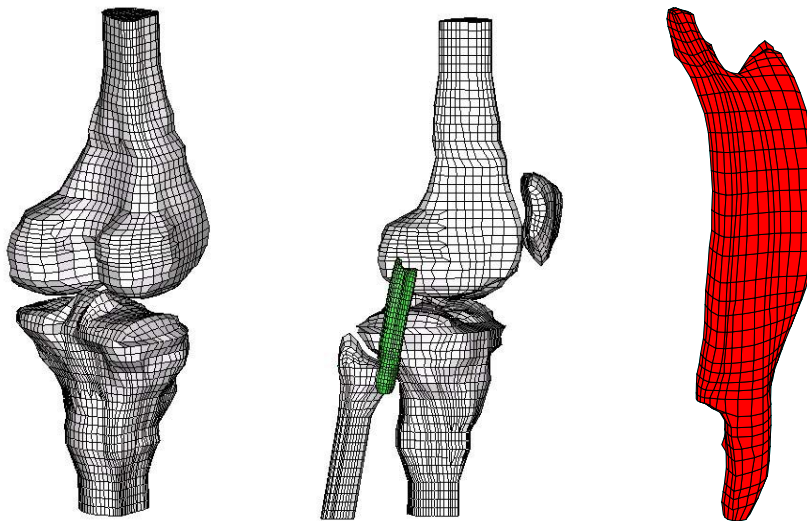


Figura 1.1: Ligamento de unión del fémur con el peroné (modelo aportado por el Grupo de Biomecánica de la División de Mecánica Estructural de la Universidad de Zaragoza)

Los tejidos blandos conectivos son estructuras complejas reforzadas con fibras. Sus propiedades mecánicas (véase el cuadro 1.1) dependen de la concentración y disposición de elementos como la *elastina*, *colágeno* y *células musculares*, que se describen a continuación según FUNG [1993]:

- a) La *elastina* es una proteína que constituye el material biológico de comportamiento más lineal que se conoce, manteniéndose las características elásticas hasta un alargamiento $\lambda = l/l_0 \approx 1,6$, siendo l la longitud deformada y l_0 la longitud inicial. Su módulo de elasticidad longitudinal (esto es, la relación entre la tensión y la deformación) es $E \approx 0,6$ MPa.
- b) El *colágeno* es un elemento estructural básico para tejidos duros y blandos en animales, aportándoles integridad y resistencia mecánica. Por ejemplo, el contenido de colágeno en los tendones es aproximadamente veinte veces superior al de elastina. Se trata de una proteína que como la elastina representa uno de los mayores componentes de la *matriz extracelular* de los tejidos blandos. Se puede presentar en una gran variedad de formas. Su módulo de elasticidad longitudinal (E) es de aproximadamente 1000 MPa con una resistencia a tracción de entre 50 y 100 MPa.
- c) Los *músculos* pueden ser clasificados en *lisos* y *estriados*, según el aspecto, y siendo los primeros no controlados por nervios voluntarios. Los músculos de los vasos sanguíneos son lisos, denominándose *músculos lisos vasculares*. Están compuestos fundamentalmente por filamentos proteicos de *actina* y *miosina*, siendo los primeros mucho más finos que los segundos. Pueden estar en *estado pasivo* o *activo* tras una estimulación eléctrica que provoca la contracción.

<i>Material</i>	<i>Resistencia última (MPa)</i>	<i>Deformación última (%)</i>	<i>Colágeno (% seco)</i>	<i>Elastina (% seco)</i>
Tendón	50 – 100	10 – 15	75 – 85	< 3
Ligamento	50 – 100	10 – 15	70 – 80	10 – 15
Aorta	0,3 – 0,8	50 – 100	25 – 35	40 – 50
Piel	1 – 20	30 – 70	60 – 80	10 – 15
Cartílago auricular	9 – 40	60 – 120	40 – 120	–

Cuadro 1.1: Propiedades mecánicas de algunos tejidos biológicos blandos según HOLZAPFEL [2000a]

Estos tres elementos son fundamentales en la composición de los tejidos blandos, de hecho, HAYASHI [2001a] propone como modelo de tejido el indicado en la figura 1.2, donde la elastina y el colágeno se esquematizan como muelles (con mayor rigidez en el caso del colágeno) y las células musculares como amortiguadores (disipadores de energía). El esquema es muy simple, no teniendo en cuenta multitud de fenómenos, como es la activación muscular. No obstante, se presenta el modelo con objeto de indicar la importancia de las propiedades micromecánicas de los materiales simples, que se componen para dar lugar al comportamiento macroscópico de los tejidos blandos.

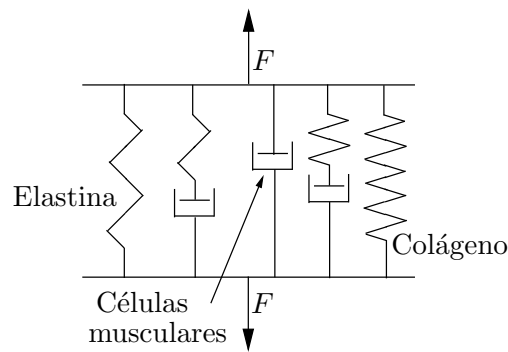


Figura 1.2: Modelo de tejido blando según HAYASHI [2001a]

1.2.3. El sistema cardiovascular

La primera función del *sistema cardiovascular* es el transporte de masa (sangre), esto es, el transporte de oxígeno, dióxido de carbono, productos nocivos, hormonas, etc. dentro del organismo (véase HUMPHREY [2001b]). Este sistema consta de un *corazón*, que sirve de bomba con sus movimientos de *sístole* (contracción) y *diástole* (relajación), de la *sangre*, como medio de conducción y de los *vasos sanguíneos*, a través de los cuales se realiza la circulación.

El sistema circulatorio está dividido en *circulación sistémica*, *pulmonar* y *coronaria*:

- a) En la *circulación sistémica* la sangre es bombeada desde el *ventrículo izquierdo* a través de la *aorta*, y alcanza los *capilares* a través de las *arterias* y *arteriolas* para volver a la *aurícula derecha* a través de las *venas*.
- b) En la *circulación pulmonar* la sangre sale del *ventrículo derecho*, y tras el intercambio de gases en los pulmones termina en la *aurícula izquierda*.
- c) La *circulación coronaria* parte de la aorta y se ocupa del riego de los tejidos del corazón.

El diámetro y espesor de los vasos sanguíneos son diferentes en función de las demandas del árbol vascular. En general, el diámetro de las arterias y el espesor decrece gradualmente conforme aumenta la distancia al corazón, pero la sección transversal total (suma de todos los vasos) aumenta hasta ser máxima en los capilares. En el cuadro 1.2 se indican los tamaños de arterias caninas según CARO ET AL. [1978]. Además, las propiedades de la pared dependen de la posición, así la rigidez y el amortiguamiento (disipación) aumentan al alejarse del corazón con objeto de mantener un flujo sanguíneo aproximadamente constante.

<i>Vaso</i>	<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Espesor (mm)</i>
Aorta torácica	13	0,65
Aorta abdominal	9	0,5
Arteria carótida	5	0,3
Arteria femoral	4	0,4
Arteriola	0,05	0,02
Capilar	0,005	0,001
Vénula	0,04	0,002
Vena cava	10	0,15
Arteria pulmonar	17	0,2

Cuadro 1.2: Tamaño de arterias caninas según CARO ET AL. [1978]

1.2.4. Estructura de la pared arterial

La *pared arterial* está compuesta de tres capas: la *íntima*, la *media* y la *adventicia*; que están separadas por *membranas elásticas* (véase la figura 1.3):

- a) La *superficie luminal* (superficie interna) está compuesta por una capa de *células endoteliales*, denominada *íntima*, que está en contacto con la sangre sometida al esfuerzo cortante del flujo sanguíneo. Esta capa tiene la propiedad de permitir que la sangre permanezca en estado líquido en contacto con ella, principalmente debido a la presencia de *cofactores* para la *antitrombina III*, que actúa como inhibidor de la actuación de la *trombina*.
- b) La capa más gruesa se denomina *media* y presenta la mayor capacidad de soporte de la estructura. Está formada por células musculares, fibras de colágeno, elastina y matriz de relleno. Dependiendo de la zona en que se encuentre la arteria se modifica la relación entre los materiales. Así por ejemplo el porcentaje de elastina es superior en las arterias cercanas al corazón, debido a su función fisiológica de regulación del flujo (véase FAURY [2001]). Bajo condiciones fisiológicas o normales las células musculares están parcialmente contraídas dando lugar al *tono muscular basal*. Estas células musculares son las causantes de la *vasomotricidad* (*vasoconstricción* y *vasodilatación*).
- c) La *adventicia* es la capa externa y consiste principalmente en fibras de colágeno, sustancia intercelular, *fibroblastos* (células cuyo objetivo principal es la formación de sustancia intercelular) y elastina.

En el cuadro 1.3 se recoge la composición de la *media* y la *adventicia* para las arterias pulmonar y torácica según FUNG [1993].

Como órdenes de magnitud (siguiendo a FUNG [1993]), la arteria torácica de un cerdo presenta en la *media* un módulo de elasticidad de 43,25 kPa y en la *adventicia* 4,70 kPa. En el caso de la aorta ascendente, se tiene para la

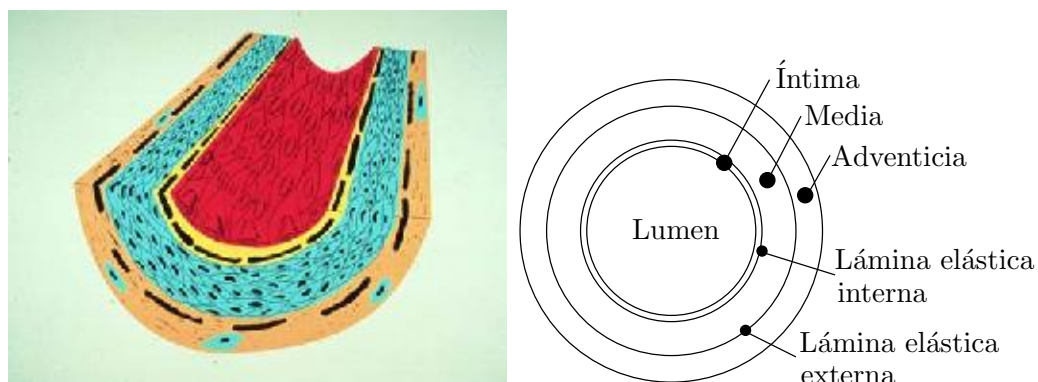


Figura 1.3: Estructura de la pared arterial. En el gráfico de la izquierda se representa en rojo y amarillo la íntima, en azul la media con las células musculares y en naranja la adventicia (en negro se señala la superficie interior de la media y de la adventicia)

media un módulo de elasticidad de 447 kPa y para la adventicia 111,9 kPa. Por último, en la aorta descendente se tiene un módulo de elasticidad de 247,5 kPa para la media y uno de 68,7 kPa para la adventicia.

<i>Componente</i>	<i>Arteria pulmonar</i>	<i>Aorta torácica</i>
<i>Media</i>		
Músculo liso	46,4 ± 7,7 %	33,5 ± 10,4 %
Sustancia intercelular	17,2 ± 8,6 %	5,6 ± 6,7 %
Elastina	9,0 ± 3,2 %	24,3 ± 7,7 %
Colágeno	27,4 ± 13,2 %	36,8 ± 10,2 %
<i>Adventicia</i>		
Colágeno	63,0 ± 8,5 %	77,7 ± 14,1 %
Sustancia intercelular	25,1 ± 8,3 %	10,6 ± 10,4 %
Fibroblastos	10,4 ± 6,1 %	9,4 ± 11,0 %
Elastina	1,5 ± 1,5 %	2,4 ± 3,2 %

Cuadro 1.3: Composición de la media y adventicia para varias arterias según FUNG [1993]

1.2.5. Patologías cardiovasculares

Como ya se ha indicado (sección 1.1), se estima que las enfermedades cardiovasculares son la primera causa en España de muerte a partir de los 75 años y la segunda desde los 15 a los 74 años. Entre las *patologías cardiovasculares* más frecuentes se destacan:

- a) La *hipertensión* es un incremento crónico de la presión sanguínea.
- b) La *trombosis* consiste en el bloqueo de un vaso sanguíneo o una cavidad cardíaca por un *trombo* o *coágulo*.

c) La *aterosclerosis* consiste en un estrechamiento del lumen arterial (fenómeno conocido como *estenosis*) por la formación de una *placa aterosclerótica*. Esta placa consta de:

- Placa de *tejido conjuntivo* (tejido fibroso general de relleno) que surge por espesamiento de la íntima y presenta una superficie lisa y brillante de color amarillo (si bien el centro es blancuzco).
- *Placa ateromatosa (ateroma)* formada por agrupaciones de colesterol y otras sustancias lipídicas.

La aterosclerosis puede dar lugar a angina de pecho, infarto, embolia, etc.

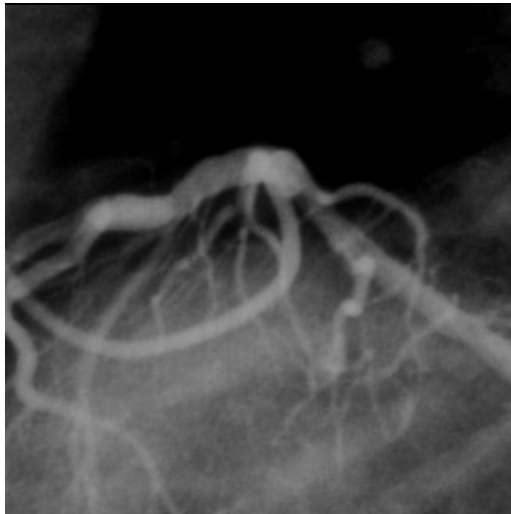
d) El *aneurisma* consiste en la inestabilización mecánica de la pared arterial, produciendo un crecimiento descontrolado localizado.

Entre las distintas modalidades de imágenes para el diagnóstico coronario, las angiografías y las obtenidas por ultrasonidos son las más usuales en entornos hospitalarios. Las *angiografías* (véase la figura 1.4 (a)) se obtienen proyectando un contraste que se inyecta en las arterias. Esta técnica tiene el inconveniente de no aportar información de la morfología arterial, de necesitarse varias proyecciones en planos distintos para la reconstrucción tridimensional y de obtenerse una secuencia de imágenes fuertemente variables debido a la dinámica del corazón. Por otra parte, la técnica de generación de *imágenes intravasculares mediante ultrasonido*, IVUS («IntraVascular Ultrasound System», véase la figura 1.4 (b)), permite estudiar la morfología de la pared del vaso y la composición de la placa. Estas técnicas permiten obtener geometrías reales que pueden ser introducidas en los modelos mecánicos de cálculo. En la sección 1.6.1 se indica la aplicación de este tipo de tecnologías a la reconstrucción tridimensional del vaso, extrayendo la sonda de ultrasonidos a velocidad controlada.

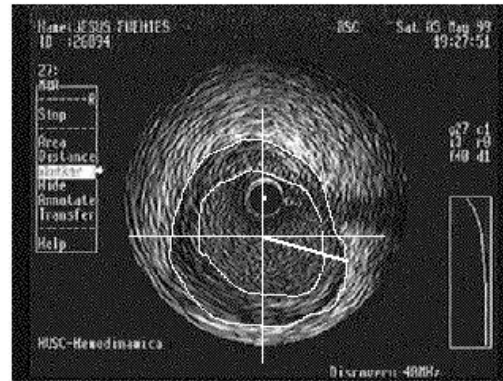
1.2.6. La aterosclerosis

La aterosclerosis no era una enfermedad común en la antigüedad (si bien se han encontrado casos en momias egipcias), volviéndose habitual conforme en las poblaciones se ha ido superando la mortalidad precoz causada por enfermedades infecciosas, y debido a los cambios en las dietas alimenticias, favoreciendo su desarrollo.

Comienzo de la aterosclerosis. Los primeros pasos de la aterosclerosis en el hombre no están todavía claros. Según ZIPES Y LIBBY [1997] su comienzo se puede descomponer en las siguientes etapas:



(a) Angiografía



(b) Ultrasonidos. Se muestra el catéter circular con la sonda de ultrasonidos en su centro, y los contornos interior y exterior de la pared arterial

Figura 1.4: Angiografía y ultrasonidos

1. La presencia de una dieta rica en colesterol y grasas saturadas provoca la acumulación de pequeñas *partículas lipídicas* en la íntima, que a su vez favorecen una mayor acumulación de estas partículas, favoreciendo el *tiempo de residencia* (se ha comprobado en ratones que este tiempo de residencia está relacionado con la aparición de lesiones tempranas en las arterias).
2. Acumulación y adherencia de *leucocitos* que tienden a entrar en la íntima acumulando *lípidos* y transformándose en *células conjuntivas*.

Este proceso se ve favorecido en aquellos lugares de flujo sanguíneo más desordenado.

Evolución del ateroma. La evolución del ateroma puede descomponerse en las siguientes fases (véase el esquema de la figura 1.5):

1. Transporte de células musculares lisas desde la media hasta la íntima y proliferación de dicho tipo de células.
2. Muerte de células musculares en la íntima. Por tanto, la acumulación de células musculares proviene del equilibrio entre las que aparecen según el punto anterior y las que mueren.
3. La matriz extracelular es de mayor importancia en volumen que las células en una placa aterosclerótica avanzada. Además, presenta un papel importante en la remodelación que acompaña la lesión. Durante los primeros tiempos de vida del ateroma el crecimiento de la placa es hacia afuera, en *dirección abluminal*. Este crecimiento incrementa el calibre

de la arteria (proceso denominado *remodelado positivo*) produciendo un movimiento de la matriz extracelular con objeto de acomodarse al crecimiento circunferencial. La estenosis tiende a ocurrir después de que la placa exceda el 40% de la sección transversal.

4. Migración y reproducción de células endoteliales, conforme se desarrollan canales de *microcirculación* (*neovascularización*) en la placa. El aumento de estos canales aumenta la superficie específica, favoreciendo el transporte de *leucocitos*. La microvascularización de la placa favorece también su crecimiento al superarse las limitaciones de aportación de oxígeno y nutrientes.
5. Las placas usualmente desarrollan *áreas calcificadas*.

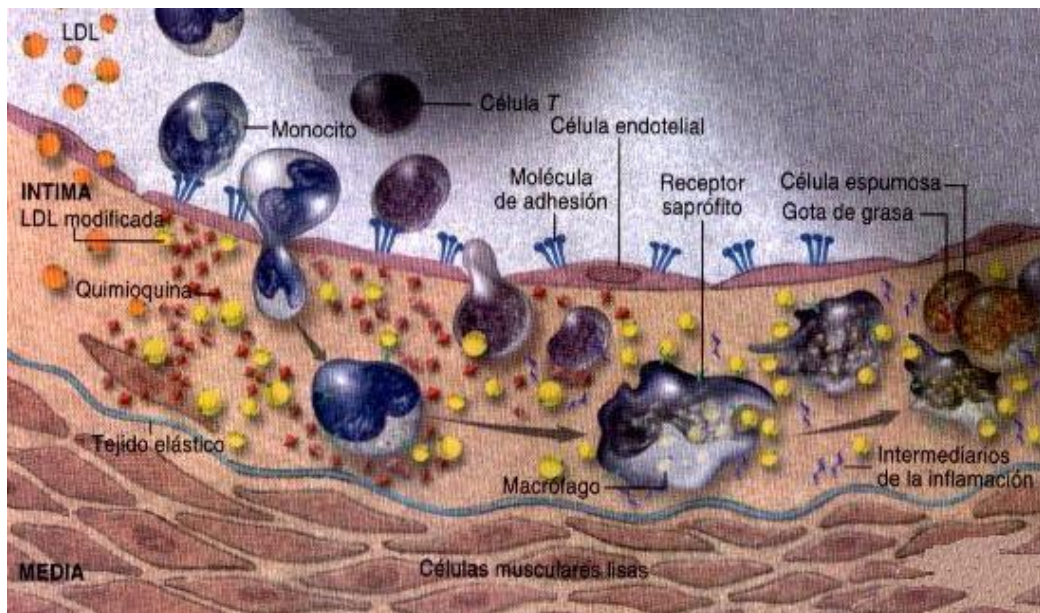


Figura 1.5: Esquema de evolución de la aterosclerosis según LIBBY [2003]

Complicaciones de la aterosclerosis. Actualmente se cree (véase ZIPES Y LIBBY [1997]) que la trombosis (oclusión por partículas) es el elemento que complica una placa oclusiva, pudiendo dar lugar a *infarto de miocardio*. Éste se considera de hecho el mecanismo crítico de transición de *aterosclerosis crónica* a *aguda*.

Se distinguen dos causas principales que dan lugar a la trombosis. El primero de ellos es la *rotura de la placa* y el segundo la *erosión superficial*.

Casos especiales de aterosclerosis. Se distinguen los siguientes casos especiales de aterosclerosis:

- a) *Reestenosis* (disminución del lumen en menos del 50 %) tras una intervención arterial (principalmente angioplastia, denominándose *reestenosis postangioplastia*).
- b) Aterosclerosis después de un trasplante.
- c) Aneurisma debido a una lesión en la media, perdiéndose la lámina elástica que la separa de la íntima.
- d) Recientemente se ha descubierto la posibilidad de que ciertas infecciones sean causantes de la aterosclerosis.

Tratamientos de la aterosclerosis. Los tratamientos contra la aterosclerosis se basan frecuentemente en la introducción de elementos a través de la piel. Así, la *angioplastia transluminal percutánea* (ATP) consiste en la dilatación plástica de la pared arterial y de la placa, mediante un balón hinchado a presión elevada (entre 10 y 15 bares).

No obstante, al cabo de un tiempo de la angioplastia (antes de los primeros seis meses) suele producirse la reestenosis (aproximadamente entre 40 y 50 % de los casos). Por esta razón se han desarrollado numerosas formas de prevención de la misma, como la introducción de elementos denominados *stents* (que pueden ser auto-expandibles o expandibles por balón) que tratan de mantener abierto el lumen, si bien en un porcentaje de aproximadamente entre 25 y 30 % de los casos se forma una nueva íntima (*reendotelización*) y se modifica la geometría aumentándose el espesor (ESCANED ET AL. [1999] estudian la propensión a la reestenosis según distintos tipos de stents, donde se recoge el elevado riesgo de reestenosis en los autoexpandibles). Una de las técnicas no mecánicas es el tratamiento con fármacos, como pueden ser anti-coagulantes, antitrombóticos, antiinflamatorios, antiagregantes plaquetarios, etc.

Recientemente se ha comprobado (tanto en estudios en animales como en seres humanos) la eficacia de la *radioterapia* en la prevención de la reestenosis postangioplastia (véanse, por ejemplo, APARDIAN ET AL. [2000] y CHAN Y MOLITERNO [2001]) al evitarse la proliferación de células musculares lisas de la media. La radioterapia puede ser externa o interna (*braquiterapia*). Éste último tipo parece dar mejores resultados, habiéndose utilizado radiocoloides dentro de un balón, stents radiactivos y catéteres porta-fuente (ésta se considera por lo general la técnica más simple y adecuada).

1.3. Aspectos mecánicos relevantes

Los modelos más representativos del comportamiento mecánico (esto es, tensiones y deformaciones, de forma análoga a fuerzas y desplazamientos en un sistema mecánico discreto) de las paredes arteriales (y en general de los materiales biológicos) son de tipo *no lineal*, dadas las grandes deformaciones

y rotaciones que presentan y debido al proceso de alineación de las fibras de colágeno. Una de las formulaciones de mayor difusión en este tipo de modelos es la de tipo *hiperelástico* (véanse, por ejemplo, HUMPHREY [1995] y LIMBERT Y TAYLOR [2002]). Este tipo de modelos se expondrán en detalle en el capítulo 3.

Además, estos materiales son fuertemente *anisótropos*, debido a la presencia de direcciones preferentes muy influenciadas por la disposición de las fibras de colágeno. En particular, en las paredes arteriales se suelen distinguir con claridad dos familias de fibras en direcciones distintas.

Una de las hipótesis usualmente aceptada es la de que los tejidos biológicos blandos presentan un comportamiento *isocórico*¹ (es decir, deformación sin cambio de volumen). Esto puede explicarse por el hecho de que el contenido en agua es superior al 70 %, a excepción de los cartílagos de las articulaciones dada la presencia de microporos.

Es sabido que los materiales de los tejidos exhiben un comportamiento de adaptación frente a acciones externas (véase RACHEV [2001]). En este sentido, se denomina *remodelación* a la variación de las propiedades del material (*remodelado estructural*) y a la variación de la geometría por aumento de masa (*remodelado másico*, hablándose también de *crecimiento*). También se distingue el *remodelado positivo* del *negativo* según aumente o disminuya (respectivamente) el lumen del vaso.

Por otra parte, estos materiales presentan un comportamiento *reológico* (es decir, dependiente del tiempo) debido fundamentalmente a la presencia de células musculares (véase FUNG [1993]), lo que ha motivado el desarrollo de modelos *viscoelásticos* (véanse HOLZAPFEL [2001], MATONICK Y LI [2001], WEISS ET AL. [2002], PROVENZANO ET AL. [2001] y LAKES Y VANDERBY [1999]) y su implementación en esquemas de elementos finitos (véase, por ejemplo, PUSO Y WEISS [1997]).

Experimentalmente, cuando una porción de arteria es extraída, ésta disminuye en longitud debido al alargamiento longitudinal impuesto que induce *tensiones residuales longitudinales*². En esta nueva situación, la muestra se encuentra libre de cargas aunque permanecen *tensiones residuales circunferenciales*. Esto se muestra al cortar radialmente una pequeña longitud de arteria en forma de anillo, observándose que éste se abre para formar un sector circular (véase FUNG [1993]). Las tensiones residuales tienen su origen en el proceso de adaptación a las acciones exteriores.

Como órdenes de magnitud, en HOLZAPFEL ET AL. [2000] se adopta un alargamiento longitudinal de 1,70 en la arteria carótida de un conejo y de 1,72 en la de un perro. Además, en HOLZAPFEL [2001] se considera un alargamiento longitudinal de 1,1 en la arteria coronaria descendente anterior

¹No obstante, se han desarrollado modelos bifásicos que admiten la compresibilidad de los tejidos blandos (véase WEISS [2001]).

²Algunos autores como Holzapfel y Ogden no califican de residuales a las tensiones producidas por el alargamiento longitudinal de las arterias. En este sentido se sigue HUMPHREY [1995], que habla de tensiones residuales longitudinales.

humana.

Otro aspecto a considerar es la *interacción fluido-estructura*. Este aspecto es de importancia en los estudios de variables hemodinámicas en el contacto con la pared (como se presenta más adelante, estas variables están relacionadas con la aparición y evolución de enfermedades cardiovasculares) y el cálculo de la velocidad de propagación de las ondas de presión en la sangre (al modificarse la *impedancia*, esto es, la resistencia de la pared al paso de la sangre).

1.4. Estado de la técnica

El estudio del flujo sanguíneo y del comportamiento mecánico de los vasos es un campo de gran interés actual dentro de la biomecánica. Las primeras aproximaciones se centraron en la simulación del flujo sanguíneo, tratándolo como un fluido viscoso y con rozamiento pero considerando el vaso como rígido (TAYLOR ET AL. [1998] estima que la variación del diámetro de la mayor parte de las arterias durante el ciclo cardíaco es aproximadamente entre 5 y 10 %). Estudios más actuales consideran la interacción entre la pared arterial y el fluido (generalmente con materiales isótropos), en modelos elásticos lineales y no lineales. Además se han realizado avances en la sistematización de modelos para aplicaciones clínicas. En relación con los aspectos mencionados, se destacan:

- a) YAMAGUCHI [2000] estudia el efecto de una placa ateromatosa en un modelo arterial tridimensional, considerando la interacción entre el fluido y la pared. Se considera un fluido newtoniano (véase el apéndice D) y el material de la pared arterial elástico lineal e isótropo.
- b) TANG ET AL. [1999a] y TANG ET AL. [1999b] estudian las tensiones y deformaciones de la pared de arterias carótidas con estenosis idealizadas. Se desarrolló un modelo de elementos finitos tridimensional con interacción fluido estructura, de pared gruesa y delgada. El material de la pared se consideró homogéneo e isótropo (en particular hiperelástico de Ogden).
- c) TAYLOR ET AL. [1998] desarrollan un entorno de cálculo por elementos finitos capaz de analizar el flujo sanguíneo. El sistema es capaz de modelizar la pared arterial, el fluido y el interfaz fluido-sólido, utilizando una descripción del medio continuo del tipo ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*). Otro sistema de análisis integrado en entornos médicos es el expuesto en MABRY ET AL. [1997], donde el fluido es considerado viscoso newtoniano y la pared elástica.

Paralelamente se han ido desarrollando simulaciones de elementos artificiales (especialmente balones y stents) y de su interacción con cuerpos biológicos, destacándose:

- a) AURICCHIO Y TAYLOR [1997] modeliza un stent auto-expandible, prestándose atención especialmente a la caracterización mecánica de los *materiales con memoria de forma*, y sin considerar la interacción con la placa ateromatosa.
- b) WHITCHER [1997] estudia la resistencia a fatiga de un stent auto-expandible sujeto a los ciclos de sístole y diástole. La acción de la arteria sobre el stent se modeliza como una presión uniforme, con dos valores de la presión con objeto de simular las condiciones de sístole y de diástole.
- c) ROGERS ET AL. [1999] estudia la interacción entre balón y arteria en el proceso de introducción de stent con materiales isótropos. El objetivo es aumentar el conocimiento acerca del mecanismo de daño de la íntima.
- d) AURICCHIO ET AL. [2000] estudian la interacción biomecánica entre un stent extendible por balón y una arteria con estenosis, modelizando el stent, la placa y la arteria. Los materiales son considerados homogéneos e isótropos.
- e) HOLZAPFEL Y SCHULZE-BAUER [2000] hacen uso de la resonancia magnética para aproximar la geometría del vaso e identificar los diferentes tipos de tejidos blandos y áreas de calcificación. El modelo de material es no lineal, anisótropo y elastoplástico, indicándose los parámetros asociados a cada tipo de tejido. El objetivo principal es caracterizar el estado tensional y de deformaciones en las direcciones axial y circunferencial.

En lo que se refiere a la aterosclerosis, las hipótesis básicas actuales relativas a su generación y desarrollo son (siguiendo el proyecto MOTRICO [2001], véase el apéndice B):

- El proceso de degeneración aterosclerótica ocurre en una forma controlada por la tensión de cizalla y la tensión de la pared del vaso.
- El proceso de remodelado vascular y formación de nueva íntima que aparecen después del proceso de reparación de una arteria ocurren en una forma controlada por la tensión de cizalla y la tensión de la pared del vaso.

1.5. Objetivos, alcance y aportaciones de la tesis

1.5.1. Objetivos

Hipótesis básicas y motivación. Las arterias presentan un comportamiento sensible a cambios mecánicos, en particular a cambios en la presión

y en el flujo sanguíneo (según RACHEV [2001]):

1. Cuando se producen variaciones en la presión, las arterias se someten a una deformación elástica instantánea que se manifiesta en un cambio de las dimensiones del vaso. Esta respuesta se denomina *respuesta pasiva* y está caracterizada por grandes deformaciones (respuesta no lineal del material).
2. Si la acción mecánica persiste, la respuesta pasiva es seguida de la contracción de las células musculares. Ésta es la llamada *respuesta activa* (también *respuesta miogénica* o *efecto Bayliss*) y es típica en tejidos biológicos que contienen células musculares. Por tanto, un incremento en la tensión circunferencial de la pared lleva a la constricción de la arteria, con independencia de las células endoteliales.

Por otra parte, los cambios en el flujo son detectados por las células endoteliales, que activan o relajan las células musculares.

3. Finalmente, si los cambios en la presión o en el flujo se mantienen durante varios días o semanas, entonces la arteria responde modificando la geometría (*crecimiento*), la estructura y la composición. Esta respuesta a largo plazo es lo que se llama *remodelación*, y está controlada por la respuesta activa.

En particular, recientes ensayos realizados (véanse HAYASHI ET AL. [2001] y MASUDA ET AL. [1999]) muestran la importancia del proceso de crecimiento, diferenciando:

- Factores de origen *genético* (incluyendo el tamaño del vaso, su disposición) y edad (incluyendo rango de madurez).
- Factores *epigenéticos*, como es el entorno mecánico del vaso.

En el cuadro 1.4 se describen las principales características de las respuestas presentadas, según RACHEV [2001]. El análisis de la forma en que actúan los distintos mecanismos de los que disponen las paredes arteriales para reaccionar de forma activa frente a acciones externas, puede enmarcarse matemáticamente en la *teoría de control* (véanse, por ejemplo, algunas aplicaciones de esta teoría a la biomecánica en MARTIN ET AL. [2003]).

Los estudios experimentales in vivo (véase HAYASHI ET AL. [2001]) señalan que las arterias modifican predominantemente el espesor de la pared en respuesta a cambios de presión, mientras que las alteraciones en el flujo están principalmente afectadas por el diámetro del vaso. De esta forma, la remodelación está dirigida a restaurar las distribuciones normales del esfuerzo de tracción medio y el esfuerzo cortante en el endotelio.

Se han desarrollado modelos de remodelación, destacándose los de tipo global de RACHEV [2001] y los de tipo local en geometrías simplificadas de TABER [1998]. Además se han desarrollado avances en la termodinámica

<i>Respuesta</i>	<i>Nivel macroscópico</i>	<i>Nivel microscópico</i>
Respuesta pasiva	Cambio en forma (radio y espesor) sin cambio en la masa.	Cambio en la orientación de los componentes estructurales.
Respuesta activa	Cambio en la forma sin cambio en la masa.	Contracción/relajación de células musculares lisas; cambio en el estado iónico de las células.
Remodelación	Cambio en las dimensiones geométricas acompañado de cambio de masa. Cambio en la estructura y composición de la pared arterial. Cambio en las propiedades mecánicas del material de la pared.	Crecimiento, división, pérdida celular, migración, cambio en el tamaño, forma y orientación de las células, síntesis y degradación de la matriz extracelular.

Cuadro 1.4: Principales características de las respuestas pasiva, activa y de remodelación, según RACHEV [2001]

del crecimiento, estableciéndose condiciones que deben verificar los modelos (véase EPSTEIN Y MAUGIN [2000]). No obstante, se deben realizar avances para la formulación de ecuaciones constitutivas que puedan ser consideradas en análisis mediante elementos finitos en configuraciones reales.

La formulación de este tipo de modelos permitiría determinar las tensiones residuales de forma más realista que los actuales métodos, dada la importante relación existente entre las tensiones residuales y el proceso de remodelación (véanse CHAUDHRY ET AL. [1997] y HUMPHREY Y TABER [1999]).

Algún autor (TEXON [2001]) llega a afirmar que la localización y evolución de la aterosclerosis tenga como primera causa el efecto de variables hemodinámicas y no factores como los niveles de colesterol o la dieta, lo que justifica la importancia de la remodelación con el planteamiento que se ha expuesto.

Uno de los problemas que se presenta en el desarrollo de modelos matemático-mecánicos es el reducido número de ensayos existentes en arterias para el estudio de la remodelación (especialmente de combinaciones en la variación del flujo y la presión). Con objeto de aliviar en cierta medida esta dificultad se propone extrapolar resultados de ensayos realizados en otro tipo de tejidos biológicos blandos, como pueden ser tendones y ligamentos (considérese, por ejemplo, HAYASHI [2001b]).

Objetivos. Motivado por lo anterior, en la investigación para la tesis doctoral se plantean ordenadamente los siguientes objetivos fundamentales:

1. Estudio de la relación entre variables mecánicas y aspectos clínicos.

2. Desarrollo y ajuste de modelos de comportamiento mecánico de las paredes arteriales (sin incluir remodelación) con las siguientes consideraciones:
 - Los modelos serán de tipo local con formulaciones aptas para análisis mediante elementos finitos (véase el apéndice E). Se basarán en elasticidad no lineal (hiperelasticidad) isótropa y anisótropa, incorporándose modelos de viscoelasticidad y daño. Se estudiarán e implementarán algoritmos numéricos teniendo en cuenta los recursos de ordenador necesarios (el tiempo de ejecución y la memoria precisada).
 - Se analizará el efecto mecánico de las tensiones y deformaciones residuales en las paredes arteriales, en geometrías reales.
 - Los modelos implementados serán contrastados con ensayos con resultados teóricos conocidos y ensayos de la bibliografía.
 - El ajuste se realizará a partir de ensayos de colaboradores o de ensayos de la bibliografía.
3. Incorporación de remodelación, y en particular de crecimiento, a los modelos constitutivos de las paredes arteriales, con las mismas consideraciones del punto anterior.
4. Aplicaciones de los modelos a casos clínicos, utilizándose geometrías tridimensionales simplificadas y en los casos en que sea posible geometrías reales obtenidas a través de angiografías y ultrasonidos en pacientes cardiovasculares.

1.5.2. Alcance y aportaciones de la tesis

A continuación se describe el alcance de la tesis, indicándose las principales aportaciones originales:

1. Previamente al desarrollo de modelos constitutivos, en el capítulo 2 se analiza la influencia de variables mecánicas en aspectos de importancia clínica. Se desarrolla un estudio estadístico original, según diversos criterios, de la correlación entre la *tensión tangencial* en la íntima y el *espesor* de la pared arterial.

En el estudio se presenta una metodología para el tratamiento de la *geometría* y para la introducción de las *acciones* del fluido (las principales consideraciones acerca del comportamiento mecánico de la sangre se exponen en el apéndice D). Algunos de estos aspectos se han publicado en RODRÍGUEZ ET AL. [2001], GARCÍA ET AL. [2002] y SANMARTÍN ET AL. [2003].

2. En el capítulo 3 se presentan modelos *hiperelásticos* de material adecuados para las paredes arteriales (en relación con estos modelos, en el apéndice A se estudian algunas condiciones que deben verificarse por consideraciones de *estabilidad*). Este tipo de materiales se ha adoptado como punto de partida para la formulación de otros más complejos.

Con objeto de resolver numéricamente las ecuaciones resultantes, se indican esquemas para la *implementación mediante elementos finitos* (véase el apéndice E). Además, estos modelos y muchos de los que se indican en capítulos posteriores, han sido implementados por el autor en un código de elementos finitos (véase el apéndice C), pudiendo ser incorporados en un sistema de simulación para la práctica médica (véase el apéndice B). En las publicaciones RODRÍGUEZ [2002] y RODRÍGUEZ ET AL. [2002] se recoge parte de esta investigación.

3. Motivado por la dificultad en la experimentación de arterias humanas y con objeto de aprovechar la información existente, en la sección 3.5 (capítulo 3) se propone un método de *correlación no lineal de parámetros* entre modelos constitutivos hiperelásticos para paredes arteriales. Esto permite en la práctica utilizar unos modelos de material ajustados a partir de otros.
4. Posteriormente, con objeto de incorporar otros fenómenos a los modelos hiperelásticos, en el capítulo 4 se desarrollan modelos adecuados para la disipación energética en el tiempo (*viscoelasticidad*) de las paredes arteriales.

Se propone un método de *ajuste de parámetros viscoelásticos* para el caso de ensayos cíclicos lentos.

Además, en el mismo marco de las formulaciones anteriores, se presenta un modelo de *pseudoelasticidad* especialmente adecuado para la simulación de procesos en los que las paredes arteriales se ven sometidas a sollicitaciones muy superiores a las fisiológicas, como puede ser el proceso de angioplastia.

5. Por otra parte, en el capítulo 5 se revisan críticamente los principales modelos de *remodelación* existentes en la bibliografía para paredes arteriales, para proponer posteriormente un modelo de *crecimiento* aplicable a *geometrías arbitrarias tridimensionales*, siendo adecuado para el análisis en geometrías reconstruidas a partir de imágenes de ultrasonidos y angiografías. Algunos aspectos de este modelo se recogen en RODRÍGUEZ ET AL. [2003a] y RODRÍGUEZ ET AL. [2003b].
6. El estudio de los modelos constitutivos de material se completa en la sección 5.8 (capítulo 3) con la incorporación de los fenómenos de *presollicitación (tensiones iniciales)*, revisando las teorías existentes y formulando nuevos planteamientos.

7. Por último, el capítulo 6 muestra *aplicaciones* más completas a las desarrolladas en el resto de la tesis. En particular, se ajustan modelos a los resultados experimentales obtenidos por ensayo de una arteria carótida humana, se estudia un ensayo de dilatación por presión interna de la arteria carótida de un conejo y se modeliza una arteria coronaria con geometría real (reconstruida a partir de imágenes de angiografías y ultrasonidos).

1.6. Entorno de simulación

1.6.1. Reconstrucción geométrica tridimensional

Una de las principales líneas de investigación en relación con la reconstrucción geométrica tridimensional es la unión de los métodos de angiografía e IVUS³ (véanse WAHLE ET AL. [1999] y WENTZEL [2000]).

Angiografía. En la técnica de reconstrucción que se presenta, la angiografía tiene por objeto determinar la geometría tridimensional del lumen del árbol arterial y la trayectoria que realiza el catéter de ultrasonidos durante el proceso de retirado con extracción de imágenes IVUS (*pullback*), identificando los puntos inicial y final. Brevemente, las fases son:

1. Adquisición y digitalización de las imágenes (sobre dos planos de proyección).
2. Estimación de la geometría de las imágenes, filtrando errores de medida.
3. Determinación en cada una de las imágenes del camino que sigue el catéter dentro del árbol arterial.
4. Reconstrucción de la geometría tridimensional, ajustando la curva *admisible* que más se aproxima al camino anterior según el criterio que se adopte (véase CAÑERO ET AL. [2000]).

Ultrasonidos. El IVUS tiene por objeto la determinación de secciones transversales, distinguiéndose las fases:

1. Adquisición y digitalización de imágenes, siendo necesario un control de la respiración del paciente y conveniente registrar el *cardiograma* (debido a las diferencias entre sístole y diástole).
2. Segmentación y reconstrucción del lumen y de las superficies de separación de las capas.

³La técnica de utilización combinada de los métodos de *angiografía* e *IVUS* se denomina habitualmente «ANGUS».

Combinación de métodos. La unión de los dos métodos indicados puede descomponerse en:

1. Localización de las secciones IVUS dentro del camino tridimensional, a partir de la distancia recorrida desde el comienzo del *pullback*.
2. Cálculo de las curvaturas y torsión del camino, haciendo uso de las fórmulas de Frenet-Serret.
3. Estimación de las torsiones relativas entre secciones.
4. Estimación de la orientación absoluta.
5. Los puntos de los contornos IVUS segmentados se conectan por una superficie obtenida por interpolación.

Basado en la técnica indicada (actualmente en desarrollo⁴) pueden reconstruirse geometrías de bifurcaciones arteriales como son las consideradas en el capítulo siguiente.

Algunos aspectos relacionados con el tratamiento de la geometría se exponen en el capítulo 2.

Observación. Recientemente MEDIGUIDE [2003] ha comenzado la comercialización de un dispositivo de reconstrucción automática tridimensional en tiempo real denominado GIVUS.

1.6.2. Modelización del fluido

La descripción de un fluido incompresible en un dominio deformable se basa en las ecuaciones de Navier-Stokes, admitiéndose en la mayor parte de los casos que la sangre se comporta como un fluido *newtoniano*. Las condiciones de contorno usuales vienen dadas en forma de presión y/o velocidad en las secciones extremas.

La resolución numérica del problema (para su forma débil, esto es integral en todo el dominio) por el método de los elementos finitos en la formulación usual de Galerkin presenta deficiencias, por lo que algunos investigadores han desarrollado *métodos de estabilización*, que introducen en la formulación formas cuadráticas del residuo junto con nuevos parámetros que buscan alcanzar la solución exacta en problemas unidimensionales (véanse, por ejemplo, ZIENKIEWICZ Y TAYLOR [2000] y TAYLOR ET AL. [1998]).

Las variables hemodinámicas fundamentales a obtener en el modelo de mecánica de fluidos son la velocidad, esfuerzo cortante y presión en el contacto con la pared arterial (justificando la importancia de considerar la interacción con la pared arterial). Esto es así ya que dichas variables son de

⁴El Centro de Visión por Computador de la Universidad Autónoma de Barcelona está investigando en este campo (véase, por ejemplo, la referencia ya citada CAÑERO ET AL. [2000]).

importancia en la génesis y desarrollo posterior de las enfermedades cardiovasculares (véase TEXON [2001]), como ya se ha indicado en la sección 1.4.

Si bien la presente tesis doctoral se centra principalmente en el comportamiento de la pared arterial, dada la importancia del comportamiento de la sangre, se introducen algunos conceptos fundamentales relacionados con la hemodinámica en el apéndice D.

1.6.3. Propiedades de las paredes arteriales

Uno de los ensayos mecánicos básicos en los materiales biológicos es el de tracción unidireccional, en el que se mide la tensión y la deformación mientras que la carga aplicada a una muestra de forma simple aumenta gradualmente. En esta línea, también se pueden realizar ensayos de relajación y fluencia para determinar las propiedades viscoelásticas.

No obstante, los tejidos de las paredes arteriales no se encuentran sometidos a fuerzas de tracción pura unidireccional, por lo que algunos investigadores han considerado ensayos biaxiales con objeto de desarrollar modelos más realistas (véanse HAYASHI [2001a] y HARTMANN [2001]).

En la sección 6.1 se presentan algunos experimentos realizados en el Departamento de Ciencia de Materiales de la E.T.S.I. Caminos, C. y P. de la Universidad Politécnica de Madrid (véase ATIENZA ET AL. [2003]).

Aparte de los ensayos mecánicos, es necesario identificar los diferentes materiales que constituyen la pared arterial y la placa ateromatosa (cuando corresponda), y dada la fuerte anisotropía, identificar las direcciones preferentes de las fibras de colágeno. En este sentido, algunos investigadores están realizando aportaciones en el tratamiento de imágenes obtenidas por *resonancia magnética de alta resolución* (hrMRI) para distinguir los distintos componentes de la pared arterial, y en la determinación de las direcciones de las fibras de colágeno a partir de las orientaciones de los núcleos de las células musculares (véanse HOLZAPFEL [2001] y CEBRAL ET AL. [2002]).

1.6.4. Modelos de cálculo de las paredes arteriales

Como se ha indicado, los modelos de material han sido implementados en un código de elementos finitos con formulación no lineal (FEAP, véase TAYLOR [2000] y el apéndice C). Las ecuaciones obtenidas se resuelven de forma iterativa utilizando el *método de Newton*, que resuelve un sistema de ecuaciones linealizadas en cada iteración. Esto ha llevado a que las rutinas de material implementadas devuelvan la descripción no sólo del estado tensional (*tensor de tensiones*), sino de la variación de éste con el estado de deformación (*tensor de elasticidad*). Dado el tamaño de los sistemas de ecuaciones lineales resultantes, habitualmente estos sistemas se resuelven numéricamente por métodos indirectos, destacándose los *métodos de gradiente conjugado* (véase, por ejemplo, PRESS ET AL. [1992]), especialmente aquellos de tipo *precondicionado*.

Además, con objeto de evitar formulaciones no convergentes, las acciones externas (fuerzas o desplazamientos impuestos) se introducen en escalones de carga.

Los resultados mecánicos fundamentales del cálculo son los estados de tensión y deformación, que pueden correlacionarse con aspectos clínicos, destacándose la aparición de enfermedades.

Capítulo 2

Correlación de variables mecánicas con aspectos clínicos

El presente capítulo estudia la relación existente entre las acciones ejercidas por el fluido en la superficie de contacto con la pared arterial y la geometría del vaso, siendo uno de los aspectos de mayor interés para la estimación de enfermedades a partir de variables mecánicas. En particular se estudia la correlación entre la tensión tangencial y el espesor.

El estudio se encuentra más en relación con la hemodinámica (véase el apéndice D) que con el comportamiento mecánico de la pared arterial, ya que sólo es necesaria su geometría al realizarse el análisis de fluidos suponiendo paredes rígidas. No obstante, el capítulo se considera de importancia no sólo por la relevancia de las tensiones tangenciales en la aparición de patologías cardiovasculares, sino por permitir introducir la metodología que se adoptará en el tratamiento de la geometría y acciones para los modelos de material (en la sección 6.3 se muestra un ejemplo de aplicación).

2.1. Introducción y objetivos

Como se ha expuesto en el capítulo anterior, la aparición de enfermedades cardiovasculares puede correlacionarse con determinados estados tensionales o de deformación. Este capítulo trata de la correlación entre la *tensión tangencial* en la superficie de contacto fluido-pared con el *recrecimiento patológico* de la pared. Esta hipótesis ya ha sido considerada por WENTZEL [2000], LOTH ET AL. [2002], ZHAO ET AL. [2002], THURY ET AL. [2002] y CARLIER ET AL. [2003].

Además de considerarse el objetivo principal de presentar metodologías y resultados de la correlación entre la tensión tangencial y el espesor, se presentan otros objetivos intermedios como puede ser la metodología de mallado volumétrico de la pared arterial para el análisis futuro mediante elementos

finitos.

La metodología general se aplica de forma detallada sobre un caso clínico de cateterismo y angioplastia identificado como MPR en el Hospital Clínico de San Carlos de Madrid¹ (secciones 2.2, 2.3 y 2.4), correspondiente a una arteria coronaria derecha. Los datos del paciente son:

«Varón de 77 años, hipertenso, exfumador e hipercolesterolémico (factores de riesgo para enfermedad cardiovascular). El motivo del cateterismo y angioplastia fue angina inestable. Se encontraba ingresado por este motivo. Se encontró una única lesión en la coronaria derecha en su tercio medio. Tras el IVUS la lesión se trató con un stent de 3,5 mm de diámetro y 18 mm de longitud con buen resultado. El paciente pudo irse de alta al día siguiente. En el control a los 6 meses el paciente estaba asintomático y no había reestenosis o nuevas lesiones coronarias.»

Posteriormente se realiza la correlación en cuatro bifurcaciones del tronco principal izquierdo en la arteria descendente anterior y la arteria cunfleja, correspondientes a pacientes transplantados. No obstante, en estos casos se destaca el posible acoplamiento de fenómenos de crecimiento con procesos de rechazo.

2.2. Geometría

Geometría. La geometría fue obtenida por el grupo de Mecánica de Fluidos de la Universidad Politécnica de Madrid y por Marcelo Sanmartín (Unidad de Cardiología Intervencionista del Hospital Meixoeiro de Vigo) a partir de imágenes de angiografías e IVUS (véanse MARTÍNEZ [2001] y SÁNCHEZ [1999]). El objetivo fundamental fue la determinación de las superficies interna (íntima) y externa de la pared arterial en formato de CAD tipo IGES a escala 2000 : 1 (véanse las superficies interna y externa de las figuras 2.1 y 2.2). La longitud total del tramo reconstruido es de aproximadamente 4 cm, con un diámetro de 4 mm y un espesor de 0,55 mm.

Las superficies están formadas cada una de ellas (la interna y la externa) por 36 *parches* de superficies NURBS², configurando una partición de la geometría total, véase la figura 2.3.

Proceso de mallado. A partir de los parches superficiales se han creado nuevas superficies NURBS que han permitido la definición de volúmenes NURBS topológicamente equivalentes a un hexaedro, permitiendo la generación de *mallas estructuradas* (con 4 elementos en el espesor, 8 elementos

¹Todos los casos clínicos que se presentan en este capítulo corresponden a pacientes tratados en el Hospital Clínico de San Carlos de Madrid.

²*Non Uniform Bessel rational B-Splines*, véase, por ejemplo, FARIN [1996].

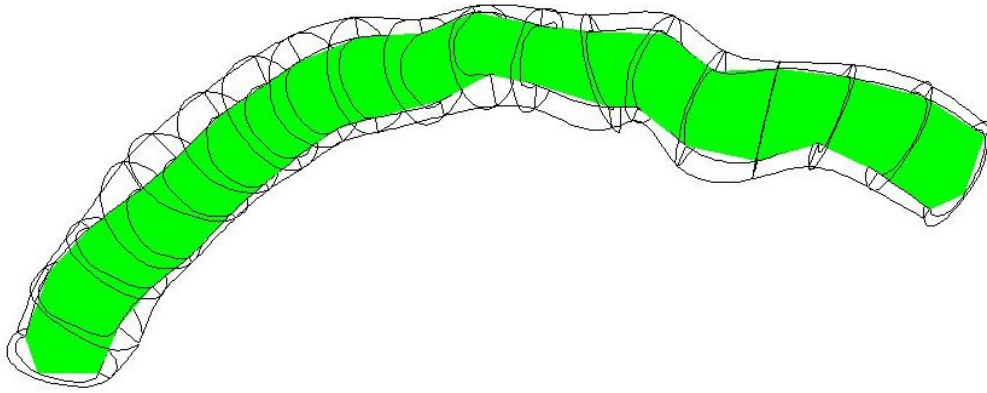


Figura 2.1: Superficie interna

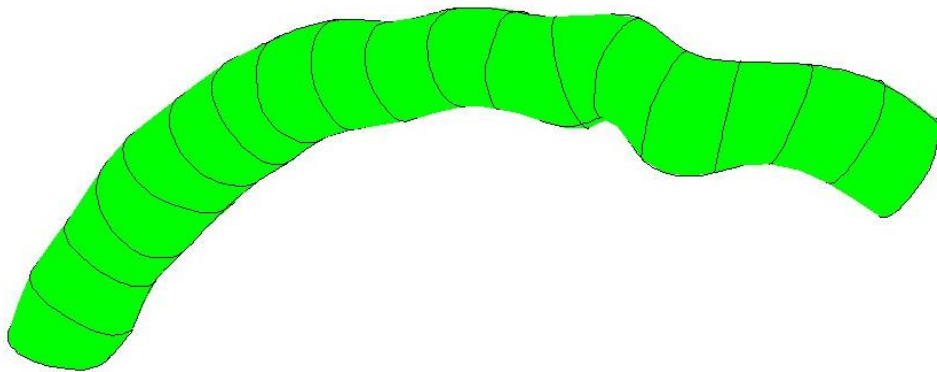


Figura 2.2: Superficie externa

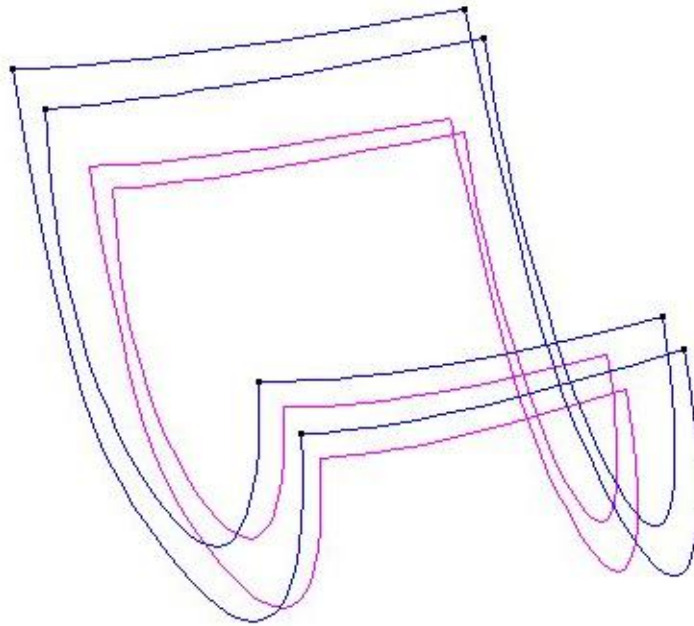


Figura 2.3: Parches de las superficies interna y externa (el contorno de las superficies se presenta en color oscuro)

longitudinales y 24 elementos circunferenciales para cada parche volumétrico). Cada uno de los volúmenes tiene una de las caras en la superficie interna y otra en la externa. De esta forma se obtuvieron en total 146 superficies y 36 volúmenes; además, en el proceso de mallado se obtuvieron 27648 elementos hexaédricos y 34800 nodos (véanse las figuras 2.4 y 2.5). Este tipo de mallado se motiva por el análisis posterior de la pared mediante elementos finitos en la sección 6.3³.

Se realiza un mallado en triángulos de la superficie interior con objeto de interpolar las acciones obtenidas por dinámica de fluidos computacional en una nube de puntos. Para ello, para la conectividad de cada elemento hexaédrico se comprueba si existen cuatro nodos pertenecientes a la superficie interior, correspondientes a una cara, y se descompone el cuadrilátero formado por dichos nodos en dos triángulos, con el orden esquematizado en el cuadro 2.1.

Con el método indicado, se obtuvo la malla de la figura 2.6.

2.3. Acciones

Cálculo de acciones por CFD. Las acciones se han introducido por cálculo de dinámica de fluidos considerando la sangre como un fluido new-

³En la aplicación de la sección 6.3 se establecieron 3 elementos en el espesor, 3 longitudinales y 16 circunferenciales.

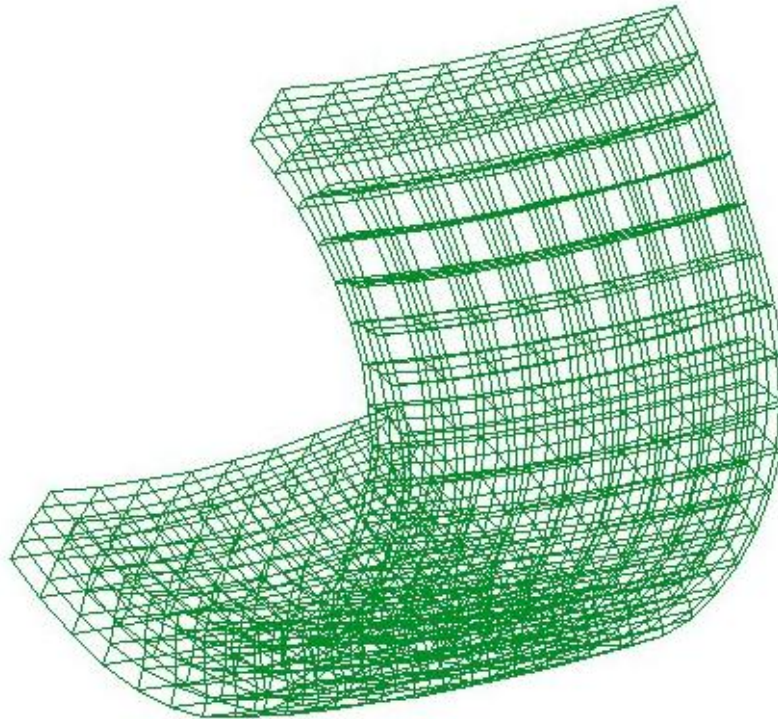


Figura 2.4: Mallado de un parche volumétrico

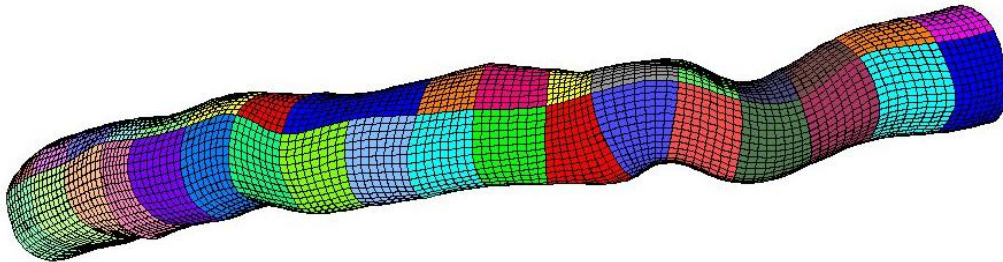


Figura 2.5: Parches volumétricos y contornos de la malla

<i>Cara</i> \ <i>Nodo</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	<i>Cuadrilátero</i>	<i>Triángulos</i>
1	•	•	•	•					1, 2, 3, 4	1, 2, 3 1, 2, 4
2	•	•			•	•			1, 2, 6, 5	1, 2, 6 1, 2, 5
3	•			•	•			•	1, 4, 8, 5	1, 4, 8 1, 4, 5
4		•	•			•	•		2, 3, 7, 6	2, 3, 7 2, 3, 6
5			•	•			•	•	3, 4, 6, 7	3, 4, 8 3, 4, 7
6					•	•	•	•	5, 6, 7, 8	5, 6, 7 5, 6, 8

Cuadro 2.1: Generación de elementos triangulares a partir de hexaedros

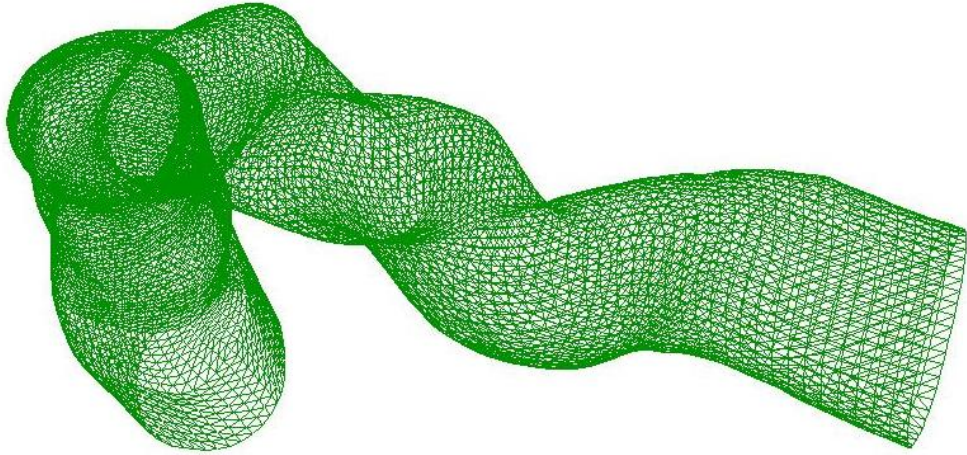


Figura 2.6: Mallado en triángulos de la superficie interior

toniano incompresible con coeficiente de viscosidad $\mu = 0,0035$ Pa·s, paredes rígidas y una presión fisiológica de 100 mmHg (para una mayor información acerca del comportamiento mecánico del fluido, véase el apéndice D). Obsérvese que el valor de la presión de entrada no es relevante con objeto de realizar la correlación, dado que la tensión tangencial es invariante respecto a ella. No obstante, se considera dicha presión media con objeto de introducir las acciones resultantes en análisis posteriores del estado tensional en la pared (sección 6.3).

Se impuso como condición de contorno una velocidad de entrada máxima en la sección y media en el tiempo de 0,40 m/s. El perfil de velocidad se obtuvo deformando el correspondiente a la *corriente de Poiseuille* (parabólico) a la sección de entrada.

El problema se analizó en FLUENT [2001] exportándose como resultados las acciones en una *nube de puntos*.

Acciones en los nodos a partir de la nube de puntos. Las acciones en los nodos de la malla triangular descrita en el apartado anterior, generada para la interpolación de las acciones en la nube de puntos del análisis de mecánica de fluidos (véase la figura 2.7), se han obtenido siguiendo el siguiente esquema:

1. Para cada nodo se determina el *espesor* e_{\bullet_a} , obtenido como la menor distancia a los puntos exteriores,

$$e_{\bullet_a} = \min_b |\mathbf{x}_{\bullet_a} - \mathbf{P}_b|,$$

siendo \mathbf{x}_{\bullet_a} la posición del nodo a y \mathbf{P}_b el punto b de la superficie exterior.

2. Cálculo del *vector normal unitario* en cada elemento Δ_a de la superficie interior, \mathbf{n}_{Δ_a} . El sentido de dicho vector se tomará *hacia afuera*, calculado de forma que el producto escalar con el vector que tiene por origen el centro de gravedad del elemento, \mathbf{x}_{Δ_a} , y como punto final el punto de la superficie exterior más cercano, sea positivo, esto es,

$$\mathbf{n}_{\Delta_a} \cdot (\mathbf{P}_b - \mathbf{x}_{\Delta_a}) > 0,$$

siendo \mathbf{P}_b un punto de la superficie exterior tal que

$$|\mathbf{P}_b - \mathbf{x}_{\Delta_a}| \leq |\mathbf{P}_c - \mathbf{x}_{\Delta_a}|,$$

para todo punto \mathbf{P}_c perteneciente a la superficie exterior.

3. Cálculo de las *tensiones elementales*, como valor medio de los vectores tensión de los puntos que pertenecen a cada elemento,

$$\mathbf{t}_{\Delta_a} = \frac{\sum_{b \in \Delta_a} \mathbf{t}_b}{n_{\Delta_a}}, \text{ supuesto } n_{\Delta_a} \neq 0,$$

teniendo $b \in \Delta_a$ el sentido de que el punto b de la nube de acciones pertence al triángulo a .

4. Cálculo de las *tensiones nodales*, como valor medio de los elementos que presentan el nodo,

$$\mathbf{t}_{\bullet_a} = \frac{\sum_{b \in \bullet_a} \mathbf{t}_{\Delta_b} A_{\Delta_b}}{\sum_{b \in \bullet_a} A_{\Delta_b}},$$

teniendo la subexpresión $b \in \bullet_a$ el sentido de que el elemento b presenta el nodo a .

Este proceso se realiza de forma independiente para la componente normal en cada punto (presión nodal) y tangencial (tensión tangencial nodal).

Observación: Aquellos elementos en los que no se encuentren puntos de la nube en su interior, y por tanto no exista \mathbf{t}_{Δ_b} , no se tienen en cuenta en la expresión anterior.

5. Cálculo de las áreas nodales, obtenidas como

$$A_{\bullet_a} = \sum_{b \in \bullet_a} \frac{A_{\Delta_b}}{3}.$$

6. Cálculo de las fuerzas nodales de la forma

$$\mathbf{f}_{\bullet_a} = \mathbf{t}_{\bullet_a} A_{\bullet_a}.$$

Los resultados obtenidos se recogen en las figuras 2.8, 2.9, 2.10 y 2.11.

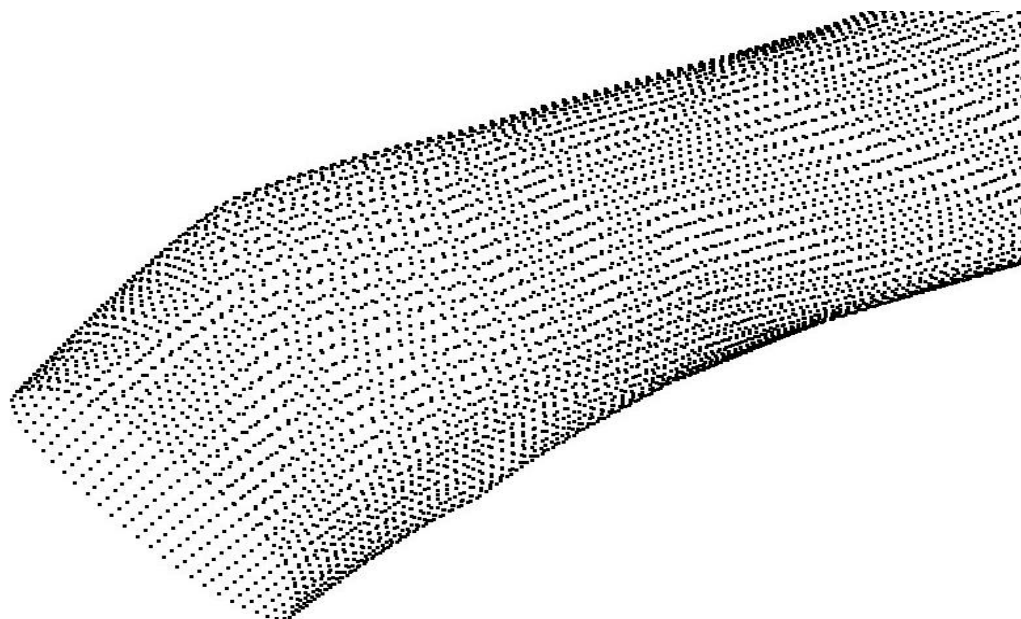


Figura 2.7: Detalle de la nube de puntos en los que se definen las acciones

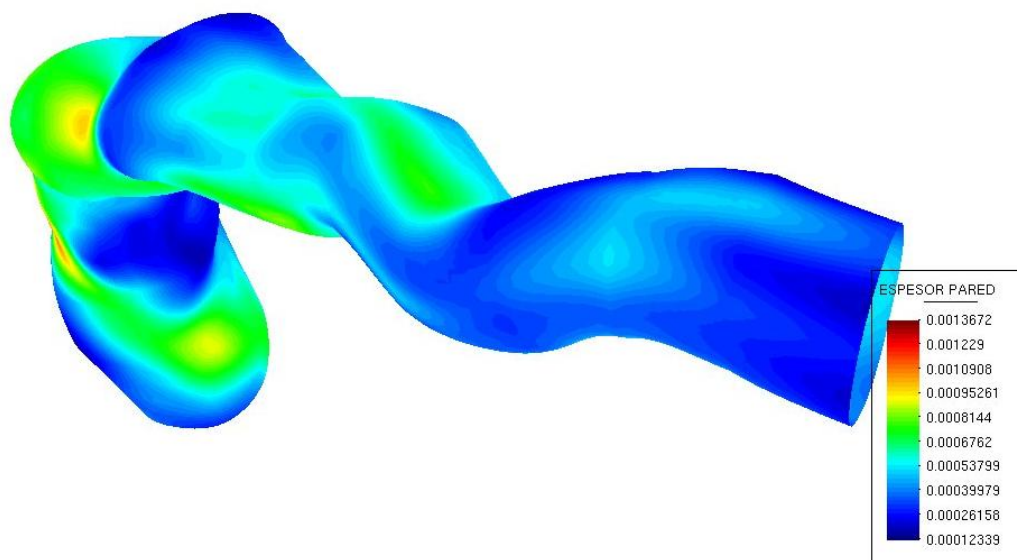


Figura 2.8: Contorno de espesores nodales (m)

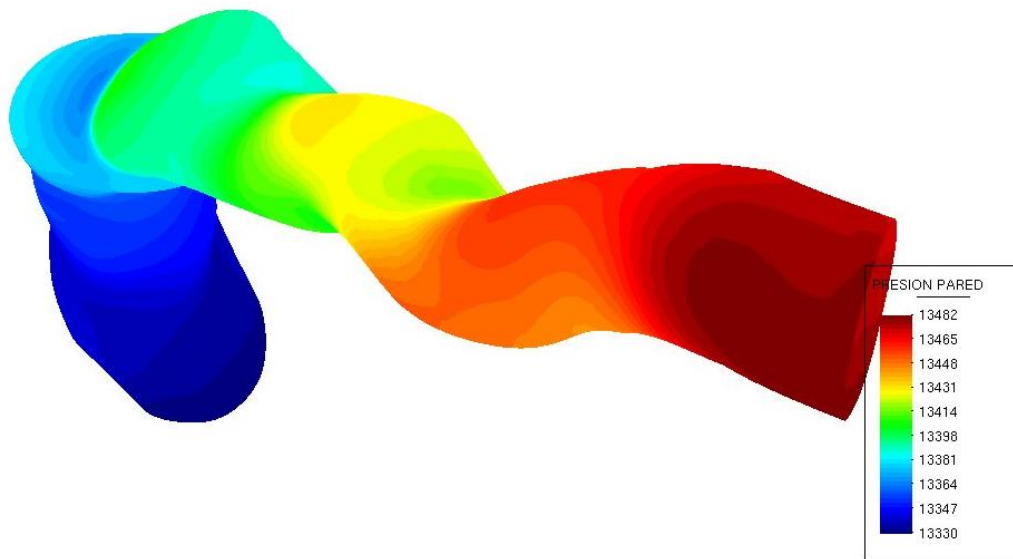


Figura 2.9: Contorno de presiones nodales (Pa)

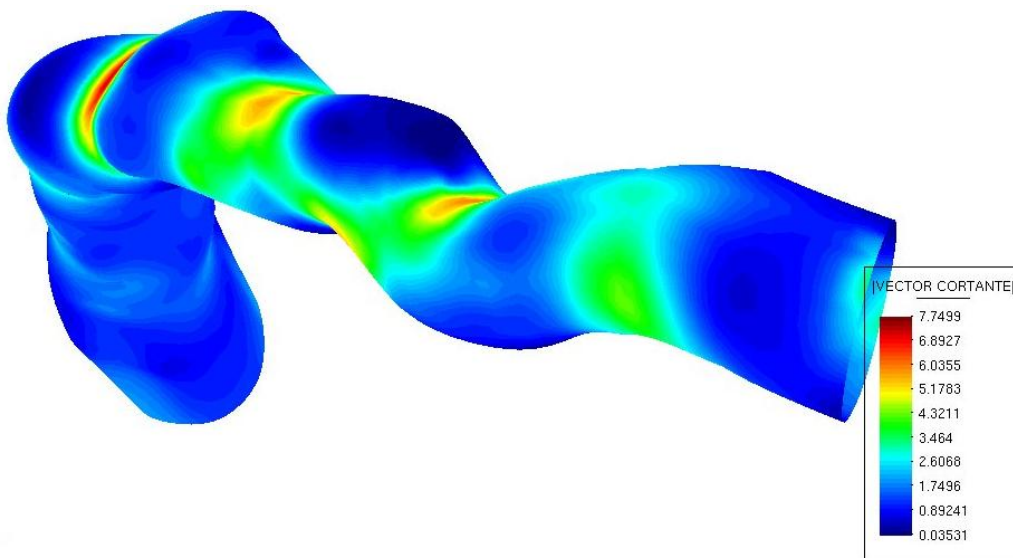


Figura 2.10: Contorno de módulos de tensiones tangenciales nodales (Pa)

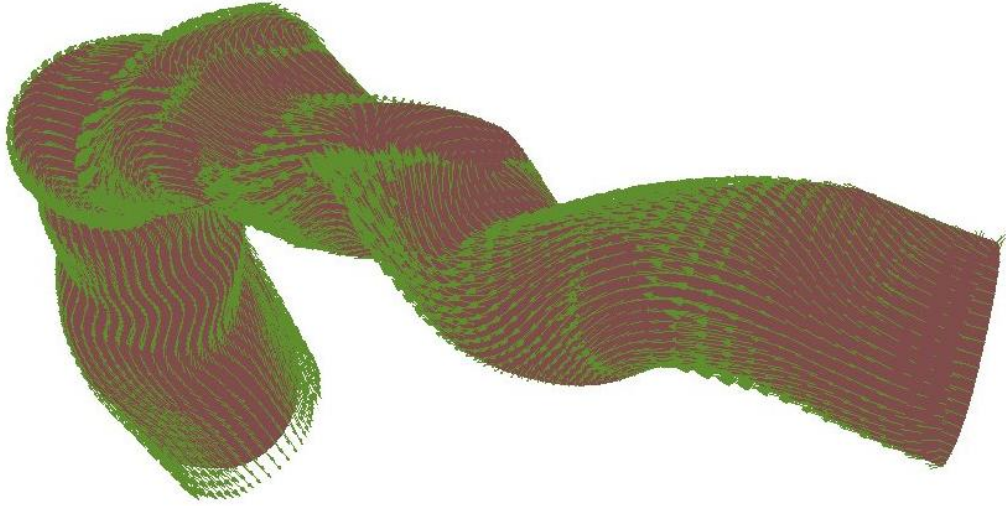


Figura 2.11: Vectores tensión tangencial nodal

2.4. Tratamiento estadístico

El tratamiento estadístico se ha realizado descomponiendo los datos en *cuartiles* respecto al espesor y a la tensión tangencial. Además, se ha hecho el estudio considerando el espesor como variable independiente y como variable dependiente.

El modelo estadístico que se ha utilizado es el denominado *modelo 1* o de *rango completo* (véase, por ejemplo, HERNÁNDEZ [1987])

$$y_a = \beta_0 + \beta_1 x_a + z_a,$$

siendo y_a la variable independiente, x_a la variable dependiente y z_a una variable aleatoria de dispersión alrededor del modelo lineal que se supondrá distribuida según una Normal.

En el caso de ajuste por mínimos cuadrados, resulta

$$\beta_0 = y. - \beta_1 x. \quad \text{y}$$

$$\beta_1 = \frac{\sum_{a=1}^n (x_a - x.)(y_a - y.)}{\sum_{a=1}^n (x_a - x.)(x_a - x.)},$$

siendo

$$x. = \frac{\sum_{a=1}^n x_a}{n}, \quad y. = \frac{\sum_{a=1}^n y_a}{n}$$

y n el número de datos considerados en la correlación.

Con objeto de establecer una medida del grado de asociación lineal entre la variable respuesta y la variable predictora, concretamente entre la variable respuesta y la recta de regresión estimada, se introduce el *coeficiente de*

correlación múltiple definido como

$$R = \frac{\sum_{a=1}^n (x_a - x.) (y_a - y.)}{\sqrt{\sum_{a=1}^n (x_a - x.)^2 \sum_{a=1}^n (y_a - y.)^2}},$$

verificándose $-1 \leq R \leq 1$. Su cuadrado, R^2 , denominado *coeficiente de determinación múltiple* puede interpretarse como la variabilidad de y respecto a la recta de regresión, en tanto que puede comprobarse que cuando todos los puntos se encuentran sobre la recta de regresión estimada, es decir, *el ajuste es perfecto*, entonces $R^2 = 1$.

La estimación del coeficiente de correlación múltiple *poblacional* está sujeta a las incertidumbres de la *muestra*. Por esta razón, con objeto de estimar la bondad del ajuste a partir de los datos muestrales, se define:

a) *Suma de cuadrados debida a la regresión lineal* (1 grado de libertad):

$$\text{sclr} = \sum_{a=1}^n (\beta_1 (x_a - x.))^2.$$

b) *Suma de cuadrados alrededor de la regresión lineal* ($n - 2$ grados de libertad):

$$\text{scarl} = \sum_{a=1}^n (y_a - y. - \beta_1 (x_a - x.))^2.$$

El estadístico utilizado para la *bondad del ajuste* es scarl/sclr , que se ajusta a una F de Snedecor con $n - 2$ y 1 grado de libertad. Cuanto menor sea el valor del indicador anterior, mayor es la bondad del ajuste. Además, para un valor de F dado, se define

$$\alpha = \text{Prob}(F_{n-2,1} \leq F),$$

de forma que cuanto mayor sea α mayor es la bondad del ajuste.

Las fórmulas anteriores han sido modificadas asociando a cada punto un peso correspondiente al área nodal.

Observación. En la figura 2.12 se muestra en un diagrama de bloques las relaciones existentes entre los distintos procesos involucrados en el estudio de correlación entre la tensión tangencial y el espesor. Los programas utilizados en el estudio son GiD (véase CIMNE [1999]), AWK (véase BARLOW ET AL. [1995]) y C++ (véase, por ejemplo, SCHILDT [1995])⁴.

⁴Además, las gráficas son generadas de forma automática por el sistema a través del programa «gnuplot» (véase WILLIAMS Y KELLEY [1998]).

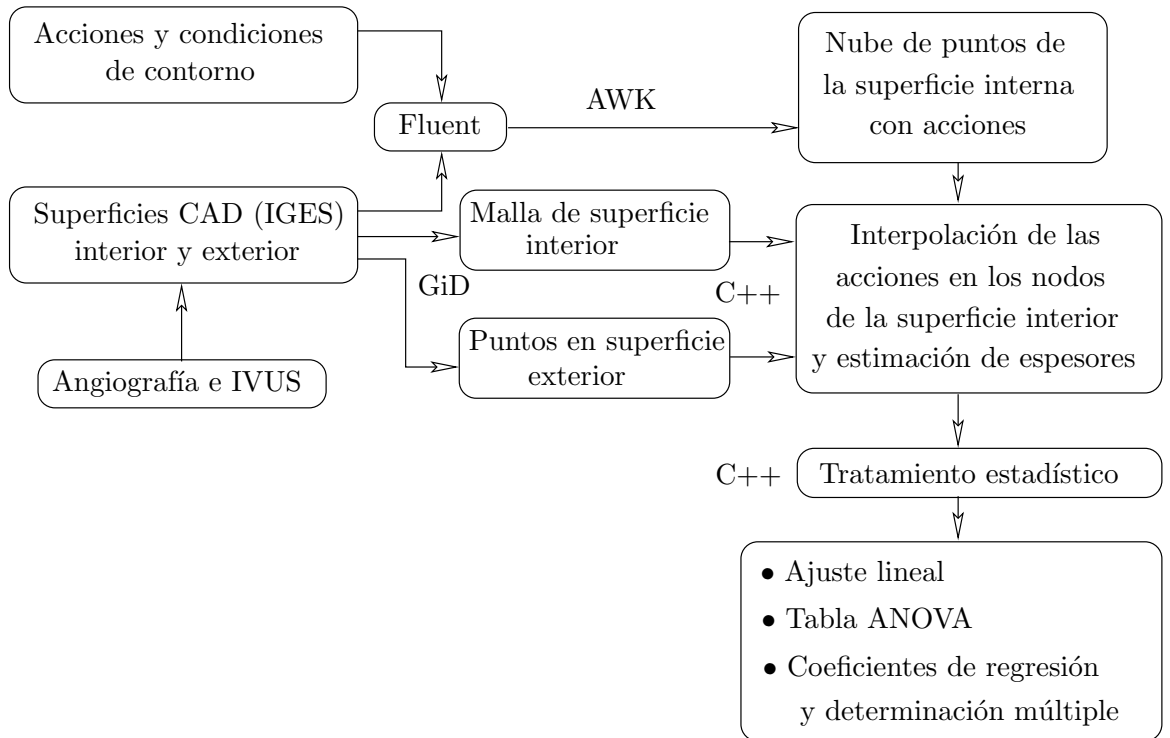


Figura 2.12: Diagrama de bloques del proceso de correlación

2.5. Resultados

Los resultados se han obtenido para distintos cuartiles de las variables a correlacionar. Se entenderá por primer cuartil respecto a cierta variable el conjunto de datos muestrales correspondiente al 25 % inferior (0-25 %). Análogamente, el segundo cuartil se corresponde con el intervalo 25-50 %, el tercer cuartil con 50-75 % y el cuarto con 75-100 %. Los casos considerados, indicándose el nombre y su descripción se presentan en el cuadro 2.2.

Los datos generales de la correlación y las correlaciones obtenidas para cada cada conjunto muestral en el caso MPR se presentan en las tablas 2.3 y 2.6, con los coeficientes de correlación y determinación múltiples de la tabla 2.5. Además, la estimación de la bondad del ajuste del análisis de la varianza (ANOVA) se muestra en la tabla 2.6. Se observa la existencia de correlación (positiva para el conjunto de datos muestrales), si bien ésta es débil.

Por último, en la figura 2.13 se expone la correlación realizada sobre el conjunto de puntos nodales de la tensión tangencial respecto al espesor.

Observación. La importancia de la tensión tangencial motiva el estudio de su evolución en el tiempo. Este estudio puede realizarse a partir de imágenes obtenidas en operaciones clínicas (*geometría basal*) y tras un período de

<i>Caso</i>	<i>Descripción</i>
Q1e-t	Cuartil 1 (Q1) respecto al espesor. Correlaciona la tensión tangencial
Q4e-t	Cuartil 4 (Q4) respecto al espesor. Correlaciona la tensión tangencial
Q1t-t	Cuartil 1 (Q1) respecto a la tensión tangencial. Correlaciona la tensión tangencial
Q4t-t	Cuartil 4 (Q4) respecto a la tensión tangencial. Correlaciona la tensión tangencial
Ω -t	Se correlaciona la tensión tangencial usando todos los puntos
Q1e-e	Cuartil 1 (Q1) respecto al espesor. Correlaciona el espesor
Q4e-e	Cuartil 4 (Q4) respecto al espesor. Correlaciona el espesor
Q1t-e	Cuartil 1 (Q1) respecto a la tensión tangencial. Correlaciona el espesor
Q4t-e	Cuartil 4 (Q4) respecto a la tensión tangencial. Correlaciona el espesor
Ω -e	Se correlaciona el espesor usando todos los puntos

Cuadro 2.2: Nombre y descripción de cada caso

Número total de puntos	6960
Valor medio del espesor	0,5469 mm
Espesor de separación entre cuartiles Q1 y Q2	0,4646 mm
Espesor de separación entre cuartiles Q3 y Q4	0,8045 mm
Valor medio de la tensión tangencial	2,490 Pa
Tensión tangencial de separación entre Q1 y Q2	1,672 Pa
Tensión tangencial de separación entre Q3 y Q4	3,307 Pa

Cuadro 2.3: Datos generales de la correlación

<i>Caso</i>	<i>n</i>	β_0	β_1	<i>x.</i>	<i>y.</i>
Q1e-t	2756	0,5715	3478	$3,307 \cdot 10^{-4}$	1,721
Q4e-t	974	2,241	257,2	$9,694 \cdot 10^{-4}$	2,490
Q1t-t	3061	1,068	95,49	$4,666 \cdot 10^{-4}$	1,112
Q4t-t	848	4,590	-387,3	$5,833 \cdot 10^{-4}$	4,364
Ω -t	6960	1,411	1123	$5,469 \cdot 10^{-4}$	2,025
Q1e-e	2756	$2,965 \cdot 10^{-4}$	$1,988 \cdot 10^{-5}$	1,72143	$3,307 \cdot 10^{-4}$
Q4e-e	974	$9,544 \cdot 10^{-4}$	$6,006 \cdot 10^{-6}$	2,490	$9,694 \cdot 10^{-4}$
Q1t-e	3061	$4,333 \cdot 10^{-4}$	$2,990 \cdot 10^{-5}$	1,112	$4,666 \cdot 10^{-4}$
Q4t-e	848	$6,491 \cdot 10^{-4}$	$-1,509 \cdot 10^{-5}$	4,364	$5,833 \cdot 10^{-4}$
Ω -e	6960	$4,501 \cdot 10^{-4}$	$4,779 \cdot 10^{-5}$	2,025	$5,469 \cdot 10^{-4}$

Cuadro 2.4: Correlación lineal para cada caso (las unidades de los espesores son m y las de la tensión tangencial Pa)

<i>Caso</i>	<i>R</i>	R^2
Q1e	0,2047	0,0419
Q4e	0,1950	0,0380
Q1t	-0,1915	0,0367
Q4t	-0,1467	0,0215
Ω	0,2317	0,0537

Cuadro 2.5: Coeficientes de correlación y determinación múltiples para cada caso

<i>Caso</i>	sarl	scarl	$F_{n-2,1}$	α
Q1e-t	0,07374	0,9929	$4,890 \cdot 10^{-3}$	1
Q4e-t	$1,334 \cdot 10^{-3}$	0,8621	0,6650	0,7796
Q1t-t	$3,495 \cdot 10^{-4}$	0,1221	0,1142	0,9969
Q4t-t	$5,373 \cdot 10^{-3}$	0,9143	0,2011	0,9740
Ω -t	0,07077	1,248	$2,534 \cdot 10^{-3}$	1
Q1e-e	$4,215 \cdot 10^{-10}$	$5,676 \cdot 10^{-9}$	0,004890	1
Q4e-e	$3,114 \cdot 10^{-11}$	$2,013 \cdot 10^{-8}$	0,6650	0,7796
Q1t-e	$1,094 \cdot 10^{-10}$	$3,822 \cdot 10^{-8}$	0,1142	0,9969
Q4t-e	$2,093 \cdot 10^{-10}$	$3,562 \cdot 10^{-8}$	0,2011	0,9740
Ω -e	$3,011 \cdot 10^{-9}$	$5,309 \cdot 10^{-8}$	$2,534 \cdot 10^{-3}$	1

Cuadro 2.6: Estimación de la bondad del ajuste para cada caso

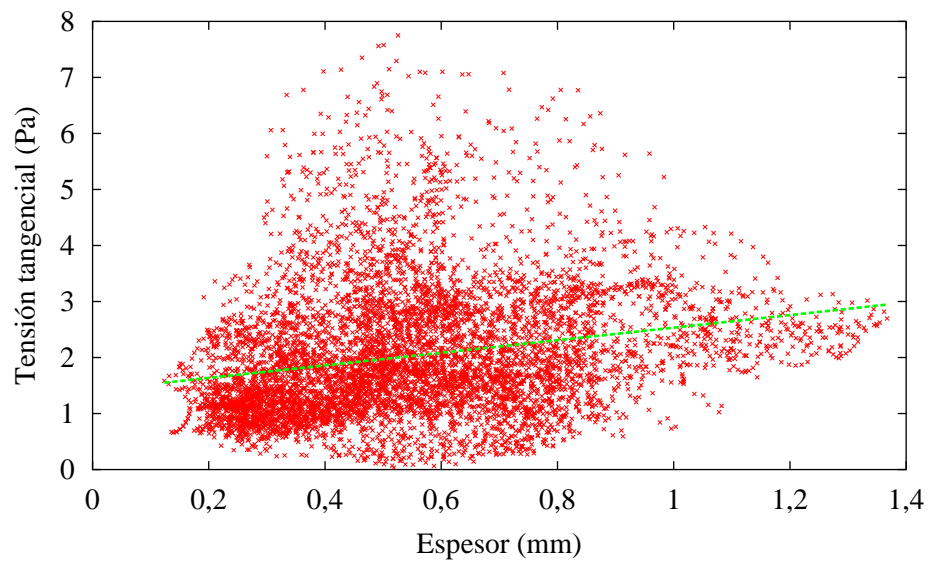


Figura 2.13: Correlación para el caso Ω -t

tiempo post-operatorio (*geometría de seguimiento*). A modo de ejemplo se muestra en la figura 2.14 una correlación entre las tensiones tangenciales de las geometrías basal (angioplastia con introducción de stent) y de seguimiento (a los seis meses) de un paciente identificado clínicamente como MGF. En este caso, el número de puntos utilizados fue de 3543, con los valores medios $\bar{\tau}_{\text{basal}} = 2,41546$ Pa (cortante basal) y $\bar{\tau}_{\text{seguim}} = 2,41546$ Pa (cortante de seguimiento), y resultando la ecuación de correlación

$$\tau_{\text{seguim}} = 0,641319 \text{ Pa} + 1,47339\tau_{\text{basal}}.$$

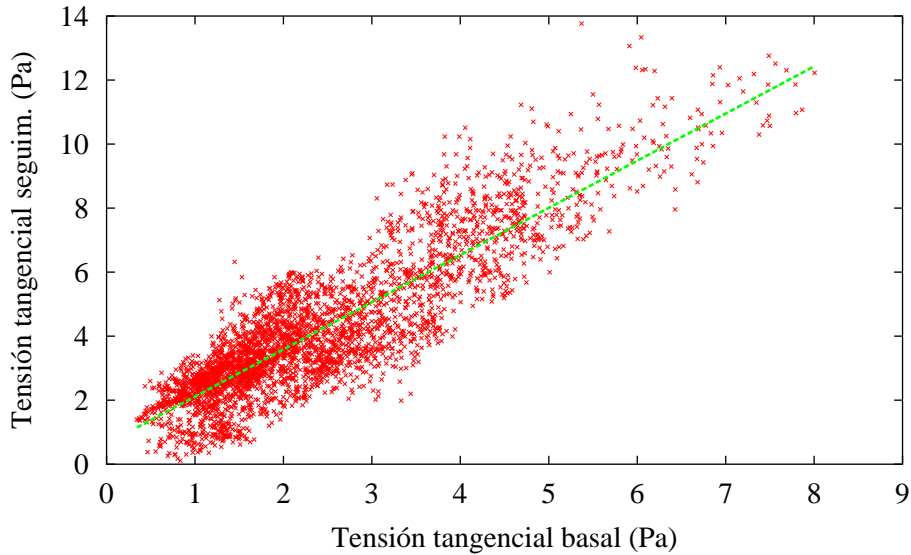


Figura 2.14: Correlación entre las tensiones tangenciales basal y de seguimiento

2.6. Criterios de correlación

Descripción de los criterios. La metodología de correlación expuesta en los apartados anteriores consideraba como variables a correlacionar el espesor y el módulo de la tensión tangencial. No obstante, existen otras hipótesis alternativas como la que establece como variable el producto escalar entre la tensión tangencial y la dirección del flujo, y no su módulo. Esta hipótesis se puede motivar al considerarse que los activadores de la *señal de remodelación* por el flujo sanguíneo no se orientan localmente, sino de forma global en la sección.

En este apartado se contrastan distintas hipótesis de correlación basándose en cuatro geometrías de la bifurcación del tronco principal izquierdo en la arteria descendente anterior y la arteria cicunfleja. En particular, las distintas metodologías (criterios de correlación) que se consideran son:

- a) Correlación entre el espesor y el módulo del vector tensión tangencial para la geometría global. Este criterio se denotará *sin signo*.

Los datos muestrales a utilizar son:

- I. Conjunto de todo el universo muestral (conjunto total de datos en la nube de puntos de acciones).
- II. Subconjunto de puntos con espesor superior a 0,3 mm, considerado el mínimo de engrosamiento patológico (véase CANTOR ET AL. [2000]).
- III. Cuartiles inferior y superior, tanto para el espesor como para la tensión tangencial.

- b) Correlación entre el espesor y el producto escalar del vector unitario en la dirección del flujo con el vector tensión tangencial.

Se consideran los distintos conjuntos de datos muestrales indicados en el apartado anterior, identificados *con signo*, no obstante, el análisis se realiza a su vez para los subconjuntos muestrales:

- I. Conjunto de datos con valores positivos del producto escalar. Este criterio se denotará *con signo positivo*.
- II. Conjunto de datos con valores negativos del producto escalar. Este criterio se denotará como *con signo negativo*.

Generación de la dirección del flujo. La dirección del flujo se define para cada parche volumétrico (superficie NURBS) asociando dos parejas de puntos denominados *puntos base de flujo* (véase la figura 2.6). Una de las parejas se dispone en la sección de entrada del flujo, $\mathbf{x}_{e,1}$ y $\mathbf{x}_{e,2}$, mientras que la otra se encuentra en la sección de salida, $\mathbf{x}_{s,1}$ y $\mathbf{x}_{s,2}$. La dirección y sentido del flujo se estiman con el vector

$$\frac{\mathbf{x}_{s,1} + \mathbf{x}_{s,2}}{2} - \frac{\mathbf{x}_{e,1} + \mathbf{x}_{e,2}}{2}. \quad (2.1)$$

En el esquema, el punto medio de la pareja base de entrada se ha denotado con O mientras que \mathbf{d} representa el vector normalizado de (2.1).

Resultados. Se han analizado cuatro geometrías correspondientes a la bifurcación del tronco principal izquierdo en la arteria descendente anterior y en la arteria circunfleja, correspondientes a pacientes transplantados de corazón. Sus identificadores clínicos (Hospital Clínico San Carlos de Madrid) son JFG, JAB, RCO y RMS.

Los niveles de significación obtenidos a través del análisis de la F de Snedecor, para las distintas metodologías y casos se presentan en el cuadro 2.7.

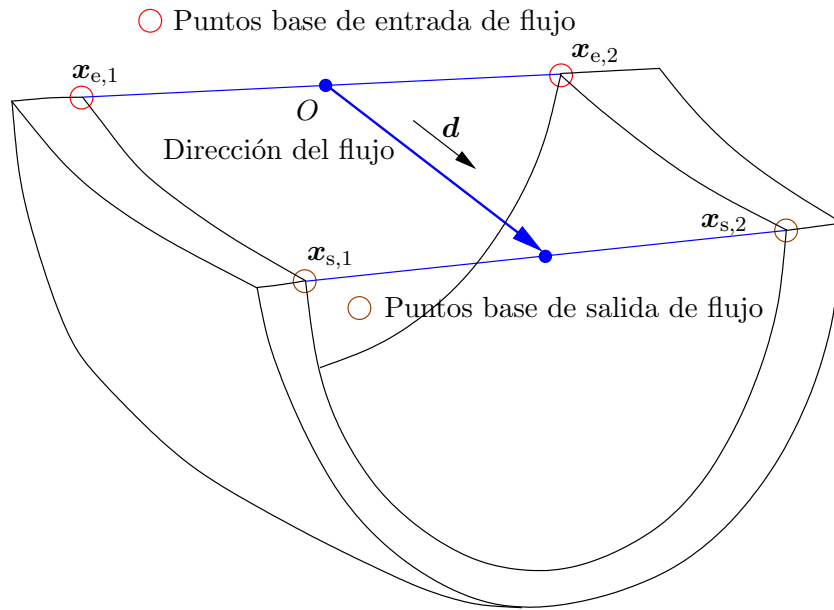


Figura 2.15: Esquema de estimación de la dirección y sentido del flujo

Como se ha indicado en la sección 2.4, cuanto mayor es el nivel de significación mayor será la bondad del ajuste.

Se ha definido el error de cada una de las metodologías como la suma de las diferencias a uno elevadas al cuadrado de los valores de la F para los distintos casos y dividido por el número de casos. Los resultados obtenidos se presentan en el cuadro 2.8.

Análogamente, sin considerar el caso RCO se ha obtenido el cuadro 2.9. Se propone no considerar dicho caso en el contraste de las metodologías al no presentar buena correlación global (para el conjunto de muestras Ω) tanto para los casos sin signo como con signo. Este cuadro presenta como mejor metodología de correlación la del módulo del cortante (*sin signo*), proponiéndose como conjunto muestral óptimo el global Ω . Además, en esta situación se obtuvo para todos los casos significativos (excluyendo RCO) una correlación positiva.

En dichos cuadros se hace uso de la metodología indicada en el cuadro 2.2, esto es, Q1e y Q4e son el primero y cuarto cuartil respecto del espesor y Q1t y Q4t el primer y cuarto cuartil respecto a la tensión tangencial. Como ya se ha indicado, el uso de todos los datos muestrales se indica con Ω . Por último se destaca que también se ha incluido la correlación con espesores considerados patológicos, esto es, espesores superiores a 0,3 mm.

Por otra parte, en el cuadro 2.10 se indican los coeficientes de correlación y determinación múltiples considerando todo el universo muestral, para los distintos casos. Si se adopta el coeficiente de determinación múltiple como indicador del nivel de correlación, se observa correlación en tres de los cuatro casos (JFG, JAB y RMS), mientras que en el caso RCO la correlación no

resulta significativa. Esto refuerza el criterio de descartar el caso RCO en el estudio comparativo entre las distintas metodologías de correlación.

En las figuras 2.16, 2.19, 2.22 y 2.25 se presentan los contornos de espesores de los distintos casos. Análogamente, en las figuras 2.17, 2.20, 2.23 y 2.26 se muestran los contornos de tensiones tangenciales. Por último, los errores puntuales de la correlación del módulo de la tensión tangencial respecto al espesor se muestran en las figuras 2.18, 2.21, 2.24 y 2.27. El error puntual en dichos gráficos se ha definido como la diferencia al cuadrado entre los valores de la tensión tangencial muestral y de correlación, dividido por el cuadrado de la tensión tangencial media con objeto de normalizar adimensionando los resultados.

<i>Caso</i>	<i>Método</i>	Q1e	Q4e	Q1t	Q4t	Ω	$e > 0,3 \text{ mm}$
JFG	<i>Sin signo</i>	0,28	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	<i>Con signo</i>	0,24	1,00	0,68	1,00	1,00	1,00
	<i>Con signo positivo</i>	0,24	1,00	0,68	1,00	1,00	1,00
	<i>Con signo negativo</i>	–	–	–	–	–	–
JAB	<i>Sin signo</i>	0,91	0,95	0,93	1,00	1,00	1,00
	<i>Con signo</i>	1,00	0,30	0,59	0,99	1,00	1,00
	<i>Con signo positivo</i>	0,96	0,12	1,00	0,98	1,00	1,00
	<i>Con signo negativo</i>	0,07	1,00	0,81	0,22	≈ 0	0,65
RCO	<i>Sin signo</i>	0,87	0,75	0,68	0,48	0,32	0,98
	<i>Con signo</i>	0,77	1,00	0,96	1,00	0,89	0,83
	<i>Con signo positivo</i>	0,19	0,87	0,99	1,00	0,67	0,47
	<i>Con signo negativo</i>	0,77	0,98	0,19	0,11	0,61	0,81
RMS	<i>Sin signo</i>	0,51	0,98	0,99	0,93	1,00	0,55
	<i>Con signo</i>	0,09	0,95	0,67	0,87	1,00	0,84
	<i>Con signo positivo</i>	0,02	0,70	0,98	0,58	1,00	0,99
	<i>Con signo negativo</i>	0,66	0,92	≈ 0	0,92	0,97	0,86

Cuadro 2.7: Niveles de significación para las distintas metodologías y casos

<i>Método</i>	Q1e	Q4e	Q1t	Q4t	Ω	$e > 0,3 \text{ mm}$	SC/gdl
<i>Sin signo</i>	0,20	0,02	0,03	0,07	0,12	0,05	0,01
<i>Con signo</i>	0,36	0,12	0,10	0,004	0,003	0,01	0,03
<i>Con signo positivo</i>	0,55	0,22	0,03	0,04	0,03	0,07	0,06
<i>Con signo negativo</i>	0,34	0,003	0,56	0,47	0,42	0,06	0,14
SC/gdl	0,15	0,02	0,08	0,06	0,05	0,003	

Cuadro 2.8: Error medio de los casos para las distintas metodologías

Método	Q1e	Q4e	Q1t	Q4t	Ω	$e > 0,3 \text{ mm}$	SC/gdl
<i>Sin signo</i>	0,26	0,001	0,002	0,002	≈ 0	0,07	0,01
<i>Con signo</i>	0,47	0,16	0,13	0,01	≈ 0	0,01	0,04
<i>Con signo positivo</i>	0,51	0,29	0,03	0,06	≈ 0	≈ 0	0,06
<i>Con signo negativo</i>	0,49	0,003	0,52	0,31	0,06	0,07	0,10
SC/gdl	0,20	0,03	0,07	0,02	0,001	0,002	

Cuadro 2.9: Error medio de los casos JFG, JAB y RMS para las distintas metodologías

Caso	R	R^2
JFG	0,1211	0,0147
JAB	0,2816	0,0793
RCO	-0,0128	0,0002
RMS	0,1190	0,0142

Cuadro 2.10: Coeficientes de correlación y determinación múltiples considerando el universo muestral para cada caso

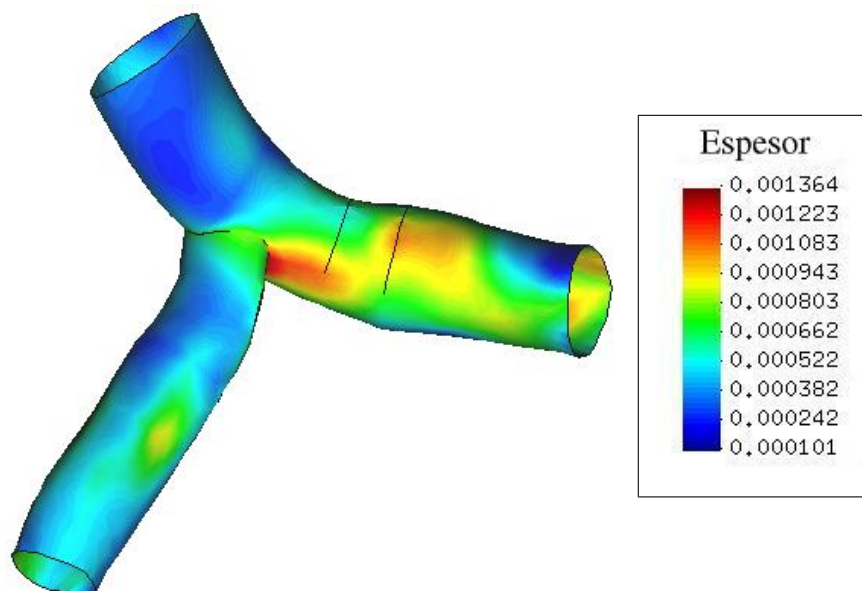


Figura 2.16: Espesores en el caso JFG (m)

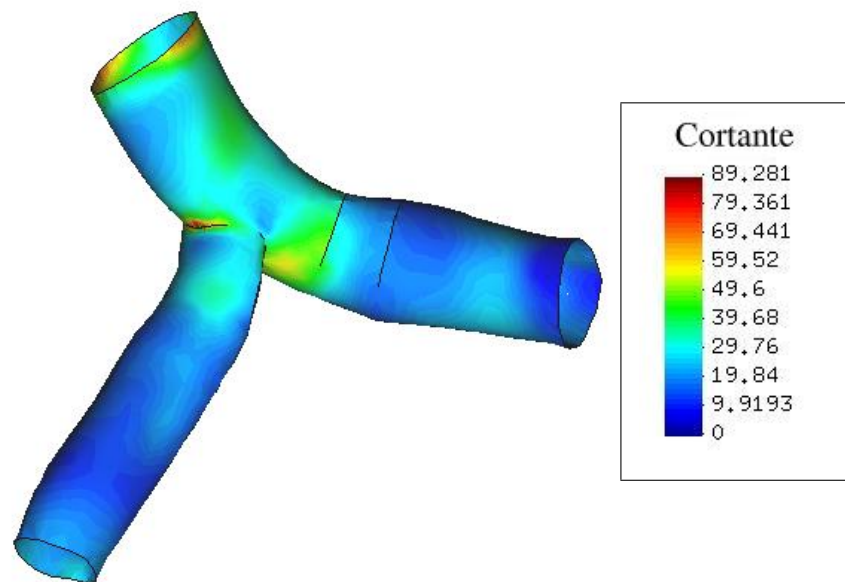


Figura 2.17: Módulos de tensiones tangenciales en el caso JFG (Pa)

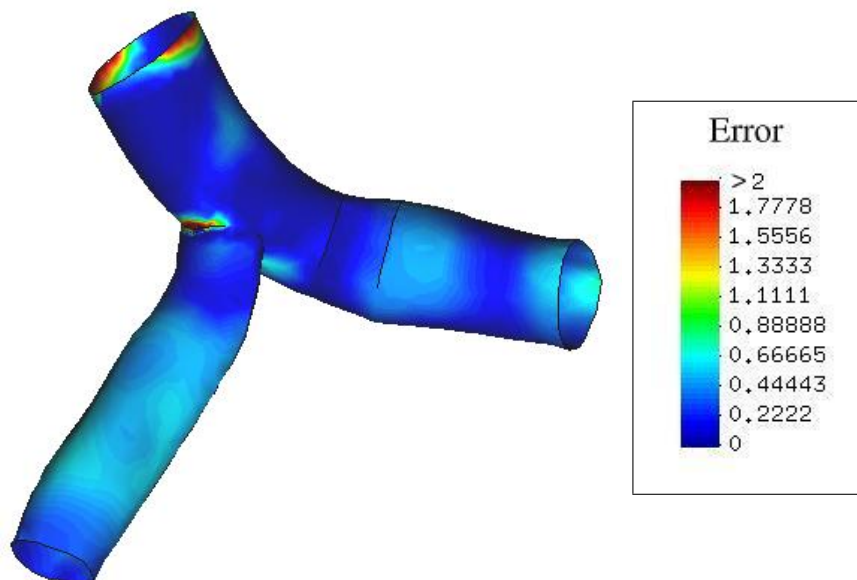


Figura 2.18: Errores de correlación del módulo del cortante en el caso JFG

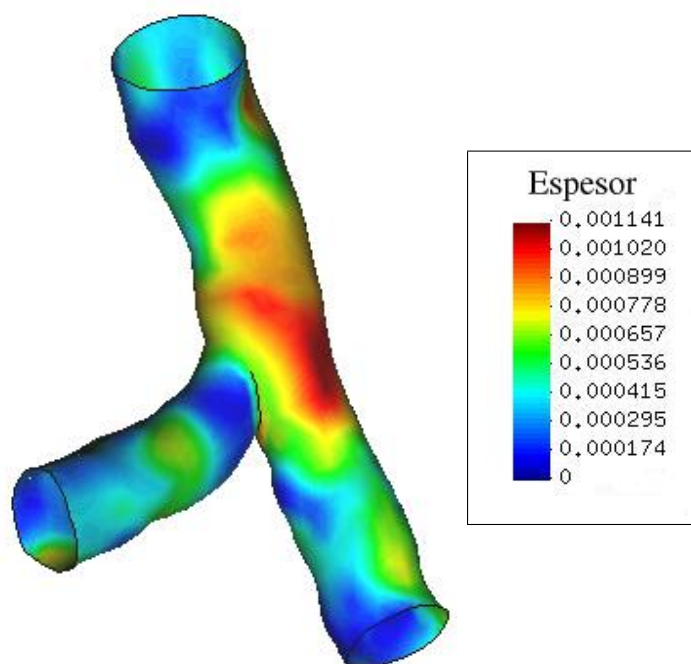


Figura 2.19: Espesores en el caso JAB (m)

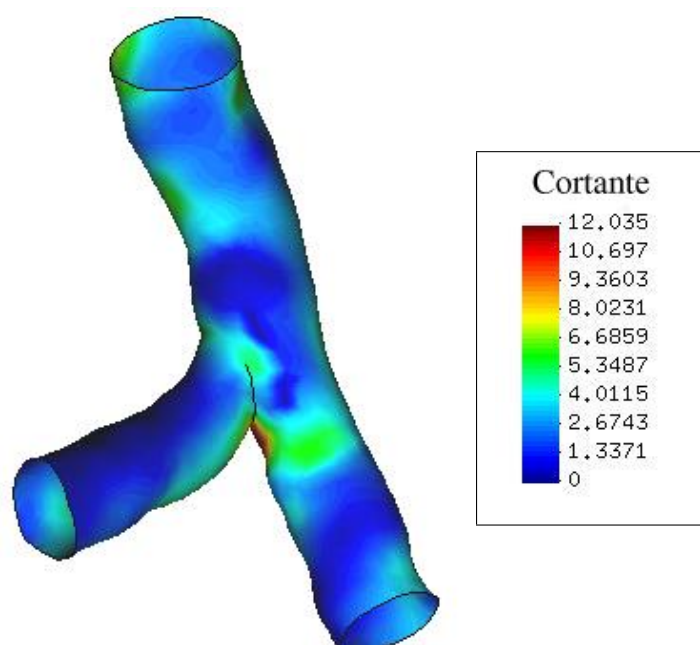


Figura 2.20: Módulos de tensiones tangenciales en el caso JAB (Pa)

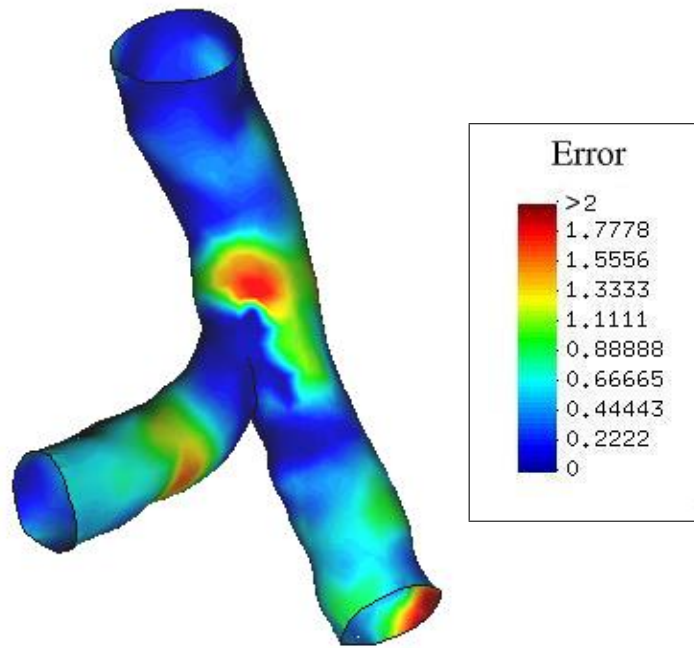


Figura 2.21: Errores de correlación del módulo del cortante en el caso JAB

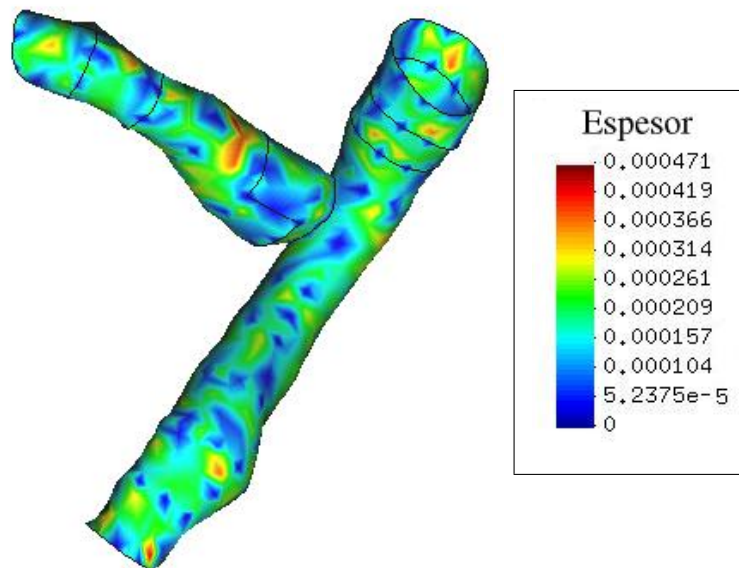


Figura 2.22: Espesores en el caso RCO (m)

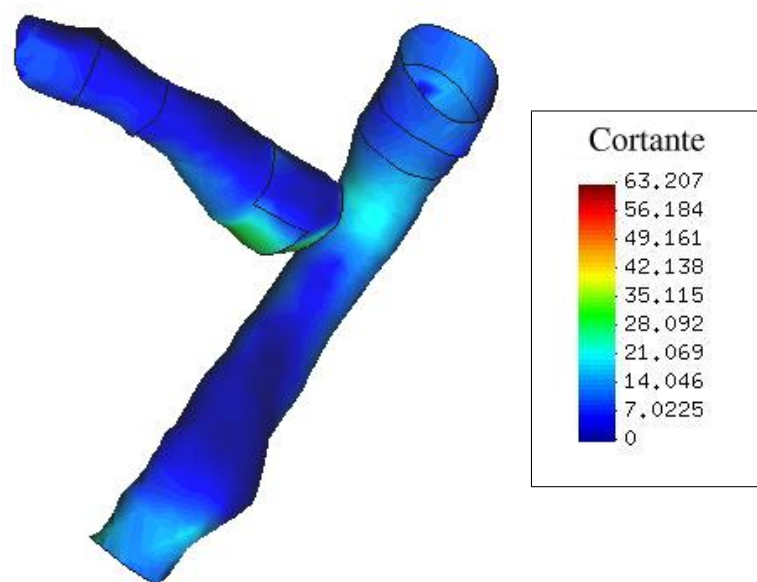


Figura 2.23: Módulos de tensiones tangenciales en el caso RCO (Pa)

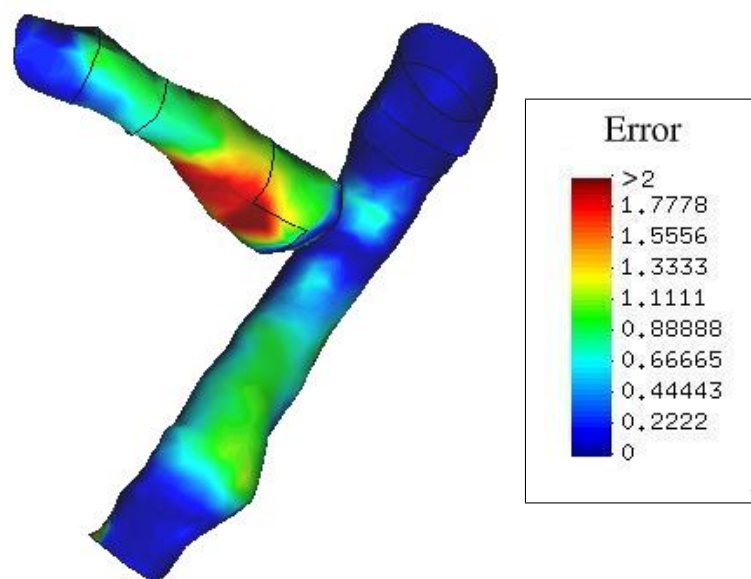


Figura 2.24: Errores de correlación del módulo del cortante en el caso RCO

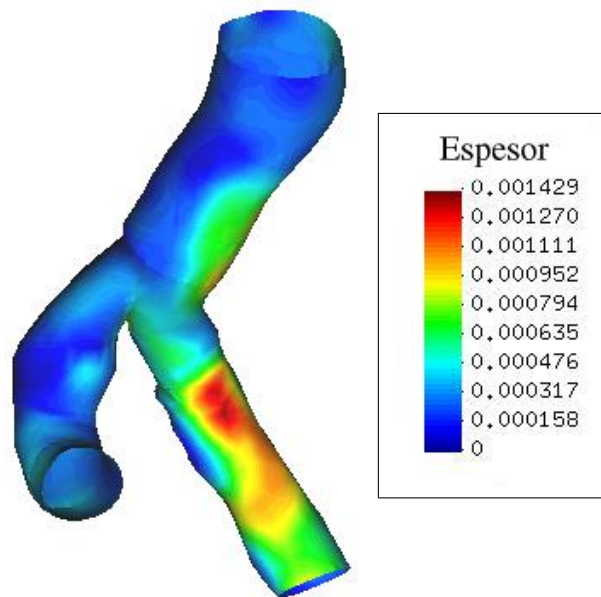


Figura 2.25: Espesores en el caso RMS (m)

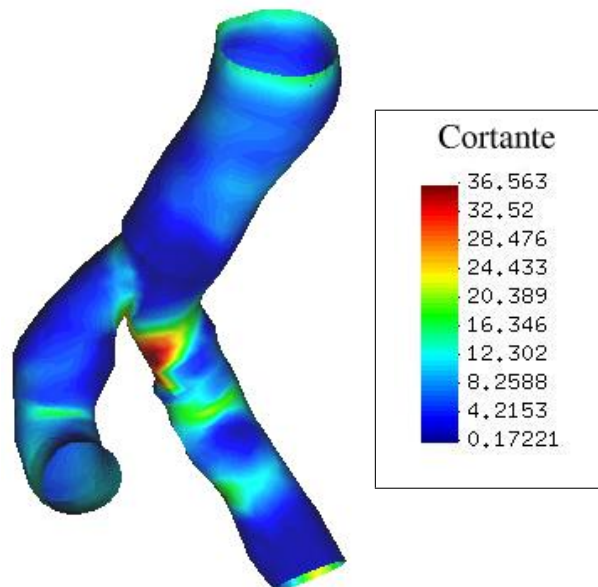


Figura 2.26: Módulos de tensiones tangenciales en el caso RMS (Pa)

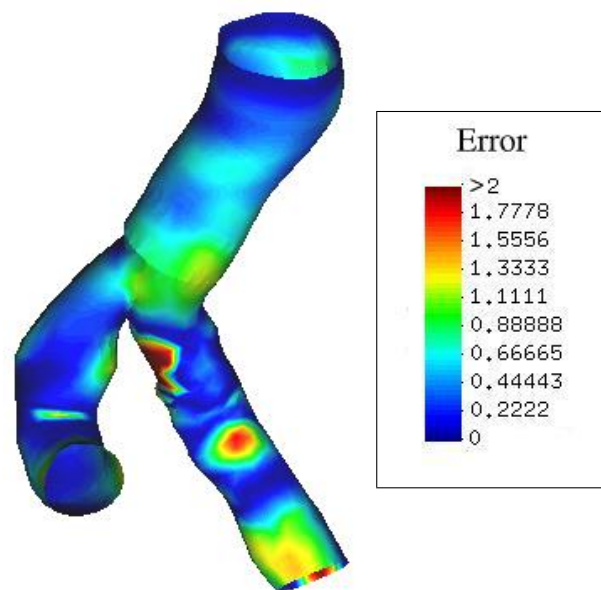


Figura 2.27: Errores de correlación del módulo del cortante en el caso RMS

Capítulo 3

Materiales hiperelásticos para paredes arteriales

En este capítulo se describen modelos de material para las grandes deformaciones planteados en el marco de la hiperelasticidad.

Para ello, en primer lugar (apartado 3.1) se presentan algunos conceptos básicos de mecánica de medios continuos (para más información, véanse por ejemplo, TRUESDELL [1977], CIARLET [1988] y GURTIN [1981]) con objeto únicamente de especificar las ideas básicas y las notaciones que se utilizarán en el desarrollo de los modelos.

Posteriormente se desarrollan inicialmente modelos de tipo isótropo (apartado 3.2), caracterizados porque cualquier rotación a nivel local en el estado inicial no afecta la respuesta del material. Este tipo de materiales pueden resultar adecuados para la simulación de la placa ateromatosa y han sido utilizado por diversos autores para modelizar paredes arteriales (véanse YAMAGUCHI [2000], TANG ET AL. [1999a], TANG ET AL. [1999b] y AURICCHIO ET AL. [2000]). Algunos de los modelos que se exponen surgieron inicialmente para modelizar gomas y cauchos, aunque se han mostrado adecuados para materiales biológicos blandos.

Seguidamente se presentan modelos anisótropos (apartado 3.3). Estos modelos son los que se consideran más adecuados en la modelización de las paredes arteriales sanas, especialmente aquellos con dos direcciones preferentes de fibras.

Por último, en el apartado 3.5 se desarrolla un método de correlación no lineal entre modelos constitutivos de materiales hiperelásticos para paredes arteriales, permitiendo el ajuste de parámetros.

3.1. Mecánica de medios continuos e hiperelasticidad

En el desarrollo de la tesis se admiten como hipótesis básicas las de la mecánica de medios continuos. No obstante, existen modificaciones a dichas hipótesis que permiten tener en cuenta ciertas singularidades. Por ejemplo, HOLEČEK Y KRÁKORA [2000] presenta aplicaciones a los vasos sanguíneos de descripciones dependientes de la escala que permiten modelizar sistemas cuyos parámetros microscópicos varían (oscilan) rápidamente en el espacio, motivando la hipótesis de que esta variación se realiza de forma discontinua.

3.1.1. Cinemática

Sean \mathbf{X} y \mathbf{x} los *vectores posición* de una partícula en la *configuración inicial* \mathcal{B}_0 , llamada también de *referencia*, y *deformada* \mathcal{B}_t , llamada también *instantánea*, en el tiempo t . La función transformación que relaciona ambos vectores, función del tiempo y de la posición inicial, es $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ (véase la figura 3.1). A esta función se le exige que sea suave (continua y con derivadas continuas para todo orden). Además, se exige la existencia de la función inversa $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$, necesaria dado que dos partículas distintas en cada instante deben ocupar análogamente posiciones distintas en la configuración inicial.

Los campos de *velocidades* y *aceleraciones* se obtienen a partir de $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ de la forma

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2},$$

respectivamente.

El tensor *gradiente de deformación* viene dado por $\mathbf{F} = \text{Grad } \boldsymbol{\varphi}$ o en componentes¹

$$F_{aA} = \frac{\partial x_a}{\partial X_A},$$

representando su determinante la relación de volúmenes entre las configuraciones deformada e inicial, que se indica por $J = \det \mathbf{F}$. Obsérvese que \mathbf{F} es siempre invertible, dada la existencia de la función inversa $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$.

El *teorema de la descomposición polar* (véase, por ejemplo, GURTIN [1981]) arroja que para todo \mathbf{F} existen dos tensores, de forma única, \mathbf{R} y \mathbf{U} , tales que $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$, siendo \mathbf{R} *tensor ortogonal*, esto es $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$. Al tensor \mathbf{R} se le denomina *tensor rotación*, mientras que el tensor \mathbf{U} se denota como *tensor de alargamiento derecho*. Análogamente se puede demostrar la existencia de la descomposición única $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$, siendo \mathbf{V} el *tensor de alargamiento izquierdo* y \mathbf{R} el mismo tensor rotación considerado en la descomposición anterior.

¹Se supondrá en todo el desarrollo de la presente doctoral que las componentes vienen referidas a bases ortonormales y cartesianas.

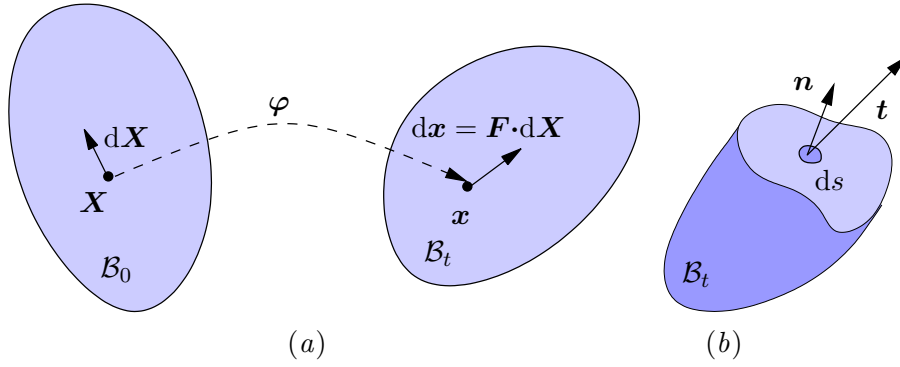


Figura 3.1: (a) Cinemática. (b) Tensiones

Con objeto de dar medidas de la deformación del material independientes del sistema de referencia, esto es, medidas objetivas de la deformación, se definen los *tensores de Cauchy-Green* por la *derecha* y por la *izquierda* como $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$ y $\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$, respectivamente. Obsérvese que tanto \mathbf{U} como \mathbf{b} son también objetivos, pero el manejo de estos tensores exige en general mayor capacidad de cálculo.

Otras medidas de la deformación son la dada por el *tensor de deformación de Green*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$$

y la dada por el *tensor de Almansi*

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}).$$

3.1.2. Tensiones

Las *tensiones* indican las fuerzas por unidad de superficie en el material (véase la figura 3.1), escribiéndose $d\mathbf{f} = \mathbf{t}ds$ en la configuración deformada, donde \mathbf{f} indica la fuerza aplicada sobre una superficie de tamaño s que tiene un vector tensión asociado \mathbf{t} .

El *teorema de Cauchy* asegura la existencia de un tensor único, llamado *tensor de tensiones de Cauchy* y denotado con $\boldsymbol{\sigma}$, tal que $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, siendo \mathbf{n} el vector normal a la superficie que tiene asociada la tensión \mathbf{t} . Además, las ecuaciones de equilibrio de momentos arrojan que $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico.

El *primer tensor de Piola-Kirchhoff*, \mathbf{P} , es aquel que verifica

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} dS,$$

siendo \mathbf{N} y S el vector normal y la superficie en la configuración inicial. Se puede demostrar (véase, por ejemplo, CIARLET [1988])

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}.$$

El *tensor de Kirchhoff*, $\boldsymbol{\tau}$, se define por $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$.

Por último, el *segundo tensor de Piola-Kirchhoff*, \mathbf{S} , se corresponde con el *pullback* (véase, por ejemplo, MARSDEN Y HUGHES [1968]) del tensor de Kirchhoff, esto es,

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (3.1)$$

3.1.3. Potencia de deformación

La *potencia tensional específica*, por unidad de volumen en la configuración instantánea, se puede obtener como

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{\text{int}}}{\partial v} = \boldsymbol{\sigma} : \text{grad } \mathbf{v},$$

o escrito en forma indicial²,

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{\text{int}}}{\partial v} = \sigma_{ab} \frac{\partial v_a}{\partial x_b}.$$

Dado que el tensor de tensiones de Cauchy es simétrico (esto es, $\sigma_{ab} = \sigma_{ba}$), la potencia específica en la configuración deformada se puede expresar de la forma

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{\text{int}}}{\partial v} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d},$$

siendo \mathbf{d} la parte simétrica de $\text{grad } \mathbf{v}$. Ahora bien, dada la relación de volúmenes entre las configuraciones deformada e inicial, se tiene, en la configuración inicial,

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{\text{int}}}{\partial V} = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}. \quad (3.2)$$

Por otra parte, derivando el tensor de Green respecto del tiempo,

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}}),$$

y dado que $\dot{\mathbf{F}} = (\text{grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}$, se tiene $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot (\text{grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}$. Sustituyendo en (3.2) y operando se llega a las igualdades

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{\text{int}}}{\partial V} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{S} : \frac{\dot{\mathbf{C}}}{2}. \quad (3.3)$$

3.1.4. Hiperelasticidad

Un material se dice que es *hiperelástico* si su densidad de energía libre, Ψ en la configuración de referencia, es función exclusivamente del estado de deformación, pudiendo escribirse $\Psi = \Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{C})$. En estas condiciones,

²Se hace uso de la convención de sumación de Einstein, mediante el uso de índices repetidos mudos.

dada la independencia de la energía a los procesos térmicos y la imposibilidad en el aumento de la entropía, la densidad de trabajo realizado por las fuerzas internas debe ser equivalente al aumento de la energía libre, $dW = d\Psi$, y por tanto $W = W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{C})$. Esta función W debe respetar ciertas condiciones, como es la de *objetividad* y algunas relacionadas con la *estabilidad* (entre las que destaca la condición de *policonvexidad*). Las condiciones de mayor relevancia se presentan en el apéndice A.

Observación. La hipótesis de hiperelasticidad será el punto de partida de los modelos que se desarrollan en la presente tesis. No obstante, otros modelos más complejos admiten que las paredes arteriales están constituidos por materiales entrópicos (típico en materiales constituidos por largas moléculas entrelazadas, como son los polímeros), esto es, materiales que modifican la entropía (con cierto sentido geométrico) con la deformación, de forma que aumentan la temperatura al alargarse, fenómeno ya observado por ROY [1881], aumentando la entropía del exterior (desigualdad de Clausius-Duhem). A su vez, este planteamiento justifica el hecho de que al aumentar la temperatura el material se encoja, ya que el incremento de la entropía se lleva a cabo por disminución de alargamientos. La entropía está asociada a las posibles maneras de unir las moléculas (cuya longitud puede suponerse distribuida según una variable aleatoria Normal) entre sus puntos de unión.

Tensor de tensiones. Partiendo de (3.3) y teniendo en cuenta las consideraciones indicadas, se tiene

$$\frac{\partial P_{\text{int}}}{\partial V} = \mathbf{S} : \frac{\dot{\mathbf{C}}}{2} = \dot{W},$$

por lo que puede obtenerse \mathbf{S} , conocida $W(\mathbf{C})$, haciendo uso de la expresión

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}. \quad (3.4)$$

Tensor de elasticidad. El estudio de configuraciones con comportamiento no lineal exige generalmente una aproximación numérica, al dificultarse el planteamiento analítico. Este proceso se facilita iterando sobre las ecuaciones linealizadas que describen el problema. En particular, en la configuración inicial se busca un cierto tensor \mathbb{C} , denominado *tensor de elasticidad* respecto a la configuración inicial, tal que se obtenga la linealización (para incrementos pequeños)

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbb{C} : \Delta \mathbf{E}.$$

Para un material hiperelástico, el tensor \mathbb{C} se puede obtener a partir de W de la forma

$$\mathbb{C} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}},$$

donde se observa que \mathbb{C} no es en general constante.

Se puede demostrar que el tensor de elasticidad \mathbb{C} presenta las propiedades denominadas *simetrías mayores*, $\mathcal{C}_{ABCD} = \mathcal{C}_{CDAB}$ y *simetrías menores*, $\mathcal{C}_{ABCD} = \mathcal{C}_{BACD}$.

Por otra parte, en la *configuración deformada* se define el *tensor de elasticidad* \mathbf{c} como aquel que verifica

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}:\Delta\boldsymbol{\varepsilon},$$

donde $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ es la parte simétrica del gradiente, respecto a la configuración deformada, de los incrementos de desplazamientos, esto es,

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\text{grad } \Delta\mathbf{u} + (\text{grad } \Delta\mathbf{u})^T).$$

Se puede demostrar que \mathbf{c} (con componentes $[c_{abcd}]$) y \mathbb{C} (con componentes $[\mathcal{C}_{ABCD}]$) se encuentran relacionados indicialmente a través de

$$c_{abcd} = J^{-1}F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD}\mathcal{C}_{ABCD}. \quad (3.5)$$

3.2. Hiperelasticidad isótropa

Un material es *isótropo* cuando cualquier rotación en la configuración inicial no afecta la respuesta del material. En particular, las energías acumuladas deben ser independientes de las rotaciones en la configuración inicial para todo movimiento a lo largo del tiempo, escribiéndose $W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q})$ para todo tensor ortogonal \mathbf{Q} . Se dice que el *grupo de simetrías* del material contiene el de rotaciones.

En la modelización de las arterias existen materiales que pueden simularse adecuadamente con formulaciones isótropas, como puede ser la placa aterosclerótica.

3.2.1. Función de los invariantes

Expresando el trabajo en función de \mathbf{C} se tiene $W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}) = W(\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}) = W(\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{Q})$. Por tanto, W debe ser función exclusiva de los *invariantes de Jordan* de \mathbf{C} , que se pueden obtener de la forma

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}), \quad I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr } \mathbf{C}^2) \quad \text{e} \quad I_3 = \det \mathbf{C} = J^2.$$

En esta situación, con $W = W(I_1, I_2, I_3)$, la ecuación (3.4) resulta

$$\mathbf{S} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right), \quad (3.6)$$

donde las derivadas de los invariantes respecto de \mathbf{C} pueden ser expresadas como

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1\mathbf{1} - \mathbf{C} \quad \text{y} \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3\mathbf{C}^{-1}.$$

Indicialmente,

$$S_{AB} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_a} \frac{\partial I_a}{\partial C_{AB}},$$

con

$$\frac{\partial I_1}{\partial C_{AB}} = \delta_{AB}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial C_{AB}} = I_1 \delta_{AB} - C_{AB} \quad \text{y} \quad \frac{\partial I_3}{\partial C_{AB}} = I_3 C_{AB}^{-1}, \quad (3.7)$$

siendo δ_{AB} el delta de Kronecker correspondiente a los índices A y B .

Por otra parte, teniendo en cuenta (3.6), se tiene

$$\mathbb{C} = 4 \sum_{a,b=1}^3 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial I_a \partial I_b} \frac{\partial I_a}{\partial \mathbb{C}} \frac{\partial I_b}{\partial \mathbb{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_a} \frac{\partial^2 I_a}{\partial \mathbb{C}^2} \right).$$

Indicialmente,

$$C_{ABCD} = 4 \sum_{a,b=1}^3 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial I_a \partial I_b} \frac{\partial I_a}{\partial C_{AB}} \frac{\partial I_b}{\partial C_{CD}} + \frac{\partial W}{\partial I_a} \frac{\partial^2 I_a}{\partial C_{AB} \partial C_{CD}} \right), \quad (3.8)$$

donde las derivadas parciales segundas de los invariantes respecto al tensor de Cauchy pueden ser obtenidas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_1}{\partial C_{AB} \partial C_{CD}} &= 0, \\ \frac{\partial^2 I_2}{\partial C_{AB} \partial C_{CD}} &= \delta_{AB} \delta_{CD} - \frac{1}{2} (\delta_{AC} \delta_{BD} + \delta_{AD} \delta_{BC}) \quad \text{y} \\ \frac{\partial^2 I_3}{\partial C_{AB} \partial C_{CD}} &= I_3 \left(C_{AB}^{-1} C_{CD}^{-1} - \frac{1}{2} (C_{AC}^{-1} C_{BD}^{-1} + C_{AD}^{-1} C_{BC}^{-1}) \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2.2. Función de los alargamientos principales

Los *autovectores* $\{\mathbf{N}_a\}$ y los *autovalores* correspondientes $\{\lambda_a\}$ del tensor de alargamiento derecho \mathbf{U} , se definen de forma que se verifique $\mathbf{U} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a$, resultando $\{\mathbf{N}_a\}$ base ortonormal. Teniendo en cuenta la descomposición polar, el movimiento local del material se puede descomponer (por este orden) en:

1. Alargamiento en las direcciones $\{\mathbf{N}_a\}$ de valor $\{\lambda_a\}$, denominadas *direcciones principales* y *alargamientos principales* en la *configuración inicial*.
2. Rotación \mathbf{R} .

Se observa que $J = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, dado que \mathbf{R} es ortogonal.

Análogamente, se definen los *autovectores* $\{\mathbf{n}_a\}$ y los *autovalores* correspondientes $\{\lambda_a\}$ del tensor de alargamiento izquierdo \mathbf{V} , de forma que se verifique $\mathbf{V} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a$, siendo $\{\mathbf{n}_a\}$ base ortonormal. Puede demostrarse que los autovalores de \mathbf{U} coinciden con los de \mathbf{V} . La descomposición polar permite afirmar que el movimiento local del material puede ser descompuesto (en este orden) en:

1. Rotación \mathbf{R} .
2. Alargamiento en las direcciones $\{\mathbf{n}_a\}$, denominadas *direcciones principales en la configuración deformada*, de valor $\{\lambda_a\}$.

Por otra parte, dada la independencia de la función densidad de energía de deformación W respecto a las rotaciones en todo material simétrico, W es expresable en función de los alargamientos principales, escribiéndose $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Se puede demostrar (véase, por ejemplo, HOLZAPFEL [2000b]) que para un material isótropo el tensor de tensiones de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$, tiene las mismas direcciones principales que el de alargamiento izquierdo, \mathbf{V} , siendo expresable de la forma $\boldsymbol{\sigma} = \sum_{a=1}^3 \sigma_a \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a$, con

$$\sigma_a = J^{-1} \lambda_a \frac{\partial W}{\partial \lambda_a}.$$

Además, $\mathbf{S} = \sum_{a=1}^3 S_a \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a$, con

$$S_a = \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial W}{\partial \lambda_a}.$$

Análogamente, el tensor de elasticidad en la configuración inicial puede ser expresado en función de los alargamientos principales de la forma

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = & \sum_{a,b=1}^3 \frac{1}{\lambda_b} \frac{\partial S_a}{\partial \lambda_b} \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_b \otimes \mathbf{N}_b + \\ & \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^3 \frac{S_b - S_a}{\lambda_b^2 - \lambda_a^2} (\mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_b \otimes \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_b + \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_b \otimes \mathbf{N}_b \otimes \mathbf{N}_a), \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde debe tenerse en cuenta que

$$\lim_{\lambda_b \rightarrow \lambda_a} \frac{S_b - S_a}{\lambda_b^2 - \lambda_a^2} = \frac{\partial S_b}{\partial \lambda_b^2} - \frac{\partial S_a}{\partial \lambda_b^2}.$$

3.2.3. Algunos materiales hiperelásticos isótropos

Como se ha indicado, los materiales hiperelásticos se encuentran caracterizados por la expresión de su función de densidad de energía de deformación W de variable el estado de deformación.

Algunas expresiones de W consideran parámetros que se derivan del comportamiento del material para el caso límite de pequeñas deformaciones, concretamente en función del *módulo de elasticidad* E y del *coeficiente de Poisson* ν se obtienen las *constantes de Lamé*:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

y los *módulos volumétrico* K y *tangencial o de corte* G ,

$$K = \frac{\lambda + 2\mu}{3} = \frac{\lambda + 2\mu}{3} \quad \text{y} \quad G = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Función de los invariantes. Los materiales hiperelásticos isótropos definidos en función de los invariantes que se han implementado³ (véase el cuadro C.1 de la página 229), indicando las funciones de densidad de energía (véanse los contornos de la sección A.7.1) con los parámetros de material, son:

a) *Saint Venant-Kirchhoff*:

$$W = \frac{\lambda}{8}(I_1 - 3)^2 + \frac{\mu}{4}(I_1^2 - 2I_2 - 2I_1 + 3).$$

b) *Neohookeano*:

$$W = \frac{\lambda}{2} \log^2 J + \mu \left(\frac{1}{2} I_1 - \frac{3}{2} - \log J \right),$$

c) *Neohookeano modificado*:

$$W = \frac{K}{2} \log^2 J + \mu \left(\frac{1}{2} I_1 J^{-2/3} - \frac{3}{2} \right).$$

d) *Mooney-Rivlin*:

$$W = c(J - 1)^2 - d \log J + c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3),$$

$$\text{con } d = 2(c_1 + 2c_2).$$

³En la elección de los modelos se ha prestado atención a los que surgieron para modelizar gomas y cauchos, dada la analogía mecánica con los tejidos biológicos blandos.

e) *Yeoh*:

$$W = \frac{K}{2} \log^2 J + c_1(I_1 - 3) + c_2(I_1 - 3)^2 + c_3(I_1 - 3)^3.$$

f) *Blatz y Ko*:

$$W = f \frac{\mu}{2} \left((I_1 - 3) + \frac{1}{\beta} (I_3^{-\beta} - 1) \right) + (1-f) \frac{\mu}{2} \left(\left(\frac{I_2}{I_3} - 3 \right) + \frac{1}{\beta} (I_3^2 - 1) \right).$$

Función de los alargamientos principales. Los modelos descritos en función de los alargamientos principales (véanse los contornos de la sección A.7.2) y que han sido implementados (véase el cuadro C.1 de la página 229) son:

a) *Ogden* (véanse las condiciones basadas en la estabilidad que se proponen para sus parámetros en el cuadro A.1 de la sección A.6, página 217):

$$W = \frac{K}{2} \log^2 J + \sum_{p=1}^3 \left(\frac{\mu_p}{\alpha_p} \sum_{a=1}^3 \tilde{\lambda}_a^{\alpha_p} \right), \quad (3.11)$$

$$\text{con } \tilde{\lambda}_a = \frac{\lambda_a}{J^{-1/3}}.$$

b) *Varga*:

$$W = c_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3).$$

c) *Logarítmico*:

$$W = \frac{K}{2} \log^2 J + G \sum_{a=1}^3 \log(\lambda_a).$$

3.2.4. Implementación

Se pueden implementar materiales hiperelásticos en programas de elementos finitos siguiendo los esquemas de los cuadros 3.1 y 3.2 para funciones de densidad de energía dependientes de los invariantes del tensor de Cauchy-Green por la derecha y de los alargamientos principales, respectivamente⁴.

Los esquemas indicados se han establecido de forma que se facilite la incorporación de nuevos materiales, en particular, para definir los materiales hiperelásticos basta con introducir los valores de las derivadas primeras y segundas de la función densidad de energía respecto a los invariantes (punto 3 del cuadro 3.1) o respecto a los alargamientos principales (punto 3 del cuadro 3.2). A modo de ejemplo, se presenta en el cuadro 3.3 el código Fortran

⁴De esta forma se han incorporado en el sistema FEAP desarrollado por TAYLOR [2000] subrutinas que permiten obtener el tensor de tensiones de Cauchy y el tensor de elasticidad en la configuración deformada (véase el cuadro C.1 de la sección C.2, página 228).

correspondiente a los materiales de Saint Venant-Kirchhoff y de alargamiento logarítmico.

Uno de los aspectos a tener en cuenta en la implementación es la presencia de simetrías (mayores y menores). Esto permite por ejemplo que los tensores de elasticidad se almacenen con 21 valores, en vez de $3^4 = 81$ valores.

3.2.5. Ensayos

Este apartado tiene por objeto presentar el comportamiento de distintos tipos de materiales hiperelásticos y de validar el código de elementos finitos implementado según los esquemas de los cuadros 3.1 y 3.2.

Ensayos unidireccionales. A continuación se presentan los resultados obtenidos en ensayos unidireccionales de deformación plana en los que se impiden todos los desplazamientos transversales a las direcciones de estiramiento (véase la figura 3.2). Se presenta la tensión de estiramiento σ_{xx} para cada estado de deformación, determinado por $\Delta l/L$, comparándose los resultados obtenidos haciendo uso del código de elementos finitos implementado con los cálculos teóricos (véase el cuadro 3.4 y las figuras 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10). Obsérvese que en algunos de los casos el material muestra un aumento de la rigidez con la deformación, mientras que en otros disminuye. Este aspecto debe tenerse en cuenta en la elección de modelos para las paredes arteriales.

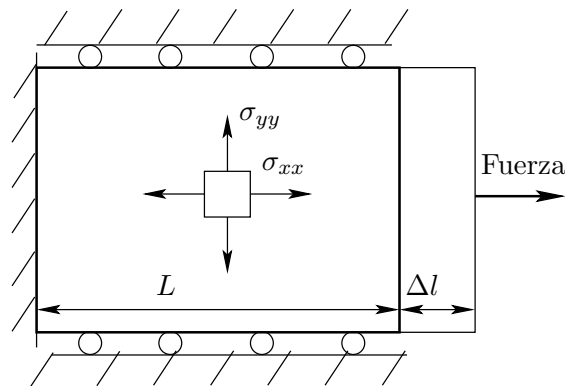


Figura 3.2: Esquema de ensayo unidireccional

Inflado de un cilindro. Se trata de la simulación de inflado de un cilindro incompresible en deformación plana con diferentes modelos de material. En particular se determina la tensión circunferencial de Cauchy σ y la presión interna P_{int} en función del alargamiento circunferencial λ del cilindro (relación entre los perímetros medios en las configuraciones deformada e inicial).

Dado el tensor gradiente de deformación \mathbf{F} .

1. Tensor de Cauchy-Green por la derecha \mathbf{C} ,

$$C_{AB} = F_{aA}F_{aB}.$$

2. Invariantes de \mathbf{C} ,

$$I_1 = C_{AA}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(C_{AA}C_{BB} - C_{AB}C_{AB}) \quad \text{e} \quad I_3 = J^2 = (\det \mathbf{F})^2.$$

3. Derivadas primeras y segundas de la densidad de energía respecto a los invariantes,

$$\frac{\partial W}{\partial I_a} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial I_a \partial I_b}.$$

4. Inversa de la matriz \mathbf{C} , $[C_{AB}^{-1}]$.

5. Derivadas primeras de los invariantes respecto a \mathbf{C} , según (3.7),

$$\frac{\partial I_a}{\partial C_{AB}}.$$

6. Segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} ,

$$S_{AB} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_a} \frac{\partial I_a}{\partial C_{AB}}.$$

7. Tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$,

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{J} F_{aA} S_{AB} F_{bB}.$$

8. Derivadas parciales segundas de los invariantes respecto a \mathbf{C} , según (3.9),

$$\frac{\partial^2 I_a}{\partial C_{AB} \partial C_{CD}}.$$

9. Tensor de elasticidad en la configuración inicial $[C_{ABCD}]$, según (3.8).

10. Tensor de elasticidad en la configuración deformada $[c_{abcd}]$, según (3.5).

Cuadro 3.1: Esquema de cálculo del tensor de tensiones de Cauchy y del tensor de elasticidad en la configuración deformada para materiales hiperelásticos isótropos definidos en función de los invariantes

Dado el tensor gradiente de deformación \mathbf{F} .

1. Cálculo de los autovalores y autovectores del tensor de Cauchy-Green por la derecha \mathbf{C} , $\{\lambda_a\}$, $[N_{aA}]$.
2. Determinante de \mathbf{F} , $J = \det \mathbf{F}$.
3. Derivadas primeras y segundas de la densidad de energía respecto a los alargamientos principales,

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_a} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_a \partial \lambda_b}.$$

4. Segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} ,

$$\sum_{a=1}^3 S_a \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a, \quad \text{con} \quad S_a = \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial W}{\partial \lambda_a}, \quad \text{resultando en componentes}$$

$$S_{AB} = \sum_{a=1}^3 S_a N_{aA} N_{aB}.$$

5. Tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$,

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{J} F_{aA} S_{AB} F_{bB}.$$

6. Derivadas parciales de las componentes principales de \mathbf{S} respecto a los autovalores $\{\lambda_a\}$,

$$\frac{\partial S_a}{\partial \lambda_b} = \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_a \partial \lambda_b} - \frac{\delta_{ab}}{\lambda_a^2} \frac{\partial W}{\partial \lambda_a}.$$

7. Tensor de elasticidad en la configuración de referencia $[C_{ABCD}]$, según (3.10).
8. Tensor de elasticidad en la configuración deformada $[c_{abcd}]$, según (3.5).

Cuadro 3.2: Esquema de cálculo del tensor de tensiones de Cauchy y del tensor de elasticidad en la configuración deformada para materiales hiperelásticos isotropos definidos en función de los alargamientos principales

```

...
c   SAINT-VENANT KIRCHHOFF
    call celas(ud,E,nu,mu,Ka,lambda)
    dWI(1)=(lambda/2+mu)/2*Iv(1)-(3/2.d0*lambda+mu)/2
    dWI(2)=-mu/2
    dWWII(1)=(lambda/2+mu)/2
...

...
c   ALARGAMIENTO LOGARÍTMICO
    call celas(ud,E,nu,mu,Ka,lambda)
    coef=1/2.d0*(Ka-2/3.d0*mu)
    J3=aval(1)*aval(2)*aval(3)
    do i=1,3
        dWl(i)=dWl(i)+2*coef*dlog(J3)/aval(i)
        do j=i,3
            if (i.eq.j) then
                dWW11(ms2v(i,j))=dWW11(ms2v(i,j))-2*coef*(-1+dlog(J3))/
                .   aval(i)**2
            else
                dWW11(ms2v(i,j))=dWW11(ms2v(i,j))+2*coef/(aval(i)*aval(j))
            end if
        end do
    end do
    do i=1,3
        dWl(i)=dWl(i)+2*mu*dlog(aval(i))/aval(i)
        dWW11(i)=dWW11(i)-2*mu*(-1+dlog(aval(i)))/aval(i)**2
    end do
...

```

Observaciones:

- a) La subrutina `celas` permite determinar las constantes de Lamé a partir del módulo de Young y del coeficiente de Poisson.
- b) Los vectores `dWI` y `dWWII` indican las derivadas primeras y segundas de la función de densidad de energía respecto a los invariantes $\{I_a\}$.

Cuadro 3.3: Código Fortran correspondiente a los materiales de Saint Venant-Kirchhoff y de alargamiento logarítmico

a) Saint Venant-Kirchhoff:

$$\sigma_{xx} = \left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right)\varepsilon^3 + 3\left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right)\varepsilon^2 + (\lambda + 2\mu)\varepsilon.$$

b) Neohookiano:

$$\sigma_{xx} = \frac{2\lambda \log(1 + \varepsilon) + \mu\varepsilon^2 + 2\mu\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

c) Neohookiano modificado:

$$\sigma_{xx} = \frac{2G\varepsilon^2 + 4G\varepsilon + 3K(1 + \varepsilon)^{2/3} \log(1 + \varepsilon)}{3(1 + \varepsilon)^{5/3}}.$$

d) Mooney-Rivlin:

$$\sigma_{xx} = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon}((c + d/2)\varepsilon + c + d).$$

e) Yeoh:

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{1 + \varepsilon}(6c_3\varepsilon^6 + 36c_3\varepsilon^5 + 2(2c_2 + 39c_3)\varepsilon^4 + 8(2c_2 + 9c_3)\varepsilon^3 + 2(c_1 + 10c_2 + 12c_3)\varepsilon^2 + 4(c_1 + 2c_2)\varepsilon + 2c_1 + 2K \log(1 + \varepsilon)).$$

f) Blatz y Ko:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \frac{\mu}{(1 + \varepsilon)^3}(2f - 1 + 4f\varepsilon + 6f\varepsilon^2 + 4f\varepsilon^3 + f\varepsilon^4 - \\ & f(1 + \varepsilon)^{-2\beta} - 2f\varepsilon(1 + \varepsilon)^{-2\beta} - f\varepsilon^2(1 + \varepsilon)^{-2\beta} + \\ & (1 - f)(1 + \varepsilon)^{2\beta} + 2(1 - f)\varepsilon(1 + \varepsilon)^{2\beta} + (1 - f)\varepsilon^2(1 + \varepsilon)^{2\beta}). \end{aligned}$$

g) Ogden:

$$\sigma_{xx} = \frac{3K \log(1 + \varepsilon) + \sum_{p=1}^3 2\mu_p((1 + \varepsilon)^{2\alpha_p/3} - (1 + \varepsilon)^{-\alpha_p/3})}{3(1 + \varepsilon)^{8/3}}.$$

h) Alargamiento logarítmico:

$$\sigma_{xx} = \frac{(3K + 4G) \log(1 + \varepsilon)}{3(1 + \varepsilon)}.$$

$$\text{Con } \varepsilon = \frac{\Delta l}{L}.$$

Cuadro 3.4: Resultados teóricos de ensayo unidireccional

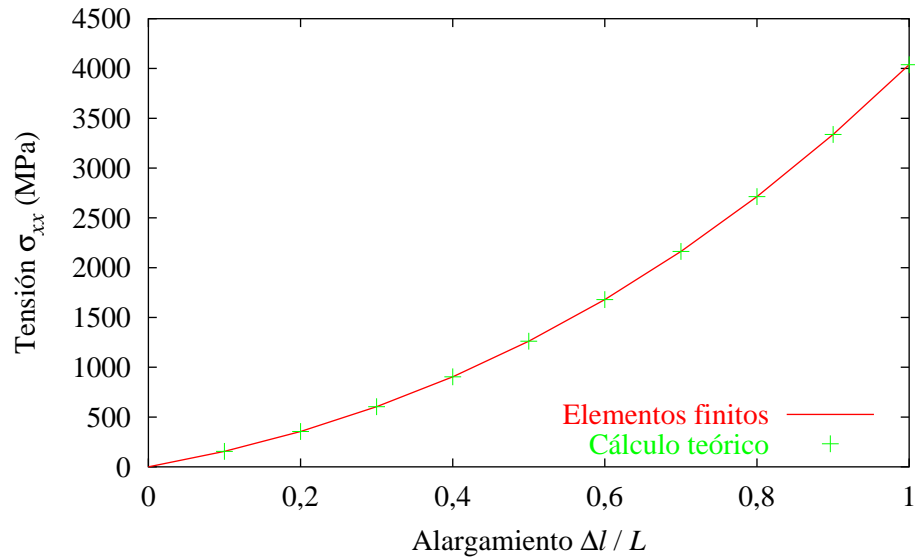


Figura 3.3: Ensayo unidireccional. Material de Saint Venant-Kirchhoff con módulo de elasticidad 1000 MPa y coeficiente de Poisson 0,3

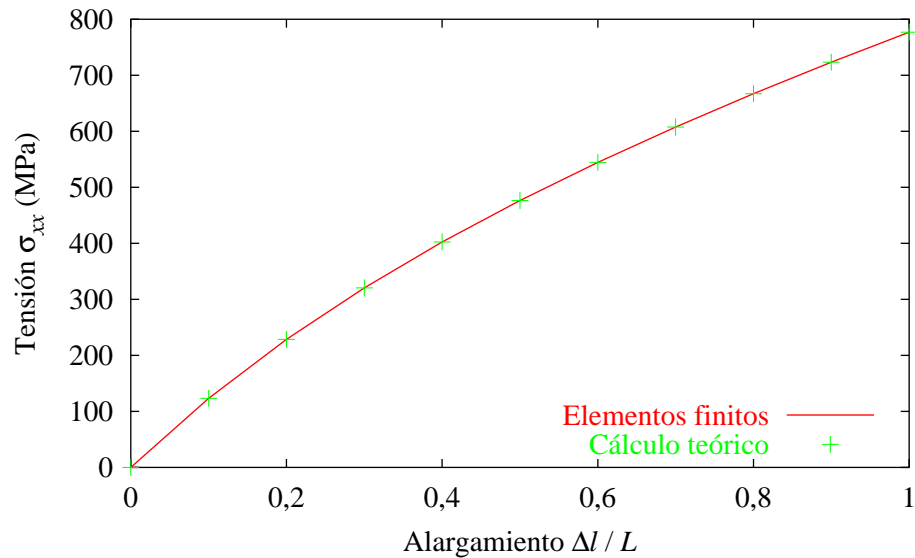


Figura 3.4: Ensayo unidireccional. Material neohookeano con módulo de elasticidad 1000 MPa y coeficiente de Poisson 0,3

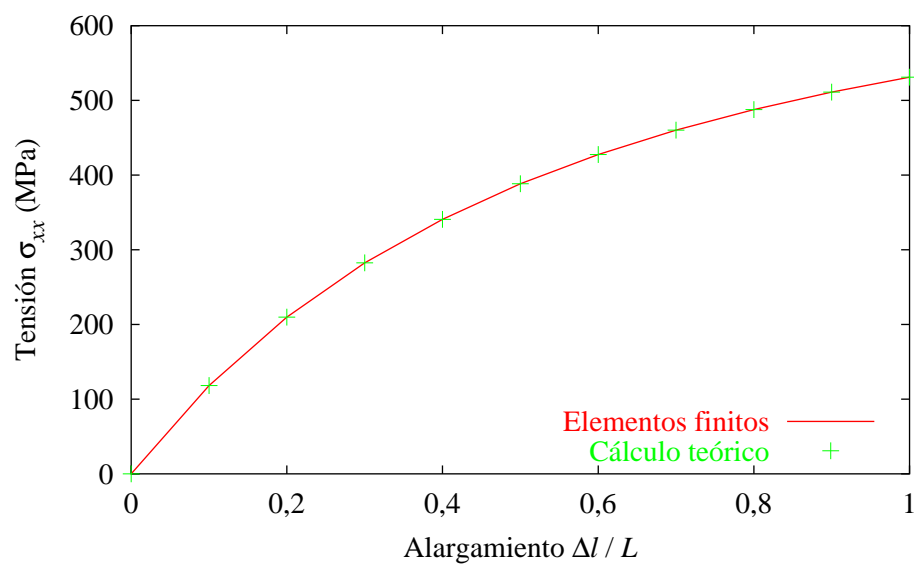


Figura 3.5: Ensayo unidireccional. Material neo-hookeano modificado con módulo de elasticidad 1000 MPa y coeficiente de Poisson 0,3

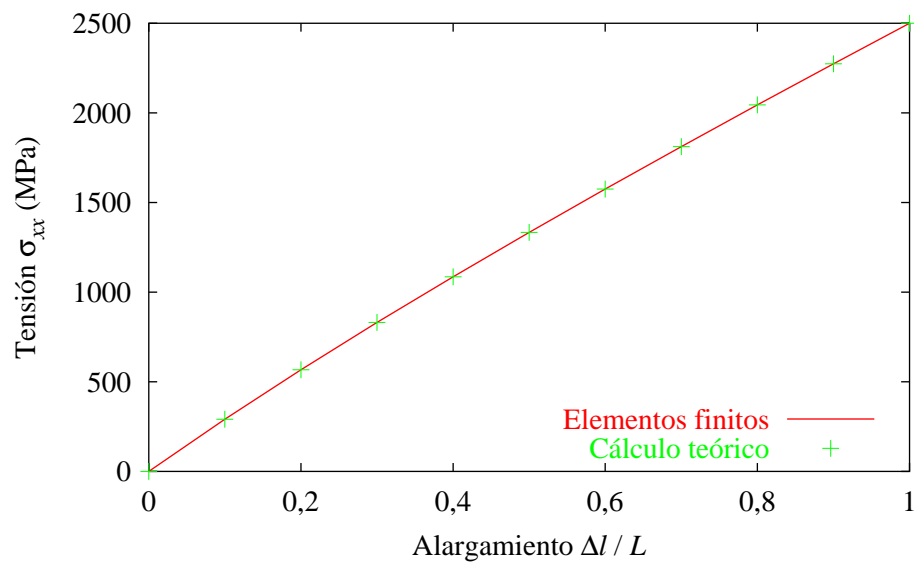


Figura 3.6: Ensayo unidireccional. Material de Mooney-Rivlin con módulos $c = 500$ MPa, $c_1 = 100$ MPa y $c_2 = 200$ MPa

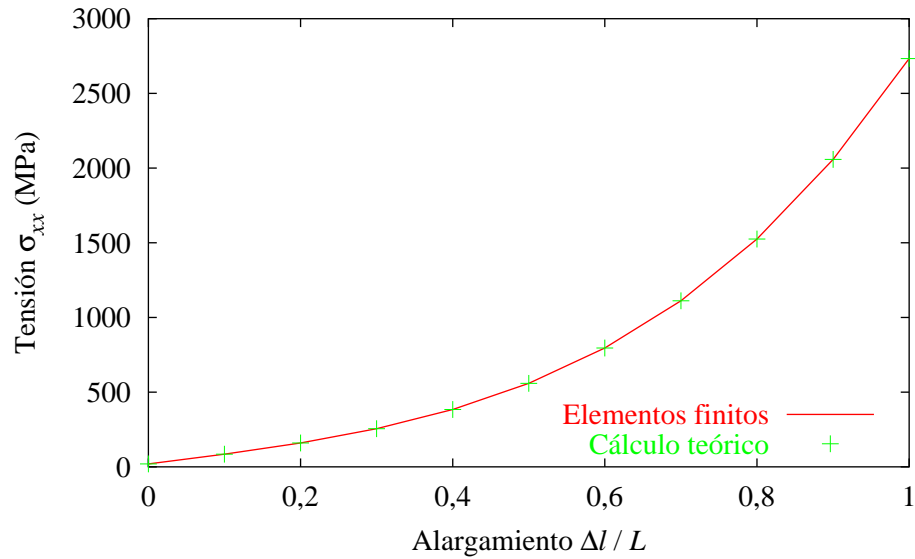


Figura 3.7: Ensayo unidireccional. Material de Yeoh con módulos $K = 500$ MPa, $c_1 = 10$ MPa, $c_2 = 15$ MPa y $c_3 = 20$ MPa

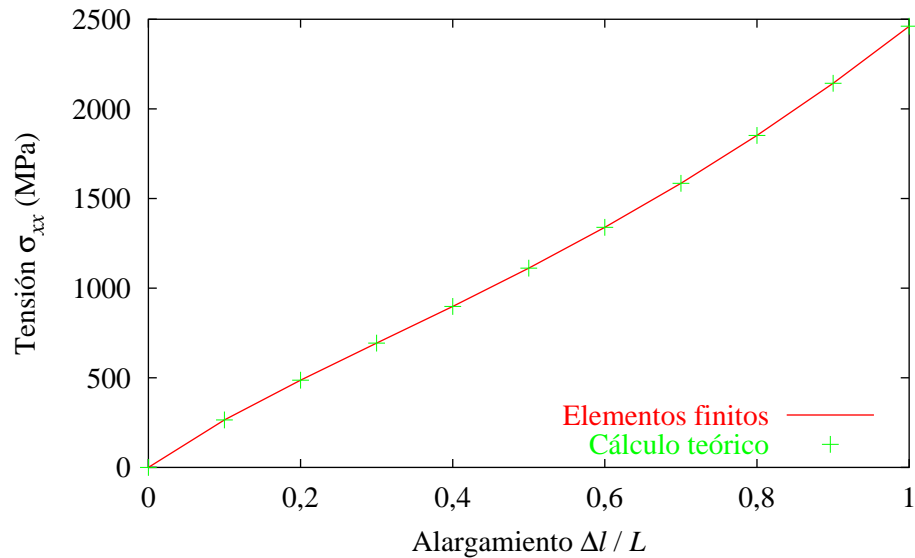


Figura 3.8: Ensayo unidireccional. Material de Blatz y Ko con módulo a cortante $\mu = 500$ MPa, parámetro de interpolación $f = 0,5$ y exponente $\beta = 2$

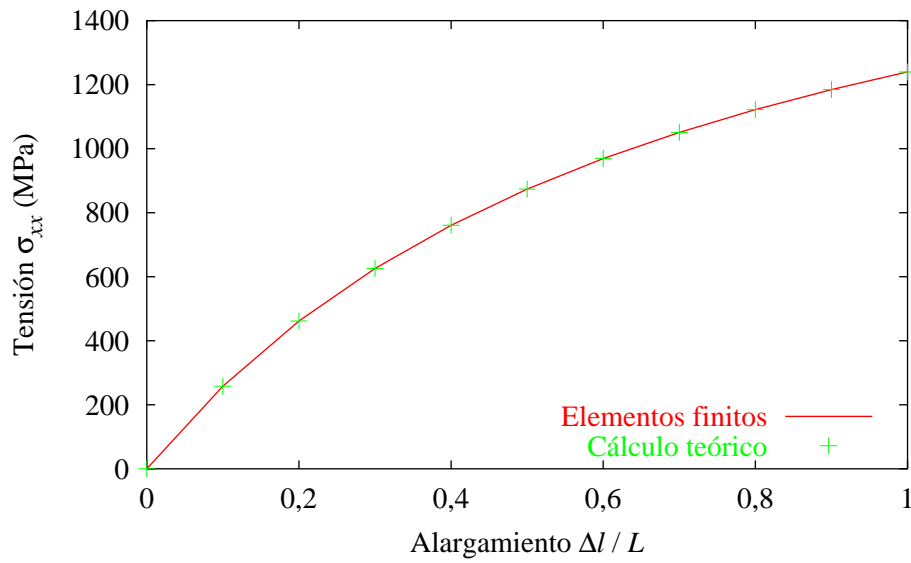


Figura 3.9: Ensayo unidireccional. Material de Ogden con módulo volumétrico $K = 850$ MPa y módulos isocóricos $\mu_1 = 1500$ MPa, $\mu_2 = 500$ MPa, $\mu_3 = 200$ MPa, asociados a los exponentes $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ y $\alpha_3 = 3$

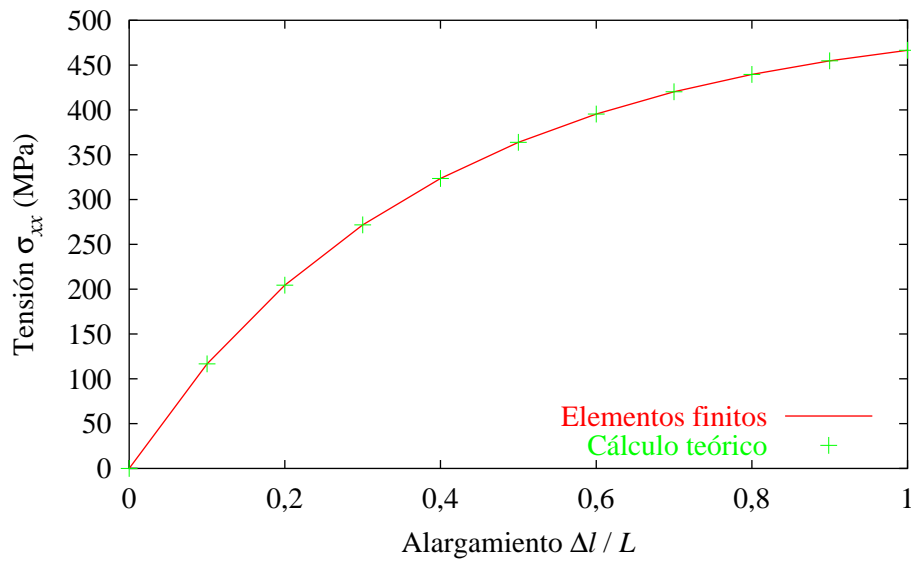


Figura 3.10: Ensayo unidireccional. Material de alargamiento logarítmico con módulo de elasticidad 1000 MPa y coeficiente de Poisson 0,3

El radio inicial del cilindro se toma $R = 10$ m y un espesor de la pared $H = 0,1$ m. Las propiedades de los materiales se recogen en el cuadro 3.5.

Los resultados teóricos se pueden obtener teniendo en cuenta que $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W(\lambda, 1/\lambda, 1) = W(\lambda)$, dada la incompresibilidad del material, tomando λ_1 en dirección circunferencial, λ_2 en dirección radial y λ_3 en dirección longitudinal al cilindro. Considerando en estas condiciones que el material se alarga con tensión nula asociada a λ_2 se llega a

$$\sigma = \lambda \frac{\partial W}{\partial \lambda}.$$

La presión puede ser obtenida con la ecuación de los tubos delgados

$$P_{\text{int}} = \frac{\sigma h}{r},$$

con $h = H/\lambda$ y $r = \lambda R$ (véase el cuadro 3.6).

Se han obtenido resultados muy parecidos en las formulaciones teóricas y de elementos finitos (considerando la malla de la figura 3.11). En las figuras 3.12 y 3.13 se comparan las tensiones circunferenciales y las presiones interiores (obtenidas mediante elementos finitos) para los distintos materiales. Obsérvese el crecimiento de la rigidez del material de Ogden, adecuado para la modelización de tejidos biológicos blandos (con objeto de evitar inestabilidades). Además, se observa que las curvas de los materiales neohookeano y neohookeano modificado se solapan, lo que es esperable por la (pseudo-)incompresibilidad del material.

a) Neohookeano, neohookeano modificado y logarítmico:

$$\mu = 4,225 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

b) Ogden:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1,3, & \mu_1 &= 6,3 \cdot 10^5 \text{ Pa,} \\ \alpha_2 &= 5,0, & \mu_2 &= 0,012 \cdot 10^5 \text{ Pa,} \\ \alpha_3 &= -2,0, & \mu_3 &= -0,1 \cdot 10^5 \text{ Pa.} \end{aligned}$$

c) Varga (introducido como caso particular de Ogden):

$$c_1 = 2\mu = 8,45 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

Cuadro 3.5: Inflado de un cilindro. Parámetros que definen el comportamiento del material incompresible

a) Neohookeano:

$$\sigma = \mu \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

b) Neohookeano modificado:

$$\sigma = \mu \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

c) Ogden:

$$\sigma = \sum_{p=1}^3 \mu_p \left(\lambda^{\alpha_p} - \frac{1}{\lambda^{\alpha_p}} \right).$$

d) Varga:

$$\sigma = c_1 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)$$

e) Logarítmico:

$$\sigma = 4\mu \log \lambda.$$

Siendo λ y σ el alargamiento y la tensión circunferencial.

Cuadro 3.6: Resultados teóricos de inflado de un cilindro

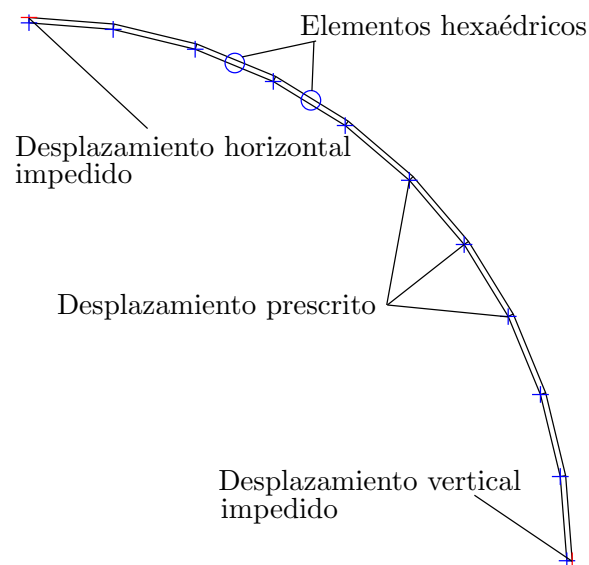


Figura 3.11: Esquema de inflado de un cilindro de radio 10 m y espesor 0,1 m

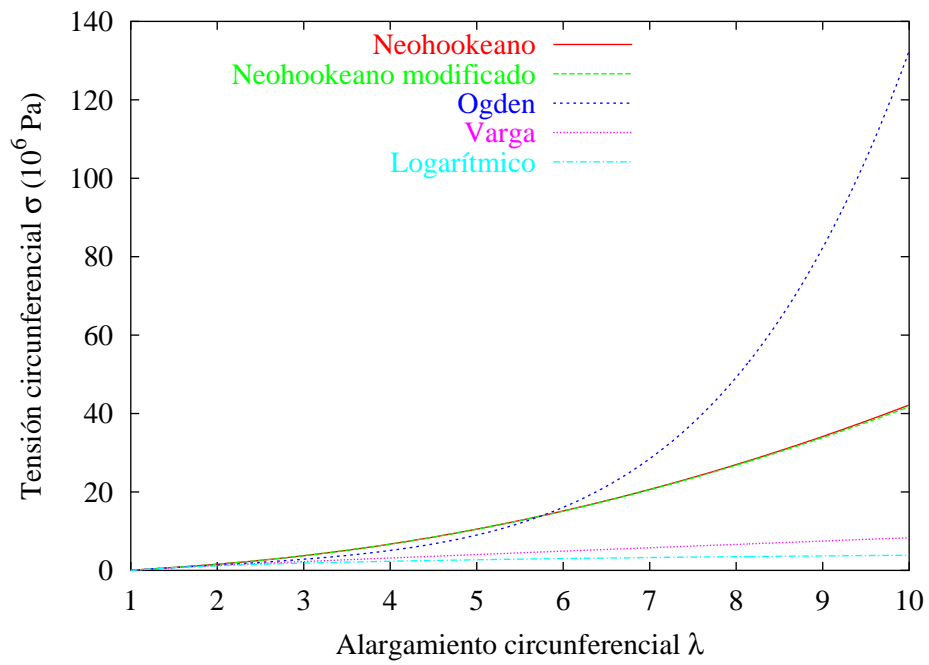


Figura 3.12: Inflado de un cilindro. Tensiones circunferenciales

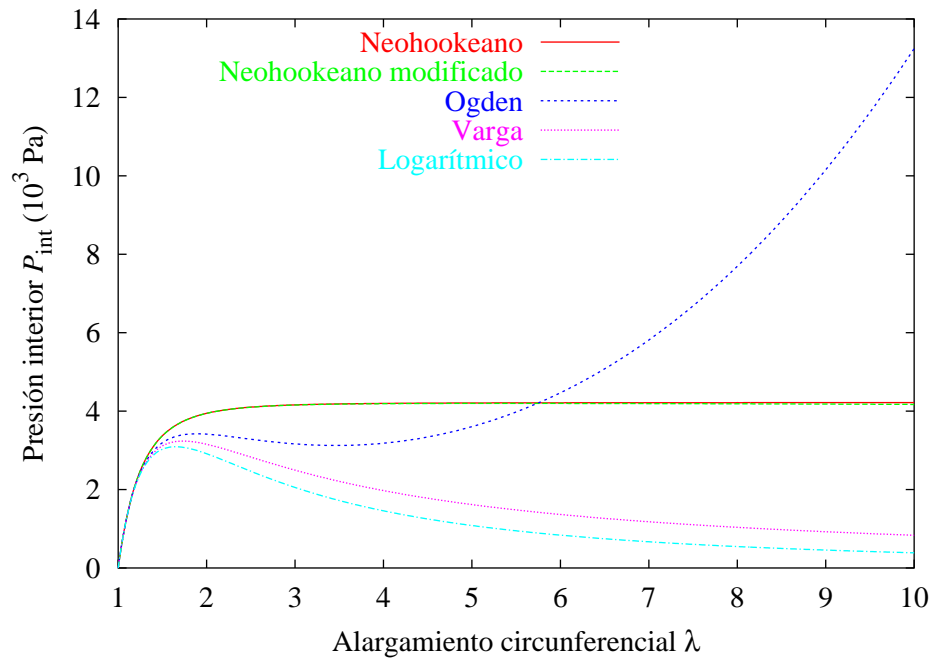


Figura 3.13: Inflado de un cilindro. Presiones interiores

Inflado de un globo. En este caso se infla una esfera de radio $R = 10$ m y espesor $H = 0,1$ m (este ensayo reproduce el estudiado por HOLZAPFEL [2000b]). Los materiales utilizados son los mismos que los del caso del cilindro. El cálculo teórico se puede obtener de forma análoga al apartado anterior, llegándose a las ecuaciones

$$\sigma = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial W}{\partial \lambda} \quad \text{y} \quad P_{\text{int}} = \frac{2\sigma h}{r},$$

con $r = \lambda R$ y $h = H/\lambda^2$ (véase el cuadro 3.7).

Los resultados obtenidos por el método de elementos finitos se presentan en las figuras 3.15 y 3.16. se observa que el único material que llega a presentar un mínimo relativo no extremo en la evolución de la presión es el de Ogden. Como en el caso anterior, la curvas de los materiales neohookeano normal y modificado se solapan.

a) Neohookeano:

$$\sigma = \mu \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right).$$

b) Neohookeano modificado:

$$\sigma = \mu \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right).$$

c) Ogden:

$$\sigma = \sum_{p=1}^3 \mu_p \left(\lambda^{\alpha_p} - \frac{1}{\lambda^{2\alpha_p}} \right).$$

d) Varga:

$$\sigma = c_1 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

e) Logarítmico:

$$\sigma = 6\mu \log \lambda.$$

Siendo λ y σ el alargamiento y la tensión circunferencial, respectivamente.

Cuadro 3.7: Resultados teóricos de inflado de un globo

3.3. Hiperelasticidad anisótropa

3.3.1. Isotropía transversal

Se considera un material con una dirección preferente, representada por el vector unitario \mathbf{a}_0 en la configuración inicial. La función de densidad de

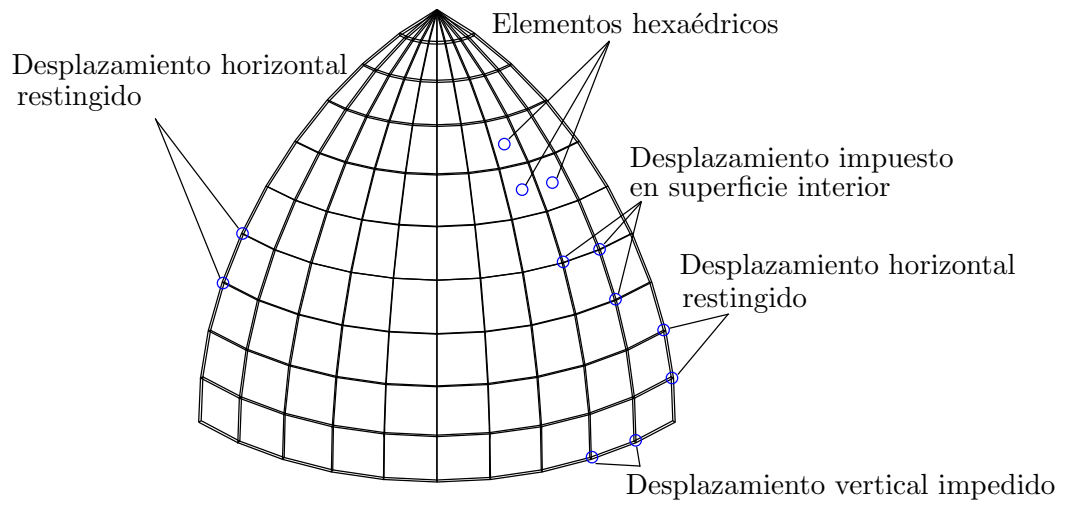


Figura 3.14: Esquema de inflado de un cilindro de radio 10 m y espesor 0,1 m

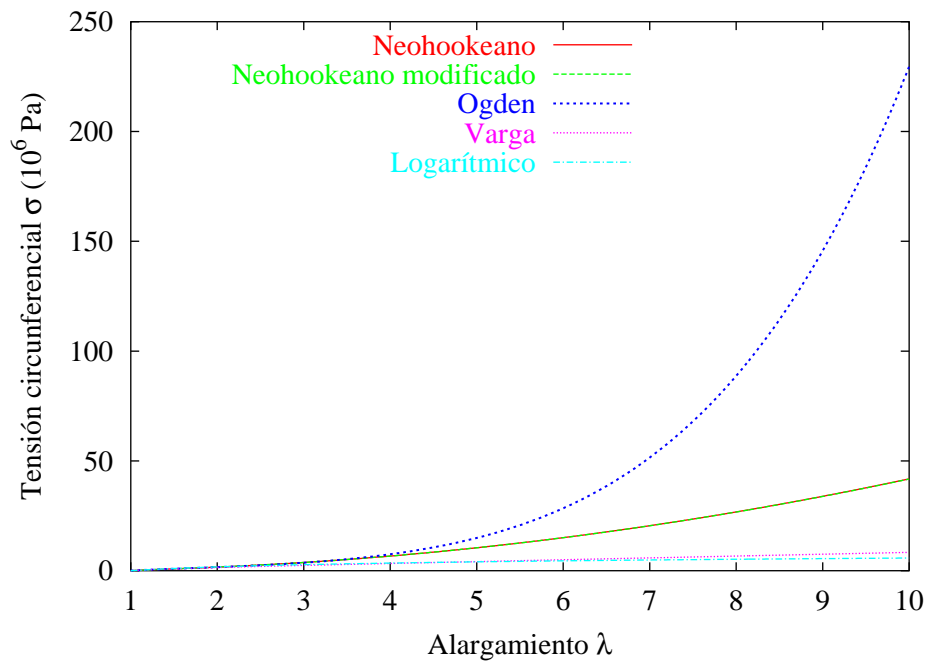


Figura 3.15: Inflado de un globo. Tensiones circunferenciales

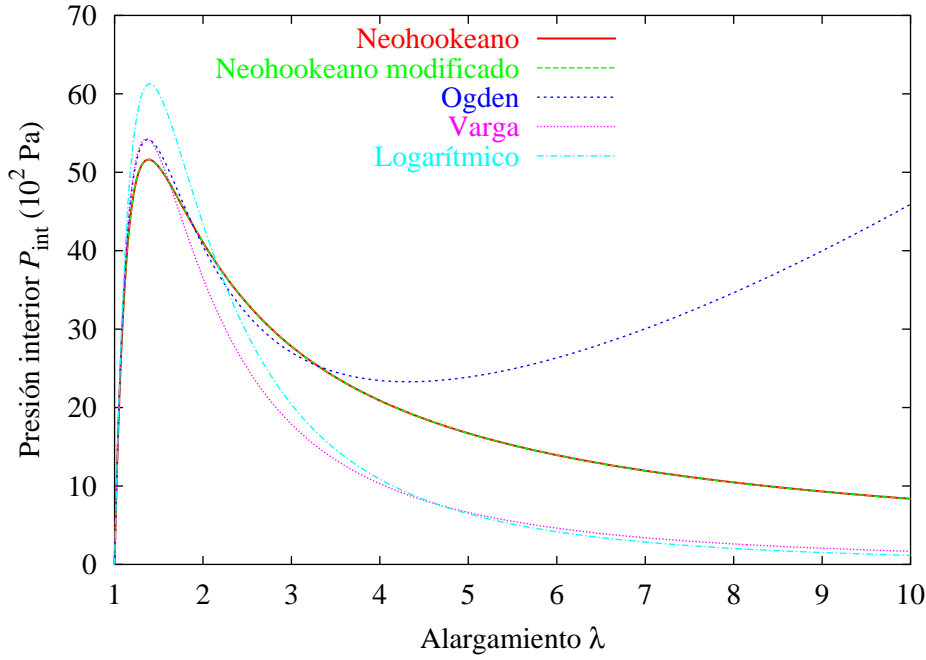


Figura 3.16: Inflado de un globo. Presiones interiores

energía W es por tanto de la forma $W(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0)$, siendo \mathbf{C} el tensor de Cauchy por la derecha. Además, dado que W es independiente del sentido de \mathbf{a}_0 , esto es $W(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0) = W(\mathbf{C}, -\mathbf{a}_0)$, entonces puede ser expresado como $W(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0)$. Por otra parte, por la objetividad de W debe verificarse $W(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) = W(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{Q}^T)$, para todo tensor ortogonal \mathbf{Q} .

Como obtuvo SPENCER [1984] bajo las condiciones indicadas se pueden definir unos escalares I_4 e I_5 , denominados pseudo-invariantes de anisotropía,

$$I_4 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_0 \quad \text{e} \quad I_5 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{a}_0, \quad (3.12)$$

de forma que $W = W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)$, siendo I_1, I_2 e I_3 los invariantes de \mathbf{C} .

Las derivadas de los pseudo-invariantes I_4 e I_5 son

$$\frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a}_0 \otimes (\mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_0) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_0) \otimes \mathbf{a}_0.$$

Indicialmente,

$$\frac{\partial I_4}{\partial C_{AB}} = a_{0A} a_{0B} \quad \text{y} \quad \frac{\partial I_5}{\partial C_{AB}} = a_{0A} C_{BC} a_{0C} + a_{0B} C_{AC} a_{0C}. \quad (3.13)$$

Por otra parte, las derivadas segundas son

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_4}{\partial C_{AB} \partial C_{CD}} &= 0 \quad \text{y} \\ \frac{\partial^2 I_5}{\partial C_{AB} \partial C_{CD}} &= \frac{1}{2} (a_{0A} (a_{0D} \delta_{CD} + a_{0C} \delta_{BD}) + a_{0B} (a_{0D} \delta_{AC} + a_{0C} \delta_{AD})). \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.3.2. Anisotropía con dos familias de fibras

Sea un material que presenta dos direcciones preferentes definidas en la configuración de referencia por dos vectores \mathbf{a}_0 y \mathbf{b}_0 . La función de densidad de energía es ahora de la forma $W(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$, debiendo verificarse

$$W(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0) = W(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_0, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}_0)$$

para todo tensor ortogonal \mathbf{Q} .

Como en el caso de anisotropía transversal, SPENCER [1984] definió los pseudo-invariantes de anisotropía

$$\begin{aligned} I_6 &= \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}_0, & I_7 &= \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{b}_0, \\ I_8 &= (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0) \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}_0 & \text{e } I_9 &= (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0)^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

de forma que $W = W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9)$.

Las derivadas parciales de I_6, I_7, I_8, I_9 respecto de \mathbf{C} son

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_6}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{b}_0, & \frac{\partial I_7}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{b}_0 \otimes (\mathbf{C} \cdot \mathbf{b}_0) + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{b}_0) \otimes \mathbf{b}_0, \\ \frac{\partial I_8}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0) (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{a}_0) & \text{y } \frac{\partial I_9}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Indicialmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_6}{\partial C_{AB}} &= b_{0A} b_{0B}, & \frac{\partial I_7}{\partial C_{AB}} &= b_{0A} C_{BC} b_{0C} + b_{0B} C_{AC} b_{0C}, \\ \frac{\partial I_8}{\partial C_{AB}} &= \frac{1}{2} (a_{0C} b_{0C}) (a_{0A} b_{0B} + b_{0A} a_{0B}) & \text{y } \frac{\partial I_9}{\partial C_{AB}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Además, las derivadas segundas resultan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_6}{\partial C_{AB} \partial C_{CD}} &= 0, \\ \frac{\partial^2 I_7}{\partial C_{AB} \partial C_{CD}} &= \frac{1}{2} (b_{0A} (b_{0D} \delta_{CD} + b_{0C} \delta_{BD}) + b_{0B} (b_{0D} \delta_{AC} + b_{0C} \delta_{AD})), \\ \frac{\partial^2 I_8}{\partial C_{AB} \partial C_{CD}} &= 0 \quad \text{y} \\ \frac{\partial^2 I_9}{\partial C_{AB} \partial C_{CD}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.3.3. Algunos materiales hiperelásticos anisótropos

Habitualmente se define W descomponiéndola en energía debida al cambio de volumen, a través de J (ó I_3), y en energía debida a la deformación isocórica, que se representa a través de los (pseudo-)invariantes \bar{I}_a , definiéndose como los (pseudo-)invariantes del tensor isocórico $\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C}$ ⁵. De esta forma,

$$W = W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}) = W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\{\bar{I}_a\}).$$

⁵Se verifica $\bar{I}_a = J^{\alpha_a} I_a$ con α_a de forma que sea invariante a transformaciones de \mathbf{C} de la forma $\mathbf{C}^* = \lambda \mathbf{C}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$.

Isotropía transversal. Las capas de las paredes arteriales se encuentran formadas por láminas con una única dirección preferente de fibras de colágeno, lo que permitiría considerarlas como transversalmente isotropas. No obstante, se admite desde un punto de vista macroscópico que existen dos direcciones preferentes en cada capa. A continuación se presentan las funciones de densidad de energía de los materiales isotropos transversales de Weiss o Mooney-Rivlin generalizado (véanse WEISS [1996] y WEISS [2001]), y Almeida o Cohen generalizado (véase ALMEIDA Y SPILKER [1998])⁶:

a) *Weiss*⁷:

$$W = \frac{K}{2} \log^2 J + c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_2 - 3) + c_4(\exp(\bar{I}_4 - 1) - \bar{I}_4).$$

b) *Almeida*:

$$W = a_0 \exp(\phi - n \log I_3),$$

$$\text{con } \phi = a_1(I_1 - 3) + a_2(I_2 - 3) + a_3(I_1 - 3)^2 + a_4(I_4 - 1) + a_5(I_4 - 1)^2 + a_6(I_1 - 3)(I_4 - 1) + a_7(I_5 - 1).$$

Dos familias de fibras. Uno de los modelos propuestos por algunas investigadores para materiales biológicos con dos familias de fibras de colágeno, como son las paredes arteriales, y que ha sido implementado, es el desarrollado por HOLZAPFEL Y GASSER [2000] (véanse las propiedades propuestas para la media y adventicia de la arteria coronaria humana anterior descendiente y de la arteria ilíaca del cuadro 3.8). La expresión de la función de densidad de energía de dicho modelo es de la forma

$$W = \frac{K}{2} \log^2 J + \frac{c}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{a=4,6} (\exp(k_2(\bar{I}_a - 1)^2) - 1). \quad (3.18)$$

Por consideraciones de estabilidad, en el cuadro A.1 de la sección A.6 (página 217) se proponen algunas condiciones para los parámetros.

Otros modelos. Se han desarrollado modelos de comportamiento anisótropo con tres direcciones preferentes que han sido aplicados en materiales biológicos, destacándose el debido a Fung: $W = b \exp(Q(\mathbf{E}))$, con $Q(\mathbf{E}) = b_1 E_{11}^2 + b_2 E_{22}^2 + b_3 E_{33}^2 + b_4 E_{11} E_{22} + b_5 E_{11} E_{33} + b_6 E_{22} E_{33}$, siendo E_{AB} las componentes del tensor de Green. Se destaca que el modelo de Holzapfel presenta como principal ventaja respecto al de Fung su mejor justificación desde el punto de vista micromecánico.

⁶Véanse los contornos de la sección A.7.2.

⁷Este modelo fue desarrollado por Weiss para la simulación de ligamentos.

<i>Media</i>	<i>Adventicia</i>	<i>Media</i>	<i>Adventicia</i>
$c_M = 27,0$ kPa	$c_A = 2,7$ kPa	$c_M = 15,0$ kPa	$c_A = 1,75$ kPa
$k_{1M} = 0,64$ kPa	$k_{1A} = 5,1$ kPa	$k_{1M} = 4,0$ kPa	$k_{1A} = 65,6$ kPa
$k_{2M} = 3,54$	$k_{2A} = 15,4$	$k_{2M} = 2,3$	$k_{2A} = 61,8$
$k_M = 10^4$ kPa	$k_A = 10^4$ kPa	$k_M = \infty$	$k_A = \infty$

(a) Coronaria anterior descendente

(b) Íliaca

Cuadro 3.8: Parámetros del material de Holzapfel para la media y la adventicia de la arteria coronaria humana anterior descendente según HOLZAPFEL [2000b] (a) y de la arteria ilíaca según HOLZAPFEL Y SCHULZE-BAUER [2000] (b)

3.3.4. Implementación

El esquema de implementación es análogo al descrito para materiales isotrópos del cuadro 3.1, considerando cinco (pseudo-)invariantes en el caso de isotropía transversal y nueve en el caso de dos familias de fibras. Para ello se hace uso de (3.12), (3.13) y (3.14) en el caso de isotropía transversal, y además de (3.15), (3.16) y (3.17) en el caso de dos familias de fibras.

El comportamiento de los materiales queda caracterizado con la expresión de las derivadas parciales de la función de densidad de energía respecto a los (pseudo-)invariantes. A modo de ejemplo, se presenta en el cuadro 3.9 el código Fortran correspondiente al material de Holzapfel⁸.

Direcciones de anisotropía en geometrías reales de arterias, con distribución axilsimétrica. Se ha implementado un algoritmo que permite generar los modelos de material determinando de forma automática las direcciones de anisotropía. El uso del código se considera especialmente útil para la modelización por elementos finitos de arterias con datos reales, ya que no es posible ni práctico determinar las direcciones de anisotropía en cada punto, por lo que es usual determinar el ángulo medio que forma el *eje* de la arteria con dichas direcciones (véase HOLZAPFEL [2001]). Por ejemplo, el ángulo propuesto por Holzapfel para la arteria humana anterior descendente es de 80° en la media y de 50° en la adventicia.

El algoritmo indicado es: «Sea un punto O conocido y una dirección \mathbf{d} que definen un eje que se denominará *eje de las direcciones de anisotropía*. Dado un punto P , se le asociarán las direcciones

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \cos \phi + \frac{\mathbf{d} \wedge \mathbf{OP}}{|\mathbf{d} \wedge \mathbf{OP}|} \sin \phi \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_0 = \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \cos \phi - \frac{\mathbf{d} \wedge \mathbf{OP}}{|\mathbf{d} \wedge \mathbf{OP}|} \sin \phi.»$$

El procedimiento descrito se aplica a cada punto de Gauss en el que se determina el estado tensional y el tensor de elasticidad, determinándose sus coordenadas a partir de las funciones de forma. En la figura 3.17 se presenta un esquema del método propuesto.

⁸Véanse en el cuadro C.2 de la sección indicaciones acerca del manejo del código implementado.

```

...
c      HOLZAPFEL
      call cIvb(ninv,Iv,Ivb,Jvol,expo,dWIb,dWWIIb)
c      Componente volumétrica
      dWJ=Ka*dlog(Jvol)/Jvol
      dWWJJ=Ka/Jvol**2-Ka*dlog(Jvol)/Jvol**2
c      Componente isocórica
      dWIb(1)=1/2.d0*cc
      dWIb(4)=c1*(Ivb(4)-1)*dexp(c2*(Ivb(4)-1)**2)
      dWIb(6)=c1*(Ivb(6)-1)*dexp(c2*(Ivb(6)-1)**2)
      dWWIIb(4)=c1*dexp(c2*(Ivb(4)-1)**2)+2*c1*(Ivb(4)-1)**2*c2*
      . dexp(c2*(Ivb(4)-1)**2)
      dWWIIb(6)=c1*dexp(c2*(Ivb(6)-1)**2)+2*c1*(Ivb(6)-1)**2*c2*
      . dexp(c2*(Ivb(6)-1)**2)
      call dWIxb(ninv,Iv,dWIb,dWWIIb,expo,Jvol,dWJ,dWWJJ,dWI,dWWII)
...

```

Observaciones:

- a) La subrutina `cIvb` permite determinar los (pseudo-)invariantes isocóricos a partir de los (pseudo-)invariantes.
- b) La subrutina `cWIxb` permite determinar las derivadas de los (pseudo-)invariantes a partir de las derivadas correspondientes a los términos volumétrico e isocóricos.
- c) Los vectores `dWI` y `dWWII` indican las derivadas primeras y segundas de la función de densidad de energía respecto a los (pseudo-)invariantes $\{I_a\}$.
- d) Las variables `dWJ` y `dWWJJ` indican las derivadas primeras y segundas de la función de densidad de energía respecto al coeficiente volumétrico J .
- e) Los vectores `dWIb` y `dWWIIb` indican las derivadas primeras y segundas de la función de densidad de energía respecto a los (pseudo-)invariantes isocóricos $\{\bar{I}_a\}$.

Cuadro 3.9: Código Fortran correspondiente al material de Holzapfel

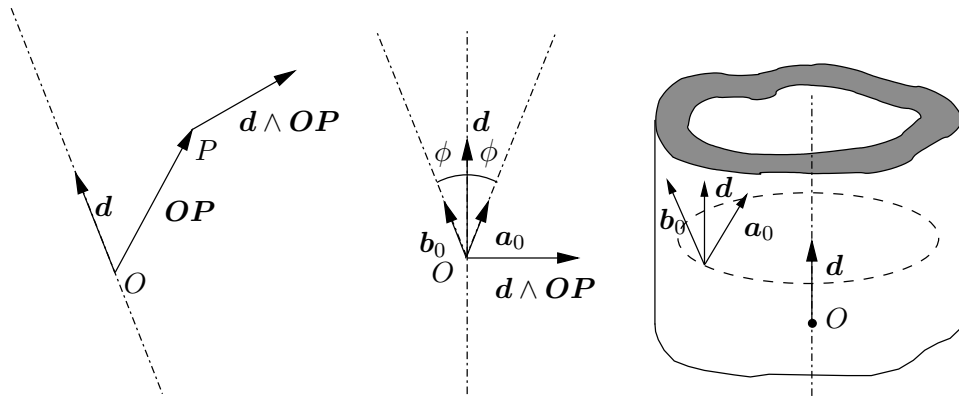


Figura 3.17: Generación automática de direcciones a partir de O , d y ϕ

3.3.5. Ensayos

Material de Weiss. Se han realizado ensayos con un material de Weiss con los parámetros indicados en el cuadro 3.10 (véase WEISS [1996]). Los resultados obtenidos, presentando un esquema del tipo de sollicitación al material, se presentan en las figuras 3.18, 3.19 y 3.20 (donde las fibras se disponen en dirección vertical).

Parámetro	Valor
K	10^8 kPa
c_1	10 kPa
c_2	10 kPa
c_4	100 kPa

Cuadro 3.10: Parámetros utilizados en los ensayos con material de Weiss

Material de Almeida. En este caso se han realizado ensayos con un material de Almeida, con los parámetros de la tabla 3.11 (véase ALMEIDA Y SPILKER [1998]). Los resultados obtenidos, de las tensiones en la dirección del acortamiento σ_λ y en la dirección transversal σ_t , se presentan en las figuras 3.21, 3.22 y 3.23.

Material de Holzapfel. En este caso se considera un modelo de las arterias carótidas sanas de un conejo (caso analizado en HOLZAPFEL [2001]) constituido por dos capas de material de Holzapfel. Las propiedades de los materiales junto con la definición geométrica se encuentran definidos en la figura 3.24.

El problema ha sido analizado de las siguientes maneras:

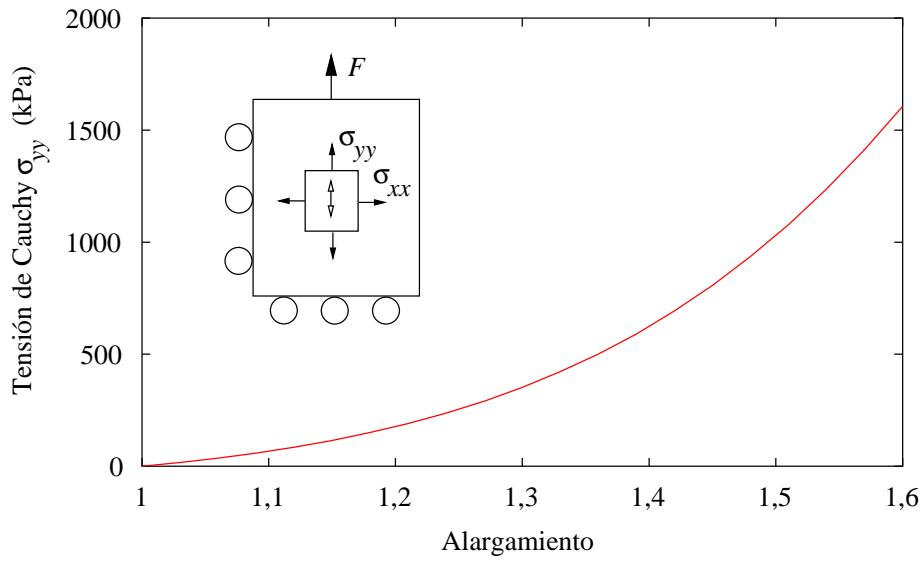


Figura 3.18: Material de Weiss. Estiramiento sin coacción lateral en deformación plana

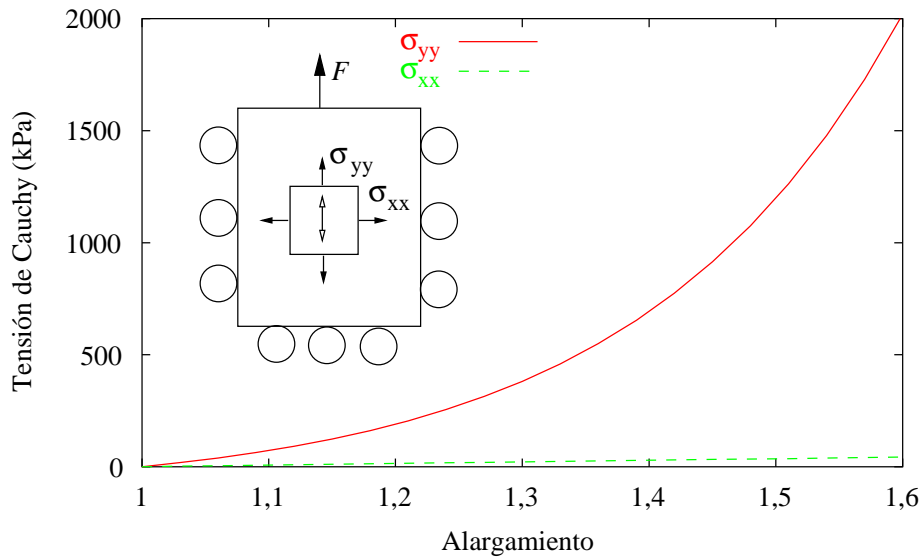


Figura 3.19: Material de Weiss. Estiramiento con coacción lateral en deformación plana

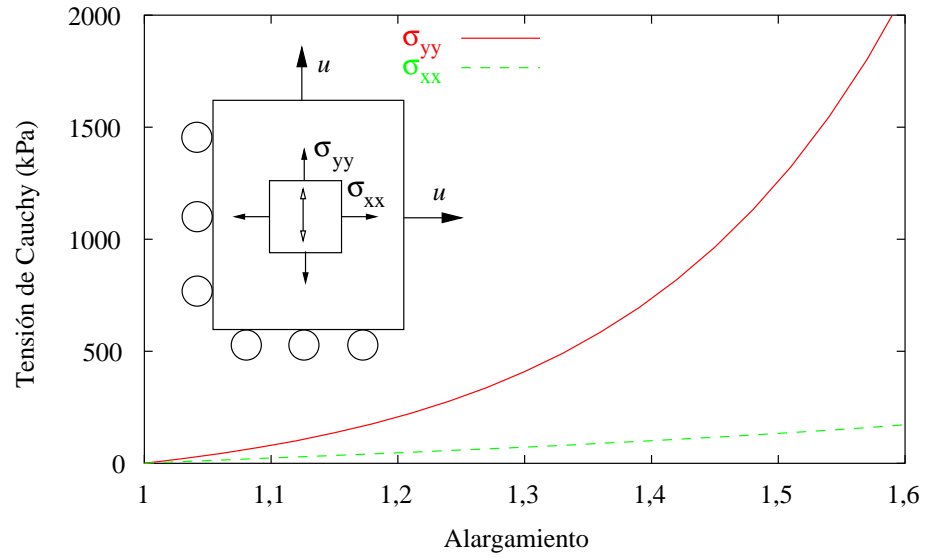


Figura 3.20: Material de Weiss. Estiramiento con desplazamientos bidireccionales prescritos en deformación plana

<i>Parámetro</i>	<i>Valor</i>
n	0,6
α_0	0,08 MPa
α_1	7,733
α_2	-3,567
α_3	1,905
α_4	3,958
α_5	0,8904
α_6	-0,0111
α_7	-1,979

Cuadro 3.11: Parámetros utilizados en los ensayos con material de Almeida

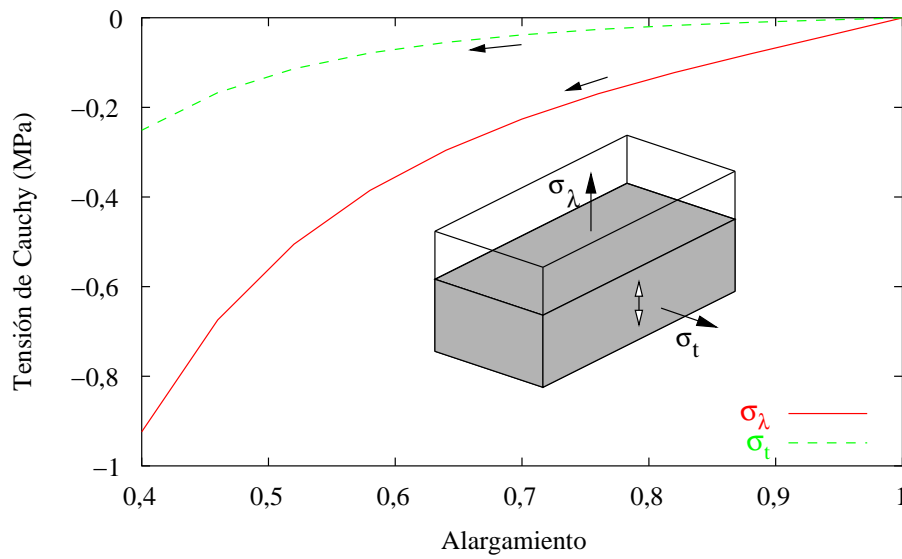


Figura 3.21: Material de Almeida. Acortamiento en dirección de las fibras con confinamiento transversal

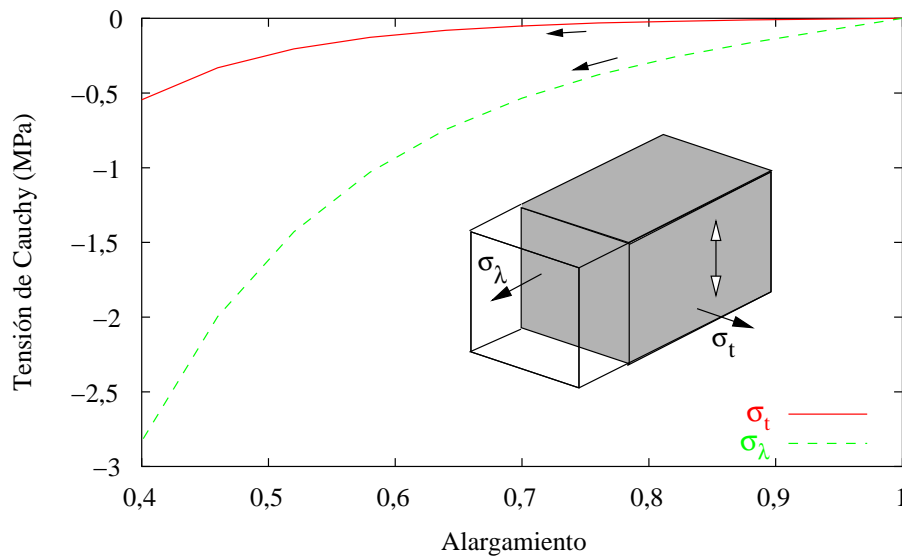


Figura 3.22: Material de Almeida. Acortamiento en dirección transversal a las fibras con confinamiento

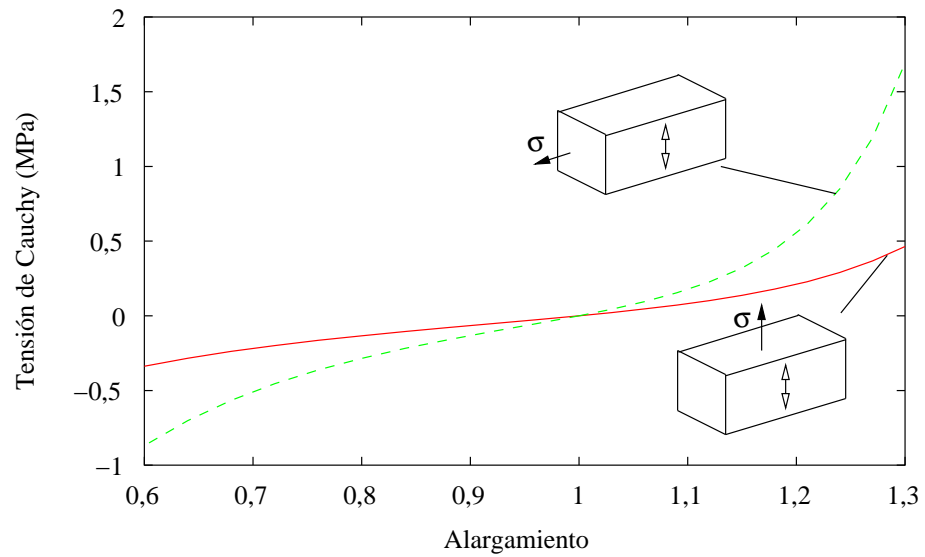
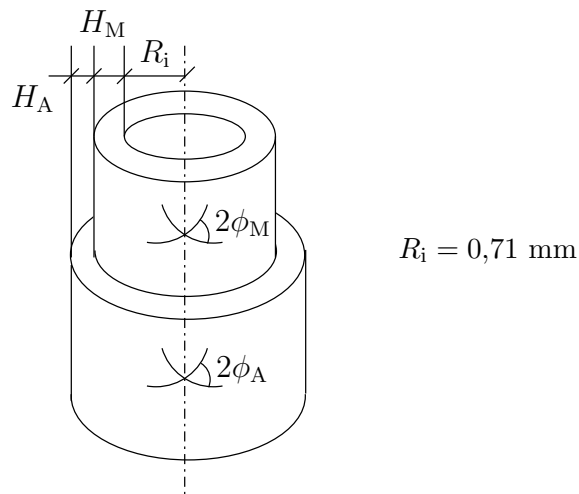


Figura 3.23: Material de Almeida. Acortamiento sin confinamiento transversal



Capa	Material	Geometría
Media	$c_M = 3,0000 \text{ kPa}$ $k_{1M} = 2,3632 \text{ kPa}$ $k_{2M} = 0,8393$	$H_M = 0,26 \text{ mm}$ $\phi_M = 29,0^\circ$
Adventicia	$c_A = 0,3000 \text{ kPa}$ $k_{1A} = 0,5620 \text{ kPa}$ $k_{2A} = 0,7112$	$H_A = 0,13 \text{ mm}$ $\phi_A = 62,0^\circ$

Figura 3.24: Geometría y propiedades de los materiales de la arteria carótida de un conejo según HOLZAPFEL [2001]

- a) Descomponiendo cada capa en seis zonas con materiales distintos, debido a la variación de las direcciones de anisotropía⁹ (ver figura 3.25 (a)).
- b) Aplicando el algoritmo de generación automática de direcciones (ver figura 3.25 (b)).

En ambos casos se ha utilizado la malla de figura 3.26.

La evolución del radio con la presión se presenta en la figura 3.27.

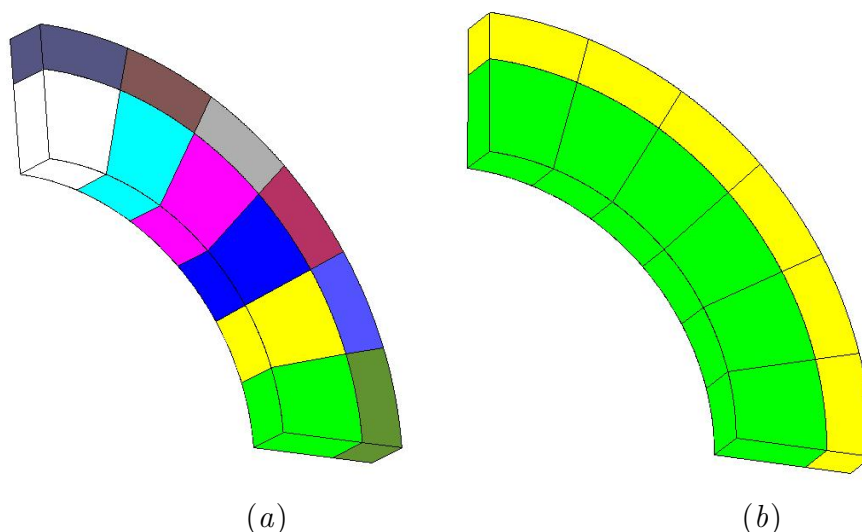


Figura 3.25: Ensayo con material de Holzapfel. Materiales con propiedades distintas en el modelo de elementos finitos, usando: (a) generación *manual* de direcciones, (b) generación *automática* de direcciones

3.4. Comentarios a los modelos

Para la modelización de las paredes arteriales, entre los modelos *isótopos* se destaca el de *Ogden* por el comportamiento de rigidización con la deformación que se puede obtener tras el ajuste de parámetros (véanse las figuras 3.12 y 3.15). Este comportamiento se ve justificado en los tejidos blandos a nivel *microscópico* por la sucesiva alineación de las *fibras de colágeno*, lo que evita fenómenos de inestabilización como pueden ser los *aneurismas*. En todo caso se desaconseja el modelo de *Saint Venant-Kirchhoff* por la pérdida de *estabilidad con grandes deformaciones*.

No obstante, se considera que los modelos de mejor comportamiento son los de tipo anisótropo con *dos direcciones de anisotropía*, dada la influencia de las *fibras de colágeno*. Se destaca el desarrollado por *Holzapfel* dado que

⁹El fichero directamente interpretable por FEAP se exportó desde el preprocesador y postprocesador GiD (desarrollado por CIMNE [1999]).

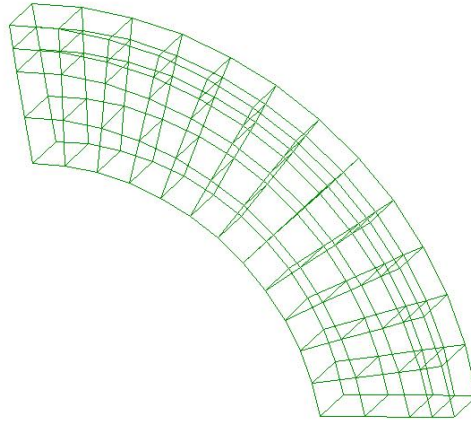


Figura 3.26: Ensayo de arteria carótida. Esquema de la malla

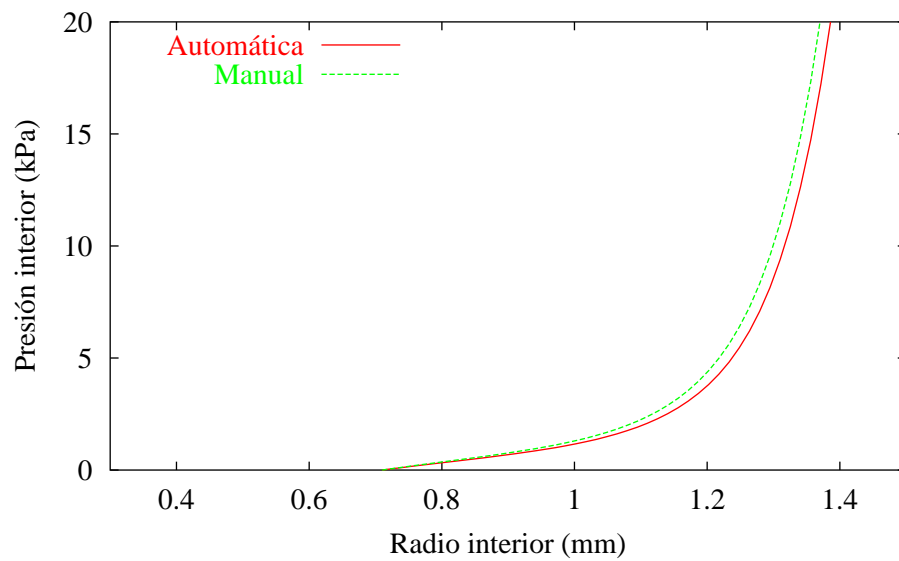


Figura 3.27: Ensayo con material de Holzapfel. Evolución del radio con la presión para los modelos con y sin generación automática de direcciones de anisotropía

fue diseñado específicamente para paredes arteriales. En este caso, la *función de densidad de energía* crece exponencialmente con los *pseudo-invariantes* de anisotropía, ajustándose al proceso de rigidización que se ha comentado. El uso de este modelo en *geometrías reales* se ve favorecido¹⁰ por el *análisis histológico* de la pared arterial (principalmente a partir de imágenes de *ultrasonido* o por *resonancia magnética*) con objeto de identificar los distintos tipos de *tejidos* (la mayor dificultad suele encontrarse en la indentificación del contorno exterior de la *adventicia*) y sus *direcciones de anisotropía*. Entre los algoritmos de determinación de direcciones destaca el desarrollado por HOLZAPFEL [2001] basado en análisis de los momentos de inercia de los *núcleos* de las *células musculares*.

El *ajuste de ensayos de laboratorio* puede exigir la simplificación de modelos o el desarrollo de nuevos.

En el capítulo 6 se muestran aplicaciones de los *modelos de Ogden* y de *Holzappel*.

Por último, se destaca que una propiedad deseable en las funciones de densidad de energía es que se pueda descomponer aditivamente en partes *volumétrica* e *isocórica*. Esto se debe al desarrollo de teorías que permiten incorporar fenómenos como el *comportamiento viscoso* o *daño*, y que parten de ese supuesto.

3.5. Correlación entre modelos constitutivos hiperelásticos

3.5.1. Introducción y objetivos

La correlación entre modelos constitutivos para paredes arteriales se considera de importancia por las siguientes consideraciones:

- a) Existe dificultad en la realización de ensayos con tejidos biológicos por la sensibilidad a variables de entorno como la temperatura, actividad celular y bioquímica, etc. Este aspecto se agrava aún más en el caso de tejidos humanos por los condicionantes sociales a la realización de los ensayos. SCHULZE-BAUER Y HOLZAPFEL [2003] y SOKOLIS ET AL. [2002] presentan métodos de correlación de modelos de material para arterias humanas directamente a partir de datos clínicos¹¹ (en la sección 6.1 se ajustan modelos a partir de resultados experimentales).
- b) La mayoría de los modelos constitutivos existentes para paredes arteriales están asociados a un conjunto restringido de configuraciones y

¹⁰No obstante, en el apartado siguiente se indican procedimientos de ajuste de las direcciones de anisotropía a partir del comportamiento macromecánico.

¹¹La metodología desarrollada en este apartado es en cierto sentido de *segundo nivel*, ya que la correlación se realiza entre los modelos constitutivos.

deformaciones (particularmente de tipo axilsimétrico). Estos modelos pueden aportar información para la formulación y ajuste de otros más generales.

Desde un punto de vista práctico, la aplicación de los criterios de correlación desarrollados en esta sección permiten estimar los parámetros de unos modelos hiperelásticos a partir de otros.

Así, se presentan aplicaciones del método consistentes en el ajuste de modelos constitutivos de Holzapfel y de Ogden a un modelo de Fung para las arterias carótidas de los conejos.

Otra aplicación se presenta en la sección 6.3.1 para la modelización de una arteria coronaria con geometría real.

3.5.2. Método de correlación no lineal de modelos

Sea una función densidad de energía W_1 dependiente de n parámetros escalares de ajuste, ordenados de forma $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, que se pretende correlacionar con otra función densidad de energía W_2 en una región \mathcal{R} de variables independientes de deformación (usualmente correspondiente con los estados cinemáticos fisiológicos del material).

Admitiéndose la hipótesis habitual de incompresibilidad, las funciones densidad de energía pueden ser tales que

$$W_a(\mathbf{F}) = W_a(\alpha\mathbf{F}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{F} \in M_+^{3 \times 3}, \quad a \in \{1, 2\},$$

forzándose la coacción de forma externa. Se admite además que las variables de deformación asociadas a \mathcal{R} son $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ de forma que el gradiente de deformación para cierta configuración de referencia es

$$\mathbf{F} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad \text{con} \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2},$$

resultando el tensor de tensiones de Cauchy de la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\lambda_1 \frac{\partial W_a}{\partial \lambda_1} + q \right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \left(\lambda_2 \frac{\partial W_a}{\partial \lambda_2} + q \right) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + q \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad q \in \mathbb{R},$$

siendo q el multiplicador de Lagrange asociado a la incompresibilidad (obsérvese que en general no se corresponde con la presión hidrostática). El método puede extenderse con facilidad a más variables de deformación, no obstante, el planteamiento expuesto se corresponde con la situación habitual de axilsimetría, donde el estado de deformación viene dado por los alargamientos en dirección circunferencial $\lambda_1 = \lambda_\theta$ y radial $\lambda_2 = \lambda_r$ (véase el cuadro 3.12).

Basado en el método de los mínimos cuadrados, se define el error global (función objetivo a minimizar) como

$$e = \int_{\mathcal{R}} (W_2 - W_1 - d)^2 \omega d\mathcal{R},$$

Invariantes y pseudo-invariantes para configuraciones y deformaciones axilsimétricas con ejes locales $\{\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_z\}$ y alargamientos asociados $\{\lambda_\theta, \lambda_r, \lambda_z\}$:

$$I_1 = \lambda_\theta^2 + \lambda_r^2 + \lambda_z^2,$$

$$I_2 = \lambda_\theta^2 \lambda_r^2 + \lambda_r^2 \lambda_z^2 + \lambda_z^2 \lambda_\theta^2,$$

$$I_3 = \lambda_\theta^2 \lambda_z^2 \lambda_r^2,$$

$$I_4 = \lambda_\theta^2 \sin^2 \phi + \lambda_z^2 \cos^2 \phi,$$

$$I_5 = \lambda_\theta^4 \sin^2 \phi + \lambda_z^4 \cos^2 \phi,$$

$$I_6 = \lambda_\theta^2 \sin^2 \phi + \lambda_z^2 \cos^2 \phi,$$

$$I_7 = \lambda_\theta^4 \sin^2 \phi + \lambda_z^4 \cos^2 \phi,$$

$$I_8 = (-\lambda_\theta^2 \sin^2 \phi + \lambda_z^2 \cos^2 \phi) \cos(2\phi),$$

$$I_9 = \cos^2(2\phi).$$

Observaciones:

a) Las direcciones de las fibras son

$$\mathbf{a}_0 = \sin \phi \mathbf{u}_\theta + \cos \phi \mathbf{u}_z,$$

$$\mathbf{b}_0 = -\sin \phi \mathbf{u}_\theta + \cos \phi \mathbf{u}_z.$$

b) La condición de incompresibilidad se corresponde con $\lambda_\theta \lambda_z \lambda_r = 1$.

Cuadro 3.12: Expresión de los invariantes y pseudo-invariantes para configuraciones y deformaciones axilsimétricas

siendo ω una función de peso en \mathcal{R} ($\omega : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$) que permite un mejor ajuste de W_1 para aquellas deformaciones consideradas de mayor importancia (por ejemplo, mayor probabilidad de ocurrencia o de sensibilidad del problema) y $d \in \mathbb{R}$ un nuevo parámetro de ajuste introducido en el método. Este parámetro aumenta las variables independientes a $n^* = n + 1$ manteniendo las tensiones asociadas a cada deformación (dado que dichas tensiones dependen de las derivadas de W_1 respecto a las variables de deformación, coincidiendo con las asociadas a $W_1 + d$).

Si el ciclo fisiológico medio al que se encuentra sometido el material es una curva cerrada conocida

$$\Gamma : (0, 1) \longrightarrow \mathcal{R},$$

entonces se puede postular la función de peso

$$\omega(\mathbf{x}) = \int_0^1 \exp(-\sigma^2 |\Gamma(t) - \mathbf{x}|^2) dt, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R},$$

con $\sigma \in \mathbb{R}$ indicador de la disminución de la probabilidad de ocurrencia con la distancia (evítese la confusión con el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$). Por otra parte, a falta de la información anterior, puede aprovecharse el conocimiento de la región \mathcal{R} proponiendo

$$\omega(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{R}} \exp(-\sigma^2 |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2) d\mathcal{R}(\mathbf{y}). \quad (3.19)$$

La minimización del error global e (evítese la confusión de esta notación con el espesor, utilizada en otros contextos) puede llevarse a cabo a través del método de Newton, donde se busca el valor del vector de parámetros

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n, d)$$

tal que verifique la condición de extremo local

$$\frac{\partial e}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0}.$$

Se parte de un vector de parámetros iniciales \mathbf{p}_0 , para el que se determina el vector gradiente y el hessiano

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}_0} &= \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}_0} \omega d\mathcal{R}, \\ \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{p}^2} \Big|_{\mathbf{p}_0} &= \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial^2 \tilde{e}}{\partial \mathbf{p}^2} \Big|_{\mathbf{p}_0} \omega d\mathcal{R}, \end{aligned}$$

siendo \tilde{e} el error puntual $\tilde{e} = (W_2 - W_1 - d)^2$. El nuevo vector de parámetros que se obtiene en la iteración es

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p},$$

con

$$\Delta \mathbf{p} = \left(\frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{p}^2} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial e}{\partial \mathbf{p}}.$$

El proceso se repite con los nuevos vectores de parámetros hasta que

$$|\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{p}_{a+1} - \mathbf{p}_a)| < \varepsilon,$$

siendo \mathbf{A} un tensor (habitualmente diagonal) que permite adimensionalizar los miembros de la inecuación y ε la tolerancia. Dado que los parámetros pueden converger a velocidades muy diferentes, puede ser interesante la eliminación del método de aquellos que se consideren convergidos, por ejemplo, de los parámetros b tales que

$$|p_{b,a+1} - p_{b,a}| < \frac{1}{n^*} \varepsilon.$$

3.5.3. Ejemplos de aplicación

Se muestra una aplicación del método expuesto para el ajuste de los parámetros de los modelos de Holzapfel y de Ogden a un modelo de Fung (axilsimétrico) para las arterias carótidas de los conejos,

$$W_2 = \frac{c}{2} (\exp(Q) - 1),$$

con

$$Q = c_1 E_{rr}^2 + c_2 E_{\theta\theta}^2 + c_3 E_{zz}^2 + 2c_4 E_{rr} E_{\theta\theta} + 2c_5 E_{\theta\theta} E_{zz} + 2c_6 E_{zz} E_{rr},$$

siendo E_{aa} , $a \in \{\theta, z, r\}$, componentes del tensor de Green.

Los parámetros utilizados en la correlación han sido $c = 1,2$ kPa, $c_1 = 0,049$, $c_2 = 1,0672$, $c_3 = 0,4775$, $c_4 = 0,0042$, $c_5 = 0,0903$ y $c_6 = 0,0585$. No obstante, en el cuadro 3.13 se indican otros parámetros del modelo recogidos en HUMPHREY [2001a].

Los valores obtenidos en las iteraciones realizadas para el ajuste de los parámetros del modelo de Holzapfel en la región $\mathcal{R} \equiv I_\theta \times I_z \equiv (1,2, 1,7) \times (1,2, 1,7)$ y con la función de peso $\omega = 1$, se presentan en el cuadro 3.14.

En el cuadro 3.15 se exponen los resultados obtenidos para distintos intervalos de integración.

Además, se recogen los siguientes resultados correspondientes a los valores de los parámetros asociados a $\mathcal{R} \equiv (1, 2) \times (1,5, 1,9)$ y $\omega = 1$:

- a) Funciones densidad de energía de los modelos de Holzapfel y de Fung (véase la figura 3.28).
- b) Error puntual del ajuste (véase la figura 3.29).
- c) Ensayos unidireccionales en dirección circunferencial manteniendo el alargamiento longitudinal y sin tensión radial (véanse las figuras 3.30, 3.31 y 3.32).

Parámetro	<i>Chuong y Fung</i> ¹	<i>Chuong y Fung</i> ²	<i>Chuong y Fung</i> ³
c (kPa)	11,2	13,97	17,52
c_1	0,0499	0,0058	1,744
c_2	1,0672	1,274	0,619
c_3	0,4775	0,4037	0,0405
c_4	0,0042	0,0188	0,0040
c_5	0,0903	0,4035	0,0667
c_6	0,0585	0,0281	0,0019

¹ Determinado por ensayos de presión-diámetro considerando que la configuración de referencia está libre de tensiones.

² Determinado por ensayos de presión-diámetro considerando que la configuración de referencia está libre de cargas.

³ Determinado por ensayos de compresión considerando que la configuración de referencia está libre de tensiones.

Cuadro 3.13: Parámetros del modelo de Fung para las arterias carótidas de los conejos

Iteración	Parámetros (c (kPa), k_1, k_2, ϕ, d (kPa))	Error global (kPa ²)	Convergencia ¹
0	(1,0000, 1,0000, 1,0000, 1,0000, 0,0000)	0,8828	—
1	(6,4652, 0,8165, 0,8508, 1,0906, -1,3894)	0,0536	2,5244
2	(5,8141, 0,5952, 0,9654, 1,1651, -1,0274)	0,0344	0,3529
3	(5,7172, 0,7199, 0,8887, 1,1656, -0,9984)	0,0265	0,0796
4	(5,2868, 0,9090, 0,8044, 1,1474, -0,8022)	0,0214	0,2311
5	(4,9824, 1,0485, 0,7638, 1,1354, -0,6465)	0,0173	0,1662
6	(4,5175, 1,2805, 0,6907, 1,1170, -0,4055)	0,0151	0,2583
7	(4,3042, 1,3901, 0,6706, 1,1095, -0,2754)	0,0132	0,1224
8	(3,8777, 1,6251, 0,6134, 1,0939, -0,0229)	0,0127	0,2467
9	(3,7783, 1,6818, 0,6069, 1,0909, 0,0516)	0,0120	0,0612
10	(3,5660, 1,8066, 0,5816, 1,0836, 0,1926)	0,0119	0,1274
11	(3,5442, 1,8203, 0,5800, 1,0830, 0,2110)	0,0119	0,0142
12	(3,5305, 1,8285, 0,5785, 1,0825, 0,2207)	0,0119	0,0084
13	(3,5303, 1,8286, 0,5785, 1,0825, 0,2208)	0,0119	< 0,0001

¹ Obtenido con el tensor diagonal de componentes $A_{11} = 1$ kPa, $A_{22} = 1$, $A_{33} = 1$ y $A_{44} = 1$ kPa.

Cuadro 3.14: Iteraciones del método para el ajuste del modelo de Holzapfel en la región $\mathcal{R} \equiv I_\theta \times I_z \equiv (1,2, 1,7) \times (1,2, 1,7)$ y $\omega = 1$

$\mathcal{R} \equiv I_\theta \times I_z$	Parámetros (c (kPa), k_1, k_2, ϕ, d (kPa))
$(1,2,1,7) \times (1,2,1,7)$	$(3,5303, 1,8286, 0,5785, 1,0825, 0,2208)$
$(1,2,1,7) \times (1,2,1,7)$	$(3,4404, 1,8449, 0,5799, 1,0787, 0,2260)^1$
$(1,1,7) \times (1,1,7)$	$(3,1289, 1,6944, 0,6051, 1,1242, 0,6146)$
$(1,2) \times (1,5,1,9)^2$	$(4,5661, 2,5244, 0,4593, 1,0297, 0,0863)$
$(1,1,7) \times (0,69,0,71)$	$(-4,9661, 3,6541, 0,4570, 0,8913, 6,6395)$
$(1,2) \times (1,2)$	$(3,8707, 2,9562, 0,4346, 1,0430, 1,2482)$
Los valores propuestos por HOLZAPFEL ET AL. [2000] son $(3,0000, 2,3632, 0,8393, 1,0647, -)$.	
<p>¹ Obtenido según la función de peso (3.19) con $\sigma = 5$. El resto de los resultados corresponden a $\omega = 1$ ($\sigma = 0$).</p> <p>² Este intervalo coincide con el adoptado por HOLZAPFEL ET AL. [2000] para los ensayos numéricos.</p>	

Cuadro 3.15: Parámetros obtenidos en el ajuste del modelo de Holzapfel

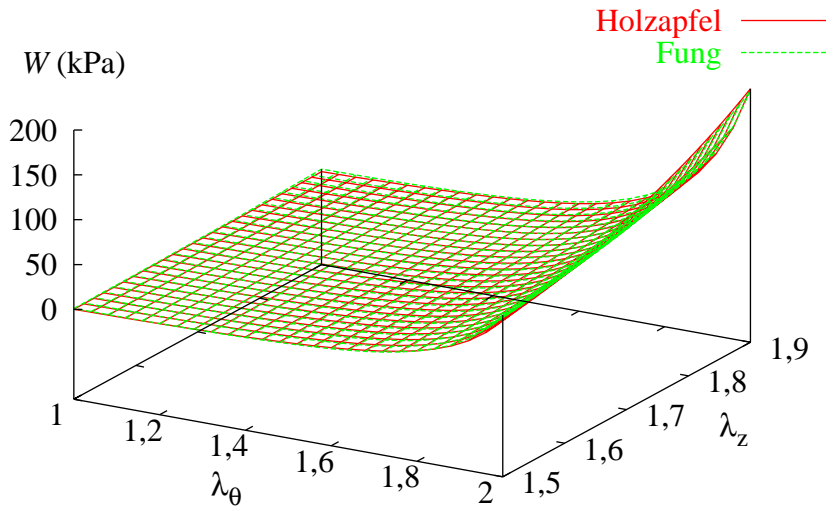


Figura 3.28: Funciones densidad de energía correspondientes a los modelos de Holzapfel ajustado y de Fung

Error puntual (kPa^2)

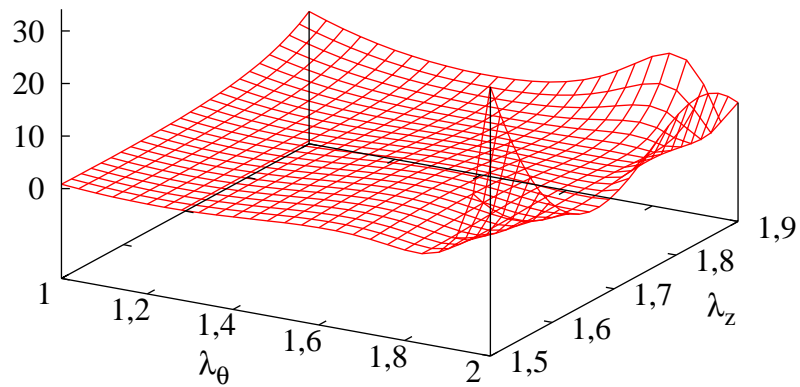


Figura 3.29: Ajuste del modelo de Holzapfel. Error puntual del ajuste

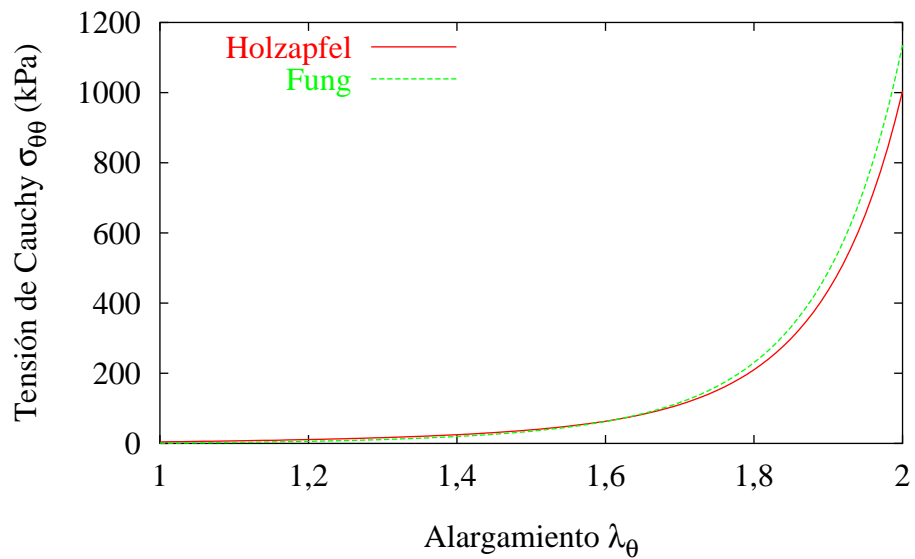


Figura 3.30: Ajuste del modelo de Holzapfel. Ensayo unidireccional con $\lambda_z = 1,5$

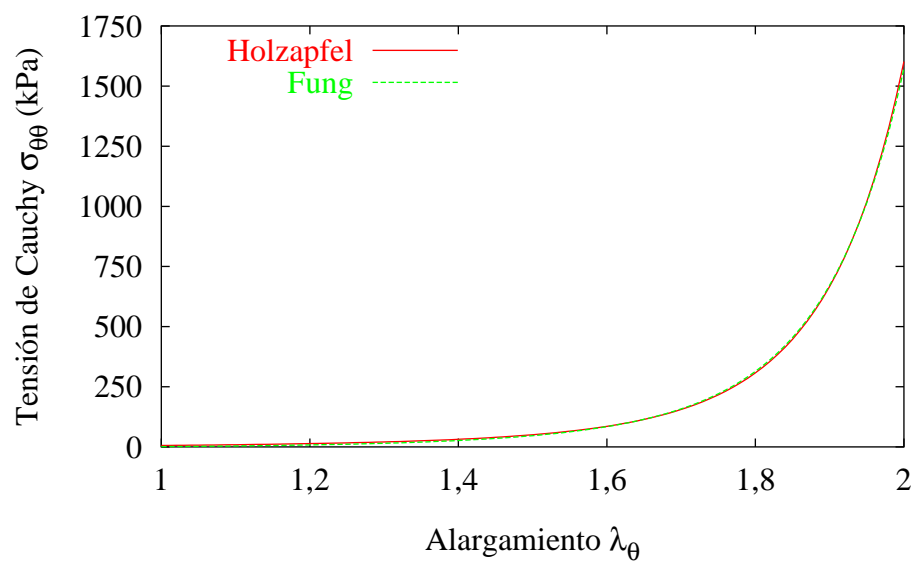


Figura 3.31: Ajuste del modelo de Holzapfel. Ensayo unidireccional con $\lambda_z = 1,7$

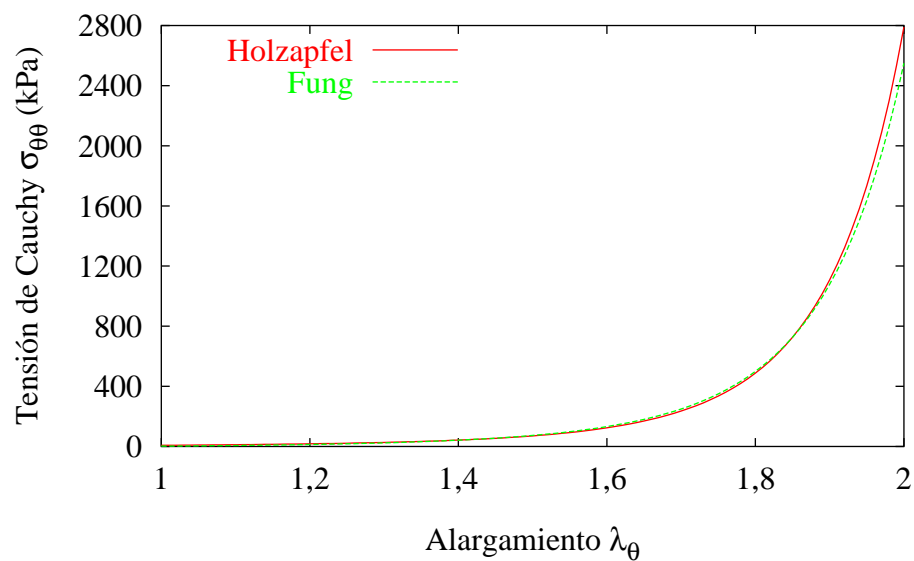


Figura 3.32: Ajuste del modelo de Holzapfel. Ensayo unidireccional con $\lambda_z = 1,9$

Por otra parte, se ha ajustado un modelo polinómico de Ogden de la forma

$$W_1 = \sum_{p=1}^3 \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_\theta^p + \lambda_z^p + \lambda_r^p),$$

obteniéndose para $\mathcal{R} \equiv (1, 1, 7) \times (0, 69, 071)$ y $\omega = 1$ los valores de los parámetros $\mu_1 = 1949$ kPa, $\mu_2 = -1932$ kPa y $\mu_3 = 585$ kPa, con $d = 27$ kPa. El error puntual del ajuste y los resultados de un ensayo unidireccional se presentan en las figuras 3.33 y 3.34.

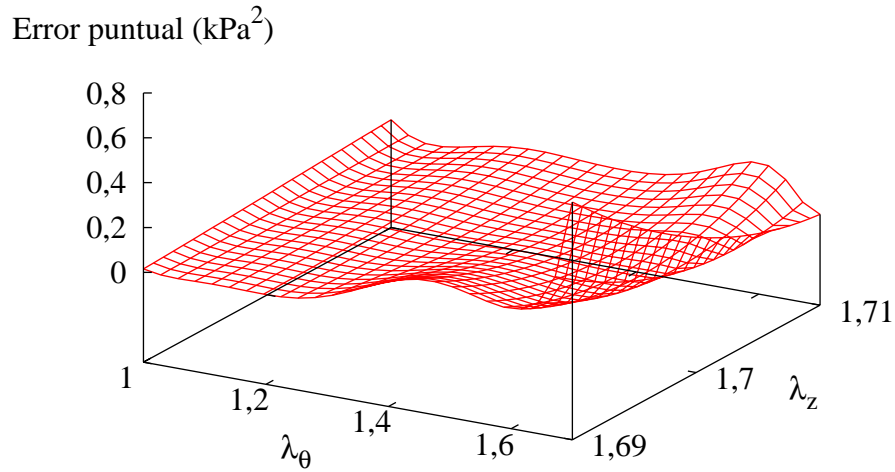


Figura 3.33: Ajuste del modelo de Ogden. Error puntual del ajuste

No obstante, se puede observar que el error global cometido es $4,6 \cdot 10^{-4}$ kPa², que es un orden de magnitud superior al obtenido con el modelo de Holzapfel ($4,3 \cdot 10^{-5}$ kPa²). Este resultado refuerza la afirmación de que el modelo de Holzapfel resulta más adecuado que el de Ogden para la simulación de las paredes arteriales para estados generales tridimensionales.

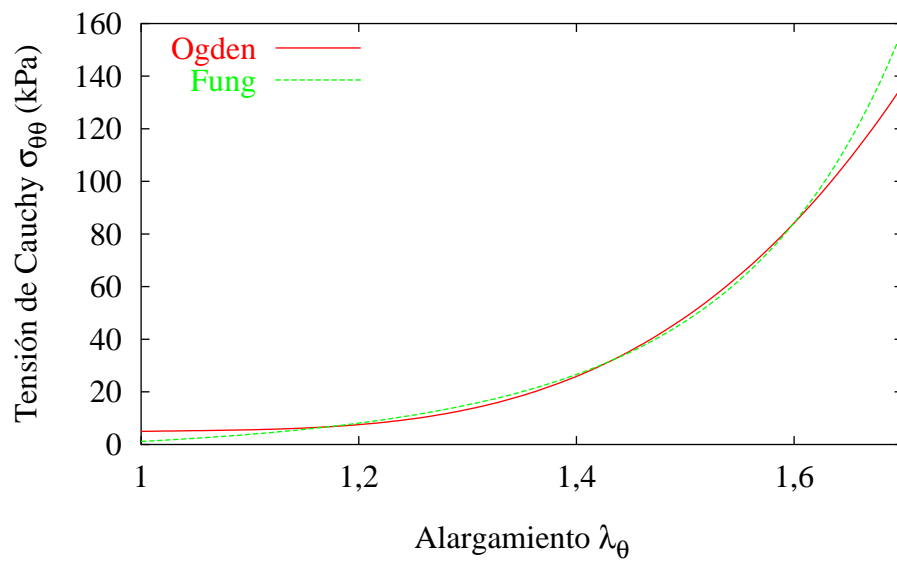


Figura 3.34: Ajuste del modelo de Ogden. Ensayo unidireccional con $\lambda_z = 1,7$

Capítulo 4

Viscoelasticidad y pseudoelasticidad en paredes arteriales

En este capítulo se estudian dos tipos de fenómenos de disipación de la energía, lo que altera la hipótesis de *hiperelasticidad* del capítulo 3. En primer lugar (sección 4.1) se desarrollan modelos de disipación de la energía en el tiempo, fenómeno conocido como *viscoelasticidad*, presentándose además un método de ajuste de parámetros. Posteriormente (sección 4.2) se presenta un modelo de disipación instantánea de la energía debido al estado de deformación, fenómeno conocido como *daño*.

Las aportaciones principales de la tesis no se encuentran en este tipo de fenómenos disipativos. No obstante, su estudio se motiva con objeto de plantear los principales fenómenos relacionados con el comportamiento mecánico de las paredes arteriales en el mismo marco teórico, lo que permite el acoplamiento de los modelos asociados a efectos de distinta naturaleza.

4.1. Viscoelasticidad

En este apartado se presentan modelos que permiten considerar la *disipación viscosa* de la energía. El planteamiento de los modelos que se presentan es de tipo macromecánico y basado en la mecánica de medios continuos. No obstante, existen modelos micromecánicos de daño para materiales con fibras, como el propuesto por GONZÁLEZ [2000] para pequeñas deformaciones.

Los efectos de estos modelos se pueden acoplar a los de tipo hiperelástico considerados en el capítulo 3, ya que los tienen como caso límite correspondiente al cambio instantáneo en el estado de deformación.

Estas formulaciones permiten aproximar de forma más realista la evolución del comportamiento de las paredes arteriales ante cambios en la solici-

tación, como puede ser la variación de sístole a diástole o cambios debidos a operaciones clínicas.

En particular, se desarrollan los modelos *generalizados* de *viscoelasticidad* de *Maxwell* (sección 4.1.1) y de *Kelvin-Voigt* (sección 4.1.2), basados en la introducción de *variables internas*.

4.1.1. Viscoelasticidad generalizada de Maxwell

Este modelo generaliza el esquema de viscoelasticidad de Maxwell (véase la figura 4.1 y LEMAITRE Y J.-L. CHABOCHE [1990]).

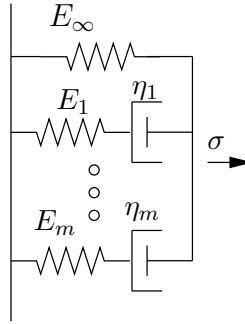


Figura 4.1: Esquema del modelo generalizado de Maxwell

En este caso se exige (véase HOLZAPFEL [2000b] y TAYLOR ET AL. [1970]) previamente que la densidad de energía a tiempo infinito pueda ser descompuesta de la forma

$$W^\infty(\mathbf{C}) = W_{\text{vol}}^\infty(J) + W_{\text{iso}}^\infty(\bar{\mathbf{C}}).$$

Se plantea que la función de densidad de energía se determine a partir de \mathbf{C} y de ciertas *variables internas de deformación* $\mathbf{\Gamma}_a$, con $a = 1, \dots, m$, de la forma

$$W = W(\mathbf{C}, \mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_m) = W_{\text{vol}}^\infty(J) + W_{\text{iso}}^\infty(\bar{\mathbf{C}}) + \sum_{a=1}^m \Upsilon_a(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{\Gamma}_a),$$

con las condiciones de normalización

$$W_{\text{vol}}^\infty(1) = 0, \quad W_{\text{iso}}^\infty(\mathbf{1}) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{a=1}^m \Upsilon_a(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = 0.$$

El segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} puede ser obtenido como

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C}, \mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_m)}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{S}_{\text{vol}}^\infty + \mathbf{S}_{\text{iso}},$$

con la definición

$$\mathbf{S}_{\text{iso}} = \mathbf{S}_{\text{iso}}^{\infty} + \sum_{a=1}^m \mathbf{Q}_a,$$

y siendo

$$\mathbf{S}_{\text{vol}}^{\infty} = 2 \frac{\partial W_{\text{vol}}^{\infty}(J)}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{y} \quad \mathbf{S}_{\text{iso}}^{\infty} = 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}^{\infty}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \mathbf{C}}.$$

Por tanto, es

$$\mathbf{Q}_a = 2 \frac{\partial \Upsilon_a(\bar{\mathbf{C}}, \Gamma_a)}{\partial \mathbf{C}},$$

que son *variables internas históricas de tensión*.

Las *ecuaciones de evolución* que se proponen se corresponden con el elemento de Maxwell, de la forma

$$\dot{\mathbf{Q}}_a + \frac{\mathbf{Q}_a}{\tau_a} = \dot{\mathbf{S}}_{\text{iso},a}, \quad (4.1)$$

para ciertos parámetros del material τ_a denominados *tiempos de relajación*, y siendo $\mathbf{S}_{\text{iso},a}$ tensores definidos a partir de \mathbf{C} . En forma de integral de convolución para el instante de tiempo T , se tiene

$$\mathbf{Q}_a = \exp\left(-\frac{T}{\tau_a}\right) \mathbf{Q}_{a,0} + \int_{t=0}^{t=T} \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_a}\right) \dot{\mathbf{S}}_{\text{iso},a} dt.$$

Por último, para definir completamente el comportamiento viscoelástico es necesario conocer los tensores $\mathbf{S}_{\text{iso},a}$, por lo que Govindjee y Simó proponen

$$\mathbf{S}_{\text{iso},a} = \beta_a^{\infty} \mathbf{S}_{\text{iso}}^{\infty}(\bar{\mathbf{C}}),$$

siendo β_a *factores de la energía de deformación*.

El tensor de elasticidad en la configuración inicial viene dado por

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_{\text{vol}}^{\infty} + \mathbb{C}_{\text{iso}}^{\infty} + \sum_{a=1}^m \mathbb{C}_{\text{vis}}^a,$$

donde

$$\mathbb{C}_{\text{vol}}^{\infty} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{\text{vol}}^{\infty}}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbb{C}_{\text{iso}}^{\infty} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{\text{iso}}^{\infty}}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{y}$$

$$\mathbb{C}_{\text{vis}}^a = 2 \frac{\partial \mathbf{Q}_a}{\partial \mathbf{C}} = \delta_a \mathbb{C}_{\text{iso}}^{\infty},$$

con $\delta_a = \beta_a^{\infty} \exp(\xi_a)$ y

$$\xi_a = -\frac{\Delta t}{2\tau_a}.$$

Por tanto

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_{\text{vol}}^{\infty} + (1 + \delta) \mathbb{C}_{\text{iso}}^{\infty},$$

con

$$\delta = \sum_{a=1}^m \delta_a.$$

Como se ha indicado, aparte de la función de densidad de energía W^∞ , los parámetros necesarios para determinar el comportamiento viscoelástico en este modelo son los tiempos de relajación τ_a (obsérvese la relación $\tau_a = \eta_a/E_a$ para el esquema equivalente de la figura 4.1) y los factores de la energía de deformación β_a^∞ . Un método de ajuste de estos parámetros a partir de ensayos se presenta en la sección 4.1.4.

4.1.2. Viscoelasticidad generalizada de Kelvin-Voigt

El planteamiento de este modelo se debe a SIMÓ Y HUGHES [1998], basándose, de la misma forma que el de viscoelasticidad generalizada de Maxwell, en la introducción de *variables internas*. No obstante, en este caso la función de energía de partida que se considera no es la de tiempo infinito, sino la inicial expresable de la forma

$$W^0(\mathbf{C}) = W_{\text{vol}}^0(J) + W_{\text{iso}}^0(\bar{\mathbf{C}}).$$

En este contexto, la expresión general de la densidad de energía que se propone es

$$W(\mathbf{C}, \gamma_1, \dots, \gamma_m) = W_{\text{vol}}^0(J) + W_{\text{iso}}^0(\bar{\mathbf{C}}) - \sum_{a=1}^m \Upsilon_a(\bar{\mathbf{C}}, \gamma_a),$$

siendo Υ_a funciones dependientes de ciertas variables internas de deformación γ_a .

El segundo tensor de Piola-Kirchhoff puede obtenerse como

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C}, \gamma_1, \dots, \gamma_m)}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{S}_{\text{vol}}^0 + \mathbf{S}_{\text{iso}},$$

definiéndose,

$$\mathbf{S}_{\text{iso}} = \mathbf{S}_{\text{iso}}^0 - \sum_{a=1}^m \mathbf{q}_a,$$

y siendo

$$\mathbf{S}_{\text{vol}}^0 = 2 \frac{\partial W_{\text{vol}}^0(J)}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{y} \quad \mathbf{S}_{\text{iso}}^0 = 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}^0(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \mathbf{C}}.$$

Por lo tanto, las variables internas históricas de tensión \mathbf{q}_a , se relacionan con la función de densidad de energía de la forma

$$\mathbf{q}_a = 2 \frac{\partial \Upsilon_a(\bar{\mathbf{C}}, \gamma_a)}{\partial \mathbf{C}}.$$

La ecuación de evolución que se considera, correspondiente con el elemento de Kelvin-Voigt (véase la figura 4.2) es

$$\dot{\mathbf{q}}_a + \frac{\mathbf{q}_a}{\tau_a} = \frac{\mathbf{S}_{\text{iso},a}}{\tau_a}, \quad \text{con} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{q}_a = \mathbf{0}, \quad (4.2)$$

para los *tiempos de relajación* τ_a (característicos del material) y siendo $\mathbf{S}_{\text{iso},a}$ tensores unívocamente determinados con \mathbf{C} . La ecuación de evolución se expresa como la integral de convolución

$$\mathbf{q}_a = \exp\left(-\frac{T}{\tau_a}\right) \mathbf{q}_{a0} + \int_{t=0}^{t=T} \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_a}\right) \frac{\mathbf{S}_{\text{iso},a}}{\tau_a} dt.$$

Por último, para definir completamente el modelo se establecen las relaciones

$$\mathbf{S}_{\text{iso},a} = \gamma_a^0 \mathbf{S}_{\text{iso}}^0.$$

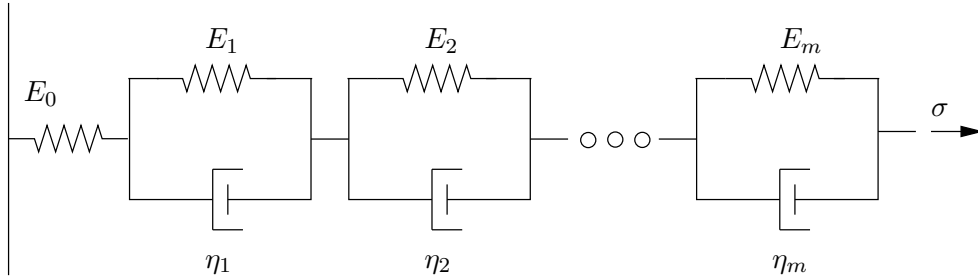


Figura 4.2: Esquema del modelo generalizado de Kelvin-Voigt

El tensor de elasticidad en la configuración inicial viene dado por

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_{\text{vol}}^0 + \mathbb{C}_{\text{iso}}^0 - \sum_{a=1}^m \mathbb{C}_{\text{vis}}^a,$$

donde

$$\mathbb{C}_{\text{vol}}^0 = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{\text{vol}}^0}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbb{C}_{\text{iso}}^0 = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{\text{iso}}^0}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{y} \quad \mathbb{C}_{\text{vis}}^a = 2 \frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial \mathbf{C}} = \delta_a \mathbb{C}_{\text{iso}}^0,$$

con $\delta_a = \gamma_a^0 \exp(\xi_a)$ y

$$\xi_a = -\frac{\Delta t}{2\tau_a}.$$

Por tanto,

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_{\text{vol}}^0 + (1 + \delta) \mathbb{C}_{\text{iso}}^0,$$

con

$$\delta = \sum_{a=1}^m \delta_a.$$

En el modelo indicado las variables del problema, aparte de la función de energía W^0 , son los tiempos τ_a y los factores γ_a^0 .

<i>Maxwell</i>	<i>Kelvin-Voigt</i>
$M_{\text{vol,h}}^a$	$M_{\text{vol,s}}^a$
$A_{\text{vol,h}}^a$	$A_{\text{vol,s}}^a$
$M_{\text{iso,h}}^a$	$M_{\text{iso,s}}^a$
$A_{\text{iso,h}}^a$	$A_{\text{iso,s}}^a$
$\tau_{a,h}$	$\tau_{a,s}$
β_a^∞	γ_a^0

Cuadro 4.1: Parámetros de los modelos generalizados de Maxwell y de Kelvin-Voigt

4.1.3. Comparación entre modelos viscoelásticos

En este apartado se comparan los modelos de viscoelasticidad generalizada de Maxwell y de Kelvin-Voigt.

Supóngase un modelo de material cuya función de densidad de energía W pueda ser descompuesta en partes volumétrica e isocórica, $W(\mathbf{C}) = W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\overline{\mathbf{C}})$. Se supone además que W_{vol} depende de forma exclusiva de un conjunto de parámetros del material con unidades de fuerza por superficie y de un conjunto de parámetros adimensionales, M_{vol}^a , $a = 1, \dots, n_{\text{vol}}^M$ y A_{vol}^a , $a = 1, \dots, n_{\text{vol}}^A$, respectivamente. Análogamente W_{iso} , depende del conjunto de parámetros M_{iso}^a , $a = 1, \dots, n_{\text{iso}}^M$ y A_{iso}^a , $a = 1, \dots, n_{\text{iso}}^A$. Los conjuntos de parámetros correspondientes a la parte volumétrica y los correspondientes a la parte isocórica se supone que son totalmente independientes entre sí, en el sentido de no aumentarse la información sobre uno de los conjuntos al conocerse el valor de los parámetros del otro.

Sobre la función de densidad de energía indicada es posible aplicar los modelos generalizados de viscoelasticidad de Maxwell y de Kelvin-Voigt, estando dicha función relacionada con el tiempo final en el primer caso y con el tiempo inicial en el segundo. Se supondrá que el número de parámetros de viscoelasticidad isocóricos y volumétricos es el mismo en los dos modelos. Los parámetros globales de ambos modelos se indican en la tabla 4.1.

En estas condiciones es posible encontrar una relación entre los dos conjuntos de variables de manera que se describa el mismo material. En particular, los parámetros correspondientes al modelo generalizado de Maxwell en función de los del modelo de Kelvin-Voigt son:

$$M_{\text{vol,h}}^a = M_{\text{vol,s}}^a, \quad A_{\text{vol,h}}^a = M_{\text{vol,s}}^a,$$

$$M_{\text{iso,h}}^a = M_{\text{iso,s}}^a \left(1 - \sum_{b=1}^m \gamma_b \right), \quad A_{\text{iso,h}}^a = A_{\text{iso,s}}^a,$$

$$\tau_{a,h} = \tau_{a,s} \quad \text{y} \quad \beta_a^\infty = \frac{\gamma_a^0}{1 - \sum_{b=1}^m \gamma_b^0}.$$

En el caso de existir dependencia entre los parámetros que aparecen en la expresión de la densidad de energía volumétrica y en la expresión de la densidad de energía isocórica, entonces no existe una equivalencia entre los parámetros de los modelos generalizados de Maxwell y de Kelvin-Voigt que describan el mismo material. No obstante, siempre se pueden desvincular los conjuntos de variables añadiendo nuevos parámetros (tantos como relaciones de dependencia) y asignar sus valores de forma que la expresión de la función coincida con la original. En este caso sería directamente aplicable la equivalencia de los modelos que se ha indicado.

Por último, se observa que la elección de uno u otro modelo puede venir motivada por las condiciones en que se realizan los ensayos para el ajuste de parámetros. Así, si el modelo límite hiperelástico se ajusta a partir de ensayos lentos en relación a los fenómenos de viscoelasticidad, entonces se motiva adoptar el modelo generalizado de Maxwell, mientras que si los ensayos son rápidos, entonces el modelo más razonable es el de Kelvin-Voigt.

4.1.4. Método de ajuste de parámetros

En la bibliografía existen estudios sobre la extracción de parámetros viscosos a partir de ensayos de fluencia y relajación. Véase, por ejemplo, el planteamiento general descrito en LEMAITRE Y J.-L. CHABOCHE [1990] para pequeñas deformaciones, los estudios de PROVENZANO ET AL. [2001] y LAKES Y VANDERBY [1999] acerca de la viscoelasticidad en ligamentos para modelos con isotropía transversal, el ajuste de la viscoelasticidad en un modelo con dos familias de dirección preferentes de HOLZAPFEL Y GASSER [2000] y las investigaciones de PURSLOW ET AL. [1998] con objeto de estudiar el efecto de la reorientación de las fibras.

No obstante, existen pocos estudios para la determinación de dichos parámetros en ensayos cíclicos (KOOP Y LEWIS [2003] manifiesta esta dificultad), especialmente en modelos de grandes deformaciones. En este apartado se propone un método de ajuste de los parámetros de viscoelasticidad a partir de experimentos cíclicos. En el desarrollo de la metodología se indican sus logros y las restricciones a su aplicación.

Hipótesis básicas. Se considera un ensayo axilsimétrico realizado a alargamiento longitudinal constante y unitario¹ bajo la condición de incompresibilidad, esto es,

$$\mathbf{F} = \lambda_\theta \mathbf{u}_\theta \otimes \mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_z \otimes \mathbf{u}_z + \frac{1}{\lambda_\theta} \mathbf{u}_r \otimes \mathbf{u}_r. \quad (4.3)$$

Además, se supone que el ensayo se realiza aumentando la presión con una ley lineal de la forma $P = v_P t$ durante un tiempo $t_{\text{máx}}$, instante en el que

¹La extensión del método a ensayos con alargamiento longitudinal constante no unitario puede llevarse a cabo sin mayores dificultades. Se adopta este caso particular (por otra parte habitual) con la intención de una mayor claridad en la exposición.

la ley de presiones pasa a ser $P = v_P(t_{\text{máx}} - t)$, hasta $t = 2t_{\text{máx}}$. La presión máxima alcanzada es, por tanto, $P_{\text{máx}} = v_P t_{\text{máx}}$. En definitiva:

$$P(t) = \begin{cases} v_P t & \text{si } 0 \leq t < t_{\text{máx}}, \\ v_P(t_{\text{máx}} - t) & \text{si } t_{\text{máx}} \leq t < 2t_{\text{máx}}. \end{cases}$$

Se realizan ciclos de carga considerados lentos respecto a los efectos viscoelásticos de la forma indicada hasta la *estabilización* del ciclo de histéresis. Estas condiciones de ensayo son habituales en los ensayos mecánicos sobre paredes arterias, de hecho se admitirán en los ensayos de la sección 6.1.

Ajuste inicial de un modelo hiperelástico. Para dicho ciclo de carga estabilizado se realiza el ajuste de un modelo hiperelástico. La función de densidad de energía de este modelo ajustado se denota por W^c . Esta función se toma independiente de la componente volumétrica de la deformación, $W^c = W^c(\bar{\mathbf{C}})$, añadiéndose aparte la restricción interna de incompresibilidad.

Considerando que el espesor es mucho menor que el diámetro, se adopta la fórmula de los tubos delgados

$$\sigma_\theta = \frac{Pr}{e}, \quad (4.4)$$

siendo r el radio y e el espesor, ambos en la configuración deformada. La componente circunferencial del segundo tensor de Piola-Kirchhoff S_θ , se relaciona con el tensor de tensiones de Cauchy a través de (3.1) de la forma $S_\theta = \sigma_\theta / \lambda_\theta^2$. De (4.4) y observando que $r = \lambda_\theta r_0$ y $e = e_0 / \lambda_\theta$, siendo r_0 y e_0 el radio y el espesor inicial, respectivamente, se tiene,

$$S_\theta = \frac{Pr_0}{e_0}.$$

Particularizando para la deformación dada por (4.3), $W^c = W^c(\lambda_\theta)$, el ajuste se realiza de forma que

$$P_a^{\text{exp}} \approx \frac{1}{\lambda_{\theta,a}^{\text{exp}}} \left. \frac{\partial W^c}{\partial \lambda_\theta} \right|_{\lambda_\theta = \lambda_{\theta,a}^{\text{exp}}} \frac{e_0}{r_0}, \quad a = 1, 2, \dots, m,$$

siendo m el número de puntos muestrales en el ensayo, pudiendo adoptarse un criterio de mínimos cuadrados en el ajuste.

Aproximación del efecto viscoso. Por claridad en la exposición, en el desarrollo del método se ajusta una pareja (τ, β^∞) de parámetros de la viscoelasticidad generalizada de Maxwell, no obstante, la extensión a un mayor número de parejas se puede realizar de forma análoga. Se supone que el ensayo se realiza en condiciones suficientemente lentas como para admitir que la variación de la tensión viscosa es $\dot{S}_\theta^* = \beta^\infty \dot{S}_\theta^\infty \approx \beta^\infty \dot{S}_\theta$. La ecuación de

evolución (4.1) en dirección circunferencial particularizada al caso que nos ocupa resulta por lo tanto

$$\dot{Q}_\theta + \frac{Q_\theta}{\tau} = \begin{cases} \frac{\beta^\infty v_P r_0}{e_0} & \text{si } 0 \leq t < t_{\text{máx}}, \\ -\frac{\beta^\infty v_P r_0}{e_0} & \text{si } t_{\text{máx}} \leq t < 2t_{\text{máx}}. \end{cases}$$

Esta ecuación puede ser integrada de forma independiente para cada una de los intervalos temporales, $0 \leq t < t_{\text{máx}}$ y $t_{\text{máx}} \leq t < 2t_{\text{máx}}$, resultando

$$Q_\theta(t) = \begin{cases} \frac{\beta^\infty v_P r_0 \tau}{e_0} + A_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) & \text{si } 0 \leq t < t_{\text{máx}}, \\ -\frac{\beta^\infty v_P r_0 \tau}{e_0} + A_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) & \text{si } t \geq t_{\text{máx}}, \end{cases}$$

donde A_1 y A_2 son constantes de integración.

Por continuidad en $t = t_{\text{máx}}$, debe verificarse

$$\frac{\beta^\infty v_P r_0 \tau}{e_0} + A_1 \exp\left(-\frac{t_{\text{máx}}}{\tau}\right) = -\frac{\beta^\infty v_P r_0 \tau}{e_0}. \quad (4.5)$$

Además, dado que el ciclo es estable, entonces la condición de continuidad en $t = 2t_{\text{máx}}$ resulta

$$\frac{\beta^\infty v_P r_0 \tau}{e_0} + A_1 = -\frac{\beta^\infty v_P r_0 \tau}{e_0} + A_2 \exp\left(-\frac{2t_{\text{máx}}}{\tau}\right). \quad (4.6)$$

Las ecuaciones (4.5) y (4.6) permiten determinar los valores de las constantes de integración

$$A_1 = -2 \frac{\beta^\infty v_P r_0 \tau}{e_0 \exp(-t_{\text{máx}}/\tau)} \quad \text{y} \\ A_2 = 2 \frac{\beta^\infty v_P r_0 \tau}{e_0 \exp(-t_{\text{máx}}/\tau)} \exp\left(\frac{t_{\text{máx}}}{\tau}\right).$$

La función de densidad de energía a tiempo infinito se supone proporcional en un factor f a la ajustada en el ciclo W^c , esto es, $W^\infty = fW^c$.

Supuesto efectos viscoelásticos pequeños, el alargamiento λ_θ para una presión P determinada es

$$\lambda_\theta(P) = \lambda_\theta^\infty(P) - \left. \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \lambda_\theta} \right)^{-1} \right|_{\lambda_\theta = \lambda_\theta^\infty(P)} Q_\theta(t), \quad (4.7)$$

siendo

$$S_\theta = f \frac{1}{\lambda_\theta} \frac{\partial W^c}{\partial \lambda_\theta},$$

$\lambda_\theta^\infty(P)$ tal que

$$f \frac{1}{\lambda_\theta^\infty} \frac{\partial W^c}{\partial \lambda_\theta} \Big|_{\lambda_\theta = \lambda_\theta^\infty(P)} = \frac{Pr_0}{e_0},$$

$t = \frac{P}{v_P}$ en la rama creciente del ciclo y $t = t_{\text{máx}} + \frac{P_{\text{máx}} - P}{v_P}$ para la rama decreciente. Los alargamientos en las ramas creciente y decreciente se representarán como $\lambda_\theta^+(P)$ y $\lambda_\theta^-(P)$, respectivamente.

Obsérvese que según (4.7) el alargamiento para presión nula no es unitario, sino de valor

$$\lambda_{\theta,0} = 1 - \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \lambda_\theta} \right)^{-1} \Big|_{\lambda_\theta=1} Q_\theta(0). \quad (4.8)$$

Ajuste de los parámetros. Dado que el ensayo se realiza a presión controlada, la idea básica en el ajuste de los parámetros es ajustar por mínimos cuadrados las diferencias de alargamientos observadas a presiones fijas entre las ramas creciente y decreciente, y ajustar el alargamiento medio observado a una presión determinada, correspondiente a un estado representativo del comportamiento del material (*fisiológico*), representado con la pareja $(P_{\text{fis}}, \lambda_{\theta,\text{fis}})$.

Las diferencias de alargamiento para una presión determinada vienen dadas por

$$\delta\lambda_\theta(P) = \frac{\lambda_\theta^+(P) - \lambda_\theta^-(P)}{\lambda_{\theta,0}}.$$

Estas diferencias se relacionan con el alargamiento inicial $\lambda_{\theta,0}$, dado que las medidas experimentales se realizan sobre este *alargamiento de referencia*.

El ajuste de los parámetros β^∞ , τ y f se realiza de forma que $\delta\lambda_\theta(P_a^{\text{exp}})$ se aproxime lo más posible a los valores experimentales $\delta\lambda_{\theta,a}^{\text{exp}}$, $i = 1, 2, \dots, n$, siendo n el número de puntos muestrales de diferencias de alargamientos a la misma presión. El ajuste puede realizarse por el método de los mínimos cuadrados, con la restricción adicional

$$\frac{\lambda_\theta^+(P_{\text{fis}}) + \lambda_\theta^-(P_{\text{fis}})}{2\lambda_{\theta,0}} = \lambda_{\theta,\text{fis}}.$$

Observaciones. El método que se presenta es aplicable a ciclos de presión-alargamiento en materiales con moderados efectos viscosos o ensayos lentos respecto a dichos efectos, lo que es habitual en experimentos mecánicos en arterias, permitiendo aprovechar dichos ensayos. El método permite ajustar en un único ensayo el comportamiento límite hiperelástico y parejas de parámetros viscoelásticos. No obstante, un ajuste más preciso del modelo viscoelástico debe realizarse determinando un mayor número de parejas de parámetros, a través de ensayos más directos a estos efectos, como pueden ser *ensayos de fluencia*, y, especialmente *ensayos de relajación*.

Un ejemplo de aplicación del método se recoge en la sección 6.1, página 161.

4.1.5. Implementación

Los modelos generalizados de viscoelasticidad de Maxwell y de Kelvin-Voigt pueden implementarse en programas de elementos finitos discretizando el tiempo, numerando los instantes correlativamente. Se determina en cada instante el estado tensional y las variables de linealización (tensor de elasticidad). En el cuadro 4.2 se presenta un esquema para la implementación de la viscoelasticidad generalizada de Maxwell.

4.1.6. Ensayos

Relajación con el modelo generalizado de viscoelasticidad de Maxwell. En este ensayo se alarga un material neohookeano (modificado) sin coacción lateral linealmente en el tiempo hasta una relación de alargamiento $\lambda = 2$ en un tiempo de 0,2 s. Después se mantiene el alargamiento de forma que la energía de deformación va disipándose, por lo que disminuye las tensión vertical.

El modelo de viscoelasticidad utilizado es el generalizado de Maxwell. Los parámetros de la función de densidad a tiempo infinito del material ensayado son: $E = 1000$ MPa y $\nu = 0,49$.

El ensayo consta de tres partes, asociadas cada una de ellas a tiempos de relajación τ distintos para el mismo factor de energía $\beta^\infty = 1$ (se considera un único parámetro interno, esto es, $m = 1$). En particular, en la figura 4.3 se presentan los resultados para valores de τ de 0 s, 0,5 s y 1 s.

Fluencia con el modelo de viscoelasticidad generalizada de Maxwell. Se ensaya un elemento de dimensiones en metros $0,7 \times 1 \times 1$ ($0,7 \times 1$ en planta) sometido a fuerzas verticales en los nodos crecientes linealmente en el tiempo hasta $100 \cdot 10^6$ N para $t = 0,2$ s, sin coacción lateral. El ensayo se realiza sobre un material neohookeano (modificado) de parámetros $E = 1000$ MPa y $\nu = 0,49$.

Los resultados, para distintos tiempos de relajación, se indican en la figura 4.4.

Relajación con el modelo de viscoelasticidad de Kelvin-Voigt. En este caso el modelo de viscoelasticidad que se plantea es el generalizado de Kelvin-Voigt, sobre un material neohookeano (modificado) de parámetros $E = 1000$ MPa y $\nu = 0,3$, y siendo los parámetros viscosos $\tau = 2$ s y $\gamma^0 = 0,3$. Para ello se impone un alargamiento instantáneo en una dirección de 0,01, sin coaccionar el movimiento transversal.

En la figura 4.5 se indica el resultado obtenido.

Dado el tensor gradiente de deformación en el tiempo $n + 1$, \mathbf{F}_{n+1} , y las variables internas de tensión $\mathbf{Q}_{a,n}$.

1. Cálculo del tensor de Cauchy-Green por la derecha \mathbf{C}_{n+1} ,

$$\mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^T \cdot \mathbf{F}_{n+1}.$$

2. Determinación de los segundos tensores de Piola-Kirchhoff volumétricos e isocóricos a tiempo infinito

$$\mathbf{S}_{\text{vol},n+1}^{\infty} = 2 \frac{\partial W_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{y} \quad \mathbf{S}_{\text{iso},n+1}^{\infty} = 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}}.$$

3. Actualización de las variables internas $\mathbf{Q}_{a,n+1}$,

$$\mathbf{Q}_{a,n+1} = \beta_a^{\infty} \exp(\xi_a) \mathbf{S}_{\text{iso},n+1}^{\infty} + \mathcal{H}_{a,n},$$

siendo

$$\mathcal{H}_{a,n} = \exp(\xi_a) \left(\exp(\xi_a) \mathbf{Q}_{a,n} - \beta_a^{\infty} \mathbf{S}_{\text{iso},n}^{\infty} \right) \quad \text{con} \quad \xi_a = -\frac{\Delta t}{2\tau_a}.$$

4. Cálculo del segundo tensor de Piola-Kirchhoff,

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{\text{vol},n+1}^{\infty} + \mathbf{S}_{\text{iso},n+1}^{\infty} + \sum_{a=1}^m \mathbf{Q}_{a,n+1}.$$

5. Cálculo del tensor de elasticidad,

$$\mathbb{C}_{n+1} = \mathbb{C}_{\text{vol},n+1}^{\infty} + (1 + \delta) \mathbb{C}_{\text{iso},n+1}^{\infty} \quad \text{con} \quad \delta = \sum_{a=1}^m \delta_a.$$

Cuadro 4.2: Viscoelasticidad generalizada de Maxwell. Esquema de cálculo del tensor de Cauchy por la derecha y del de elasticidad en la configuración inicial para materiales viscoelásticos

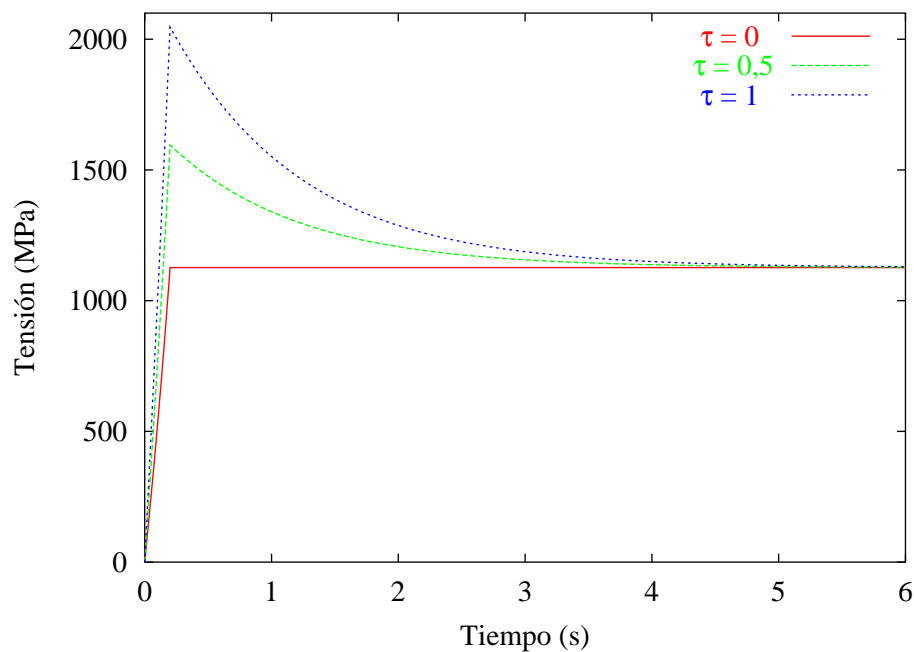


Figura 4.3: Viscoelasticidad generalizada de Maxwell. Ensayo de relajación

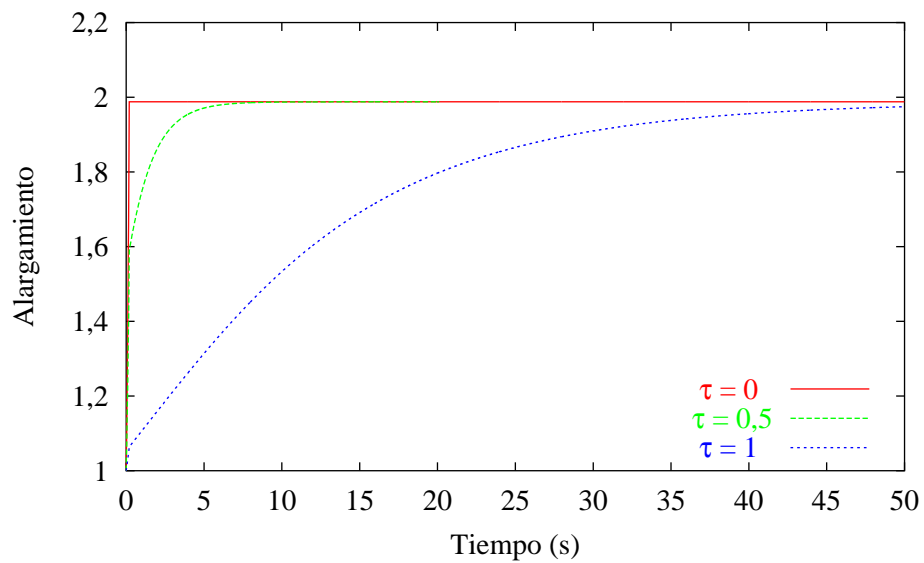


Figura 4.4: Viscoelasticidad generalizada de Maxwell. Ensayo de fluencia

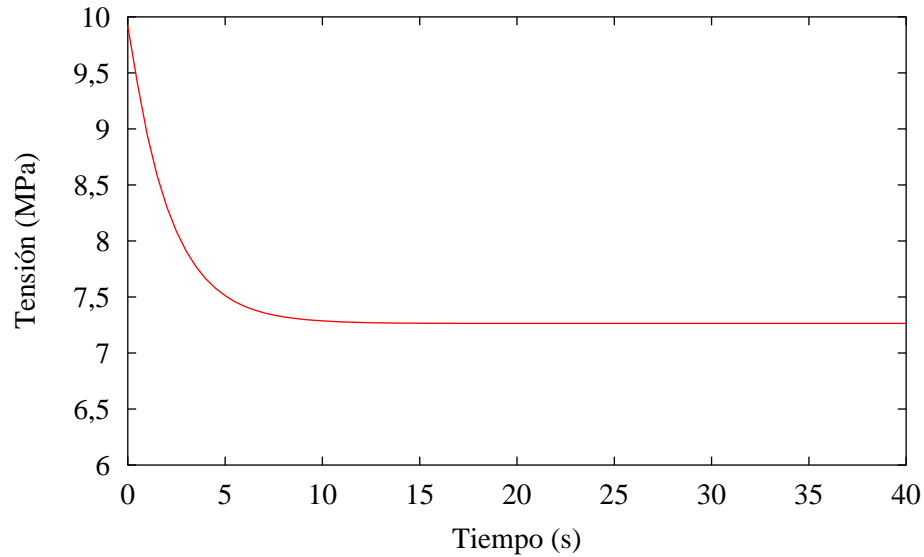


Figura 4.5: Viscoelasticidad de Kelvin-Voigt. Ensayo de relajación

4.1.7. Comentarios a los modelos viscoelásticos

Se ha observado experimentalmente que la disipación de la energía en el tiempo de los materiales de las paredes arteriales es aparentemente independiente de la frecuencia de sollicitación (correspondiente a un período de aproximadamente un segundo en el caso del flujo sanguíneo). Esta situación debe tenerse en cuenta al ajustar los tiempos y factores viscoelásticos (tal y como se hizo en los parámetros viscoelásticos propuestos por HOLZAPFEL [2001] para la media de la arteria coronaria humana anterior descendente izquierda en el cuadro 4.3).

Los modelos de viscoelasticidad descritos son de tipo lineal, en el sentido de que las ecuaciones (4.1) y (4.2) son lineales.

La viscoelasticidad considerada es isótropa (aunque puede acoplarse a modelos hiperelásticos anisótropos), HOLZAPFEL Y GASSER [2000] presentan un planteamiento más general que tiene en cuenta las condiciones de anisotropía.

Por último, desde un punto de vista micromecánico se destaca que PURSLOW ET AL. [1998] demuestra experimentalmente que la reorientación de las fibras de colágeno no se encuentra entre las causas principales de los fenómenos de viscoelasticidad. Las causas principales son los procesos de relajación dentro de las fibras de colágeno o en la interfaz fibra-matriz.

<i>Media</i>
$\beta_1^\infty = 0,353, \tau_1 = 0,001 \text{ s}$
$\beta_2^\infty = 0,286, \tau_2 = 0,010 \text{ s}$
$\beta_3^\infty = 0,298, \tau_3 = 0,100 \text{ s}$
$\beta_4^\infty = 0,285, \tau_4 = 1,000 \text{ s}$
$\beta_5^\infty = 0,348, \tau_5 = 10,00 \text{ s}$

Cuadro 4.3: Parámetros viscoelásticos de la viscoelasticidad generalizada de Maxwell para la media de la arteria coronaria humana anterior descendente izquierda según HOLZAPFEL [2001]

4.2. Pseudoelasticidad y daño en paredes arteriales

En el presente apartado se considera el fenómeno de pseudoelasticidad, donde se consideran dos expresiones del estado tensional según el sentido de cambio de la deformación.

Algunos conceptos fundamentales de la mecánica de medios continuos con daño continuo, aunque para pequeñas deformaciones, se exponen en IBIJOLA [2002]. El modelo que se desarrolla en esta sección se basa en la reducción de la función de densidad de energía correspondiente a un material hiperelástico (no dañado) isótropo o anisótropo a través de un coeficiente que es función de una variable de daño (dado que el coeficiente de reducción es único afectando de igual manera a todos los términos isocóricos de la densidad de energía, se dice que el modelo de daño es isótropo). La variable de daño es función monótona creciente en el tiempo de forma que en aquellos instantes en que el crecimiento es estricto se dice que la variable de daño está *activa*. Este tipo de formulaciones permite reproducir un efecto típico en tejidos biológicos blandos conectivos denominado *efecto Mullins*, lo que permite analizar operaciones clínicas entre las que se destaca la angioplastia.

Entre otro tipo de planteamientos de daño en tejidos biológicos, admitiendo la existencia de superficies de discontinuidad o fractura, se destacan los desarrollados por KOOP Y LEWIS [2003] y GASSER Y HOLZAPFEL [2002], no obstante, la aproximación que se expone mantiene la base de la mecánica de medios continuos.

4.2.1. Pseudoelasticidad y efecto Mullins

Algunos autores postulan que los tejidos blandos no se comportan como materiales elásticos. En particular, FUNG [1993] describe que el camino de descarga en tensión simple se encuentra por debajo del de carga. Esta respuesta fue tratada por Fung usando la teoría de pseudoelasticidad, en la que el camino de carga se modeliza con una ley tensión-deformación y el de descarga con otra diferente, resultando que la respuesta bajo ciclos de carga-

descarga no es elástica, sino inelástica (no es posible determinar el estado tensional a partir del de deformación). Un comportamiento similar aparece en los fenómenos de viscoelasticidad, pero en el caso de la pseudoelasticidad la disipación es independiente del tiempo.

Se desarrolla una teoría que surgió para modelizar cierto comportamiento en gomas denominado *efecto Mullins*, si bien es extrapolable a los tejidos biológicos blandos. Para explicar el fenómeno, considérese un material sometido a tensión simple desde un estado inicial no dañado 0 (ver figura 4.6) siguiendo el camino *A* hasta el punto 1, a partir del cual se realiza el camino de descarga *B* que termina en 0. El primer ciclo de carga y descarga produce una disipación (energía no recuperable) representada por el área comprendida entre las curvas *A* y *B*.

Si el material vuelve a cargarse, éste sigue el camino *B* y tras llegar a 1 continúa por *C* como si no se hubiese realizado la descarga en *B*. Si se realiza una descarga al llegar a 2 se recorrería un nuevo camino *D* inferior en tensiones a los anteriores.

Esta teoría permite explicar fenómenos que aparecen en operaciones clínicas cardiovasculares, como puede ser el proceso de angioplastia (véase el comportamiento de material esquematizado en la figura 4.7).

Otras formulaciones de daño más complejas a la que se exponen en este trabajo son las que incorporan daño anisótropo y las que consideran los efectos diferidos del daño (véase SIMÓ Y JU [1987]).

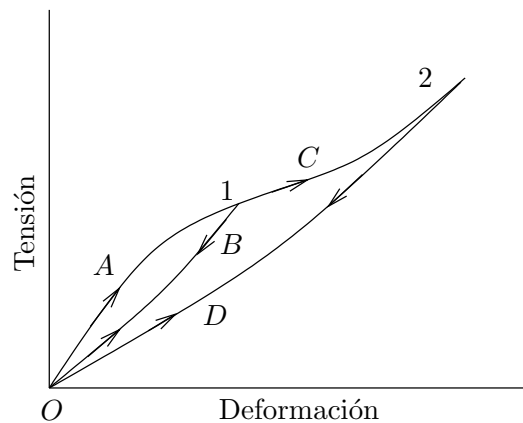


Figura 4.6: Cargas cíclicas presentando el efecto Mullins

4.2.2. Daño isótropo

Se postula una representación de la función de densidad de energía en la que aparece desacoplada la parte volumétrica de la isocórica. Esto es, para el material no dañado,

$$W_0(\mathbf{C}) = W_{\text{vol}}(J) + W_{0 \text{ iso}}(\overline{\mathbf{C}}).$$

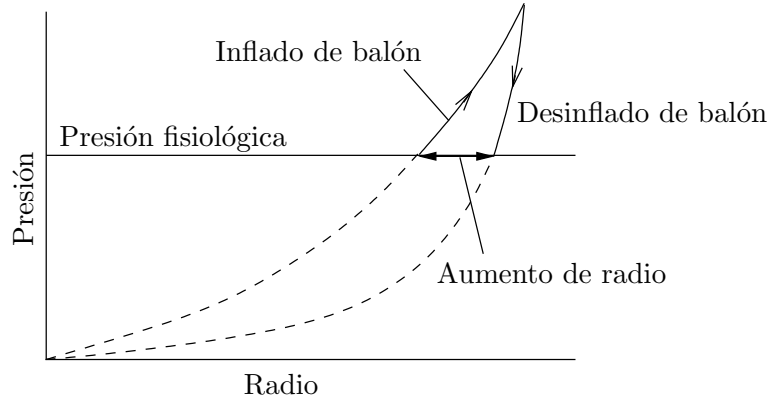


Figura 4.7: Proceso de angioplastia

Con objeto de controlar la evolución del daño se adopta una *variable de daño* ζ de forma que se tenga la función de densidad de energía como $W = W(\mathbf{C}, \zeta)$. En particular, se adopta

$$W(\mathbf{C}, \zeta) = W_{\text{vol}}(J) + (1 - \zeta)W_{0,\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}),$$

donde $(1 - \zeta)$ es el factor de reducción por daño.

Diferenciando, se tiene que el segundo tensor de Piola-Kirchhoff es

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{vol}} + (1 - \zeta)\mathbf{S}_{0,\text{iso}}, \quad (4.9)$$

siendo

$$\mathbf{S}_{\text{vol}} = 2 \frac{\partial W_{\text{vol}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{y} \quad \mathbf{S}_{0,\text{iso}} = 2 \frac{\partial W_{0,\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}}.$$

Falta por determinar la evolución de la variable de daño ζ , para lo que se toma $\zeta = \zeta(\alpha)$ siendo

$$\alpha(t) = \max_{s \in [0, t]} W_0(s)$$

la llamada *variable fenomenológica*, cuya variación es

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} \mathbf{S}_{0,\text{iso}} : \frac{\dot{\bar{\mathbf{C}}}}{2} & \text{si } W_{0,\text{iso}} = \alpha \text{ y } \dot{W}_{0,\text{iso}} > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Un caso particular de la variable de daño ζ viene dado, según Miehe, por

$$\zeta(\alpha) = \zeta_{\infty} (1 - e^{-\alpha/\iota}),$$

donde ζ_{∞} indica el máximo daño adimensional posible y el símbolo ι denota el llamado *parámetro de saturación al daño*. En cada instante, se denomina *superficie de daño* la determinada por los tensores simétricos \mathbf{C} tales que

$$\phi(\mathbf{C}) = W_{0,\text{iso}}(\mathbf{C}) - \alpha = 0,$$

teniéndose en todo instante $\phi \leq 0$. La variable de daño se dice que está activa cuando $\dot{\zeta} > 0$. Diferenciando en (4.9) se tiene, para los tensores isocóricos

$$\dot{\mathbf{S}}_{\text{iso}} = (1 - \zeta) \frac{\partial \mathbf{S}_{0,\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} - \mathbf{S}_{0,\text{iso}} \dot{\zeta},$$

donde la variación de la variable de daño es

$$\dot{\zeta} = \zeta'(\alpha) \dot{\alpha} \quad \text{con} \quad \zeta'(\alpha) = \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}.$$

Teniendo en cuenta (4.10) se llega a que la contribución del daño al tensor de elasticidad viene dada por

$$\dot{\mathbf{S}}_{\text{iso}} = \begin{cases} ((1 - \zeta) \mathbb{C}_{0,\text{iso}} - \zeta'(\alpha) \mathbf{S}_{0,\text{iso}} \otimes \mathbf{S}_{0,\text{iso}}) : \frac{\dot{\mathbf{C}}}{2} & \text{si } W_{0,\text{iso}} = \alpha \text{ y } \dot{W}_{0,\text{iso}} > 0, \\ (1 - \zeta) \mathbb{C}_{0,\text{iso}} : \frac{\dot{\mathbf{C}}}{2} & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.11)$$

siendo

$$\mathbb{C}_{0,\text{iso}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{0,\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}}.$$

4.2.3. Implementación

El modelo de daño isótropo presentado puede implementarse siguiendo el esquema del cuadro 4.4. El modelo puede acoplarse sobre cualquier función de densidad de energía (isótropa o anisótropa) que se pueda descomponer aditivamente en partes volumétrica e isocórica, modificando los puntos 2 y 3. Además, se pueden considerar criterios de evolución del factor de reducción por daño ζ modificando el punto 5.

4.2.4. Ensayo

Se considera un cubo de 1 m de lado sometido a tensión simple sin coacción lateral. El material de ensayo es neohookeano (modificado) con módulo de elasticidad 1000 MPa y coeficiente de Poisson 0,3.

El cubo se somete a ciclos de carga, llegando el primero de ellos hasta un desplazamiento de 0,5 m y el segundo de ellos hasta 1 m. El gráfico tensión-desplazamiento se recoge en la figura 4.8.

4.2.5. Mejora del modelo

En el modelo desarrollado, la utilización de un único coeficiente de reducción que afecta a los términos isocóricos de la función de densidad de energía no permite adoptar evoluciones anisótropas del daño (independientemente de que la densidad de energía sea isótropa o anisótropa).

Dado el tensor gradiente de deformación en tiempo $n + 1$, \mathbf{F}_{n+1} , y la variable fenomenológica α_n .

1. Tensor de Cauchy-Green por la derecha \mathbf{C}_{n+1} ,

$$\mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^T \cdot \mathbf{F}_{n+1}.$$

2. Cálculo de la densidad de energía isocórica $W_{0,\text{iso},n+1}$ según modelo hiperelástico.
3. Segundos tensores de Piola-Kirchhoff volumétricos e isocóricos sin considerar daño,

$$\mathbf{S}_{\text{vol},n+1} = 2 \frac{\partial W_{\text{vol}}(\mathbf{C}_{n+1})}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{y} \quad \mathbf{S}_{0,\text{iso},n+1} = 2 \frac{\partial W_{0,\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}_{n+1})}{\partial \mathbf{C}}.$$

4. Actualización de la variable fenomenológica.

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} W_{0,\text{iso},n+1} & \text{si } W_{0,\text{iso},n+1} > \alpha_n, \\ \alpha_n & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

5. Variable de daño ζ_{n+1} según miehe,

$$\zeta_{n+1}(\alpha) = \zeta_\infty \left(1 - e^{-\alpha_{n+1}/\iota} \right).$$

6. Segundo tensor de Piola-Kirchhoff,

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{\text{vol},n+1} + (1 - \zeta) \mathbf{S}_{0,\text{iso},n+1}.$$

7. Cálculo del tensor de elasticidad según (4.11).

Cuadro 4.4: Esquema de daño isótropo con evolución de Miehe

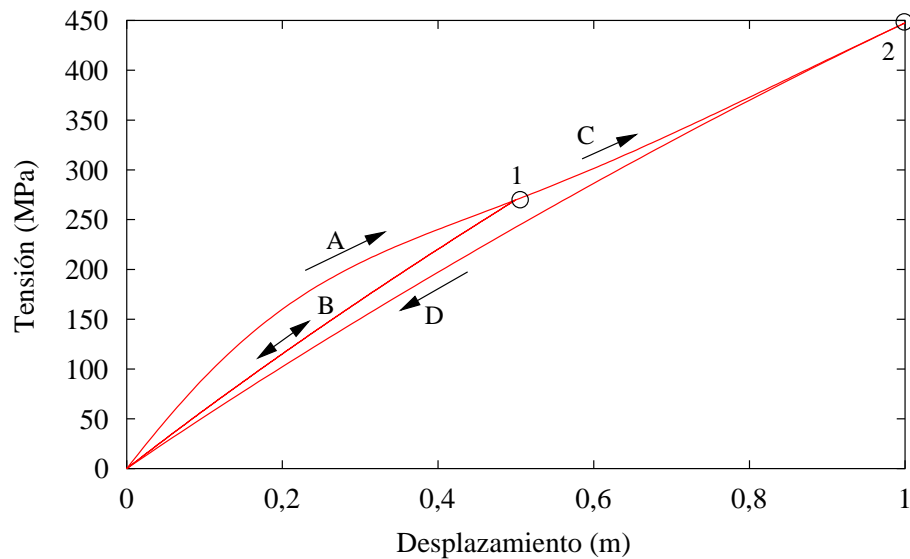


Figura 4.8: Ensayo de tracción simple en un material con modelo de daño

Bajo el supuesto de que las direcciones de anisotropía en el daño coinciden con las correspondientes a la expresión no dañada de la densidad de energía, y que además ésta se pueda descomponer aditivamente en términos sin acoplamiento en los (pseudo-)invariantes (tal y como ocurre en los materiales hiperelásticos de Weiss y de Holzapfel), entonces pueden definirse tantos coeficientes de reducción como (pseudo-)invariantes. Cada coeficiente de reducción estaría asociado a una variable de daño que evoluciona a su vez en función de la historia del (pseudo-)invariante correspondiente.

Se pueden encontrar planteamientos más generales en SIMÓ Y JU [1987]. No obstante, se considera que el manejo de este tipo de modelos en la actualidad es de difícil aplicación, debido esencialmente a la dificultad en la determinación de los parámetros.

Capítulo 5

Remodelación y presolicitación en paredes arteriales

El presente capítulo se centra principalmente en los fenómenos de remodelación y especialmente en el crecimiento. Se expone una primera aproximación fundamentalmente cualitativa y descriptiva en la sección 5.2 que motiva los modelos de remodelación de las secciones 5.3 y 5.4. Posteriormente se propone un modelo generalizado de crecimiento aplicable a geometrías arbitrarias en la sección 5.5. Además, se presentan algoritmos para su implementación en sistemas de elementos en la sección 5.6 y se realizan ensayos numéricos de validación en la sección 5.7.

Por último, en el apartado 5.8 se analizan distintas formas de considerar tensiones iniciales (fenómenos de *presolicitación*) en la configuración de referencia. Estas tensiones iniciales se encuentran en íntima relación con los fenómenos de crecimiento.

5.1. Introducción a la remodelación y objetivos

Las arterias presentan un comportamiento de *adaptación (remodelación)* sensible a cambios mecánicos, en particular a cambios en la presión y en el flujo sanguíneo. En este comportamiento, uno de los aspectos de mayor importancia es la modificación de la geometría, fenómeno conocido como *crecimiento*.

La importancia de la remodelación ha llevado a avances en la termodinámica del crecimiento y en general en las ecuaciones de equilibrio para sistemas abiertos (sistemas en los que existe intercambio de masa, momento y energía con el entorno), estableciéndose condiciones que deben verificar los modelos (véanse EPSTEIN Y MAUGIN [2000], KUHLE Y STEINMANN [2002])

y MAUGIN Y IMATANI [2003]).

Se han desarrollado modelos de remodelación para las paredes arteriales, destacándose el de tipo global de RACHEV [2001] y el de tipo local (basado en la formulación general de RODRÍGUEZ ET AL. [1994]) de TABER [1998] para geometrías simplificadas. No obstante, se propone realizar avances para la formulación de ecuaciones constitutivas que puedan ser consideradas en análisis mediante elementos finitos en configuraciones reales.

La formulación de este tipo de modelos permitiría determinar las tensiones residuales de forma más realista que los actuales métodos (particularmente el *método de apertura en ángulo*, basado en suponer que la forma que adopta una arteria cuando una arteria se corta longitudinalmente es un sector circular con un cierto *ángulo de apertura*, se presenta una descripción más precisa en la sección 5.8.2), dada la relación existente entre las tensiones residuales y el proceso de remodelación¹ (véanse CHAUDHRY ET AL. [1997], HUMPHREY Y TABER [1999] y el esquema de relación entre los fenómenos de remodelación y de tensiones residuales de la figura 5.1).

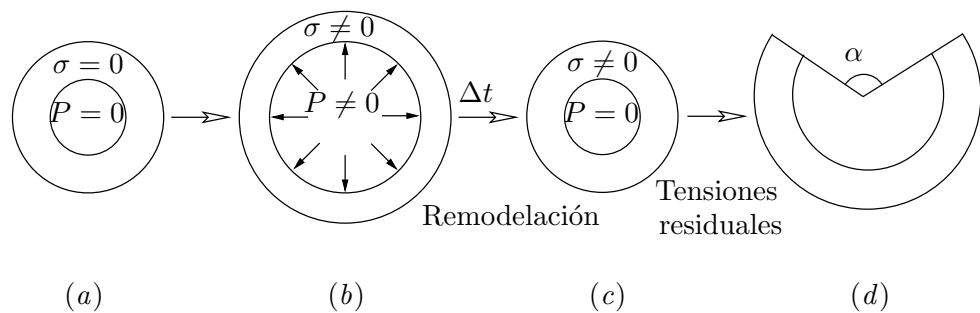


Figura 5.1: Esquema de relación entre remodelación y tensiones residuales: (a) Configuración libre de acciones exteriores y de tensiones internas. (b) Introducción de acciones exteriores durante cierto tiempo. (c) Configuración descargada con presencia de tensiones internas residuales. (d) Apertura en ángulo por corte longitudinal

Este capítulo tiene por objetivo fundamental presentar un modelo generalizado de crecimiento basado en el de TABER [1998]. Además se proponen algoritmos para su implementación en códigos de elementos finitos y se muestran algunos resultados de ensayos, realizados por razones de validación y con objeto de mostrar la forma de comportamiento del modelo.

5.2. Aproximación fenomenológica a la remodelación

La *remodelación* es el cambio de propiedades geométricas o mecánicas respecto a un estado *homeostático* de referencia debido a la persistencia de

¹En la sección 5.8.4 se presentan relaciones entre los fenómenos de crecimiento y las tensiones residuales.

acciones externas. En este sentido, FUNG [1990] afirma que la existencia de *estados homeostáticos* (esto es, de *equilibrio por naturaleza*) es axiomática en fisiología, por lo que propone adoptar el estado *libre de tensiones*². La remodelación es consecuencia de la actividad celular y el estudio de sus causas pertenece a la biología, a la genética y a la bioquímica. Sus efectos pueden ser de tipo mecánico o geométrico, aquí estudiados (es decir, en este sentido la investigación se ciñe al estudio de los efectos, y no de las causas).

Según Fung la *remodelación* de los vasos arteriales se muestra de diversas maneras, destacándose:

- a) Cambios en el diámetro del lumen del vaso, en la relación entre el espesor de la pared y el diámetro del lumen, y en el contenido de células musculares.
- b) Crecimiento no uniforme en el vaso. Cambio del *ángulo de apertura* (la sección 5.8.2 se centra específicamente en este método).
- c) Cambio de las propiedades mecánicas que relacionan tensiones y deformaciones, en el tono muscular basal, en la viscoelasticidad y en general en las ecuaciones constitutivas.
- d) Cambios celulares y moleculares. Cambios en la morfología celular. Cambios bioquímicos.

Las comparaciones que motivan estos cambios deben ser realizadas bajo tonos musculares equivalentes. Esta consideración es de importancia ya que la variación de las acciones produce no sólo remodelación sino cambios en el tono muscular y en la deformación pasiva.

Con objeto de desacoplar las formas de adaptación frente a acciones externas se han establecido las siguientes definiciones:

- a) *Remodelación estructural* es la modificación de las propiedades del material (véase, por ejemplo, el reciente modelo, basado en teoría de mezclas, de adaptación de la fibras de colágeno propuesto por DRIESSEN ET AL. [2003]).
- b) *Crecimiento o remodelación másica* es la variación de la geometría por cambio de las masas celular y extracelular, y de su configuración (véase la figura 5.2).

Según HUMPHREY [2001a] en organismos maduros la forma de adaptación es principalmente debida al crecimiento, mientras que en organismos jóvenes no sólo aparecen cambios en la geometría sino que pueden aparecer profundos cambios en la estructura y en la composición de los tejidos (*remodelación estructural*).

²Este aspecto también es destacado por RACHEV [2001].

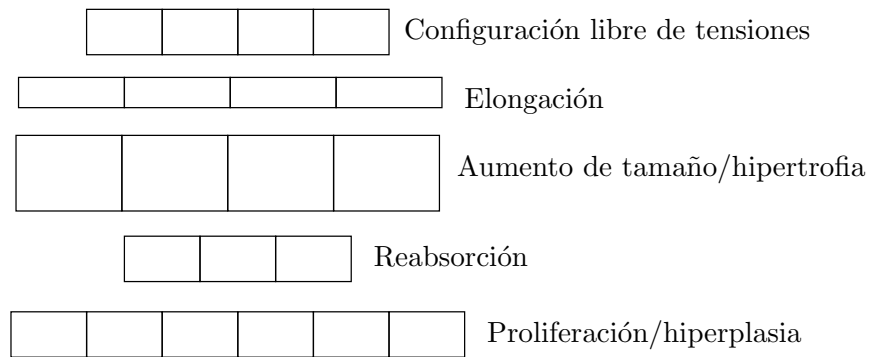


Figura 5.2: Formas de crecimiento respecto a la configuración libre de tensiones

Existen dos tipos de acciones fundamentales sobre las arterias, que son causadas por la sangre: *variación de la presión* y *variación del flujo*. En ambos casos el primer efecto que se produce es la modificación del tono muscular produciendo la vasodilatación, para pasar posteriormente a iniciarse el proceso de remodelación (véase RACHEV [2001]).

5.2.1. Variación de la presión

La presión arterial media humana es de unos 100 mmHg (aproximadamente 13,3 kPa), destacándose los siguientes casos de variación:

- a) *Hipertensión* o aumento crónico de la presión arterial. Gran parte de las muertes que se producen cada año lo son como consecuencia directa de la hipertensión o de sus complicaciones sobre el sistema cardiovascular o el riñón. Las causas más frecuentes son enfermedades de las glándulas endocrinas y enfermedades del riñón.

No obstante, MACKAY ET AL. [2001] postulan que la causa de la hipertrofia está en relación con la aterosclerosis y no con la presión.

- b) *Hipotensión* o disminución crónica de la presión arterial. La hipotensión no es habitual que alcance valores peligrosos. Puede deberse a distintas medicaciones (incluyendo medicamentos para la hipertensión), o a situaciones como embarazo, diabetes o aterosclerosis.

El efecto de la hipertensión se puede descomponer en las siguientes fases:

1. *Crecimiento*. Según Liu y Fung el efecto geométrico fundamental de la hipertensión es el incremento del espesor manteniendo el radio interno aproximadamente constante (véase RACHEV [1997]). El espesor aumenta rápidamente en los primeros días para llegar posteriormente a un valor asintótico (entre tres y cinco días se alcanza el 50 % del espesor final). Este proceso no se realiza de forma homogénea:

- a) Inicialmente (durante los dos primeros días) la media aumenta el espesor rápidamente mientras que la adventicia lo hace muy despacio.
- b) Posteriormente la media disminuye la velocidad de crecimiento mientras que la adventicia aumenta la velocidad.
- c) A partir de los seis días la velocidad de crecimiento es similar en la media y en la adventicia.

El proceso descrito lleva a un incremento en el ángulo de apertura durante los primeros días, ya que crece más deprisa la zona interior que la exterior. No obstante, posteriormente el ángulo de apertura comienza a disminuir pudiendo llegar a ser incluso inferior al inicial. Por otra parte, se postula (Lehman) que la hipertensión no sólo produce cambios geométricos en la sección transversal, sino que también produce un incremento en la longitud de la arteria que aumenta su tortuosidad.

Una de las hipótesis que se plantea con objeto de justificar el crecimiento es que el aumento del tono muscular inducido por el incremento de la tensión circunferencial produce hipoxia (falta de oxígeno en el tejido) por lo que la pared tiende a modificar la geometría mediante la actividad celular (véase XU ET AL. [2001]) para restablecer el estado tensional anterior (entre 100 y 200 kPa) a lo largo del espesor, verificándose en una geometría cilíndrica simplificada de pequeño espesor

$$\sigma = \frac{Pr}{e},$$

siendo r el radio interno, P la presión de la sangre y e el espesor de la pared.

2. *Remodelación estructural.* Según HAYASHI ET AL. [2001] y RACHEV [2001], aparte del crecimiento, en una segunda fase se modifican las propiedades mecánicas de la pared manteniendo la distribución de tensiones y la geometría para conservar la funcionalidad mecánica de la arteria, entendida como la capacidad de adaptación al flujo pulsátil. En este sentido Rachev propone evaluar el grado de funcionalidad a partir de la definición de *flexibilidad global*

$$C = \left(\frac{\Delta r}{r} \right) \frac{1}{\Delta P}.$$

Existen pocos estudios de la remodelación inducida por la hipotensión debido fundamentalmente a su dificultad experimental (no obstante, QUICK ET AL. [2000] presentan un modelo hemodinámico simple de la adaptación de vasos pequeños a la hipotensión). Por esta razón, muchos de los modelos que han surgido para explicar los procesos asociados a la hipertensión han sido

extrapolados a cualquier situación de variación de la presión. No obstante, según los estudios de ZULLIGER ET AL. [2002] los efectos de la hipotensión no se corresponden exactamente a los inversos de los correspondientes a la hipertensión.

5.2.2. Variación del flujo

El proceso de remodelación inducido por cambios en el flujo sanguíneo viene controlado por la tensión tangencial en la íntima, tendiendo a equilibrarse en el valor inicial aumentando o disminuyendo el diámetro de la arteria (véase HUMPHREY [2001a]). Esto ocurre a pesar que dicha tensión tangencial es reducida (del orden de 1,5 Pa) en comparación con las tensiones a las que se encuentra sometida la pared (habitualmente entre 100 y 200 kPa en componentes normales).

Ya en 1975 Rodbard sugirió que las células endoteliales están equipadas con receptores sensibles a las tensiones tangenciales que controlan la adaptación mediante el ajuste inmediato en el tono vascular, continuando con el cambio anatómico cuando la variación del flujo persiste³. Este proceso es el estímulo de la *vasculogénesis* (vascularización a partir de células precursoras) y de la *angiogénesis* (formación de nuevos vasos a partir de vasos preexistentes), desarrollado en el estudio de la remodelación microvascular de SKALAK Y PRICE [1996]. Holtz confirmó en 1984 la importancia de la íntima a partir de ensayos *in vivo*, afirmando que las arterias coronarias incrementan (o decrementan) el diámetro con incrementos (o decrementos) en el flujo sanguíneo sólo si la íntima se encuentra intacta. Además, en 1990 Melkumyants y Balashov confirman experimentalmente que es ciertamente la tensión tangencial y no el flujo sanguíneo el factor al que es sensible el endotelio (ensayos posteriores como los desarrollados por KASSAB [1999] también lo han confirmado).

HUMPHREY [2001a] postula que el mecanismo inicial de sensibilidad y respuesta a la tensión tangencial sea la modificación del transporte de iones, además, DAVIES ET AL. [1997] indican una serie de sustancias (denominadas *mecanotransductores*) que son liberadas por las células endoteliales de forma que se active el proceso de adaptación en el espesor de la pared arterial. Entre dichas sustancias destacan el *óxido nítrico*, la *prostaciclina* (vasodilatadores) y el *factor de crecimiento de los fibroblastos*.

El crecimiento inducido por la variación en la tensión tangencial debido a las alteraciones del flujo, no lleva sólo a alteraciones en el diámetro, sino en el espesor al modificarse el estado tensional. Así el aumento de flujo provoca un incremento del diámetro y del espesor mientras que la disminución del flujo produce un decremento del diámetro y del espesor.

³CARAMORI Y ZAGO [2000] presentan la importancia de la íntima en las funciones biológicas y en las enfermedades de las arterias coronarias.

5.3. Formulación de modelos de crecimiento

Los modelos de crecimiento tratan de correlacionar variables tensionales o cinemáticas (deformación) y propiedades geométricas y mecánicas de forma que su aplicación permita predecir la respuesta a cambios en el entorno de forma acorde a observaciones experimentales.

Los modelos específicos de las paredes arteriales pueden dividirse según Rachev en los siguientes tipos:

- a) *Crecimiento volumétrico o local.* Se considera la arteria como una colección de elementos infinitesimales que cambian las propiedades respecto a la configuración libre de tensiones.
- b) *Crecimiento global.* Se centran en la descripción de la cinemática de la configuración libre de tensiones considerando la arteria como un todo, de forma que un conjunto finito de variables determina el estado de la arteria en cada instante (véase RACHEV [1997]).

Este capítulo se centra en los modelos de crecimiento volumétrico al considerarse los adecuados para planteamientos mediante elementos finitos. Para ello en primer lugar se desarrolla el modelo debido a FUNG [1990], planteado de forma general a los tejidos biológicos blandos en configuraciones unidimensionales. Posteriormente se presenta el marco continuo basado en la descomposición multiplicativa del efecto del crecimiento, desarrollada por RODRÍGUEZ ET AL. [1994].

Observación. El estudio de la *remodelación* puede ser enmarcado matemáticamente en la *programación dinámica* o en la *teoría de control óptimo* (véase, por ejemplo SAATY Y BRAM [1964]) como un *sistema* con los siguientes elementos:

- a) *Variables de estado:* Conjunto de tensiones tangenciales en la íntima y de estados tensionales y de deformación en el volumen.
- b) *Variables de control:* Señales de crecimiento (*mecanotransductores*) emitidos por la íntima y en el volumen de la arteria.
- c) *Ecuaciones de evolución de las variables de control:* Son función de las propias variables de control y de las variables de estado, proponiéndose la hipótesis de independencia del tiempo (*ecuaciones del movimiento autónomas*).
- d) *Función objetivo a minimizar:* Suma ponderada de las integrales de las desviaciones absolutas respecto a los estados de equilibrio en la íntima (tensiones tangenciales) y en el volumen (tensor de tensiones). Se propone considerar los estados de equilibrio como *parámetros del sistema*.

5.3.1. Modelo de crecimiento de Fung

FUNG [1990] propone como modelo de crecimiento para el caso de tensión simple (véase la figura 5.3):

$$\dot{m} = C(s - a)^{k_1}(b - s)^{k_2}(s - c)^{k_3}, \quad (5.1)$$

donde \dot{m} es la velocidad de *crecimiento másico*, s es la tensión y C , $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 > 0$, a , b y c son constantes. Fung postula que las condiciones fisiológicas usuales se corresponden con $s = a$ de forma que un aumento de la tensión (hipertensión) produce aumento de masa ($\dot{m} > 0$) mientras que la disminución de la tensión (hipotensión) induce a su disminución ($\dot{m} < 0$). No obstante, si la tensión es excesiva entonces se produciría reabsorción ($\dot{m} < 0$ para $s > b$), y dada la posibilidad de cultivo en entornos libres de tensiones, lo que implica $\dot{m} > 0$ cuando $s \approx 0$, se llega a la existencia del estado de equilibrio $s = c$.

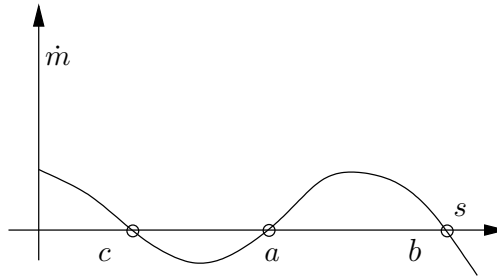


Figura 5.3: Esquema del modelo de crecimiento según Fung

El problema básico en la aplicación de este modelo es su generalización a sollicitaciones tridimensionales.

5.3.2. Formulación general del crecimiento volumétrico

Una teoría general tridimensional para el crecimiento volumétrico ha sido desarrollada por RODRÍGUEZ ET AL. [1994] y ha sido utilizada para describir la remodelación de arterias con geometrías simplificadas por TABER [1998]. En esta sección se expone la teoría original modificada con objeto de que pueda ser acoplada sobre materiales no elásticos, como pueden ser los que presentan fenómenos de viscoelasticidad, daño o remodelación estructural.

Considérese un cuerpo que en el tiempo t_0 presenta una configuración libre de tensiones \mathcal{B}_0 . La aplicación de acciones sobre el cuerpo produce deformaciones que sin la consideración de fenómenos de remodelación determina la configuración $\mathcal{B}_{e,t}$, no obstante, con la activación del crecimiento resulta la configuración \mathcal{B}_t . La transformación de $\mathcal{B}_{e,t}$ a \mathcal{B}_t es denominada *crecimiento observado* ya que viene determinada no sólo por el *crecimiento real* sino por

otro tipo de fenómenos como pueden ser variaciones en las deformaciones elásticas.

La idea fundamental de la teoría del crecimiento que se presenta es introducir una configuración intermedia ficticia en la que no se imponen las condiciones de compatibilidad local en un estado intermedio $\mathcal{B}_{g,t}$ basado en el crecimiento real, donde el material no se encuentra sometido a tensiones internas (véase la figura 5.4). En particular, se propone que el gradiente de deformación \mathbf{F} asociado a \mathcal{B}_t pueda ser descompuesto multiplicativamente como

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_g,$$

de forma que la función densidad de trabajo realizado W_t y por tanto el estado tensional $\boldsymbol{\sigma}$ dependan de la historia $\{(\mathbf{F}_{e,\tau}, \mathbf{R}_{g,\tau}), 0 < \tau < t\}$, siendo \mathbf{F}_g el gradiente de deformación asociado a la configuración \mathcal{B}_g y \mathbf{R}_g la rotación propia asociada al gradiente de deformación en la configuración \mathcal{B}_0 , \mathbf{F}_g . Se observa que este planteamiento favorece el análisis en la configuración deformada (obsérvese por ejemplo que \mathbf{S} sí que depende de \mathbf{F}_g).

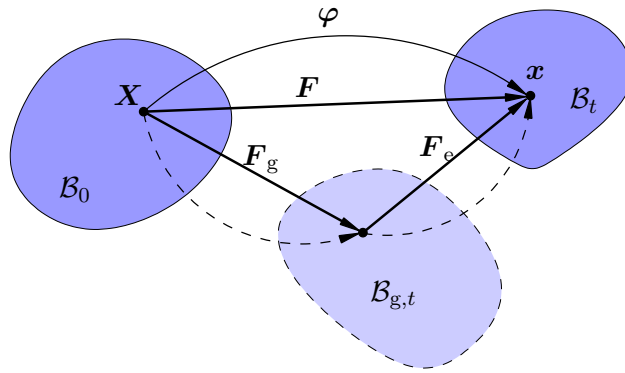


Figura 5.4: Esquema de la descomposición multiplicativa por crecimiento

Si se considerase el material incompresible se tiene la coacción interna $J_e = \det \mathbf{F}_e = 1$, no obstante en general esta ecuación no tiene porqué verificarse. Por otra parte, por consideraciones relativas a la objetividad, el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ debe ser independiente de la rotación propia asociada a \mathbf{F}_g , resultando que la configuración intermedia $\mathcal{B}_{g,t}$ no es única. Consecuentemente, sin falta de generalidad se adopta aquella configuración (única) tal que $\mathbf{F}_g = \mathbf{U}_g$, con $\mathbf{U}_g = \mathbf{U}_g^T$ (tensor simétrico o de alargamiento).

Explícitamente se tiene el tensor de tensiones de Cauchy

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J_e} \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{S}_e \cdot \mathbf{F}_e^T,$$

a partir del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en la configuración \mathcal{B}_g ,

$$\mathbf{S}_e = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C}_e)}{\partial \mathbf{C}_e}, \quad \mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}_g^{-1}.$$

Además, se tienen las relaciones indiciales en componentes de los tensores de elasticidad

$$c_{abcd} = J^{-1} F_{e,aA} F_{e,bB} F_{e,cC} F_{e,dD} \mathbb{C}_{e,ABCD},$$

con

$$\mathbb{C}_e = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}_e \partial \mathbf{C}_e}.$$

Por condiciones de objetividad, los modelos de crecimiento que se construyen en el marco de esta teoría establecen relaciones que cumplen

$$\dot{\mathbf{U}}_g(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\mathbf{U}}_g(\mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}), \quad (5.2)$$

para todo \mathbf{Q} ortogonal (es decir, son independientes respecto a cualquier rotación rígida del sistema de referencia).

Observación: Esta formulación general ha sido aplicada por HUMPHREY [2001a] para el estudio de la remodelación estructural considerando las aportaciones de sustancias significativas (según la teoría de mezclas) que varían en proporción según sus leyes de crecimiento. En particular, las sustancias consideradas fueron líquido intersticial, elastina y varios tipos de fibras de colágeno (diferenciadas por el tiempo en el que se sintetizaron y fijaron).

5.4. Modelo de crecimiento de Taber

El modelo de crecimiento de TABER [1998] surgió específicamente para la simulación de la remodelación en la arteria aorta. Para ello se considera un cilindro formado por dos capas (la media y la adventicia) constituidas por materiales elásticos, ortótropos e incompresibles. El cilindro se infla con una presión interna (véase la figura 5.5), se alarga longitudinalmente y se somete a tensiones tangenciales uniformes en la íntima de forma que se induce el crecimiento en las direcciones radial, circunferencial y longitudinal.

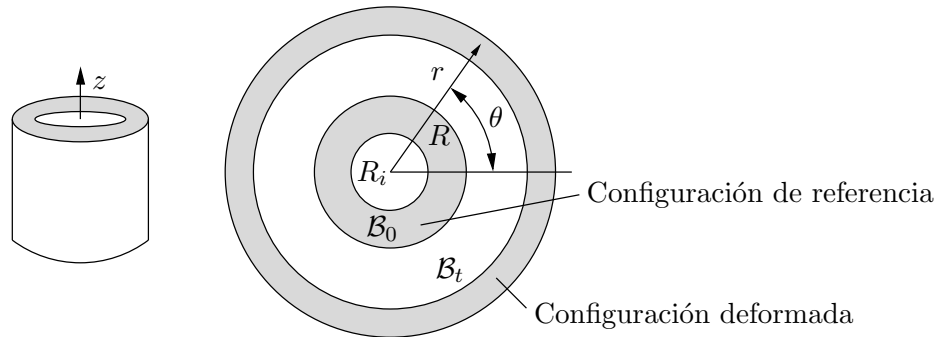


Figura 5.5: Esquema de las configuraciones consideradas por Taber

De acuerdo con los resultados experimentales, el modelo que se establece es de tal forma que los cambios en la geometría vienen dirigidos por la tensión en la pared y modulados por la tensión tangencial en la íntima debida al

flujo de la sangre. En particular, las leyes de crecimiento reales (asociadas a la configuración $\mathcal{B}_{g,t}$) que se establecen son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda_{g,r}}{\partial t} &= \frac{1}{T_r} \left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_{\theta,0}}{(\sigma_{\theta,0})_m} \right), \\ \frac{\partial \lambda_{g,\theta}}{\partial t} &= \frac{1}{T_\theta} \left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_{\theta,0}}{(\sigma_{\theta,0})_m} \right) + \frac{1}{T_\tau} \left(\frac{\tau - \tau_0}{(\tau_0)_m} \right) \exp \left(-\alpha \left(\frac{R}{R_i} - 1 \right) \right) \quad \text{y} \quad (5.3) \\ \frac{\partial \lambda_{g,z}}{\partial t} &= 0,\end{aligned}$$

siendo σ_θ la tensión en la dirección circunferencial, σ_r la tensión en dirección radial, τ la tensión tangencial en la íntima, T_r , T_θ y T_τ constantes con dimensión de tiempo, α una constante de decrecimiento de la señal de los mecanotransductores con la distancia desde la superficie interior y $\sigma_{\theta,0}$ y τ_0 las tensiones circunferenciales y tangenciales en equilibrio. El subíndice $(\bullet)_m$ denota los valores asociados al organismo maduro. Por último, λ_r , λ_θ y λ_z denota los alargamientos principales, en direcciones radial, circunferencial y longitudinal. Obsérvese que en la ecuación de evolución del crecimiento, las distancias R_i y R vienen referidas a la configuración sin deformar.

TABER [1998] estimó las constantes temporales de la arteria aorta de ratas a partir de ensayos experimentales. Las magnitudes a considerar para el ajuste fueron el espesor, el radio y el ángulo de apertura. Se realizó la correlación para tres estados experimentales, obteniéndose para el considerado más realista de ellos los resultados $T_{r,M} = 0,3$ días, $T_{\theta,M} = 3$ días y $T_{\tau,M} = 5$ días para la media, y $T_{r,A} = 5$ días, $T_{\theta,A} = 4$ días y $T_{\tau,A} = 5$ días para la adventicia. Se observa a partir de estos valores que la media crece más rápidamente que la adventicia, lo que lleva a un ángulo de apertura positivo, de acuerdo con la realidad. En caso contrario, si la capa exterior creciese a más velocidad que la interior, entonces la sección se cerraría sobre sí misma (ángulo de apertura negativo).

5.5. Modelo generalizado de crecimiento

Se propone a continuación un modelo que generaliza el de Taber de forma que pueda ser aplicado a geometrías tridimensionales no simplificadas con la hipótesis de simetría cilíndrica.

Para ello se considera un material anisótropo con dos familias de fibras (como puede ser el propuesto por Holzapfel para paredes arteriales) de direcciones representadas por los vectores unitarios \mathbf{a}_0 y \mathbf{b}_0 (en la configuración inicial) seleccionados de tal forma que la dirección de esfuerzos predominantes (correspondiente con la dirección circunferencial en geometrías simplificadas) está asociada al versor

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0}{|\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0|}.$$

Además, se definen los vectores unitarios

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0}{|\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0|} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v},$$

de forma que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ constituye el conjunto de versores básicos del crecimiento, correspondientes a las direcciones principales de \mathbf{U}_g (véase la figura 5.6). Este planteamiento establece relaciones entre las direcciones de anisotropía para el comportamiento hiperelástico y las asociadas al crecimiento, no obstante, pueden considerarse otros planteamientos en los cuales dichas direcciones no se encuentren relacionados, partiendo directamente de los versores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, entendidos como propiedades de material.

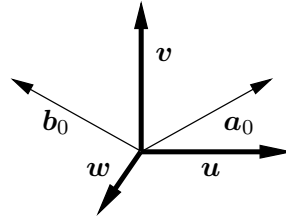


Figura 5.6: Esquema de los ejes fundamentales del crecimiento

Por otra parte, uno de los aspectos fundamentales del modelo es no constituir un *material simple*⁴, ya que el comportamiento mecánico en un punto depende no sólo del estado mecánico local $\boldsymbol{\sigma}$, sino de variables mecánicas en la íntima, que se identifica con una superficie suave denotada con \mathcal{I} . En particular, se considera que cada punto \mathbf{X} está influenciado por el punto más cercano de la íntima en la configuración inicial, \mathbf{X}_{mci} (el subíndice $(\bullet)_{\text{mci}}$ se corresponde con el punto *más cercano* a la *íntima*), esto es,

$$\mathbf{X}_{\text{mci}} \in \mathcal{I} : |\mathbf{X}_{\text{mci}} - \mathbf{X}| \leq |\mathbf{Y} - \mathbf{X}|, \quad \forall \mathbf{Y} \in \mathcal{I}.$$

Además, el efecto de \mathbf{X}_{mci} sobre \mathbf{X} propuesto depende de las siguientes variables mecánicas y geométricas:

- a) Tensor de tensiones de Cauchy en \mathbf{X}_{mci} , denotado con $\boldsymbol{\sigma}_{\text{mci}}$.
- b) Vector unitario normal a \mathcal{I} en \mathbf{X}_{mci} para la configuración deformada, denotado con \mathbf{n}_{mci} .
- c) Curvatura normal máxima de \mathcal{I} en \mathbf{X}_{mci} para la configuración inicial, denotada con $\kappa_{1,\text{mci}}$.
- d) Distancia entre \mathbf{X} y \mathbf{X}_{mci} , esto es, $|\mathbf{X}_{\text{mci}} - \mathbf{X}|$.

⁴*Material simple* es aquel en el que se puede determinar el estado tensional en un punto a partir del historial del gradiente de deformación en un entorno tan pequeño como se quiera (véase TRUESDELL [1977]).

La expresión general del crecimiento que se establece está basada en la desviación respecto a estados tensionales considerados de equilibrio homeostático de la forma

$$\dot{\mathbf{U}}_g = \mathbf{U}_g \cdot (\mathcal{A} : (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0) + (\tau_{\text{mci}} - \tau_{0,\text{mci}}) \mathbf{A}). \quad (5.4)$$

El tensor $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ representa la *tensión corrotacional* (consistente con (5.2))

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R},$$

mientras que $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0$ describe la tensión local de equilibrio.

Además, τ_{mci} indica el módulo del vector tensión tangencial en el punto más cercano de la íntima, esto es, $\tau_{\text{mci}} = |\boldsymbol{\tau}_{\text{mci}}|$, siendo

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{mci}} = (\mathbf{1} - \mathbf{n}_{\text{mci}} \otimes \mathbf{n}_{\text{mci}}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{\text{mci}} \cdot \mathbf{n}_{\text{mci}})$$

la tensión tangencial en la íntima, mientras que $\tau_{0,\text{mci}}$ describe la tensión tangencial de equilibrio en la íntima.

Por otra parte, \mathcal{A} representa un tensor de cuarto orden que verifica las simetrías menores

$$\mathcal{A}_{abcd} = \mathcal{A}_{abdc} = \mathcal{A}_{bacd}$$

y \mathbf{A} un tensor simétrico de segundo orden.

El efecto de $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ se adopta dependiente exclusivamente de $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}$, por lo que $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \sigma_0 (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$, siendo σ_0 una constante de material.

Las constantes temporales de velocidad de crecimiento en cada dirección residen en \mathcal{A} y \mathbf{A} , acorde con (5.3) para crecimientos pequeños, simetrías axilsimétricas y organismos maduros de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{1}{T_\theta} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{1}{T_r} \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \right) \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad \text{y} \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{\tau_{0,\text{mci}}} \frac{1}{T_r} \exp \left(-\alpha \left(\frac{(\kappa_{1,\text{mci}})^{-1} + |\mathbf{X}_{\text{mci}} - \mathbf{X}|}{(\kappa_{1,\text{mci}})^{-1}} - 1 \right) \right) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

siendo α el parámetro de decrecimiento de la señal de la íntima y observándose que aparecen desacoplados las constantes temporales locales (T_θ y T_r) y la asociada a la señal de la íntima (T_r).

Se destaca que en la ley de crecimiento (5.4) se propone incorporar el tensor \mathbf{U}_g al considerarse que el material incorporado (eliminado) colabora (o deja de colaborar) de igual forma que el material inicial en el proceso posterior de crecimiento, aspecto que no es tenido en cuenta en el modelo de Taber.

Debido a las diferencias observadas entre los efectos de la hipertensión y de la hipotensión se puede modificar el modelo proponiendo dos valores distintos para T_r y T_θ ,

$$(T_\theta, T_r) = \begin{cases} (T_\theta^+, T_r^+) & \text{si } (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}} \geq \sigma_0, \\ (T_\theta^-, T_r^-) & \text{si } (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}} < \sigma_0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Análogamente, con objeto de tener en cuenta las diferencias de comportamiento entre el aumento y disminución del flujo,

$$T_\tau = \begin{cases} T_\tau^+ & \text{si } \tau_{\text{mci}} \geq \tau_{\text{mci},0}, \\ T_\tau^- & \text{si } \tau_{\text{mci}} < \tau_{\text{mci},0}. \end{cases}$$

5.5.1. Observaciones al modelo

Potencia de crecimiento. La potencia específica consumida por el crecimiento puede determinarse a partir del tensor de Biot,

$$\mathbf{S}^{(1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{R}),$$

siendo \mathbf{P} el primer tensor de Piola-Kirchhoff (véase la sección 3.1.2), de la forma $\dot{W} = \mathbf{S}^{(1)} : \dot{\mathbf{U}}_g$.

Tensores de elasticidad. Se destaca que los tensores de elasticidad para las configuraciones \mathcal{B}_0 y $\mathcal{B}_{g,t}$, \mathbb{C} y $\mathbb{C}_{g,t}$ respectivamente, están relacionados indicialmente según

$$\mathcal{C}_{ABCD} = (\det \mathbf{U}_{g,t}) U_{g,AP}^{-1} U_{g,BQ}^{-1} \mathcal{C}_{g,PQRS} U_{g,CR}^{-1} U_{g,DS}^{-1}.$$

Comparación con el modelo de Fung. La comparación del modelo propuesto aquí con el propuesto por Fung en (5.1) linealizado en $s = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}} = a$ (estado natural) permite establecer las relaciones

$$\sigma_0 = a, \quad k_1 = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{1}{T_\theta} + \frac{1}{T_r} \right) = C(b-a)^{k_2} (a-c)^{k_3}.$$

Ajuste de parámetros. Obsérvese que no existe equivalencia entre los parámetros T_θ , T_r y T_τ del modelo de Taber y los correspondientes al modelo propuesto de forma que los resultados obtenidos sean equivalentes en ambos modelos, salvo que se supongan crecimientos infinitesimales.

Si se considera, por ejemplo, que la tensión $\sigma = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ es constante, entonces la evolución del alargamiento en dirección \mathbf{u} (denotada λ_u) para el modelo propuesto es de la forma

$$\lambda_u = \exp \left(\frac{t}{T_\theta} \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} \right),$$

mientras que en el modelo de Taber es

$$\lambda_u = 1 + \frac{t}{T_\theta} \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}.$$

VARIABLES INTERNAS. En el modelo se consideran dos variables internas de material, los alargamientos en las direcciones \mathbf{u} y \mathbf{w} (λ_u y λ_w respectivamente). Obsérvese que el alargamiento en dirección \mathbf{v} es constante, $\lambda_v = 1$. Sin embargo, algunos investigadores proponen que los cambios en la presión también producen crecimiento en la dirección axial, incrementando la toruosidad de la arteria (véase la sección 5.2.1). Esta consideración puede ser tenida en cuenta modificando (5.5) añadiendo un nuevo término, en particular,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{1}{T_\theta} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{1}{T_z} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \frac{1}{T_r} \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \right) \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u},$$

donde se introduce el nuevo parámetro temporal T_z , con consideraciones análogas a (5.6). Se destaca que en este caso se incorpora la nueva variable interna λ_v .

Variación de la tensión tangencial. El modelo no tiene en cuenta las causas que modifican el campo de tensiones tangenciales sentido por las células endoteliales de íntima. Las causas principales son de tipo hemodinámico, pero también influye el estado en el se encuentren las células endoteliales. Por ejemplo, la íntima puede encontrarse dañada por alguna operación clínica, o puede dificultarse la sensibilidad de dichas células por la presencia de una placa aterosclerótica incipiente.

5.5.2. Complementos al modelo generalizado de crecimiento

Influencia de la curvatura

En el desarrollo del modelo generalizado de crecimiento se ha propuesto la ley de disipación de la señal

$$\vartheta(h) = \exp \left(-\alpha \left(\frac{\kappa_1^{-1} + h}{\kappa_1^{-1}} - 1 \right) \right), \quad (5.7)$$

siendo h la distancia a la íntima \mathcal{I} y κ_1 la curvatura máxima en el punto más cercano de \mathcal{I} , esto es, en \mathbf{X}_{mci} . En este apartado se replantea la expresión de ϑ , proponiéndose modificar la dependencia de la geometría local de \mathcal{I} en función de su curvatura media (H_M), independientemente de su curvatura máxima (κ_1).

Se parte de la hipótesis básica de que la función de disipación ϑ depende de h y de la curvatura de \mathcal{I} en \mathbf{X}_{mci} representada por el operador de Weingarten \mathbf{S}_W (véase por ejemplo COSTA ET AL. [1997]). En particular, con objeto de que ϑ sea invariante respecto a todo mapa de \mathcal{I} , la dependencia respecto de \mathbf{S}_W puede restringirse a las curvaturas máxima y mínima κ_1 y κ_2 , respectivamente.

Aplicando el teorema de Pi-Buckingham, para los monomios adimensionales $\kappa_1 h$ y $\kappa_2 h$, se tiene

$$\vartheta(h) = \hat{\vartheta}(\kappa_1 h, \kappa_2 h),$$

y por hipótesis de simetría

$$\hat{\vartheta}(\kappa_1 h, \kappa_2 h) = \hat{\vartheta}(\kappa_2 h, \kappa_1 h).$$

En particular, se postulan las relaciones de dependencia

$$\vartheta(h) = \hat{\vartheta}(\kappa_1 h + \kappa_2 h, 0) = \check{\vartheta}(\kappa_1 + \kappa_2, h).$$

Admitiendo que para $\kappa_2 = 0$ se verifica (5.7), se llega a la función de disipación generalizada

$$\vartheta(h) = \exp\left(-\alpha \left(\frac{(2H_M)^{-1} + h}{(2H_M)^{-1}} - 1\right)\right), \quad (5.8)$$

siendo H_M la curvatura media,

$$H_M = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{S}_W.$$

Resumiendo, bajo estas consideraciones, se modifica la expresión del tensor \mathbf{A} de (5.5) resultando

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\tau_{0,\text{mci}}} \frac{1}{T_\tau} \exp\left(-\alpha \left(\frac{(2H_M)^{-1} + |\mathbf{X}_{\text{mci}} - \mathbf{X}|}{(2H_M)^{-1}} - 1\right)\right) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}. \quad (5.9)$$

Observación. Sea $c = (U, \varphi, A)$ una carta de \mathcal{I} tal que $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{X}_{\text{mci}}$, con $\mathbf{u} \in U \subset \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{X}_{\text{mci}} \in A \subset \mathbb{R}^3$. El operador de Weingarten puede obtenerse a partir de la primera y segunda forma fundamental, \mathbf{L} y \mathbf{g} respectivamente, como

$$\mathbf{S}_W = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{g}^{-1})^T.$$

Además, los primeros y segundos coeficientes fundamentales pueden obtenerse como

$$g_{ab}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_a}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_b}(\mathbf{u}) \quad \text{y} \quad L_{ab}(\mathbf{u}) = \mathbf{n}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_a \partial u_b}(\mathbf{u}),$$

siendo \mathbf{n} la normal a la superficie.

Ley de decrecimiento con la distancia

Este apartado tiene por objeto justificar la ley de decrecimiento exponencial de la señal de la íntima con la distancia. Para ello, para una superficie \mathcal{I} determinada (de pequeñas curvaturas en comparación con el espesor de

la pared) el incremento de la señal en un punto viene dado por el equilibrio entre la difusión de la señal y el consumo celular,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_d - \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_c.$$

La difusión viene determinada por

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_d = \alpha_d \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial h^2},$$

con $\alpha_d \in \mathbb{R}^+$, mientras que el consumo se postula como

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \Big|_c = \alpha_c \vartheta,$$

siendo α_c una función real positiva de las curvaturas κ_1 y κ_2 .

La situación de independencia de la señal respecto del tiempo (régimen permanente) lleva a la ley de la forma

$$\vartheta = A \exp\left(\sqrt{\frac{\alpha_c}{\alpha_d}} h\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_c}{\alpha_d}} h\right),$$

siendo $A \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathbb{R}$.

Finalmente, si se imponen las condiciones de contorno $\vartheta(0) = 1$ y $\vartheta(\infty) = 0$ se obtiene

$$\vartheta = \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_c}{\alpha_d}} h\right), \quad (5.10)$$

consistente con (5.8).

La comparación de las ecuaciones (5.8) y (5.10) implica

$$\frac{\alpha_c}{\alpha_d} = 4\alpha^2 H_M^2.$$

Hipótesis acerca del exponente α . Se postula que el exponente de disipación de la señal α sea aproximadamente igual a la unidad. Esto se motiva por la hipótesis de que la tensión circunferencial en la pared (y por tanto el alargamiento elástico circunferencial) no se ve alterada por este fenómeno, al menos como un cero de orden uno para la superficie interior, lo que es consistente con el proceso de crecimiento por tensiones locales.

En particular, si se considera una variación del alargamiento circunferencial interior $\dot{\lambda}_{g,i}$, dado que no se produce crecimiento radial, el alargamiento circunferencial a una distancia h del interior, coincidente con el alargamiento por crecimiento según la hipótesis de partida, resulta

$$\dot{\lambda}_{g,h} = \frac{(1 + \dot{\lambda}_{g,i})r_i + h}{r_i + h} - 1,$$

siendo r_i el radio interior. Por tanto,

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{g,h}}{\partial h} = -\frac{r_i \dot{\lambda}_{g,i}}{(r_i + h)^2},$$

que particularizando en $h = 0$, resulta,

$$\left. \frac{\partial \dot{\lambda}_{g,h}}{\partial h} \right|_{h=0} = -\frac{\dot{\lambda}_{g,i}}{r_i},$$

correspondiéndose con el valor obtenido a partir de (5.7) con $\alpha = 1$ para la configuración sin deformar.

Introducción de umbrales en la velocidad de crecimiento

Se postula que el modelo que se ha propuesto sea válido dentro de ciertos límites de la velocidad de crecimiento volumétrico, motivándose por consideraciones biológicas. Obsérvese, por ejemplo, en la figura 5.3 del modelo de crecimiento de Fung (sección 5.3.1) que las desviaciones respecto al punto de equilibrio homeostático a aumentan el valor absoluto de la velocidad de crecimiento (correspondiéndose con el modelo propuesto) hasta un máximo a partir del cual se reduce hasta anularse en los puntos b y c . Además, este tipo de consideraciones permiten estabilizar el método numérico de cálculo, especialmente en aquellos casos en que se dificulte la determinación de las tensiones tangenciales en la íntima (una estimación más precisa puede exigir modelos precisos de interacción entre la sangre y la pared arterial).

Por estas razones, en el modelo generalizado de crecimiento se propone limitar el valor absoluto de la velocidad de la forma que se expone a continuación.

Según las relaciones (5.4) y (5.5), la velocidad de crecimiento $\dot{\mathbf{U}}_g$ depende de las propiedades (parámetros) del material y de ciertas variables tensionales, $\dot{\mathbf{U}}_g = \phi(\boldsymbol{\sigma}, \tau_{mci})$. Esta dependencia puede acotarse aún más de la forma

$$\dot{\mathbf{U}}_g = \tilde{\phi}(v_\sigma, v_\tau),$$

siendo $v_\sigma = (\sigma - \sigma_0)/\sigma_0$ y $v_\tau = (\tau - \tau_0)/\tau_0$, con $\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$.

La ley de crecimiento modificada se basa en introducir umbrales a la velocidad de remodelación de forma independiente a la activación por tensiones locales y al flujo. En particular,

$$\dot{\mathbf{U}}_g = \tilde{\phi}(f_\sigma(v_\sigma), f_\tau(v_\tau)), \quad (5.11)$$

siendo

$$f_\sigma(v_\sigma) = \begin{cases} \xi_{\sigma,1} & \text{si } v_\sigma \leq \xi_{\sigma,1}, \\ v_\sigma & \text{si } \xi_{\sigma,1} < v_\sigma \leq \xi_{\sigma,2}, \\ \xi_{\sigma,2} & \text{si } \xi_{\sigma,2} < v_\sigma, \end{cases}$$

y

$$f_\tau(v_\tau) = \begin{cases} \xi_{\tau,1} & \text{si } v_\tau \leq \xi_{\tau,1}, \\ v_\tau & \text{si } \xi_{\tau,1} < v_\tau \leq \xi_{\tau,2}, \\ \xi_{\tau,2} & \text{si } \xi_{\tau,2} < v_\tau, \end{cases}$$

con $\xi_{\sigma,1}$, $\xi_{\sigma,2}$, $\xi_{\tau,1}$ y $\xi_{\tau,2}$ parámetros de material que marcan los umbrales de la velocidad de crecimiento. Obsérvese que este planteamiento generaliza el anteriormente desarrollado, ya que el caso de no considerarse este tipo de limitaciones se corresponde con $\xi_{\sigma,1} = \xi_{\tau,1} = -\infty$ y $\xi_{\sigma,2} = \xi_{\tau,2} = \infty$.

En el cuadro 5.1 se muestra un esquema general del modelo de crecimiento indicando sus principales elementos.

1. Descomposición multiplicativa del gradiente de deformación \mathbf{F} en parte de *crecimiento puro* \mathbf{U}_g y parte *elástica* \mathbf{F}_e :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{U}_g.$$

2. Relación entre el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ y la parte *elástica* del gradiente de deformación \mathbf{F}_e :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J_e} \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{S}_e \cdot \mathbf{F}_e^T,$$

siendo $J_e = \det \mathbf{F}_e$, $\mathbf{S}_e = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C}_e)}{\partial \mathbf{C}_e}$ y $\mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e$.

3. Velocidad de crecimiento \mathbf{U}_g en función de la tensión local $\boldsymbol{\sigma}$ y la tensión tangencial en el punto más cercano de la íntima τ_{mci} :

$$\dot{\mathbf{U}}_g = \mathbf{U}_g \cdot (\mathcal{A} : (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0) + (\tau_{\text{mci}} - \tau_{0,\text{mci}}) \mathbf{A}),$$

siendo $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}$.

4. Expresiones de \mathcal{A} y \mathbf{A} :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{1}{T_\theta} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{1}{T_r} \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \right) \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad \text{y}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\tau_{0,\text{mci}}} \frac{1}{T_\tau} \exp \left(-\alpha \left(\frac{(2H_M)^{-1} + |\mathbf{X}_{\text{mci}} - \mathbf{X}|}{(2H_M)^{-1}} - 1 \right) \right) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u},$$

con los significados en relación con (5.5) y (5.9), respectivamente.

5. Se tienen además en cuenta las limitaciones dadas por (5.11).

Cuadro 5.1: Esquema general del modelo de crecimiento

5.6. Implementación del modelo de crecimiento

El modelo generalizado de crecimiento puede implementarse en programas de elementos finitos según los esquemas de los cuadros 5.2 y 5.3 con objeto de determinar el tensor de tensiones de Cauchy, el tensor de elasticidad en la configuración deformada y el tensor de alargamiento por crecimiento libre para cada punto de cuadratura (punto de Gauss).

Uno de los aspectos de mayor importancia es el de estimación de los valores de influencia τ_{mci} , κ_{mci} y $|\mathbf{X}_{mci} - \mathbf{X}|$ (punto 3d del cuadro 5.2). Esto es debido fundamentalmente a la dificultad en la extrapolación de variables geométricas locales que presentan operadores diferenciables a partir del conocimiento de puntos discretos, y al mal condicionamiento del problema de estimación de la tensión tangencial (las tensiones normales en la pared son aproximadamente 100-200 kPa mientras que la tensión tangencial en la íntima es de aproximadamente 1,5 Pa). En relación con este aspecto, en el cuadro 5.4 se propone un esquema para el caso de material con generación automática de direcciones de anisotropía (véase la página 76 de la sección 3.3.4) y con mallas en las que la variación de la distancia entre nodos cercanos es suave.

5.7. Ensayos de crecimiento

Ensayo de un elemento. Se ensaya un elemento formado por un material hiperelástico anisótropo de Holzapfel cuasi-incompresible (módulo volumétrico $K = 10000$ kPa) de parámetros $c = 3,0000$ kPa, $k_1 = 2,3632$ kPa y $k_2 = 0,8393$, con ángulo entre las familias de fibras de $2 \cdot 29^\circ = 58^\circ$ y siendo la dirección de la tensión eficaz del crecimiento la indicada por la bisectriz del menor ángulo formado por dichas fibras (véase la figura 5.7).

Se impone un alargamiento casi instantáneo (introducido en diez segundos de tiempo) de valor 1,85 en dirección \mathbf{u} coaccionando el movimiento en dirección \mathbf{v} mientras que se deja que el material crezca libremente en dirección \mathbf{w} , según las propiedades $\sigma_0 = 200$ kPa (tensión de equilibrio) y $T_t = T_r = 10^7$ s (sin la activación del crecimiento por variación del flujo).

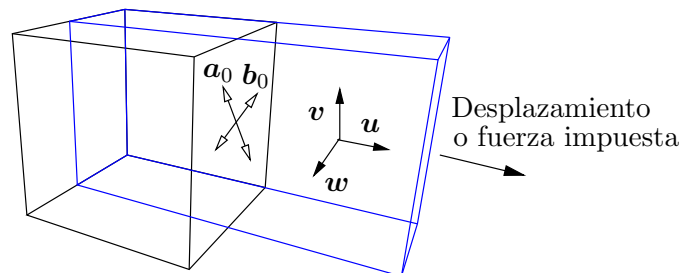


Figura 5.7: Esquema del ensayo de crecimiento a nivel elemental

Dado el tensor gradiente de deformación en el instante n , \mathbf{F}_n , y los alargamientos por crecimiento $U_{g,u,n}$ y $U_{g,w,n}$ (de valor la unidad para $n = 0$).

1. Descomposición del gradiente de deformación por crecimiento,

$$\mathbf{U}_{g,n}^{-1} = \frac{1}{U_{g,u,n}} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{1}{U_{g,w,n}} \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \quad \text{y}$$

$$\mathbf{F}_{e,n} = \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{U}_{g,n}^{-1}.$$

2. Cálculo del *tensor de tensiones de Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}_n$ y del *tensor de elasticidad en la configuración deformada* \mathbf{c} a partir de $\mathbf{F}_{e,n}$, pudiendo incluirse fenómenos como viscoelasticidad y daño.
3. Actualización de los nuevos alargamientos de crecimiento $U_{g,u,n+1}$ y $U_{g,w,n+1}$:

- a) Cálculo de la rotación propia de \mathbf{F}_n , \mathbf{R}_n (véase el cuadro 5.3).
- b) Tensión corrotacional,

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n = \mathbf{R}_n^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{R}_n.$$

- c) Tensión local eficaz,

$$\sigma_{u,n} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n.$$

- d) Estimación de la tensión tangencial de influencia en la íntima $\tau_{mci,n}$, del radio de influencia en la íntima $R_{i,mci} = 1/\kappa_{mci}$ y del radio de influencia local $R_{mci} = 1/\kappa_{mci} + |\mathbf{X} - \mathbf{X}_{mci}|$.
- e) *Alargamientos de crecimiento* para el siguiente paso,

$$U_{g,u,n+1} = U_{g,u,n} + U_{g,u,n} \frac{1}{T_\theta} \frac{\sigma_{u,n} - \sigma_0}{\sigma_0} \Delta t \quad \text{y}$$

$$U_{g,w,n+1} = U_{g,w,n} + U_{g,w,n} \frac{1}{T_r} \frac{\sigma_{u,n} - \sigma_0}{\sigma_0} \Delta t +$$

$$U_{g,w,n} \frac{1}{T_\tau} \frac{\tau_{mci,n} - \tau_{mci,0}}{\tau_{mci,0}} \exp(-\alpha(R_{mci}/R_{i,mci} - 1)) \Delta t.$$

Cuadro 5.2: Esquema de implementación del modelo de crecimiento

Dado el tensor gradiente de deformación \mathbf{F} .

1. Tensor de Cauchy-Green por la derecha y su cuadrado,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad \text{y} \quad \mathbf{C}^2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}.$$

2. Cálculo de los autovalores de \mathbf{C} , $\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2\}$, de forma explícita.
3. Invariantes del tensor de alargamiento derecho \mathbf{U} ,

$$\begin{aligned} i_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ i_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 \quad \text{e} \\ i_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned}$$

4. Cálculo del tensor \mathbf{U} y de su inversa,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \frac{1}{i_1 i_2 - i_3} (-\mathbf{C}^2 + (i_1^2 - i_2)\mathbf{C} + i_1 i_3 \mathbf{1}) \quad \text{y} \\ \mathbf{U}^{-1} &= \frac{1}{i_3} (\mathbf{C} - i_1 \mathbf{U} + i_2 \mathbf{1}). \end{aligned}$$

5. Tensor de rotación propia,

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}.$$

Cuadro 5.3: Cálculo de la rotación propia del gradiente de deformación según SIMÓ [1999]

Dados el punto \mathbf{X} , los parámetros del método de determinación de direcciones de la página 76 (sección 3.3.4) $\{\mathbf{O}, \mathbf{d}, \phi\}$, las posiciones de los nodos pertenecientes a la íntima $\{\mathbf{X}_{\text{int},i}\}$, sus posiciones en la configuración deformada $\{\mathbf{x}_{\text{int},i}\}$ y sus reacciones $\{\mathbf{r}_{\text{int},i}\}$.

1. Determinación de los tres nodos más cercanos a \mathbf{X} de $\{\mathbf{X}_{\text{int},i}\}$, $\{\mathbf{X}_{\text{mci},1}, \mathbf{X}_{\text{mci},2}, \mathbf{X}_{\text{mci},3}\}$ (por orden de cercanía) de forma que en el interior y contorno del triángulo formado no se encuentren otros nodos pertenecientes a la íntima.

Con objeto de disminuir el tiempo de cálculo se propone modificar el método asociando $\{\mathbf{X}_{\text{mci},2}, \mathbf{X}_{\text{mci},3}\}$ a $\mathbf{X}_{\text{mci},1}$ de forma que baste con determinar el nodo de la íntima más cercano.

2. Estimación del radio local efectivo,

$$R = |\mathbf{P}_d \cdot \mathbf{OX}|, \quad \text{siendo}$$

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{1} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}.$$

3. Estimación del radio de la íntima,

$$R_i = |\mathbf{OX}_{\text{mci},1} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{OX}_{\text{mci},1})\mathbf{d}|.$$

4. Estimación de la tensión tangencial de influencia (se supone una configuración de nodos de la íntima es homogénea, siendo necesaria una revisión de este punto en otro caso),

- a) Área del triángulo $\{\mathbf{X}_{\text{mci},1}, \mathbf{X}_{\text{mci},2}, \mathbf{X}_{\text{mci},3}\}$,

$$A = \frac{1}{2}|\mathbf{a}|,$$

siendo

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}_{\text{mci},2} - \mathbf{X}_{\text{mci},1}) \wedge (\mathbf{X}_{\text{mci},3} - \mathbf{X}_{\text{mci},1}).$$

- b) Vector tensión,

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}_{\text{mci},1} + \mathbf{r}_{\text{mci},2} + \mathbf{r}_{\text{mci},3}}{6A}.$$

- c) Tensión tangencial de influencia,

$$\tau_{\text{mci}} = \left| \mathbf{t} - \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{a}}{4A^2} \mathbf{a} \right|.$$

Cuadro 5.4: Estimación de los valores de influencia de la tensión tangencial, del radio en la íntima y del radio local para el caso de generación automática de direcciones de anisotropía y mallas localmente homogéneas

La evolución de las tensiones σ_u y σ_v se recogen en las figuras 5.8 y 5.9, respectivamente. Además, en la figura 5.10 se presenta la evolución del crecimiento volumétrico.

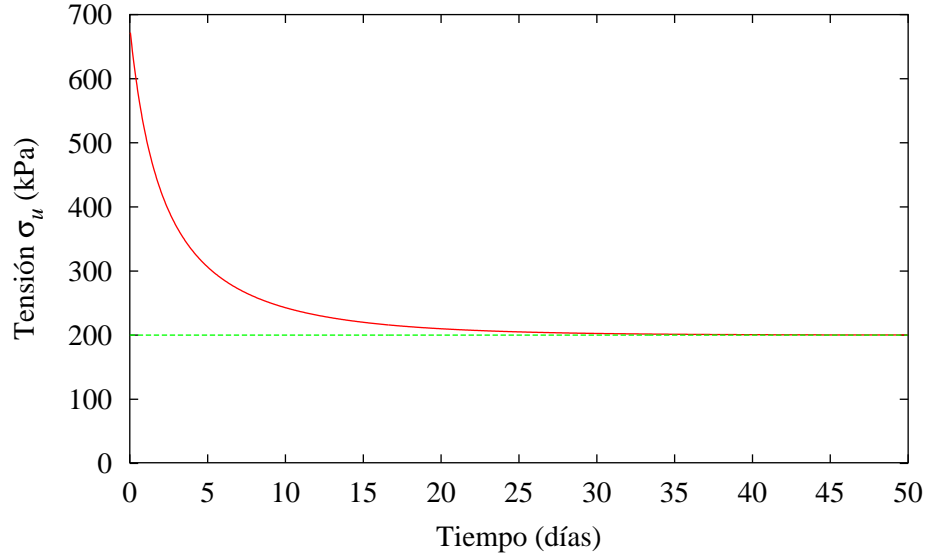


Figura 5.8: Ensayo de un elemento con desplazamiento impuesto. Evolución de la tensión σ_u

Análogamente, se realiza un ensayo numérico introduciendo fuerzas constantes en la dirección \mathbf{u} correspondientes a un valor de 150 kPa del primer tensor de Piola-Kirchhoff (manteniendo la restricción en desplazamientos en dirección \mathbf{v}) de forma casi instantánea (en un tiempo de diez segundos). La tensión de Cauchy inicial inducida es $\sigma_u = 259,28$ kPa, superior a la de equilibrio ($\sigma_0 = 200$ kPa), por lo que se desarrolla crecimiento hasta que el alargamiento en dirección λ_w sea tal que $\sigma_0 = \sigma_u$. De esta forma, se obtienen los resultados de las figuras 5.11, 5.12 y 5.13.

Ensayo de hipertensión. Se considera el modelo de las arterias carótidas sanas de un conejo presentado en la sección 3.3.5, admitiendo que la media es susceptible de crecimiento según los parámetros del cuadro 5.5 mientras que la adventicia no es susceptible de crecimiento.

En este ensayo se aumenta el radio interior en deformación plana de 0,71 mm a $2 \cdot R_i = 1,42$ mm manteniéndose dicha situación durante el proceso de crecimiento. La malla utilizada coincide con la adoptada en la sección 3.3.5.

Las evoluciones de la presión interior y del espesor total (considerando tanto la media como la adventicia) se presentan en las figuras 5.14 y 5.15, respectivamente.

Además, la velocidad de crecimiento volumétrico, definiendo este crecimiento como el coeficiente volumétrico de \mathcal{B}_g respecto a \mathcal{B}_0 (esto es, $\det \mathbf{F}_g$),

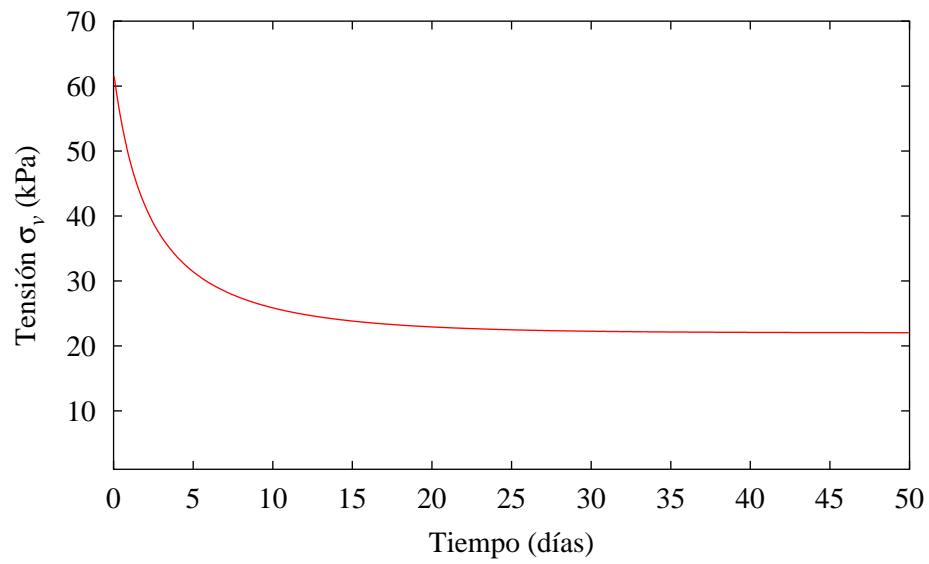


Figura 5.9: Ensayo de un elemento con desplazamiento impuesto. Evolución de la tensión σ_v

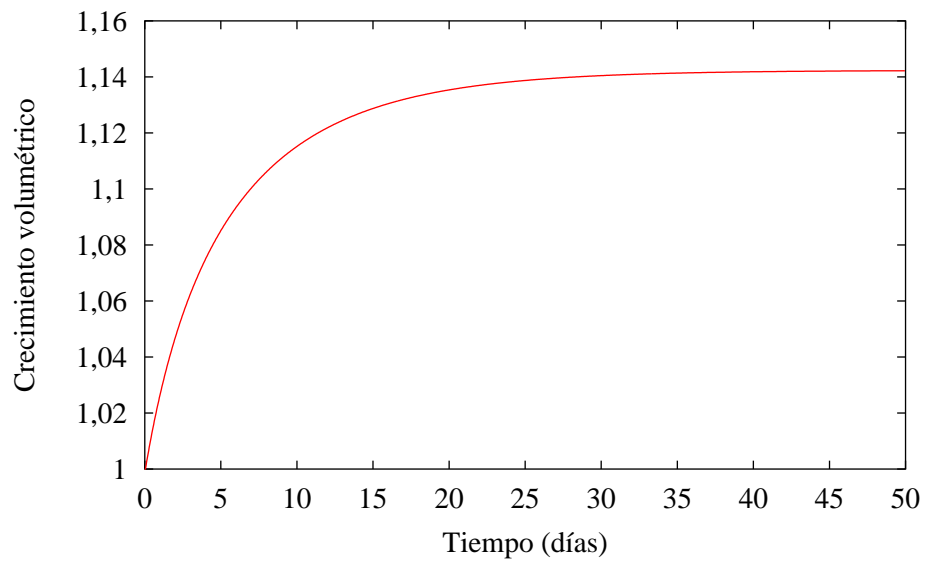


Figura 5.10: Ensayo de un elemento con desplazamiento impuesto. Crecimiento volumétrico

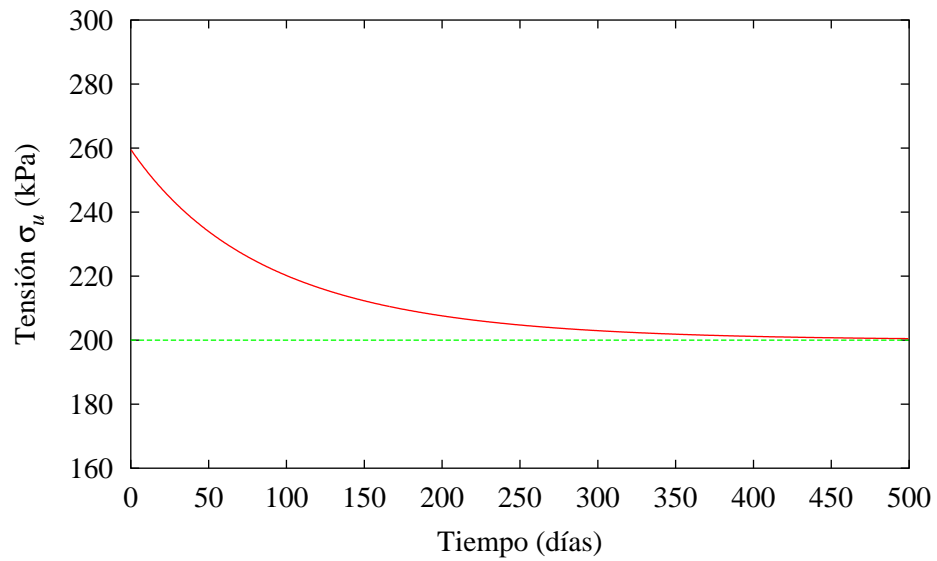


Figura 5.11: Ensayo de un elemento con fuerza impuesta. Evolución de la tensión σ_u

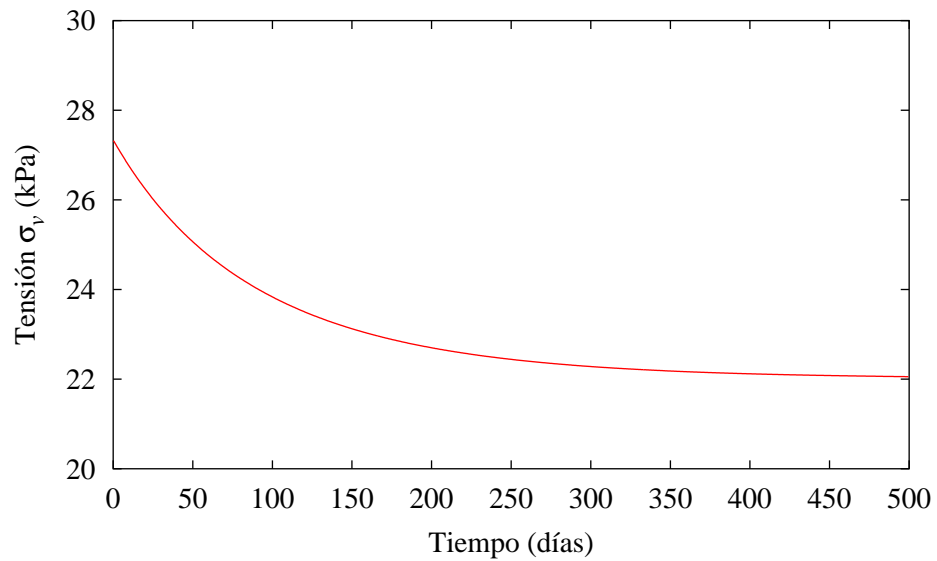


Figura 5.12: Ensayo de un elemento con fuerza impuesta. Evolución de la tensión σ_v

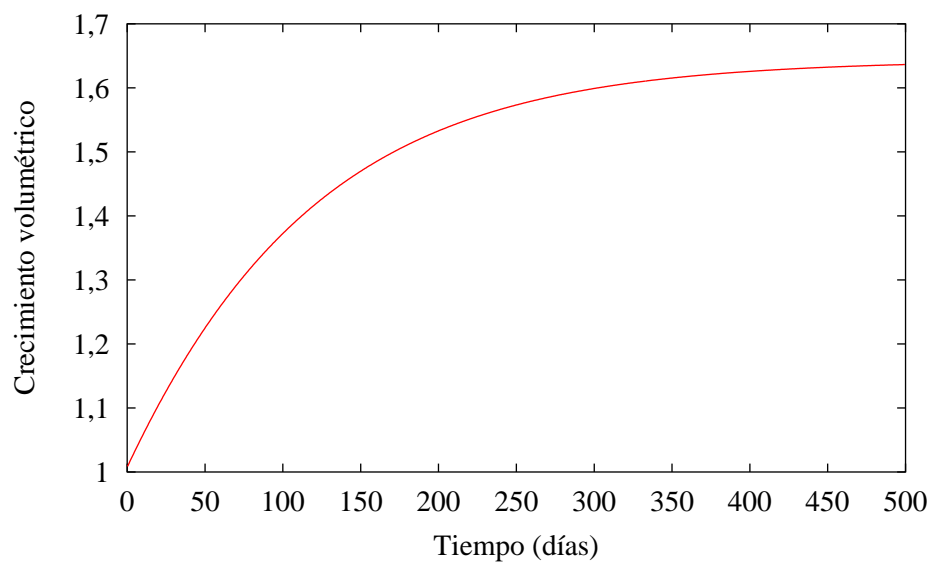


Figura 5.13: Ensayo de un elemento con fuerza impuesta. Crecimiento volumétrico

<i>Parámetro</i>	<i>Valor</i>
σ_0	200 kPa
T_θ	10^7 s
T_r	10^7 s
T_τ	10^6 s
τ_0	1,5 Pa
α	1

Cuadro 5.5: Parámetros del modelo de crecimiento para la media

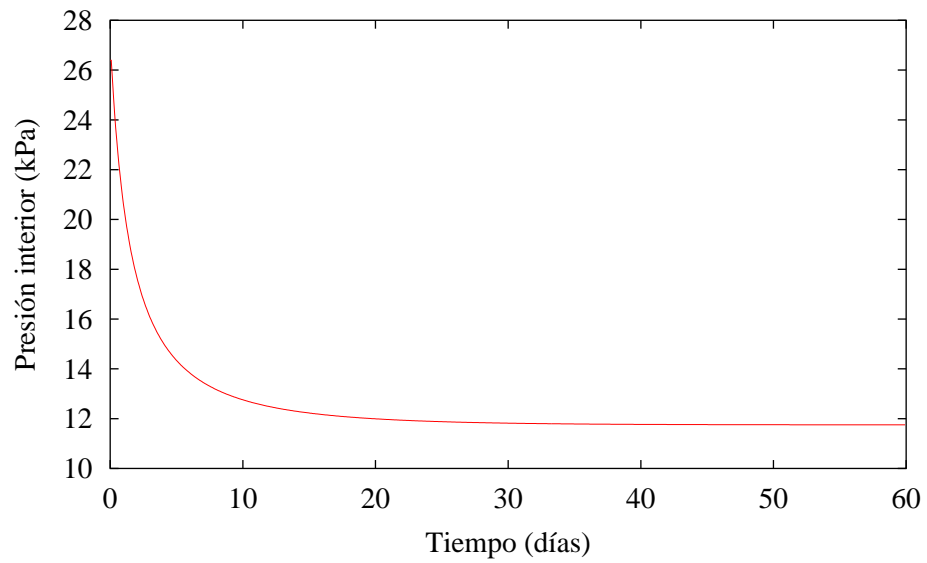


Figura 5.14: Ensayo de hipertensión. Evolución de la presión

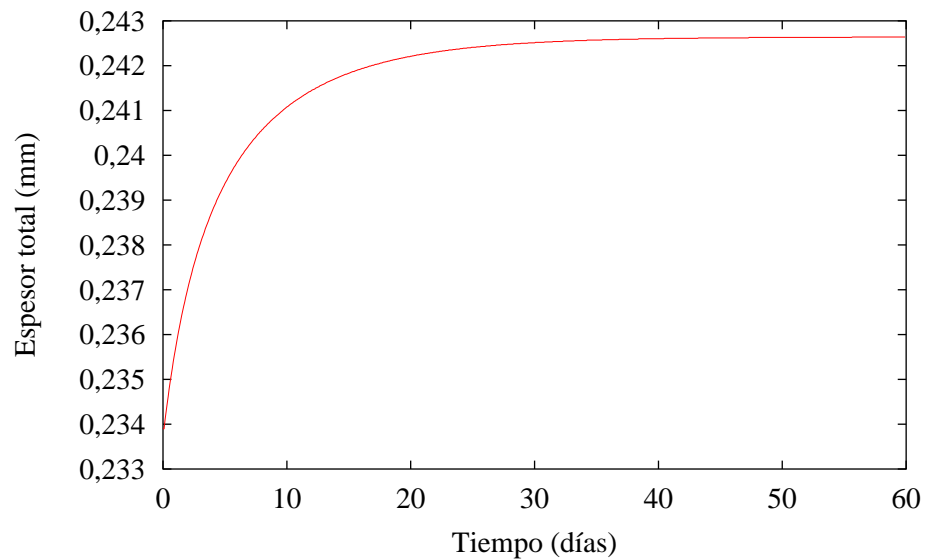


Figura 5.15: Ensayo de hipertensión. Evolución del espesor

en el instante inicial (dibujada a partir de los valores proyectados en los nodos) y el crecimiento volumétrico obtenido a los 60 días, en la configuración deformada, se recogen en las figuras 5.16 y 5.17, respectivamente.

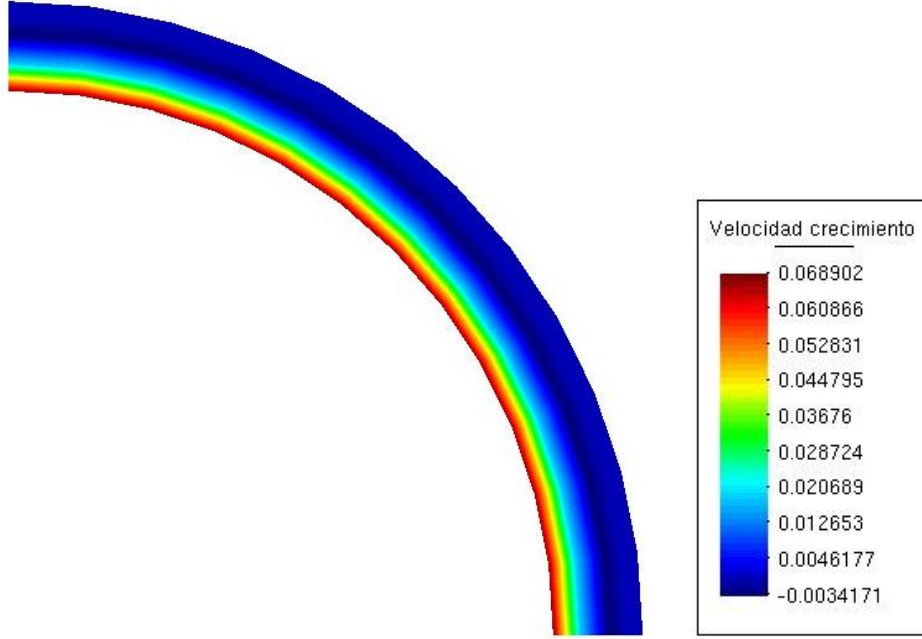


Figura 5.16: Ensayo de hipertensión. Velocidad de crecimiento volumétrico inicial (días^{-1})

Con objeto de comprobar la evolución de la tensión eficaz del crecimiento (circunferencial) se presentan sus valores iniciales y a los 60 días en la figura 5.18.

Por otra parte, si se relajan las coacciones a los 60 días (manteniendo la situación de deformación plana) se obtienen las tensiones residuales circunferenciales para la media (que resulta de espesor 0,270 mm) recogidas en la figura 5.19.

Los crecimientos circunferenciales en las fibras interior y exterior de la media son $\lambda_{g,\theta,i} = 1,0898$ y $\lambda_{g,\theta,e} = 0,9878$, respectivamente, mientras que el crecimiento radial en su punto medio es $\lambda_{g,r,m} = 1,0373$. Por tanto, la longitud del perímetro interno por crecimiento es

$$l_{c,i} = 2\pi R_i \lambda_{g,\theta,i} = 4,862 \text{ mm},$$

y la longitud del perímetro exterior

$$l_{c,e} = 2\pi(R_i + H_M)\lambda_{g,\theta,e} = 6,020 \text{ mm}.$$

Suponiendo que el crecimiento es aproximadamente lineal en la media y que el efecto de la adventicia en el ángulo de apertura es despreciable, se tiene el

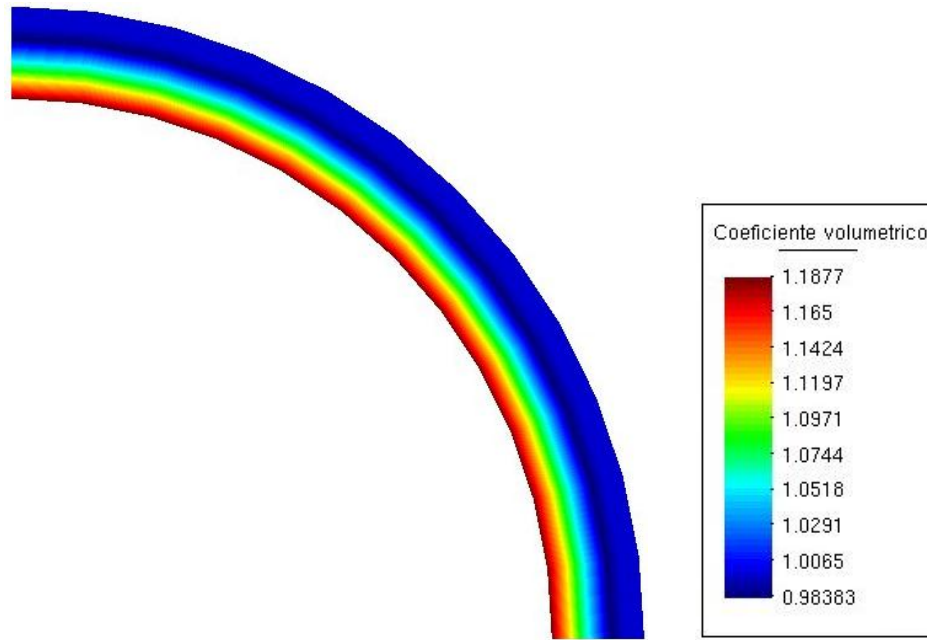


Figura 5.17: Ensayo de hipertensión. Crecimiento volumétrico a los 60 días

sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (2\pi - \theta_a)R_a = l_{c,i} \\ (2\pi - \theta_a)(R_a + \lambda_{g,r,m}H_M) = l_{c,e} \end{cases},$$

resultando un ángulo de apertura $\theta_a = 114^\circ$ y un radio para el arco de $R_a = 1,13$ mm (véase el esquema de la figura 5.20).

Ensayo de hipotensión. En este caso, sobre el modelo de arteria del apartado anterior se impone un radio interno en la configuración deformada de $1,75 \cdot R_i = 1,2425$ mm, de forma que la situación es de hipotensión. La persistencia del desplazamiento impuesto lleva a las disminuciones del espesor y de la presión interior según las evoluciones de las figuras 5.21 y 5.22, respectivamente.

Ensayo de crecimiento por flujo. Sobre el modelo de arteria se aplican ahora tensiones tangenciales equivalentes a una fuerza de $0,01115$ N/m (correspondiente a tensiones tangenciales de $2,5$ Pa en el instante inicial), sin imponer presiones internas. Manteniendo dicha sollicitación se produce un crecimiento (véase la figura 5.23) que trata de reducir la tensión tangencial hasta el valor de equilibrio de $1,5$ Pa (en este ensayo se desactiva el crecimiento por tensiones locales con objeto de estudiar los efectos de forma desacoplada).

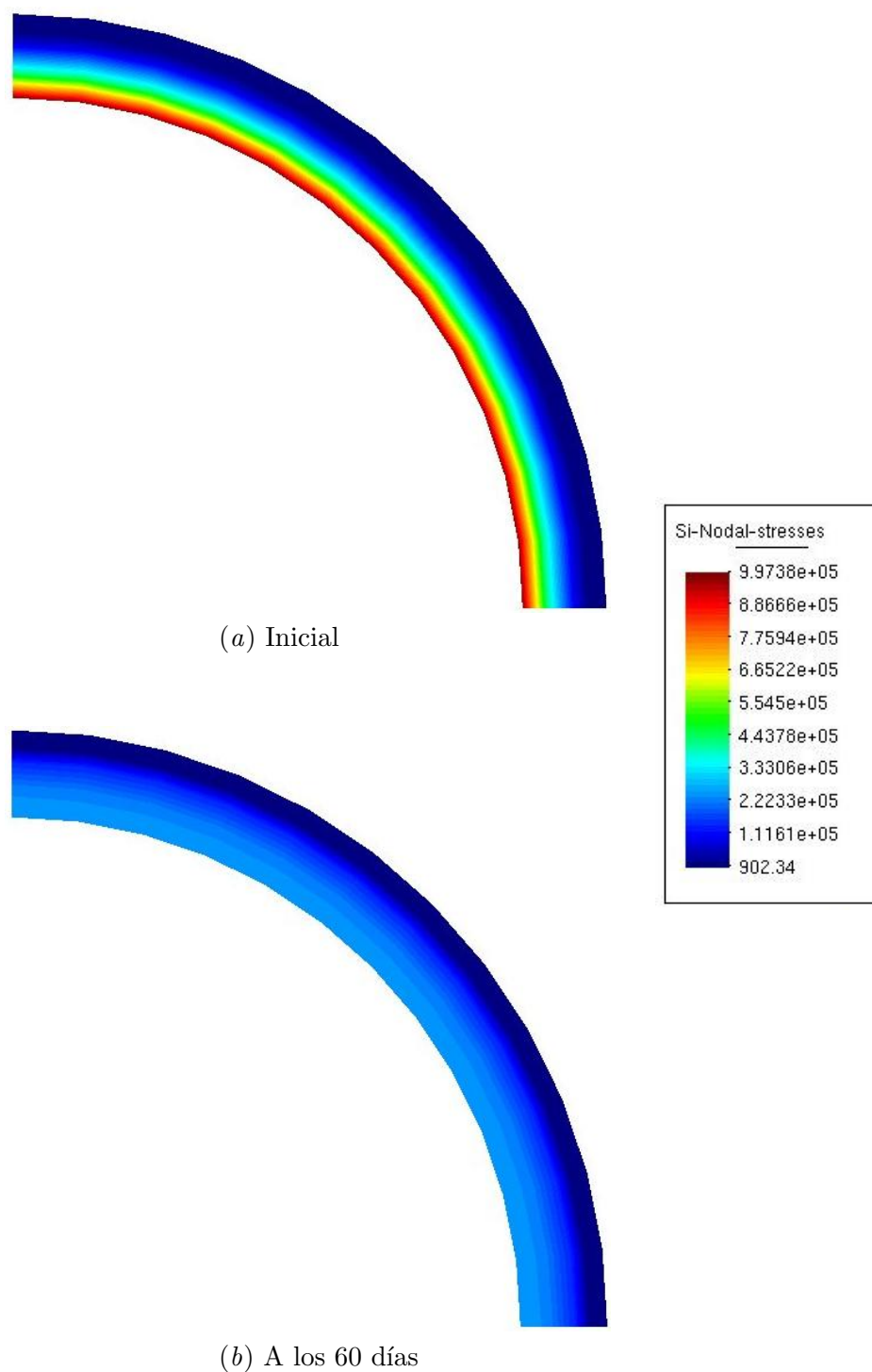


Figura 5.18: Ensayo de hipertensión. Tensión circunferencial (Pa)

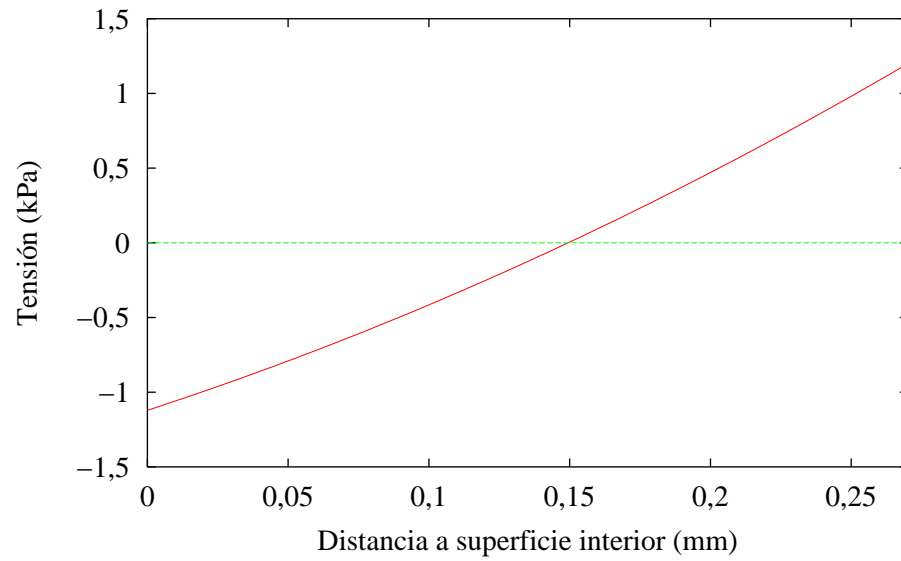


Figura 5.19: Ensayo de hipertensión. Tensiones circunferenciales residuales para la media

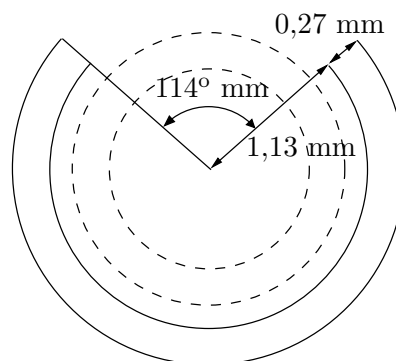


Figura 5.20: Esquema del ángulo de apertura del ensayo

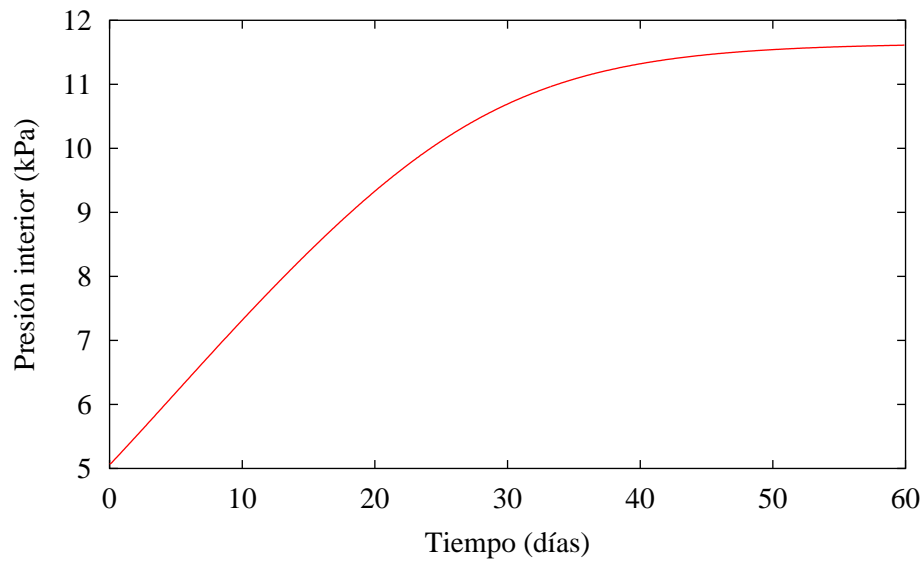


Figura 5.21: Ensayo de hipotensión. Evolución de la presión

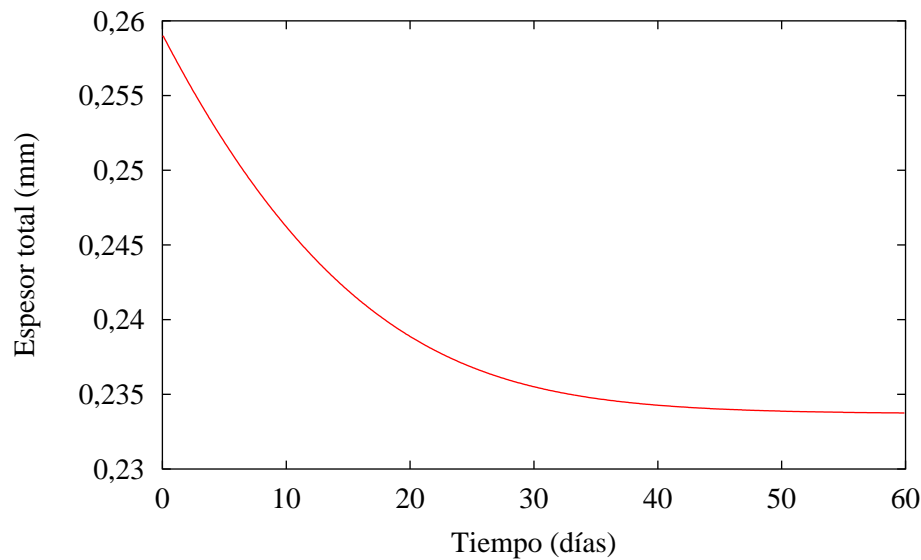


Figura 5.22: Ensayo de hipotensión. Evolución del espesor

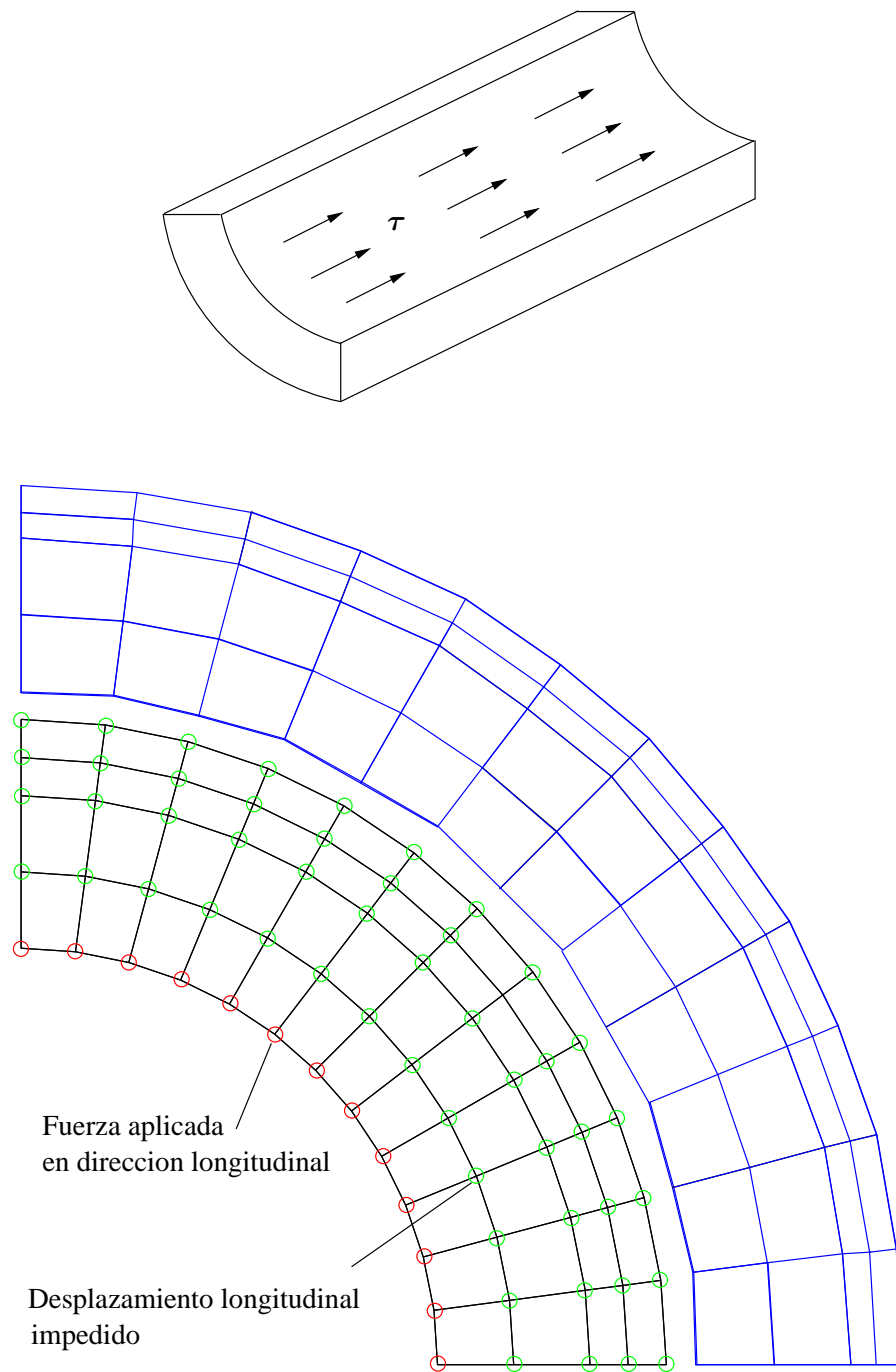


Figura 5.23: Ensayo de crecimiento por flujo. Configuraciones inicial y a los 60 días

Las evoluciones del radio interior y del espesor se presentan en las figuras 5.24 y 5.25, respectivamente. Se destaca que si bien el crecimiento por flujo se produce exclusivamente en dirección circunferencial, las condiciones de compatibilidad llevan a que se produzcan variaciones no sólo en el radio interior, sino en el espesor.

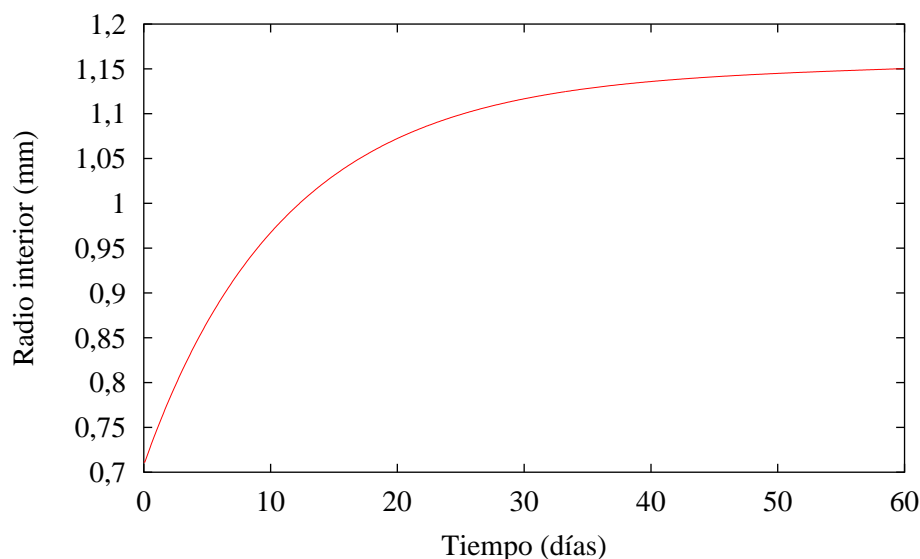


Figura 5.24: Ensayo de crecimiento por flujo. Evolución del radio interior

Además, las velocidades de crecimiento volumétricas en el instante inicial y el crecimiento volumétrico obtenido a los 60 días se recogen en las figuras 5.26 y 5.27, dibujados en la configuración inicial. Pueden observarse desviaciones en la simetría de los contornos debido a los errores en la estimación de las tensiones tangenciales de influencia en los extremos de la malla.

En el apartado 6.4 se desarrolla una aplicación del modelo de crecimiento activado por tensiones locales y por flujo, donde se introduce una variación de la tensión tangencial en la íntima que produce estenosis.

5.8. Presolicitación en paredes arteriales

Este apartado analiza distintas formas de considerar tensiones iniciales en la configuración de referencia. El planteamiento general y los métodos tradicionales para abordar este problema se describen en las secciones 5.8.1 y 5.8.2. Posteriormente, se propone un método local de introducción de la presolicitación en la sección 5.8.3. Por último, se presentan los aspectos fundamentales de la relación entre la remodelación y la presolicitación en la sección 5.8.4.

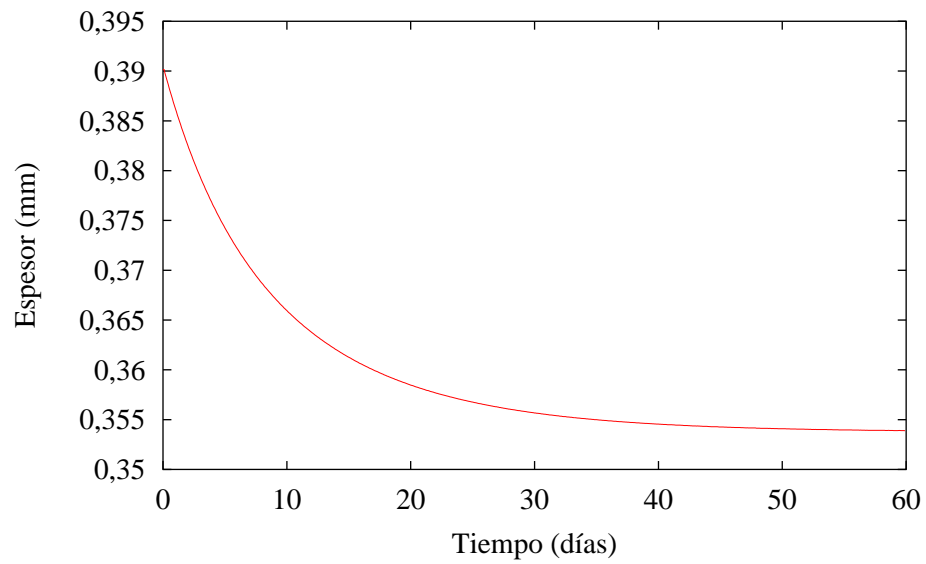


Figura 5.25: Ensayo de crecimiento por flujo. Evolución del espesor

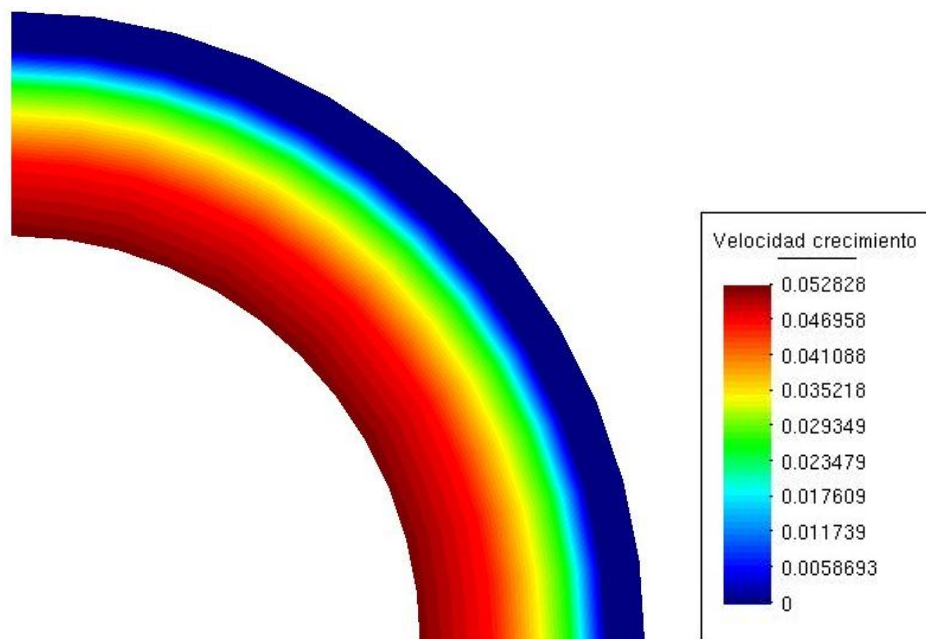


Figura 5.26: Ensayo de crecimiento por flujo. Velocidad de crecimiento volumétrico inicial (días⁻¹)

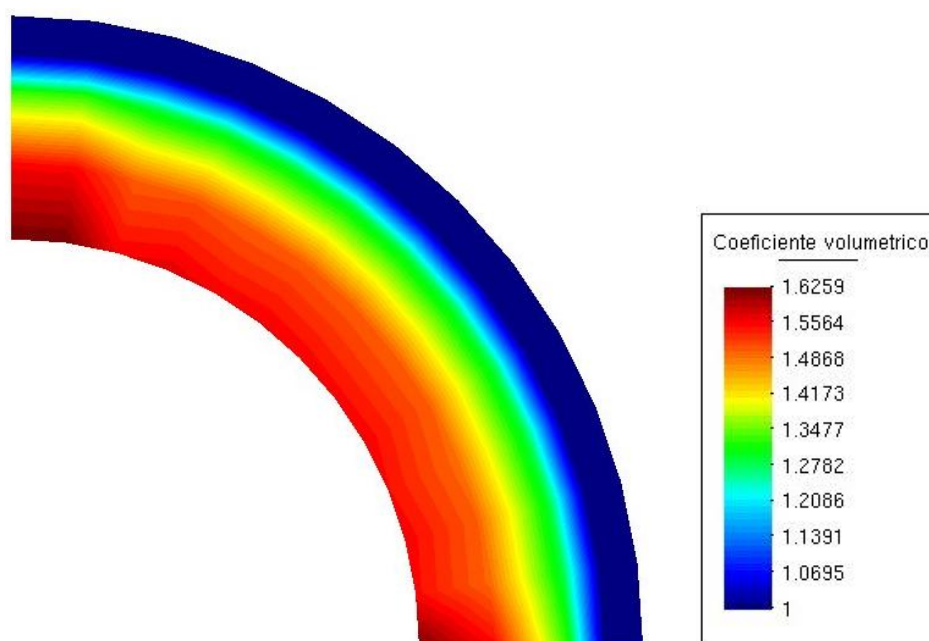


Figura 5.27: Ensayo de crecimiento por flujo. Crecimiento volumétrico a los 60 días

5.8.1. Introducción y objetivos

Las *configuraciones de referencia* de las arterias no se encuentran usualmente *libres de tensiones*, por el contrario presentan generalmente niveles significativos de tensiones en el estado fisiológico. Entre las razones que motivan dicha afirmación destacan las siguientes consideraciones:

- Los *datos geométricos* de pacientes son obtenidos in-vivo, estando el material cargado circunferencialmente con la presión fisiológica y también longitudinalmente.
- En una configuración descargada la existencia de *tensiones residuales* ha sido bien documentada en la bibliografía (véase, por ejemplo, RACHEV [1997]), estando relacionadas con los fenómenos de remodelación. Según CHAUDHRY ET AL. [1996] las tensiones residuales reducen la tensión circunferencial interna (esto es, en puntos cercanos a la íntima) en un 62 %, y reducen el gradiente de tensiones en la pared arterial en un 94 %, respecto a ser ignoradas (estos resultados se obtuvieron para la arteria torácica de un conejo, por lo que no pueden ser extrapolados a cualquier tipo de arteria; no obstante, se postula que los resultados son cualitativamente válidos). Estas afirmaciones son consistentes con la hipótesis de que la tensión circunferencial tiende a ser constante en el espesor de cada capa (véase RACHEV [2001]).

Por estas razones, Chaudhry et al. afirman que la existencia de tensiones residuales disminuye la velocidad de progresión del ateroma al reducirse la tensión máxima en la pared arterial. Además, el conocimiento de las tensiones residuales aporta información al diseño y manejo de dispositivos intravasculares, como pueden ser los stents.

Por otra parte, estas tensiones residuales tienen influencia en el comportamiento del fluido. Así, CHAUDHRY ET AL. [1996] estudian el efecto en la velocidad de propagación de las ondas de presión.

Dada la dificultad en la medida directa de las tensiones residuales, tanto por procedimientos destructivos como no destructivos (véase WITHERS Y BHADSHIA [2001]), el desarrollo de modelos matemáticos es útil con objeto de predecir la distribución de tensiones y deformaciones en la pared arterial.

La forma de introducir los estados de presolicitud puede clasificarse en:

- Se considera una configuración global previa libre de cargas y de tensiones que es sometida a acciones hasta adoptar la configuración de referencia. El paso de la configuración previa a la de referencia se realiza manteniéndose las condiciones de compatibilidad.

Una de las metodologías más habituales enmarcadas en este planteamiento es la del *método de apertura en ángulo*, que se desarrolla en la siguiente sección.

- Se modifican los modelos constitutivos de material con objeto de presentar tensiones en la configuración de referencia. En particular, en el caso de modelos hiperelásticos, la modificación de las ecuaciones constitutivas para considerar las tensiones residuales lleva a

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{C}} \neq \mathbf{0}.$$

A su vez, un efecto lateral favorable con este planteamiento es evitar inestabilidades del material que de otra manera podrían llevar a la falta de convergencia, ya que en general el material de las paredes arteriales sanas muestra un mejor comportamiento a la *estabilidad* (véase el apéndice A) en el nivel de sollicitación fisiológica que libre de cargas.

La presente sección se centra fundamentalmente en este último planteamiento y en su relación con el modelo generalizado de crecimiento de la sección 5.5.

5.8.2. Método de apertura en ángulo

Como ya se ha indicado en el capítulo 1, cuando una porción de arteria es extraída de un organismo, ésta disminuye en longitud debido a que se encuentra sometida a un alargamiento longitudinal impuesto (*pretensada*) que produce *tensiones residuales longitudinales*. En esta situación (arteria extraída) se dice que la muestra está libre de cargas, no obstante en general no está libre de tensiones, llamadas *tensiones residuales circunferenciales*. Esto se muestra al cortar radialmente una pequeña longitud de arteria en forma de anillo, observándose que el anillo se abre formando un sector (véase FUNG [1993]). En general, incluso este sector no está libre de tensiones, dado que la forma de apertura de las diferentes capas de la pared es distinta.

Se define el ángulo de apertura como el ángulo formado por los dos radios con extremos en los puntos finales del sector, ver figura 5.28⁵. El ángulo de apertura de los vasos sanguíneos es variable dependiendo del organismo al que pertenece, la posición, el diámetro, el espesor, la remodelación del tejido (tal y como se ha indicado en la sección 5.2 del capítulo anterior), etc. En general el ángulo de apertura es mayor conforme el vaso está más curvado o presenta mayor espesor. Por ejemplo, según FUNG [1993], el ángulo de apertura usual de la arteria aorta ascendente de una rata es de 160°. En la sección se estima a partir de ensayos experimentales un ángulo de apertura de 106° para una muestra de arteria carótida humana.

En la mayor parte de los análisis se asume que el método de apertura en ángulo está libre de tensiones, con objeto de facilitar los cálculos. Otras aproximaciones consideran ángulos de apertura distintos para cada capa, por lo que la configuración global abierta no se considera libre de tensiones.

El modelo de apertura en ángulo que se ha desarrollado es de difícil aplicación en geometrías reales debido a que el resultado es sensible a la superficie de corte por la falta de simetrías (véase OGDEN [2001]), lo que precisa de un criterio que respete las condiciones de objetividad.

Por esta razón, se motivan aproximaciones basadas en aspectos mecánicos locales, evitando consideraciones globales como las simetrías. En este sentido se deben estudiar las causas de las tensiones residuales, esto es, el mecanismo de adaptación a acciones externas dirigido por la remodelación y especialmente el crecimiento.

5.8.3. Desarrollo del modelo

Se considera un estado virtual libre de tensiones \mathcal{B}_{zs} para el cual el gradiente de deformación de la configuración de referencia \mathcal{B}_0 se denota por \mathbf{F}_0 (véase la figura 5.29). Nótese que la aplicación continua de \mathcal{B}_{zs} a \mathcal{B}_0 no está garantizada (el campo \mathbf{F}_0 no es en general integrable), siendo esta la razón por la cual el estado \mathcal{B}_{zs} se denomina virtual.

⁵Este ángulo es el doble del considerado por otros autores, como Fung.

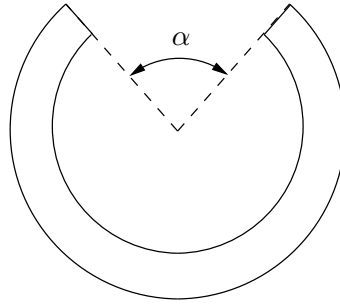


Figura 5.28: Configuración abierta de un anillo arterial

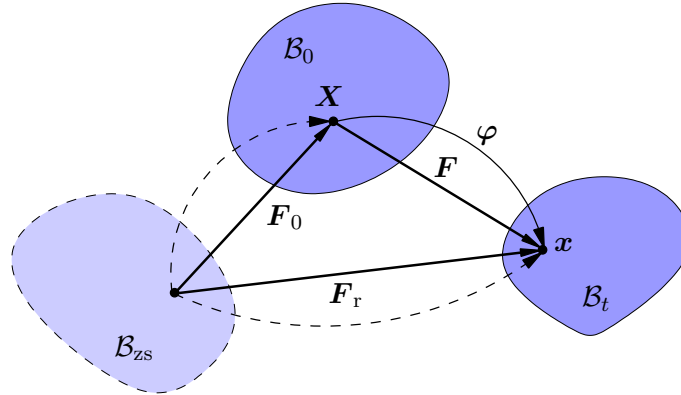


Figura 5.29: Descomposición multiplicativa por tensiones iniciales

Considerando una función de energía de deformación W en \mathcal{B}_{zs} , la tensión inicial en la configuración de referencia σ_0 es obtenida como una función de \mathbf{F}_0 . Análogamente, la tensión real total σ_r en \mathcal{B}_t se obtiene como una función del gradiente de deformación $\mathbf{F}_r = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_0$.

El equilibrio mecánico del sistema no determina en general las tensiones que producen la deformación de \mathcal{B}_{zs} a \mathcal{B}_0 , no obstante, el problema puede plantearse en \mathcal{B}_0 (donde nuevas acciones son aplicadas) considerando las ecuaciones constitutivas de la forma $\sigma(\mathbf{F}) = \sigma_r(\mathbf{F}_r) - \sigma_0$ (véase el esquema de cálculo del cuadro 5.6).

Observaciones:

- Los tensores de elasticidad para las configuraciones \mathcal{B}_0 y \mathcal{B}_{zs} , \mathbb{C} y \mathbb{C}_{zs} respectivamente, están relacionados en componentes cartesianas por

$$\mathbb{C}_{ABCD} = (\det \mathbf{F}_0)^{-1} F_{0,AP} F_{0,BQ} \mathbb{C}_{zs,PQRS} F_{0,CR} F_{0,DS},$$

lo que se justifica al ser invariante el tensor de elasticidad de la configuración deformada respecto a las configuraciones a las que venga referido.

- En el acoplamiento entre los modelos de presolicitación y de crecimiento, debe tenerse en cuenta que la ley de crecimiento viene afectada por el estado tensional real total $\boldsymbol{\sigma}_r$ y no por las tensiones $\boldsymbol{\sigma}_0$ incorporadas en la configuración de referencia \mathcal{B}_0 .

Dado el tensor gradiente de deformación \mathbf{F} y la deformación de presolicitación \mathbf{F}_0 .

1. Determinar la tensión de presolicitación,

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = (\det \mathbf{F}_0)^{-1} \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}_0} \cdot \mathbf{F}_0^T.$$

Obsérvese que dado que este paso es independiente de \mathbf{F}_0 , por lo que puede calcularse una sola vez y no en cada paso de carga.

2. Calcular el gradiente de deformación real,

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_0.$$

3. Tensión real total,

$$\boldsymbol{\sigma}_r = (\det \mathbf{F}_r)^{-1} \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}_r} \cdot \mathbf{F}_r^T.$$

4. Tensor de Cauchy para la configuración de referencia,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_r - \boldsymbol{\sigma}_0.$$

Cuadro 5.6: Esquema de cálculo del tensor de Cauchy para el modelo con presolicitación

Hipótesis acerca del estado de presolicitación

A continuación se describe un estado tensional para el material de Holzapfel, con direcciones de anisotropía \mathbf{a}_0 y \mathbf{b}_0 , que puede ser adoptado como inicial en la modelización con geometrías arbitrarias.

Dicho estado tensional está motivado por consideraciones de axilsimetría e incompresibilidad ($K \rightarrow \infty$), inducido por un gradiente de deformación de la forma $\mathbf{F} = \lambda_\theta \mathbf{u}_\theta \otimes \mathbf{u}_\theta + \lambda_z \mathbf{u}_z \otimes \mathbf{u}_z + (\lambda_\theta \lambda_z)^{-1} \mathbf{u}_r \otimes \mathbf{u}_r$, con \mathbf{u}_θ y \mathbf{u}_z vectores unitarios en las direcciones $\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0$ y $\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0$, respectivamente, y $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{u}_z$. Los alargamientos λ_θ y λ_z dependen del punto considerado en la sección transversal de la pared arterial, siendo en general λ_θ variable a lo largo del espesor, si bien λ_z puede admitirse aproximadamente constante.

El estado tensional resultante, en función de los parámetros del material $\{c, k_1, k_2, \phi\}$, es $\boldsymbol{\sigma} = (\tilde{\sigma}_\theta + \sigma') \mathbf{u}_\theta \otimes \mathbf{u}_\theta + (\tilde{\sigma}_z + \sigma') \mathbf{u}_z \otimes \mathbf{u}_z + \sigma' \mathbf{u}_r \otimes \mathbf{u}_r$, donde σ'

se encuentra indeterminado para un modelo incompresible y está relacionado con la presión por

$$\sigma' = -p + \frac{1}{3}(\tilde{\sigma}_\theta + \tilde{\sigma}_z),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_\theta &= c(\lambda_\theta^2 - (\lambda_\theta \lambda_z)^{-2}) + 4k_1 \lambda_\theta^2 \exp(k_2(\lambda_\theta^2 \sin^2 \phi + \lambda_z^2 \cos^2 \phi - 1)^2) \\ &\quad (\lambda_\theta^2 \sin^4 \phi + \lambda_z^2(\cos^2 \phi - \cos^4 \phi) - \sin^2 \phi) \quad \text{y} \\ \tilde{\sigma}_z &= c(\lambda_\theta^2 - (\lambda_\theta \lambda_z)^{-2}) + \\ &\quad 4k_1 \lambda_z^2 \cos^2 \phi \exp(k_2(\lambda_\theta^2 \sin^2 \phi + \lambda_z^2 \cos^2 \phi - 1)^2) (\lambda_\theta^2 \sin^2 \phi + \lambda_z^2 \cos^2 \phi - 1). \end{aligned}$$

Obsérvese que en general, tanto $\tilde{\sigma}_z$ como σ' son variables en el espesor.

Comentarios al modelo de presolicitud

Los estados de presolicitud habitualmente considerados son el alargamiento longitudinal y las tensiones iniciales inducidas por la presión sanguínea. No obstante, dado que las tensiones son debidas principalmente a la presión sanguínea, definir el campo de tensiones iniciales por presión en geometrías reales supone ya de por sí un problema complejo que puede exigir adoptar hipótesis que pueden invalidar el análisis posterior. Por esta razón, parece razonable que la presolicitud circunferencial sea introducida exclusivamente como estado inicial en el caso de una fuerte variación de las acciones en la arteria respecto al estado fisiológico, como puede ser el proceso de angioplastia o el de oclusión con pinza.

En la sección 6.2 se presentan resultados de la aplicación del modelo.

5.8.4. Relación entre el crecimiento y la presolicitud

En la figura 5.30 se indica la relación entre las distintas configuraciones consideradas en los fenómenos de crecimiento y de presolicitud (véanse los esquemas de las descomposiciones multiplicativas por crecimiento y por tensiones residuales de las figuras 5.4 y 5.29, respectivamente). No obstante, las configuraciones \mathcal{B}_{zs} y \mathcal{B}_g son virtuales, en el sentido de que no se les impone la verificación de la condición de compatibilidad respecto de las configuraciones «reales» \mathcal{B}_0 y \mathcal{B} . Esto es, los campos \mathbf{F}_0 y \mathbf{F}_g pueden ser cualesquiera tal que el determinante del tensor en todo punto sea positivo; no obstante, sin pérdida de generalidad, tal y como se ha comentado el campo \mathbf{F}_g se adopta de tensores de alargamiento. Obsérvese que no se impone la condición de continuidad de los campos⁶.

La relación que se establece entre los gradientes de deformación es $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_g \cdot \mathbf{F}_e$, siendo el tensor de tensiones de Cauchy función exclusiva de $\mathbf{F}_e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{F}_g^{-1}$.

⁶Al no forzarse la continuidad las leyes de crecimiento y presolicitud pueden ser independientes para cada capa de la morfología de la arteria.

Desde un punto de vista causal existen relaciones entre los fenómenos de crecimiento y de presolicitación, ya que las causas que dan lugar a este último fenómeno pueden ser:

- Acciones sobre el contorno. Entre estas acciones destaca la presión interior y los alargamientos longitudinales, ya que la geometría reconstruida a través de imágenes clínicas, dato para el problema de elementos finitos, se encuentra deformada por dichas acciones.
- Crecimiento del material en tiempos anteriores al de estudio, que provoca tensiones internas autoequilibradas. Estas tensiones tienen por origen las condiciones de compatibilidad. El uso de este modelo de presolicitación generaliza otros como el de apertura en ángulo, si bien se destaca que uno de los mayores inconvenientes es la elección del campo \mathbf{F}_0 , ya que los de comportamiento más realista son fuertemente no homogéneos.
- Otros efectos, destacándose la viscoelasticidad u otros fenómenos de disipación que generan tensiones residuales internas.

A pesar de la relación indicada entre la presolicitación y el crecimiento, aún en el caso de que \mathbf{F}_0 sea debido exclusivamente al crecimiento, en principio no se verifica la igualdad entre \mathbf{F}_0 y \mathbf{F}_g , debido a que mientras que en \mathcal{B}_0 deben verificarse las condiciones de compatibilidad, esto no ocurre en \mathcal{B}_g . En relación con esto, obsérvese además que \mathcal{B}_g está libre de tensiones, mientras que en \mathcal{B}_0 se presentan las tensiones residuales.

La idea básica del esquema de acoplamiento adoptado entre los modelos de presolicitación y crecimiento es poder independizar el conjunto de los procesos previos a la configuración inicial \mathcal{B}_0 , a través del campo invariante en el tiempo para $t > t_0$, \mathbf{F}_0 , de los fenómenos de crecimiento que tienen lugar en tiempos posteriores, a través del campo variable en el tiempo para $t > t_0$, \mathbf{F}_g . Esto es, no se considera en \mathbf{F}_g el crecimiento anterior a t_0 ya que se introduce en \mathbf{F}_0 .

Observación: Otro planteamiento para introducir las tensiones residuales provenientes del crecimiento, que se desprende de las consideraciones anteriores, consiste en definir una geometría inicial $\mathcal{B}_{-t_{\text{crec}}}$ que da lugar a \mathcal{B}_0 por crecimiento bajo sollicitaciones fisiológicas (en desplazamientos y fuerzas) en un tiempo t_{crec} . La determinación de t_{crec} viene influenciada por la velocidad de adaptación del organismo a cambios de la sollicitación fisiológica y a la velocidad de cambio de estos. No obstante, como primera aproximación puede adoptarse $t_{\text{crec}} = \infty$. La definición de la geometría en $\mathcal{B}_{-t_{\text{crec}}}$ motiva futuras investigaciones, ya que es conocida la geometría en \mathcal{B}_0 , tratándose por consiguiente de un problema inverso en el tiempo con $\mathcal{B}_{-t_{\text{crec}}} = \mathcal{B}_{-t_{\text{crec}}}(\mathcal{B}_0)$.

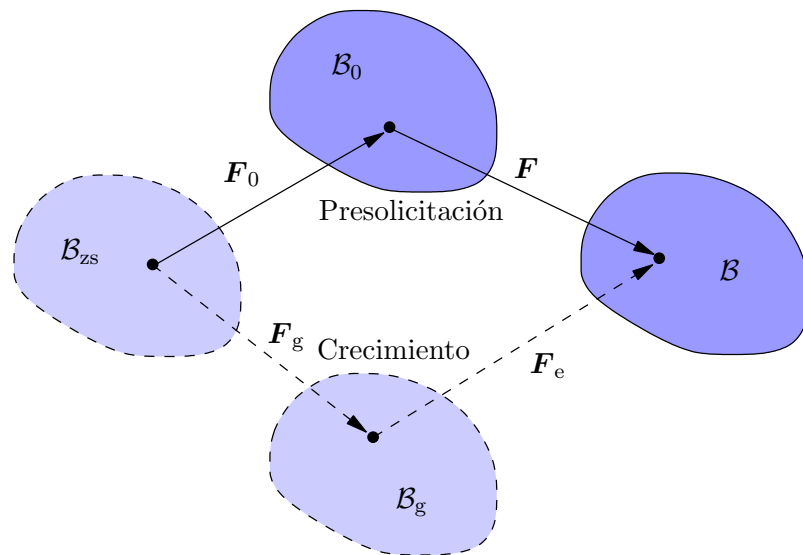


Figura 5.30: Configuraciones asociadas a los fenómenos de crecimiento y presolicitación

Capítulo 6

Aplicaciones

En este capítulo se presentan algunos casos de aplicación de los modelos de desarrollados. Estas aplicaciones son más completas que las realizadas en capítulos anteriores, las cuales tenían el doble objetivo de validar y mostrar la forma de comportamiento de los modelos.

En primer lugar (sección 6.1) se extraen parámetros de modelos hiperelásticos y viscoelásticos a partir de ensayos de laboratorio de la forma presión-diámetro, realizados sobre una arteria carótida humana con tejido muerto. Además, se estima por ensayos experimentales el ángulo de apertura (en el sentido de la sección 5.8.2) de otra muestra de arteria carótida humana.

Posteriormente (sección 6.2) se estudia la dilatación por presión interna de la arteria carótida de un conejo con geometría ideal simplificada. Se consideran diversos estados de referencia, algunos de ellos con tensiones residuales y otros sin considerarlas; además se estudia la sensibilidad a las direcciones de anisotropía (direcciones de las fibras de colágeno).

Seguidamente (sección 6.3) se analiza el comportamiento mecánico de una arteria coronaria derecha humana con geometría real (obtenida por reconstrucción de imágenes de ultrasonidos y angiografías). Además, se considera el proceso de crecimiento, que genera a su vez tensiones residuales.

Por último (sección 6.4) se desarrolla un modelo de estenosis inducida por variación de tensiones tangenciales.

6.1. Ajuste de modelos a partir de experimentos

En este apartado se ajustan modelos a los resultados obtenidos por el ensayo de arterias con tejido muerto (se conservó congelado) en el Departamento de Ciencia de Materiales de la E.T.S.I. Caminos, C. y P. de la Universidad Politécnica de Madrid.

Primeramente, en la sección 6.1.1 se ajustan modelos de material a los ensayos mecánicos. Posteriormente, en la sección 6.1.2 se estima el ángulo de apertura de una muestra. En ambos estudios las arterias consideradas son carótidas humanas ensayadas a una temperatura de 37°.

6.1.1. Metodología y resultados del ajuste mecánico

Resultados experimentales. En el laboratorio del Departamento de Ciencia de Materiales se han llevado a cabo ensayos mecánicos de las siguientes arterias humanas, que se conservaron congeladas (véase ATIENZA ET AL. [2003]):

- *Arteria carótida.* Sale de la aorta y sube por el cuello hasta la base del cráneo.
- *Arteria esplénica.* Nace en el tronco celíaco y lleva la sangre al bazo.
- *Arteria mamaria.* Sale de la arteria subclavia y recorre todo el peto costal.
- *Arteria mesentérica.* Lleva la sangre al intestino.

Las imágenes histológicas de una muestra de arteria carótida y de otra de arteria esplénica se muestran en la figura 6.1.

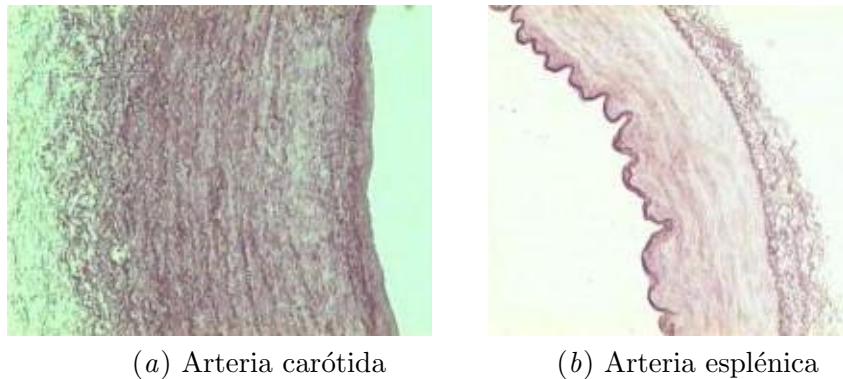


Figura 6.1: Estructuras de las arterias carótida (a) y esplénica (b)

Los ensayos consistían en la introducción de presiones internas de forma cíclica (hasta alcanzar un ciclo aproximadamente *estabilizado*), registrándose por métodos ópticos el diámetro durante el proceso de carga. Durante la realización de los ensayos las muestras se han mantenido sumergidas en un líquido en circulación que reproduce el estado fisiológico. En las figuras 6.2, 6.3 y 6.4 se muestran fotografías de los ensayos.

Los ensayos se realizaron para distintas temperaturas (22°, 27°, 37° y 42°). El cuadro 6.1 muestra los diámetros iniciales en reposo de algunas de



Figura 6.2: Dispositivo de ensayos



Figura 6.3: Ensayo de la arteria carótida

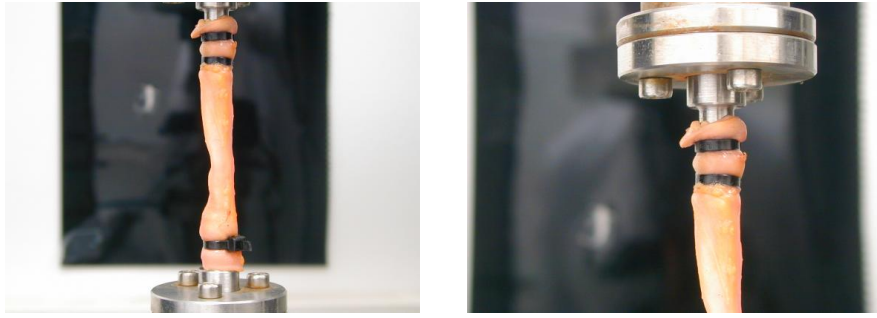


Figura 6.4: Detalles de la sujeción de la muestra

las muestras ensayadas para distintas temperaturas, observándose que todos los vasos reducen su tamaño al aumentar la temperatura (lo que equivale a *coeficientes de dilatación* negativos). Algunos de los resultados para las distintas tipologías de arterias se muestran en la figura 6.5. En dicha figura se observa que la arteria carótida (con mayor contenido de *elastina*) presenta una curva menos rígida que las correspondientes a la arteria esplénica (*músculo-elástica*) y a las arterias mamaria y mesentérica (*musculares*).

Temperatura	17°	27°	37°
Carótida	8,25 mm	8,04 mm	7,92 mm
Mesentérica	4,65 mm	4,59 mm	4,54 mm
Mamaria	2,39 mm	2,30 mm	2,18 mm
Esplénica	8,10 mm	7,50 mm	7,07 mm

Cuadro 6.1: Diámetros en reposo de algunas muestras ensayadas

En la figura 6.6 se presenta la evolución de la presión con el alargamiento radial bajo distintas temperaturas para la arteria carótida, observándose que la disminución de la temperatura rigidiza notablemente la respuesta. El diámetro inicial de la muestra ensayada fue 7,64 mm, y el espesor de la media 226 μm , representando aproximadamente dos tercios del espesor total. Los ajustes se han realizado para el ensayo correspondiente a la temperatura de 37°, en cuyo ciclo se registraron 23 puntos presión-alargamiento radial.

Hipótesis adoptadas. En el ajuste de los modelos se ha supuesto una configuración axilsimétrica donde el espesor es mucho menor respecto al diámetro, siendo la tensión circunferencial constante en toda la pared. Por tanto, se supone (fórmula de los *tubos delgados*)

$$\sigma_{\theta} = \frac{Pr}{e},$$

siendo P la presión, r el radio y e el espesor.

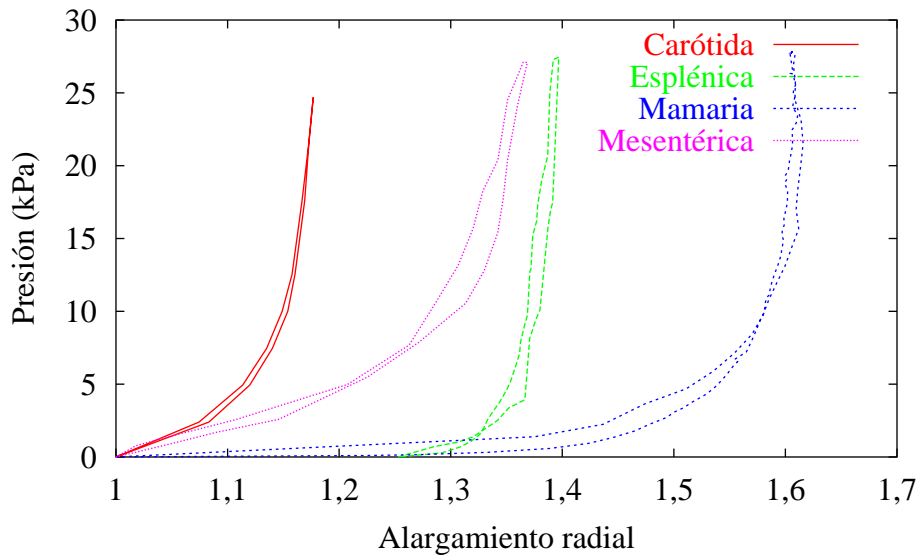


Figura 6.5: Resultados experimentales sobre distintas tipologías arteriales

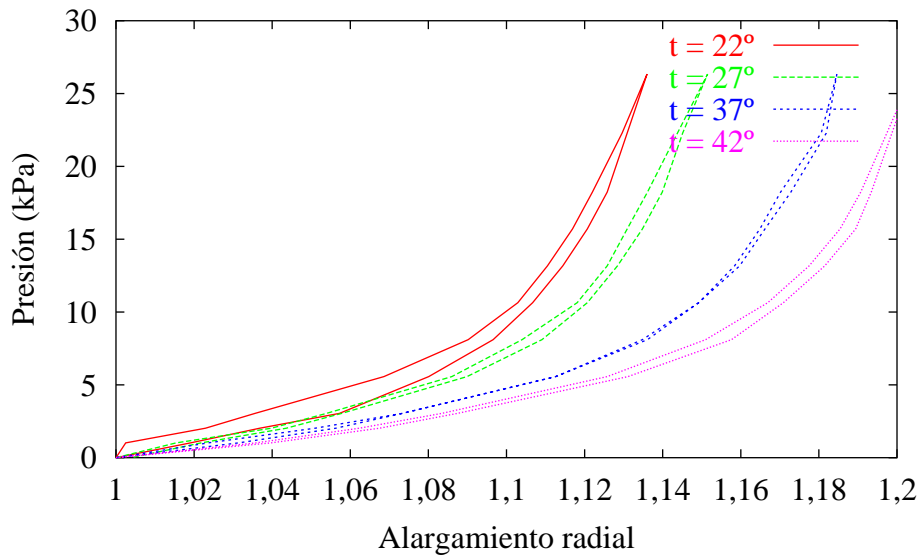


Figura 6.6: Evolución de la presión con el alargamiento radial para distintas temperaturas

Otra hipótesis que se ha considerado es que el material es incompresible, $\lambda_\theta \lambda_r \lambda_z = 1$. La presión interna

$$P = -\frac{1}{3}(\sigma_\theta + \sigma_r + \sigma_z)$$

es indeterminada al imponerse la restricción cinemática de incompresibilidad, adoptándose el valor que resulta de añadir la hipótesis adicional $\sigma_r = 0$.

Estas consideraciones permiten determinar la presión en función del alargamiento circunferencial λ y de los parámetros del modelo de material $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, esto es, $P = \hat{P}(\lambda; p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Método general de ajuste. El ajuste se ha realizado buscando el mínimo de la función de error

$$\epsilon = \sum_{a=1}^n \left(P_a - \hat{P}(\lambda_a; p_1, p_2, \dots, p_n) \right)^2,$$

siendo n el número de puntos registrados en el proceso de carga. Las magnitudes que intervienen en cada punto a son el alargamiento circunferencial λ_a , determinado como la relación entre el diámetro exterior en ese instante y el inicial, y la presión aplicada P_a .

El mínimo de la función de error, supuesta la no existencia de restricciones adicionales como que un subconjunto de los parámetros sea entero, se determina buscando los valores de los parámetros tales que

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial p_a} = 0, \quad a = 1, 2, \dots, n.$$

Esto se realizó con la aplicación para cálculo numérico y simbólico Maple (véase GARVAN [2002]).

Ajuste del modelo isótropo de Ogden. Las hipótesis indicadas anteriormente permiten determinar la presión como

$$P = \frac{e_0}{r_0} \sum_{p=1}^3 \mu_p (\lambda^{\alpha_p - 2} - \lambda^{-\alpha_p - 2}).$$

El mínimo de la función de error se obtuvo para los exponentes enteros $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 11$ y $\alpha_3 = 48$ y para los coeficientes $\mu_1 = -113,787$ kPa, $\mu_2 = 30,451$ kPa y $\mu_3 = 0,073$ kPa. Se obtuvo un error global de ajuste, tal y como se ha definido anteriormente, $\epsilon = 4,065$ kPa². Los resultados obtenidos con el método de ajuste propuesto se presentan gráficamente en la figura 6.7.

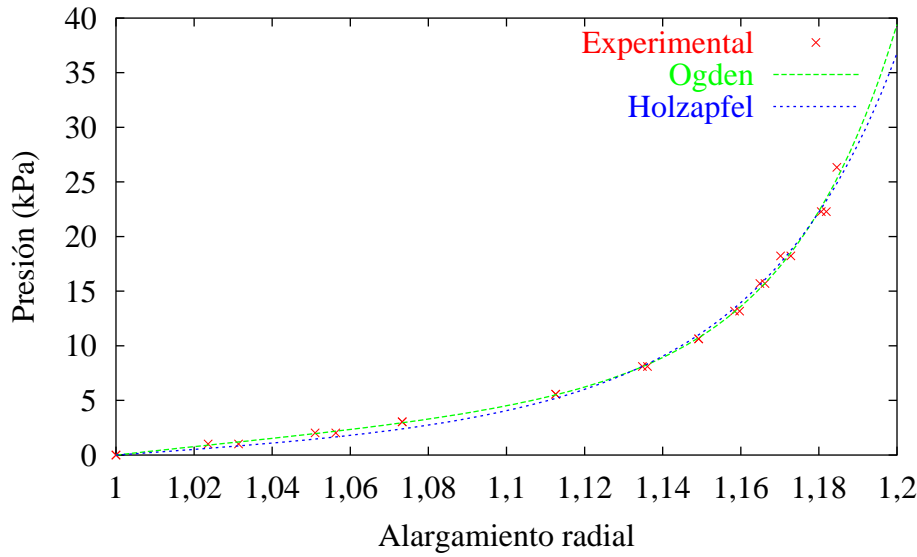


Figura 6.7: Ajuste de los modelos isotrópico de Ogden y anisótropo de Holzapfel

Ajuste del modelo anisótropo de Holzapfel. En este caso, la relación entre la presión y el alargamiento es

$$p = \frac{e_0}{r_0} (c(1 - \lambda^{-4}) +$$

$$4k_1 \exp(k_2(\lambda^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi - 1)^2) (\lambda^2 \sin^4 \phi + \cos^2 \phi - \cos^4 \phi - \sin^2 \phi)).$$

Se ha supuesto un ángulo de las fibras de colágeno $\phi = 80^\circ$. Por otra parte, el ajuste se ha realizado en primer lugar para k_1 y k_2 fijando $c = 0$ para pasar posteriormente a fijar los valores de k_1 y k_2 obtenidos en esa fase y optimizar c . Este método se ha llevado a cabo con objeto de dar mayor importancia a los parámetros de anisotropía (relacionados micromecánicamente con las fibras de colágeno), ya que presentan más importancia que el parámetro de isotropía (relacionado con el efecto de la matriz). Se espera que el método obtenga una estimación de los parámetros para estados de sollicitación arbitrarios.

Los valores de los parámetros obtenidos son

$$k_1 = 37,228 \text{ kPa}, \quad k_2 = 10,46, \quad \phi = 80^\circ \quad \text{y} \quad c = 1,151 \text{ kPa}. \quad (6.1)$$

El error resultante es $\epsilon = 6,608 \text{ kPa}^2$.

Ajuste de la viscoelasticidad generalizada de Maxwell. Se ajusta un modelo de viscoelasticidad generalizada de Maxwell considerando como caso límite un modelo hiperelástico de Holzapfel, según la metodología de la sección 4.1.4. Los parámetros considerados en la función de densidad de energía ajustada al ciclo son los presentados en (6.1).

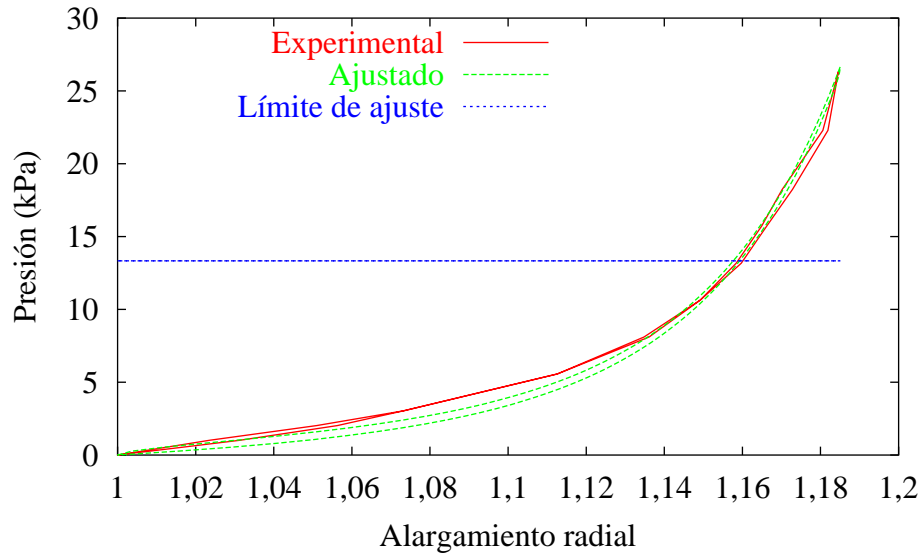


Figura 6.8: Ajuste del modelo generalizado de viscoelasticidad de Maxwell

Se admite que la velocidad de realización de los ensayos fue $v_P = 2 \text{ mmHg/s}$. Para el ajuste, se adoptó como estado representativo del material el asociado a la mayor presión del ensayo, esto es, $P_{\text{fis}} = 26,67 \text{ kPa}$ y $\lambda_{\theta, \text{fis}} = 1,1846$. Los puntos muestrales utilizados en el ajuste se corresponden con el semi-intervalo superior de presiones, esto es, $P > 13,33 \text{ kPa}$. La razón de desechar el intervalo inferior se debe a la falta de precisión observada en esa zona (obsérvese que dado que los datos experimentales que se introducen en el ajuste son las diferencias de los alargamientos medidos, la precisión exigible al ajuste de la viscoelasticidad es superior a la asociada al ajuste de los modelos hiperelásticos).

Se ajustó una pareja de parámetros viscoelásticos, $\tau = 2,114 \text{ s}$ y $\beta^\infty = 0,470$, con un factor de proporcionalidad de la función densidad de energía a tiempo infinito W^∞ respecto a la obtenida en el ciclo W^c de valor $f = 0,635$. Por tanto, los parámetros del material hiperelástico de Holzapfel a tiempo infinito son $k_1 = 23,640 \text{ kPa}$, $k_2 = 10,46$, $\phi = 80^\circ$ y $c = 0,731 \text{ kPa}$.

El ajuste se presenta gráficamente en la figura 6.8. No obstante, destaca que los resultados experimentales considerados en el ajuste provienen de ensayos que no fueron diseñados para el estudio de la viscoelasticidad, lo que disminuye la fiabilidad del modelo ajustado.

Comentarios a los ajustes. Se han presentado los resultados del ajuste de los modelos hiperelásticos isótropo de Ogden y anisótropo de Holzapfel. Los ajustes obtenidos con ambos modelos producen errores globales del mismo orden de magnitud, no obstante, bajo dominios de sollicitación mayores (por ejemplo sollicitaciones multiaxiales) es esperable que el modelo que muestre

un mejor ajuste sea el de Holzapfel.

Si se busca una mayor precisión de los efectos viscosos, sería aconsejable la realización de ensayos específicos, en particular ensayos de fluencia y relajación.

6.1.2. Metodología y ajuste del ángulo de apertura

En este apartado se estiman, a partir de fotografías digitales, propiedades geométricas de una muestra de arteria carótida humana sumergida en un líquido que reproduce el estado fisiológico. Se admite la hipótesis de que la muestra ensayada es de longitud suficiente como para que no se produzcan efectos globales por los fenómenos de daño a los que es sometido el material en el proceso de corte del segmento arterial.

En primer lugar se determina el diámetro exterior y el espesor de la muestra. Posteriormente se corta la muestra longitudinalmente con objeto de medir el ángulo de apertura inducido por la presencia de tensiones residuales (véase la sección 5.8.2), este estudio constituye el aspecto fundamental del apartado.

Estimación del diámetro exterior y espesor en reposo. La estimación se a realizado a partir de la fotografía de la figura 6.9. En dicha figura se han determinado puntos en los contornos interior¹ y exterior del lado apoyado en el portamuestras, definiendo dos poligonales. La poligonal interior es cerrada, mientras que la poligonal exterior es abierta al no ser visible en la fotografía parte del perímetro exterior de la sección apoyada.

Las escalas (horizontal y vertical) de las medidas asociadas a la imagen respecto a las medidas reales se han determinado a partir de la cuadrícula del portamuestras. En partir, se han considerado los puntos A , B y C , siendo la distancia de A a B y de A a C de 3 mm.

Se ha ajustado una circunferencia a cada poligonal por el siguiente procedimiento:

1. Cálculo de la pareja de vértices que se encuentra a mayor distancia en la poligonal. El centro de la circunferencia ajustada se adopta en el punto medio de ambos puntos (véase la figura 6.10).
2. El diámetro se determina minimizando la función de error obtenida como suma de las distancias al cuadrado de los puntos de la poligonal a la circunferencia, introduciendo un peso para cada punto correspondiente a la suma de las longitudes de las aristas con las que comunica (véase el error en función del diámetro para el ajuste del contorno exterior en

¹Se destaca que el contorno interior en la sección de estudio limitaba una capa *gelatinosa* de bajas propiedades mecánicas, dificultando la determinación del espesor de incidencia mecánica.

la figura 6.11). El método de minimización utilizado es el de la sección áurea (véase INFANTE [1991]).

El algoritmo presentado ha sido implementado en C++, obteniéndose los diámetros interior y exterior de 4,20 mm y 8,46 mm, respectivamente. La distancia entre ambos centros es de 0,55 mm. Aproximando el espesor como la diferencia de radios se obtiene un valor de 2,13 mm, no obstante, la identificación de los espesores de cada capa motiva un análisis histológico.

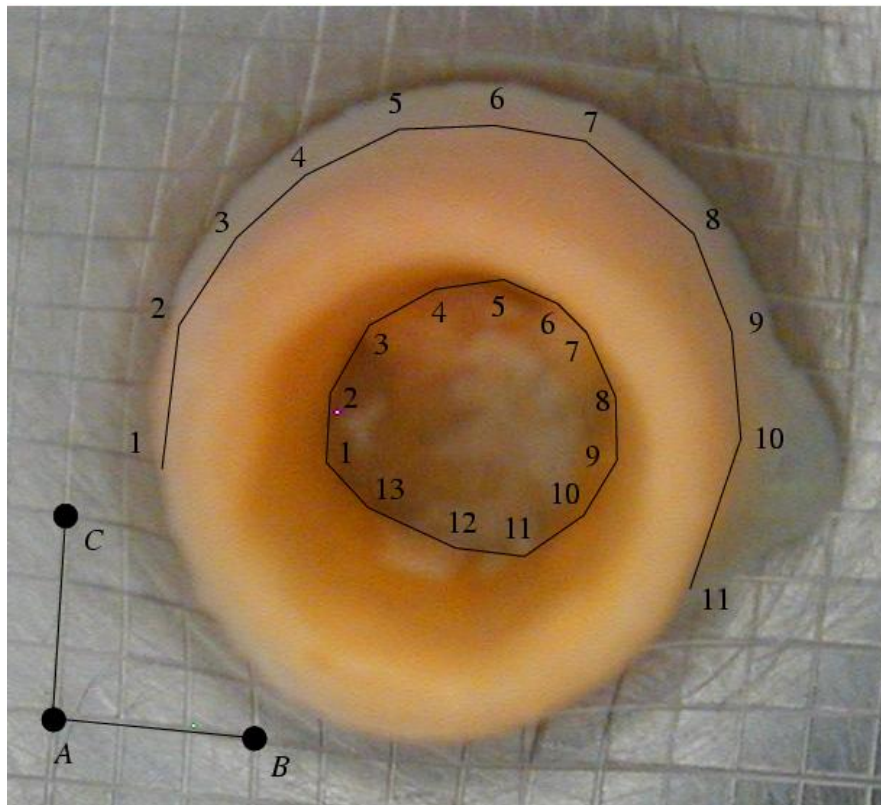


Figura 6.9: Imagen de la muestra cerrada y poligonales dato de los ajustes

Estimación del ángulo de apertura. La estimación se ha realizado a partir de la imagen de la figura 6.12. En dicha figura se han determinado puntos correspondientes al contorno interior de la sección apoyada en el portamuestras.

Las escalas de las medidas asociadas a la imagen respecto a las reales se han determinado de forma análoga a la descrita en el caso de la muestra cerrada.

Se ha ajustado un arco de circunferencia a la poligonal por el siguiente procedimiento (otros métodos se recogen en DOSCH ET AL. [2000]):

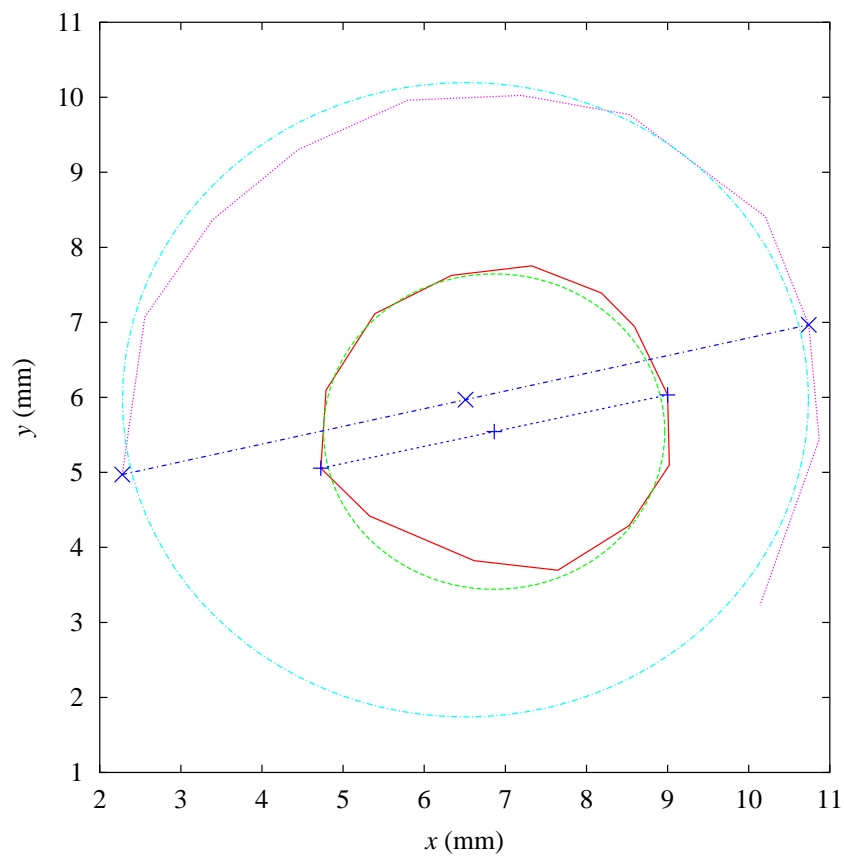


Figura 6.10: Ajuste de los contornos de la muestra cerrada

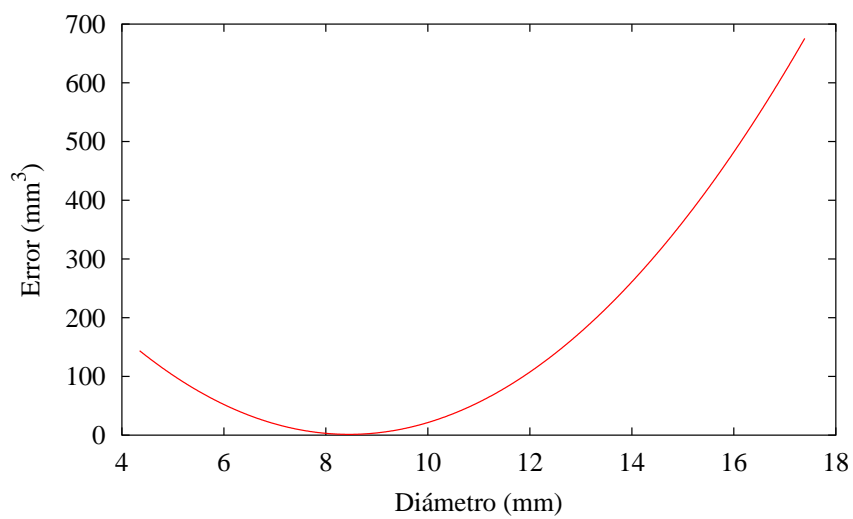


Figura 6.11: Error del ajuste del contorno exterior de la muestra cerrada

1. Cálculo del punto medio M de los puntos extremos de la poligonal. Se adopta que los centros de los arcos de circunferencia admisibles pertenezcan a la recta e que pasa por M y es perpendicular a la cuerda que une los extremos indicados (véase la figura 6.12).
2. La distancia del centro del arco de la circunferencia óptima a M se determina minimizando una función de error análoga a la descrita para las estimaciones con la arteria cerrada (véase el error en función de la distancia a M en la figura 6.14).

Este algoritmo (implementado en C++) determinó un diámetro de arco de 8,03 mm y un ángulo de apertura de 106° . En la fotografía se observa el despegue de parte de la masa *gelatinosa* que rodeaba a la muestra tanto interior como exteriormente.

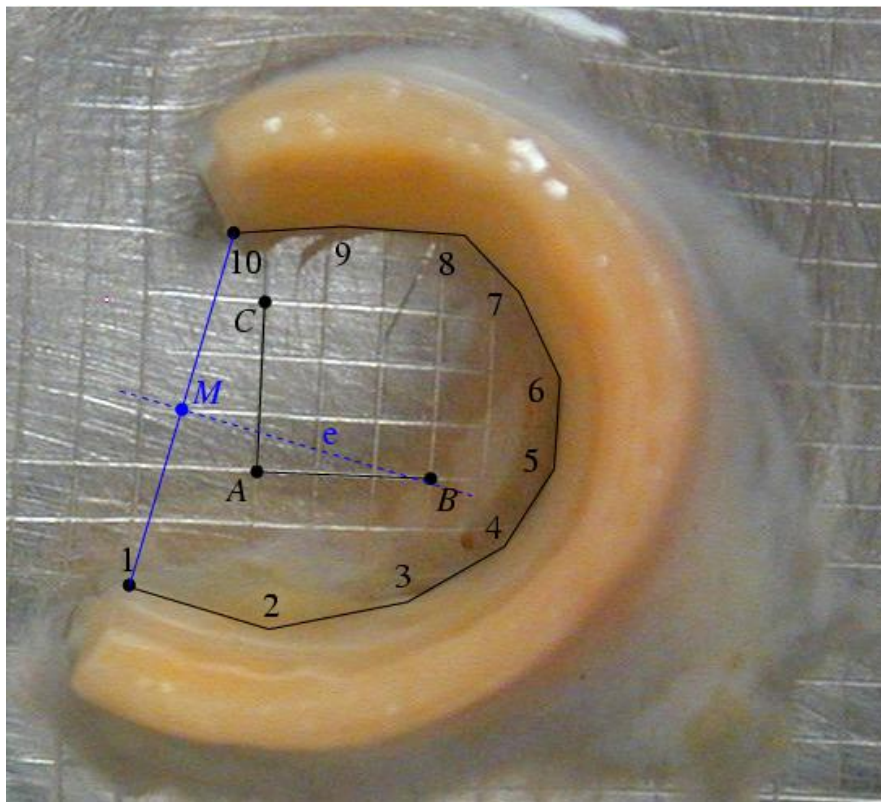


Figura 6.12: Imagen de la muestra abierta y poligonal dato del ajuste

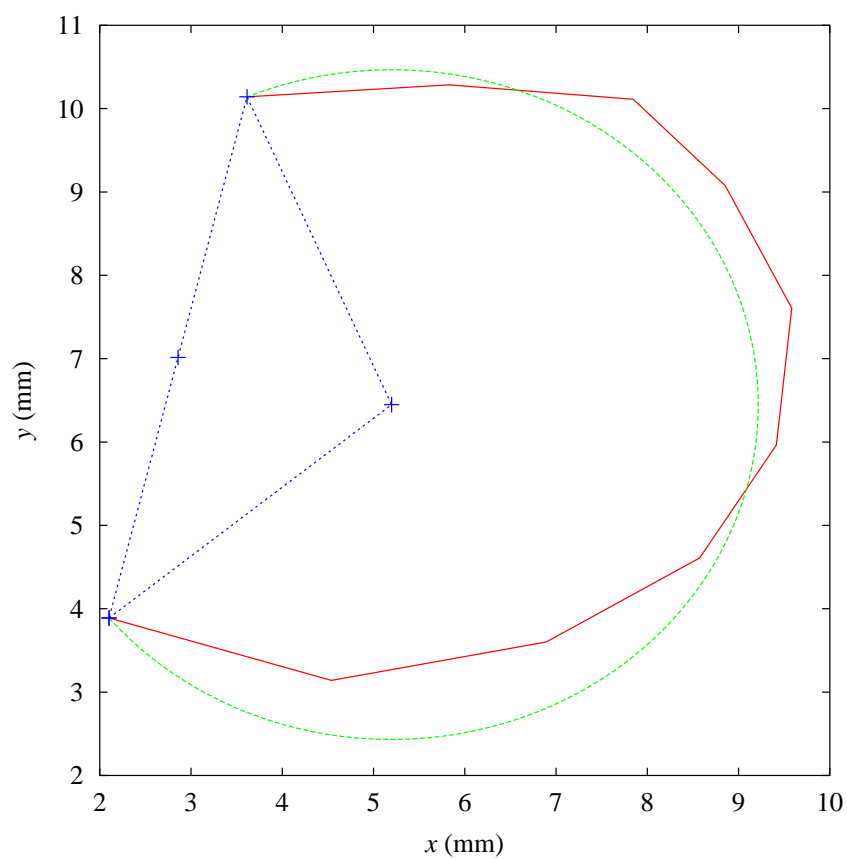


Figura 6.13: Ajuste del contorno interior de la muestra abierta

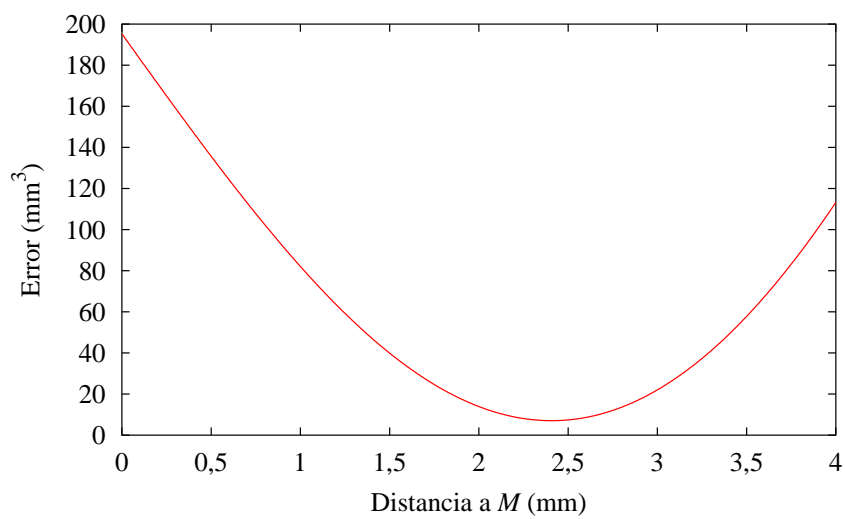


Figura 6.14: Error del ajuste del contorno interior de la muestra abierta

6.2. Aplicación en geometrías simplificadas con tensiones residuales

Este apartado tiene por objeto el estudio del ensayo de dilatación por presión interna de la arteria carótida de un conejo (considerado en la sección 3.3.5) comparando los resultados que se obtienen considerando y sin considerar tensiones residuales, y para distintos alargamientos longitudinales. El método inicial de introducción de tensiones residuales (sección 6.2.1) es el de apertura en ángulo presentado en la sección 5.8.2, no obstante, posteriormente (sección 6.2.2) se comparan los resultados respecto a la introducción de las tensiones residuales longitudinales con el modelo de presolicitación local desarrollado en la sección 5.8.3.

6.2.1. Desarrollo del modelo

En este apartado se completa el modelo de arteria carótida de un conejo analizado en la sección 3.3.5 introduciendo tensiones residuales longitudinales y circunferenciales a través del método de apertura en ángulo (véase HÖLZAPFEL [2001]). Se adoptan la geometría y propiedades de los materiales de la figura 3.24 (página 82) considerando dos situaciones, una de ellas sin tensiones residuales ($\alpha = 0^\circ$) y otra con las tensiones residuales correspondientes a un ángulo de apertura $\alpha = 160^\circ$. El radio interior para $\alpha = 160^\circ$ se adopta de valor 1,43 mm, lo que se corresponde con el radio interior obtenido en el instante de cierre de 0,71 mm.

El problema se ha analizado modelizando una mitad de la arteria, con objeto de aprovechar la simetría, siendo la malla utilizada y la configuración inicial las representadas en la figura 6.15 (los dibujos se presentan haciendo una simetría respecto del eje vertical).

La acción introducida en el anillo se puede descomponer en dos fases:

1. Introducción de tensiones residuales a través de los procesos simultáneos:
 - a) Alargamiento longitudinal (de valor 1,5, 1,6, 1,7, 1,8 y 1,9, para los distintos casos considerados).
 - b) Cierre circunferencial por desplazamientos horizontales impuestos en los extremos del sector.

Se llega a la configuración de la figura 6.16 (a).

2. Proceso de dilatación por presión interna hasta la configuración final esquematizada en la figura 6.16 (b).

Los valores de las tensiones principales máximas para un alargamiento longitudinal $\lambda_z = 1,5$ en el instante de cierre se recogen en la figura 6.17, y para una presión de 20,83 kPa (correspondiente a un radio interno de

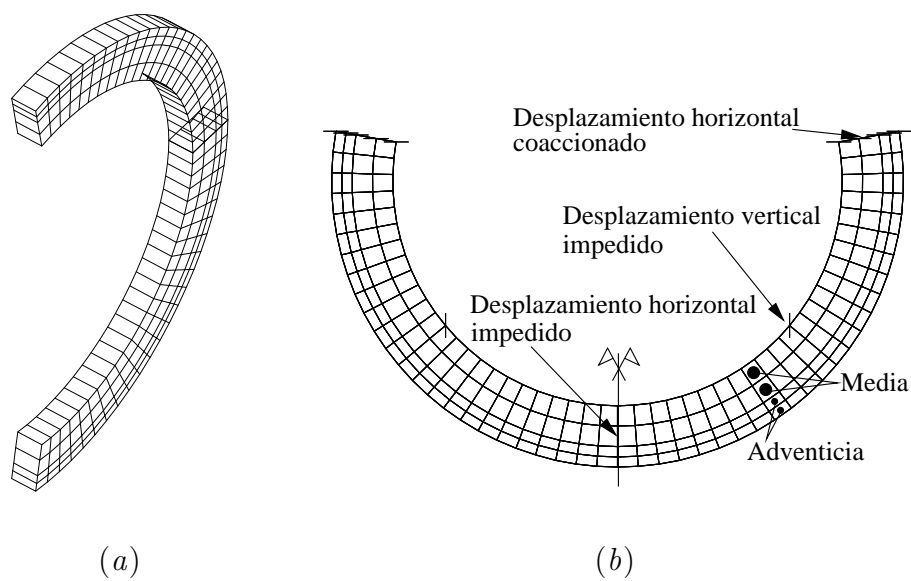


Figura 6.15: (a) Perspectiva simetrizada de la malla utilizada. (b) Configuración inicial

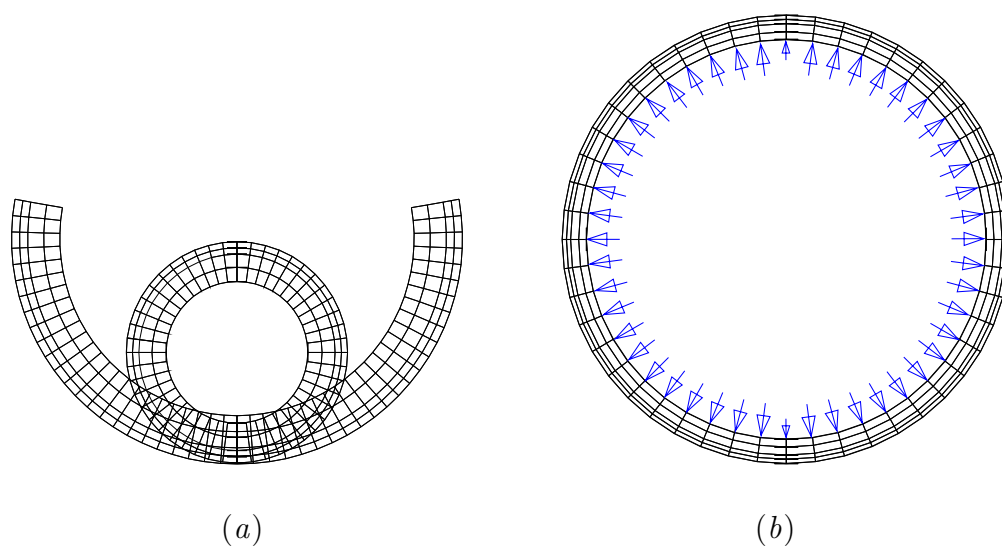


Figura 6.16: (a) Cierre del sector arterial. (b) Proceso de inflado por presión

1,37 mm) en la figura 6.18. Puede observarse que la tensión principal mayor (correspondiente a la dirección longitudinal) se encuentra en el perímetro exterior para el instante de cierre, mientras que a presión de 20,83 kPa (correspondiente a la dirección circunferencial) la tensión principal mayor se encuentra en el perímetro interior.

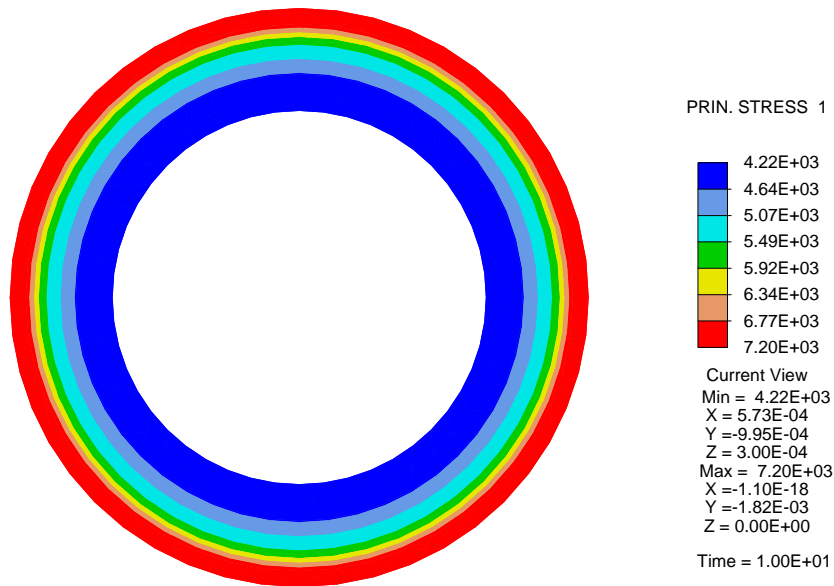


Figura 6.17: Tensiones principales máximas (longitudinales) en el instante de cierre para $\lambda_z = 1,5$ (Pa)

La evolución de la presión interna con el radio interno para los distintos alargamientos longitudinales considerados se presenta en la figura 6.19 en el caso de tensiones residuales correspondientes a $\alpha = 160^\circ$, y en la figura 6.20 para la situación sin tensiones residuales. Análogamente, la evolución del esfuerzo axial (integral de las tensiones longitudinales en la sección) se presenta en las figuras 6.21 y 6.22.

La comparación de los gráficos anteriores permite afirmar que para incrementos del radio interno de aproximadamente un 40 % la consideración de las tensiones residuales no produce diferencias significativas, mientras que por encima de dicho porcentaje el caso de tensiones residuales presenta un comportamiento más flexible respecto al que no las tiene en cuenta (ver figuras 6.23 y 6.24), lo que reduce la velocidad de propagación de ondas en la sangre, como ya se ha indicado en la sección 5.8.1 (véase CHAUDHRY ET AL. [1996]).

Sensibilidad a las direcciones de las fibras de colágeno. Se han realizado ensayos numéricos con objeto de mostrar la sensibilidad a las direcciones de las fibras de colágeno. Este estudio se considera de importancia

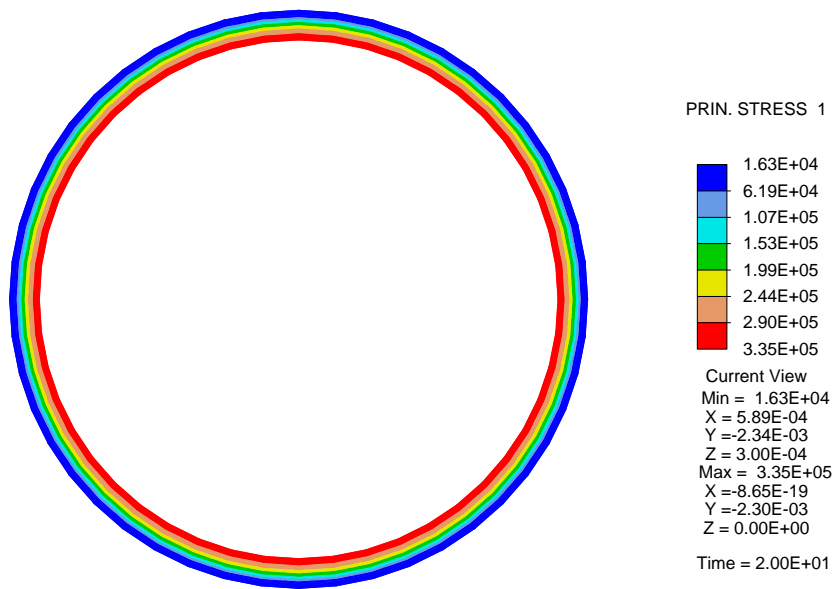


Figura 6.18: Tensiones principales máximas (circunferenciales) para una presión de 20,83 kPa (correspondiente a un radio interno de 1,37 mm), con $\lambda_z = 1,5$ (Pa)

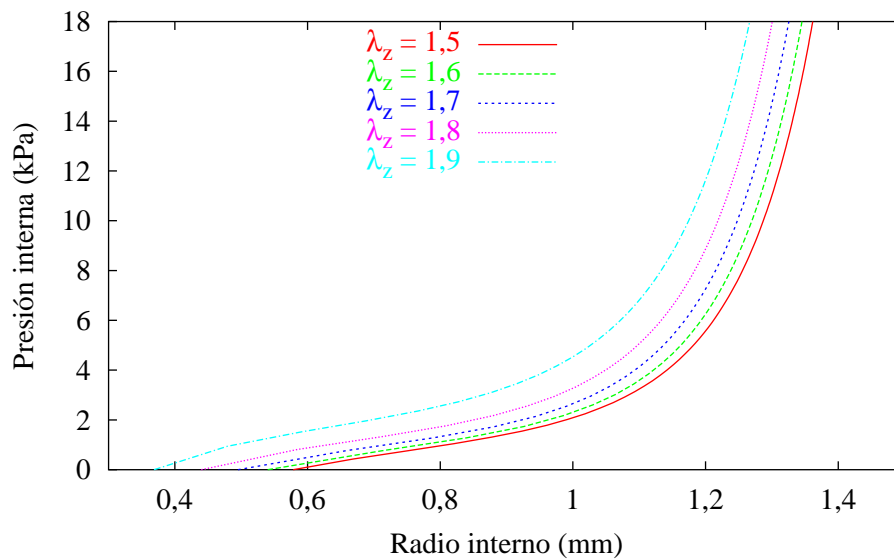


Figura 6.19: Evolución de la presión interna con el radio interno para $\alpha = 160^\circ$

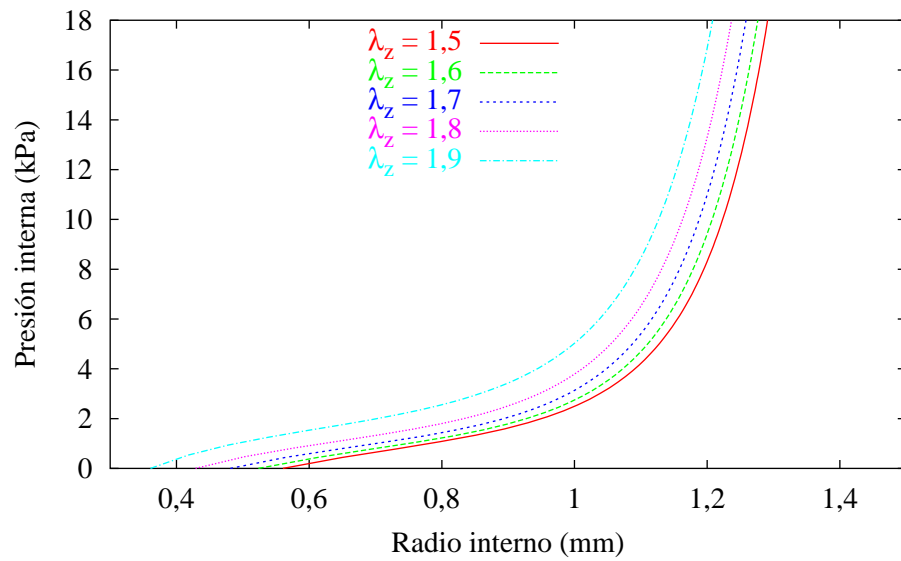


Figura 6.20: Evolución de la presión interna con el radio interno sin tensiones residuales circunferenciales

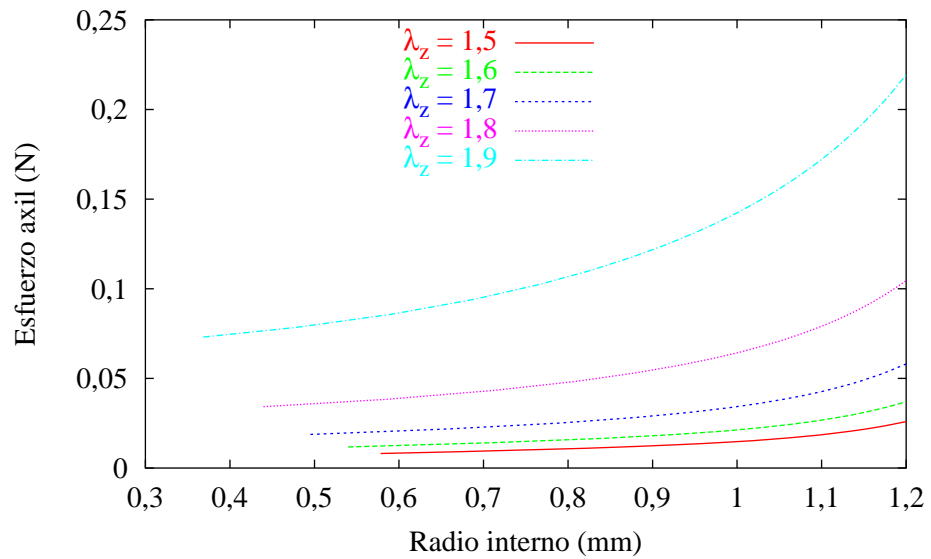


Figura 6.21: Evolución del esfuerzo axial con el radio interno para $\alpha = 160^\circ$

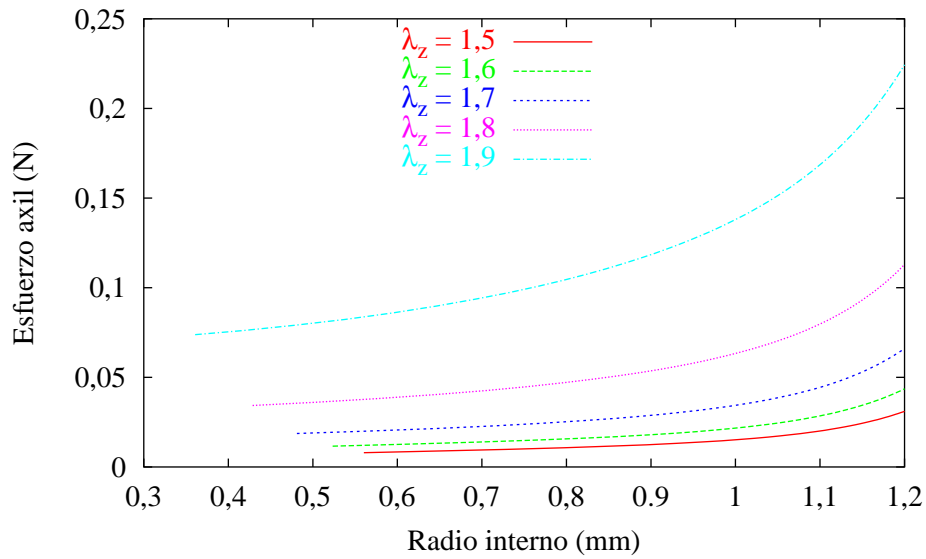


Figura 6.22: Evolución del esfuerzo axial con el radio interno sin tensiones residuales circunferenciales

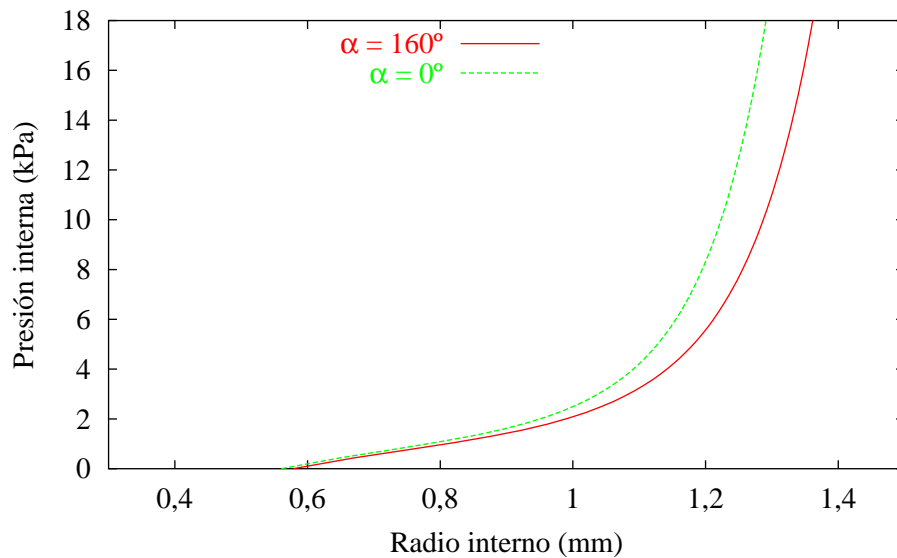


Figura 6.23: Evolución de la presión interna con el radio interno. Comparación de los casos con y sin tensiones residuales circunferenciales para $\lambda_z = 1,5$

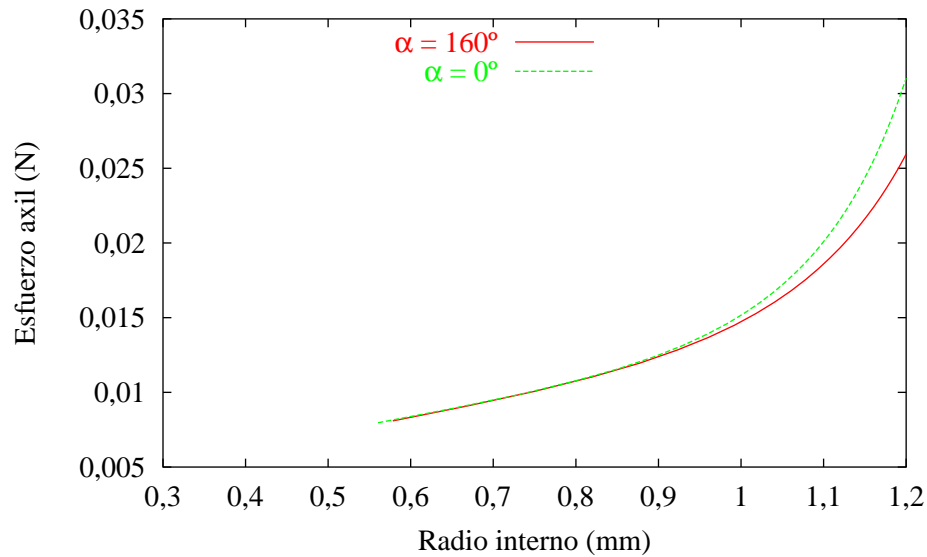


Figura 6.24: Evolución del esfuerzo axial con el radio interno. Comparación de los casos con y sin tensiones residuales circunferenciales para $\lambda_z = 1,5$

dada la dificultad de la determinación in-vivo de dichas direcciones (véase la sección 1.6.1).

En particular, el estudio se ha realizado considerando tensiones residuales circunferenciales y un alargamiento longitudinal $\lambda_z = 1,5$. Dado que el comportamiento mecánico de la arteria viene influenciado principalmente por la media, se modifican únicamente las direcciones de anisotropía de dicha capa (manteniendo los parámetros de material k_1 y k_2 , lo que equivale desde un punto de vista micromecánico a mantener la misma cantidad de fibras). Los ángulos considerados son 56° , 61° y 66° .

Los resultados se presentan en las figuras 6.25 y 6.26. Se observa que se presentan mayores diferencias (muy significativas) en la evolución de esfuerzo axial que en la evolución de la presión interior (lo que se puede justificar al ser $\phi > 45^\circ$).

6.2.2. Incorporación del modelo de presolicitación

Con objeto de validar el modelo de presolicitación en la configuración de referencia (véase la sección 5.8.3) se analizan los casos siguientes:

- a) *Sin presolicitación en la configuración de referencia.* Problema analizado en la sección anterior, considerando un ángulo de apertura nulo ($\alpha = 0$) y un alargamiento longitudinal inicial de 1,5. Este problema se resolvió en dos fases, en una primera fase se introduce el alargamiento longitudinal, mientras que en la segunda fase se impone la presión interna.

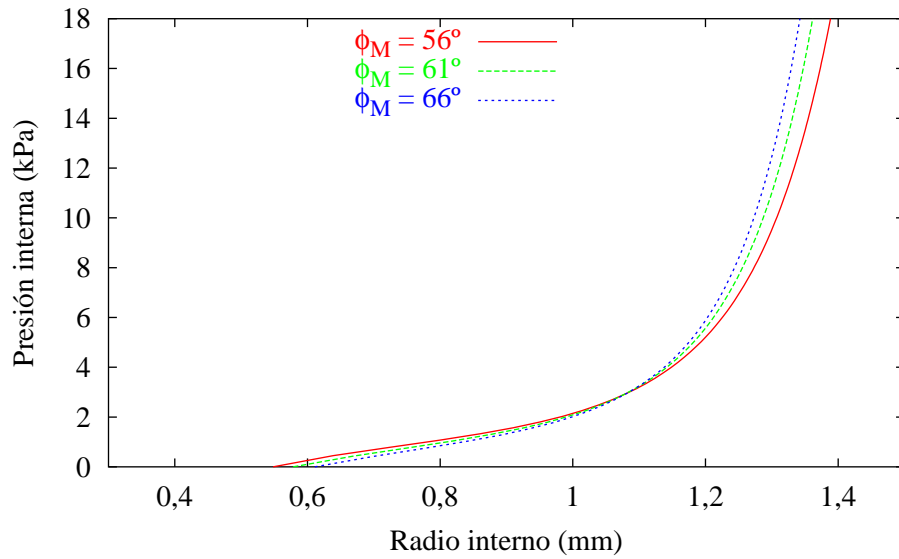


Figura 6.25: Evolución de la presión con el radio interno para distintos ángulos de las direcciones de anisotropía en la media.

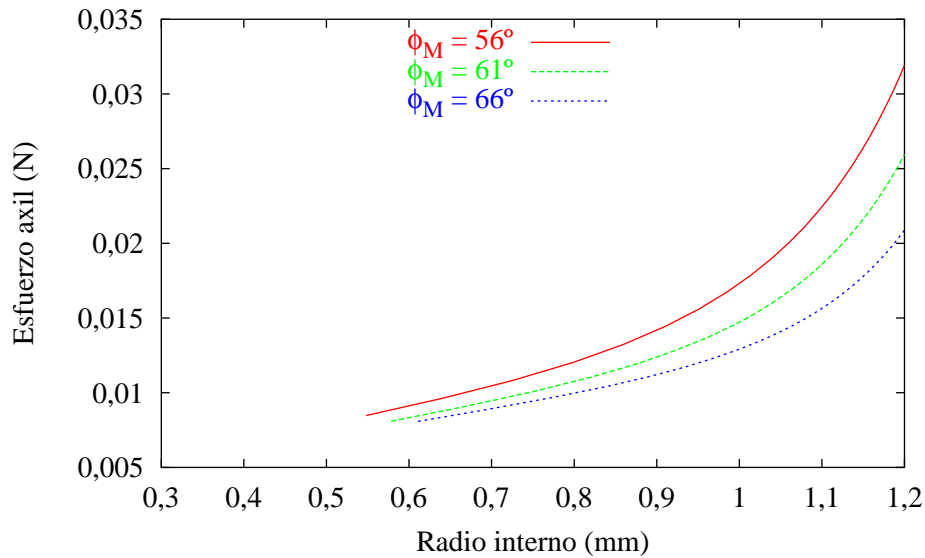


Figura 6.26: Evolución del esfuerzo axial con el radio interno para distintos ángulos de las direcciones de anisotropía en la media.

- b) Con presolicitud en la configuración de referencia.* En este caso el proceso completo se realiza en una sola fase, disponiendo la presión interna. La tensión residual longitudinal se introduce a través del modelo de presolicitud local de la sección 5.8.4. Además, se impone un alargamiento circunferencial inicial inducido por el longitudinal. Se destaca que en esta metodología la configuración inicial no se corresponde con la del caso *a)*, sino con la geometría final de la primera fase de éste.

Obsérvese que los dos casos considerados no son equivalentes. Esto se debe a que en el caso *a)*, las tensiones circunferenciales al final de la primera fase son variables entre las capas (media y adventicia) y dentro de cada una de ellas, mientras que en el caso *b)* se han introducido alargamientos constantes en todo el espesor.

El problema inicial que se plantea es determinar el alargamiento circunferencial inicial del caso *b)*. Este valor no debe considerarse la unidad, ya que el proceso de estiramiento longitudinal produce variaciones en los alargamientos transversales, que en el caso de un material isótropo (o con isotropía transversal en dirección longitudinal) pasan a ser $\sqrt{\lambda_z^{-1}}$, debido a la condición de incompresibilidad. El valor que se ha adoptado es el obtenido en la fibra interna en el instante final de la primera fase del caso sin solicitud, correspondiente a $\lambda_\theta = 0,785$ (en la fibra externa se obtuvo $\lambda_\theta = 0,803$). La razón de considerar la fibra interna es que la importancia mecánica de la capa media (interna) es superior a la de la adventicia. Además, la geometría adoptada en el caso con solicitud corresponde con la del instante indicado.

Los resultados obtenidos se presentan en la figura 6.27. Tal y como parece razonable, se observa que conforme aumenta la presión, se disminuye la sensibilidad a la distribución de las tensiones residuales circunferenciales.

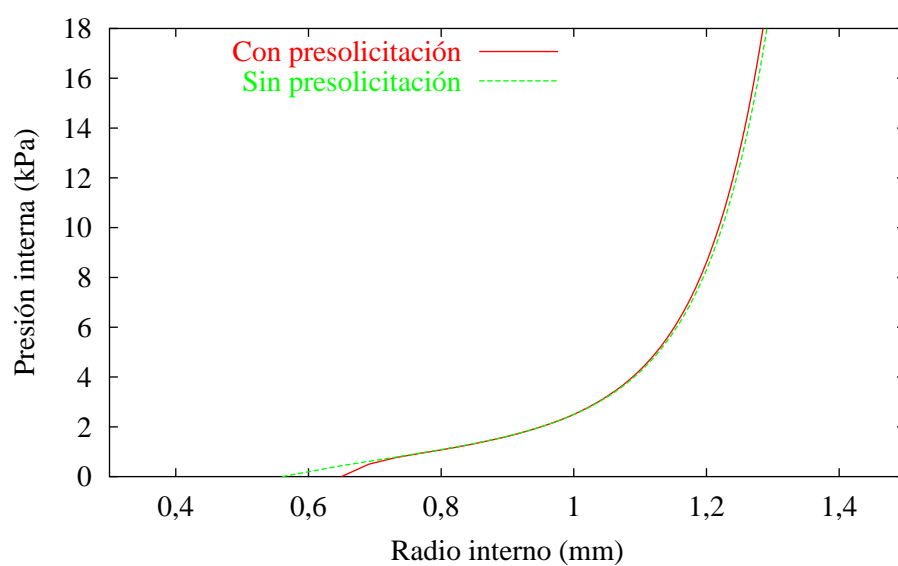


Figura 6.27: Comparación de los casos con presolicitación y sin presolicitación en la configuración de referencia

6.3. Modelización de una arteria coronaria de geometría real

En esta sección se analiza mediante el método de los elementos finitos el comportamiento mecánico bajo estado fisiológico de la pared de una arteria coronaria derecha. Se estudia la misma arteria y geometría identificada en el capítulo 2 (acerca de la correlación de variables mecánicas con aspectos clínicos) como el caso clínico MPR.

El análisis se ha realizado considerando dos casos de modelos de material. El primero de los casos es un modelo isótropo de Ogden (con parámetros constantes en toda la pared), el segundo de los casos adopta modelos anisótropos de Holzapfel, con parámetros distintos para la media y para la adventicia. Las direcciones de anisotropía son también variables en la geometría, manteniendo por motivos prácticos una distribución con simetría axial en cada parche volumétrico.

6.3.1. Parámetros adoptados

Materiales anisótropos de Holzapfel. En este caso, el modelo constitutivo considerado es anisótropo de Holzapfel con los parámetros propuestos por HOLZAPFEL [2001] que se exponen a continuación, donde el subíndice $(\bullet)_M$ se corresponde con la media y $(\bullet)_A$ con la adventicia: $c_M = 27,0$ kPa, $k_{1M} = 0,64$ kPa, $k_{2M} = 3,54$, $K_M = 10^4$ kPa, $\phi_M = 80^\circ$, $c_A = 2,7$ kPa, $k_{1A} = 5,1$ kPa, $k_{2A} = 15,4$, $K_A = 10^4$ kPa y $\phi_A = 50^\circ$.

Material isótropo de Ogden. Se ajusta según la metodología del apartado 3.5 del capítulo 3 un modelo isótropo de Ogden al comportamiento mecánico conjunto de la media y adventicia considerados en el modelo anisótropo de Holzapfel.

La función densidad de energía para el conjunto de la pared que se adopta es,

$$W_1 = \frac{2W_{h,m} + 2W_{h,a}}{3},$$

siendo $W_{h,m}$ y $W_{h,a}$ las funciones densidad de energía de Holzapfel para la media y la adventicia, respectivamente. Esto se obtiene suponiendo que la deformación es constante en la pared y que la media tiene espesor doble a la adventicia.

Se ajusta el material isótropo incompresible de Ogden de la forma

$$W_2 = \sum_{p=1}^3 \left(\frac{\mu_p}{\alpha_p} \sum_{a=1}^3 \lambda_a^{\alpha_p} \right),$$

con $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ y $\alpha_3 = 3$. El recinto de ajuste adoptado es $\mathcal{R} \equiv I_\theta \times I_z \equiv (1, 1, 3) \times (1, 1, 01)$. De esta forma, se han obtenido los valores de los

parámetros $\mu_1 = 1648$ kPa, $\mu_2 = -1612$ kPa y $\mu_3 = 537$ kPa. El módulo volumétrico K se toma de valor 1000 kPa. Obsérvese que estos parámetros no verifican las condiciones obtenidas por consideraciones de estabilidad del cuadro A.1 (página 217), no obstante, sí se verifica (A.9) (inecuación que motiva la tabla indicada) en todo el recinto de ajuste.

6.3.2. Tratamiento de la geometría

Se ha considerado la misma geometría que la adoptada en la correlación de espesores y tensión tangencial. El diámetro aproximado de la geometría es de 4 mm con un espesor medio de la pared de 0,55 mm. En este caso cada parche volumétrico se particionó como volumen estructurado en 3 elementos radiales, 3 elementos longitudinales y 16 elementos circunferenciales (véase el mallado de un parche volumétrico de la figura 6.28). El número resultante de nodos y elementos es de 7040 y 5184, respectivamente.

Los dos capas de elementos interiores se suponen correspondientes a la media, mientras que la capa exterior se corresponde con la adventicia.

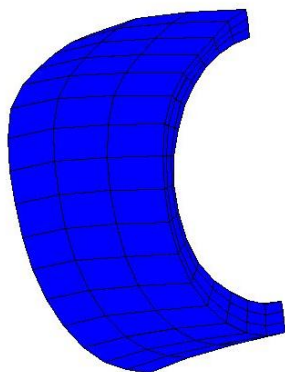


Figura 6.28: Detalle de mallado de un parche volumétrico

Las condiciones de contorno en desplazamientos que se han adoptado corresponden a fijar los extremos (véase la figura 6.30). Esto lleva, según el principio de Saint Venant, a resultados más fiables en aquellas regiones alejadas de los extremos.

Determinación de direcciones de anisotropía. Las direcciones de anisotropía se han especificado para el algoritmo de generación automática de direcciones de la sección 3.3.4, considerando el eje determinado por los puntos medios de cada pareja de *puntos base del flujo* (véase la sección 2.6).

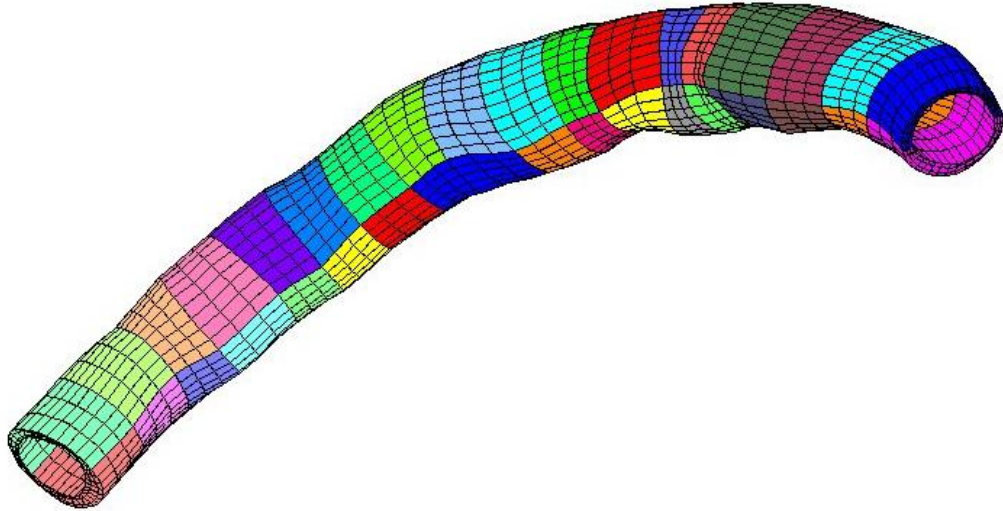


Figura 6.29: Mallado de la pared arterial

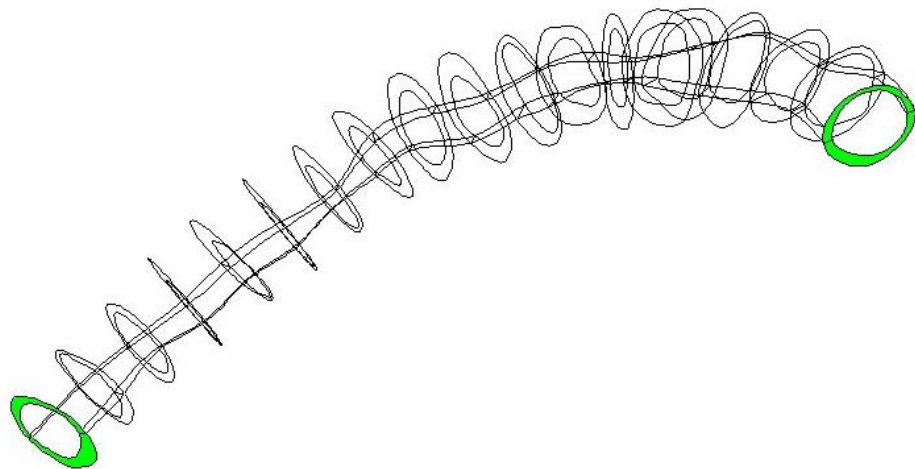


Figura 6.30: Condiciones de contorno en la geometría, coloreando los extremos fijos

6.3.3. Acciones consideradas

Las acciones consideradas son las expuestas en la sección 2.3. Dichas acciones se obtuvieron a partir de un cálculo previo de dinámica de fluidos computacional, suponiendo que la sangre es un fluido newtoniano con coeficiente de viscosidad $\mu = 0,035$ Pa/s, paredes rígidas y una presión fisiológica de 100 mmHg. Se ha impuesto como condición de contorno una velocidad de entrada máxima en la sección y media en el tiempo de 0,40 m/s (correspondiente a un caudal aproximado de 200 ml/min). El perfil de velocidad se obtuvo deformando el correspondiente a la corriente de Poiseuille (parabólico) a la sección de entrada.

6.3.4. Resultados

Material isótropo de Ogden. El problema ha sido analizado en FEAP (véase el apéndice C) con las rutinas implementadas. El número total de nodos de la malla es 7040, el número de elementos 5184 y número total de grados de libertad ha resultado ser de 20352. Por otra parte, el número de pasos de carga para la introducción de acciones fue de 50.

Los principales resultados obtenidos se presentan en las figuras 6.31, 6.32, 6.33 y 6.34.

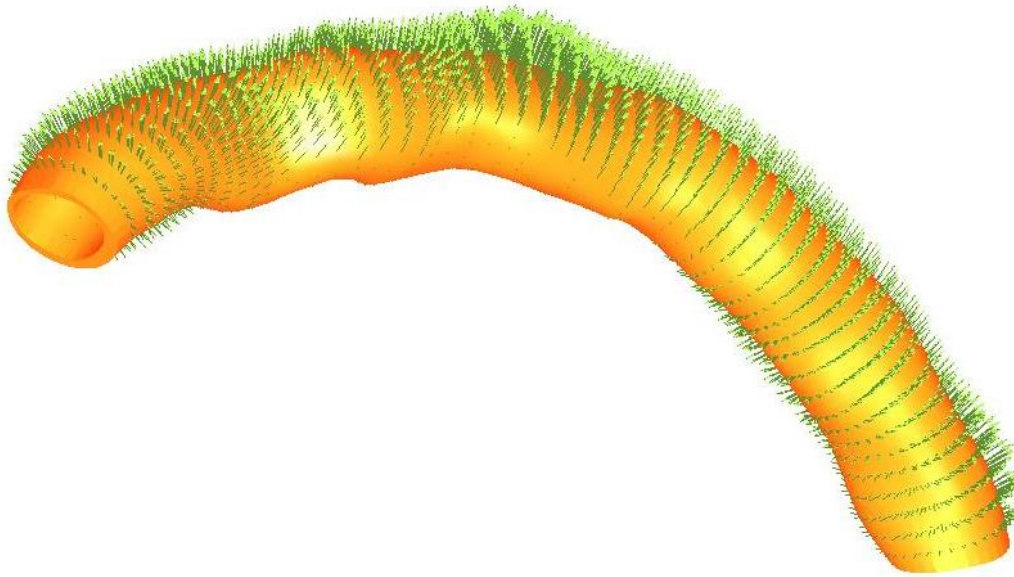


Figura 6.31: Vectores de desplazamiento en la configuración de referencia

Material anisótropo de Holzapfel. Análogamente al caso de material de Ogden se realizó el análisis con los materiales de Holzapfel. Algunos de los resultados se presentan en las figuras 6.35, 6.36 y 6.37.

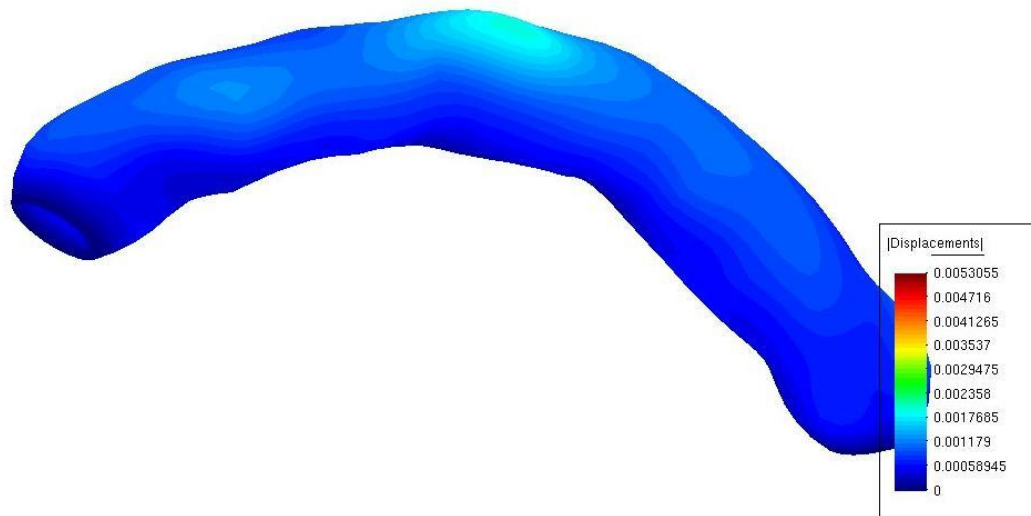


Figura 6.32: Material de Ogden. Contornos de módulos de desplazamiento en la configuración deformada (m)

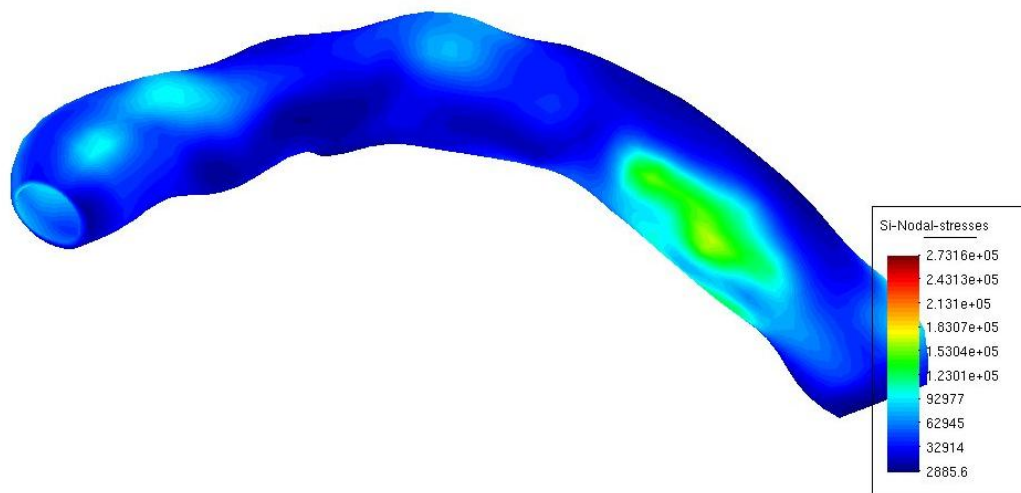


Figura 6.33: Material de Ogden. Contornos de tensiones principales mayores en la configuración deformada (Pa)

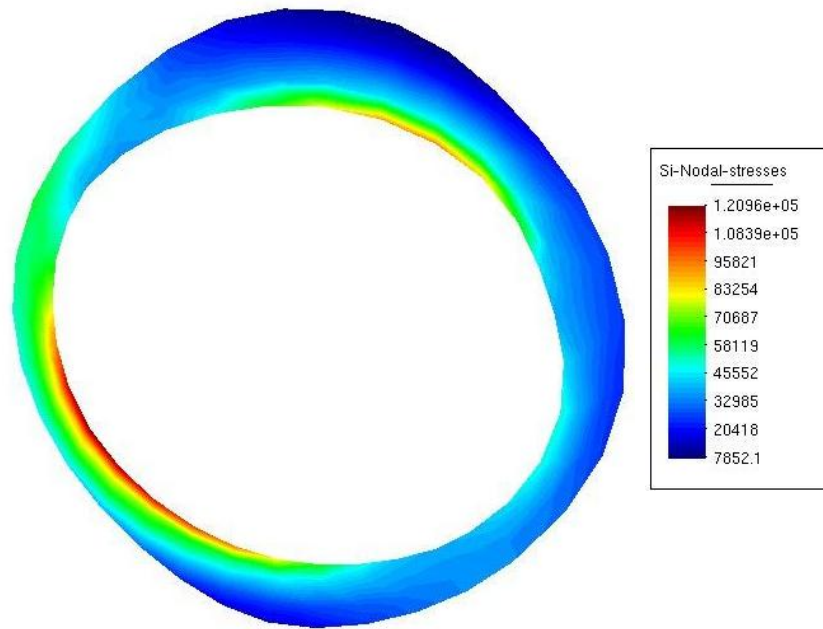


Figura 6.34: Material de Ogden. Contornos de tensiones principales mayores en la sección intermedia, en la configuración deformada (Pa)

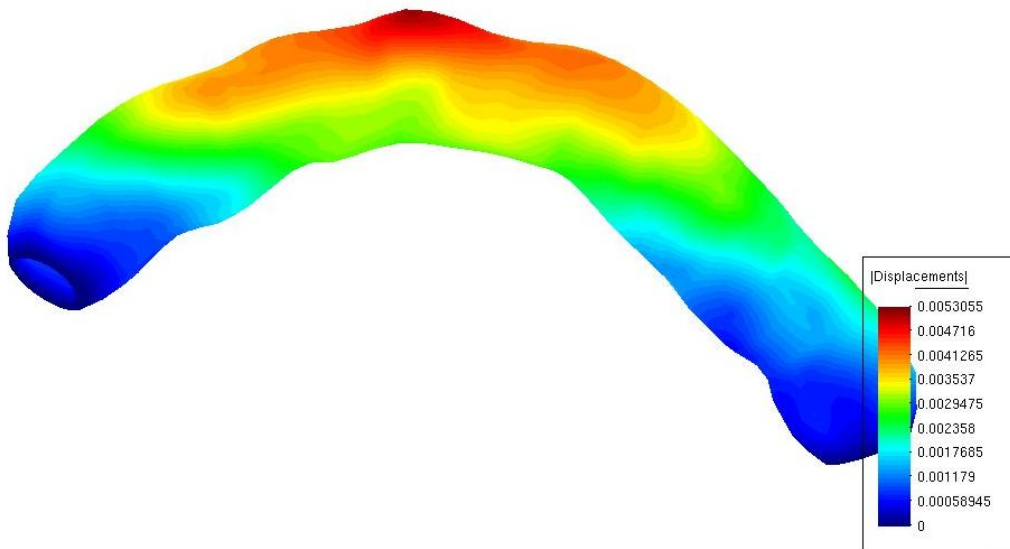


Figura 6.35: Material de Holzapfel. Contornos de módulos de desplazamiento en la configuración deformada (m)

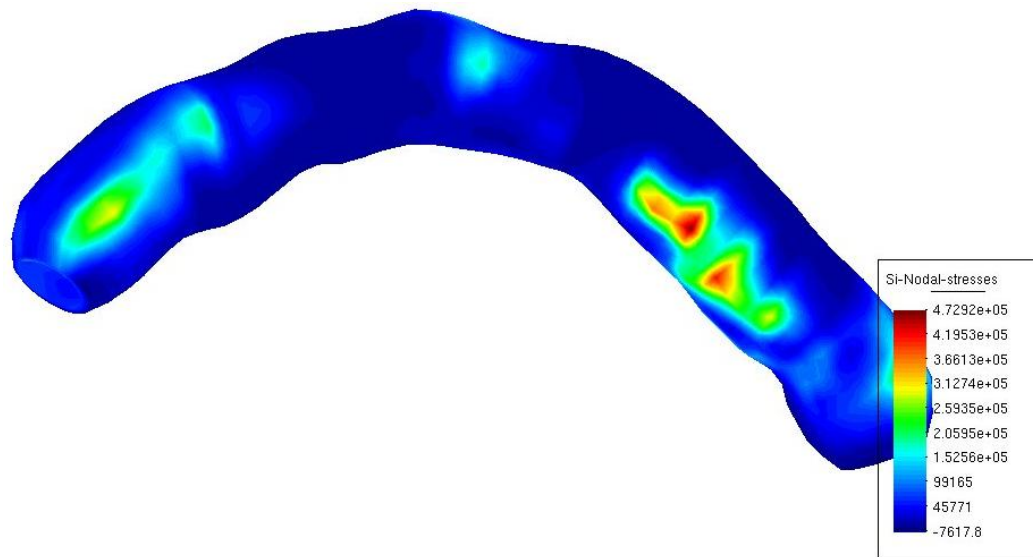


Figura 6.36: Material de Holzapfel. Contornos de tensiones principales mayores en la configuración deformada (Pa)

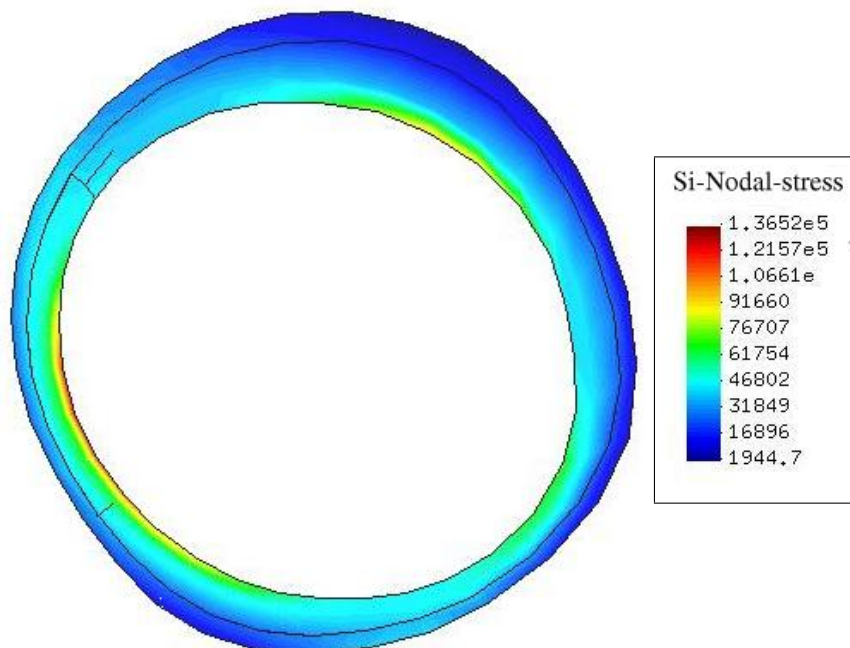


Figura 6.37: Material de Holzapfel. Contornos de tensiones principales mayores en la sección intermedia, en la configuración deformada (Pa)

Comentarios a los resultados. Se observan diferencias significativas en los dos casos anteriores, presentándose desplazamientos y tensiones mayores superiores. Esto se justifica dado que el ajuste del material de Ogden se ha realizado en una región de comportamiento preferencial para el material de Holzapfel.

6.3.5. Incorporación de crecimiento

A continuación se aplica el modelo de crecimiento generalizado a la geometría real con los siguientes parámetros de crecimiento material²: $\sigma_0 = 100$ kPa (tensión de equilibrio), $\tau_0 = 2,5$ kPa, $T_\theta = T_r = T_\tau = 5000$ h y $\alpha = 1$.

Obsérvese que si se aproxima la tensión media en el espesor por la fórmula de los tubos delgados,

$$\sigma_\theta = \frac{Pr}{e} = \frac{100 \text{ kPa } 2 \text{ mm}}{0,55 \text{ mm}} \approx 48 \text{ kPa},$$

resulta una tensión inferior a la de equilibrio ($\sigma_0 = 100$ kPa), lo que induce según remodelación por tensiones locales a la disminución del volumen en la mayor parte del segmento arterial.

Crecimiento por tensiones locales. En este caso se considera que el crecimiento activo en el modelo es debido a tensiones locales, desactivándose el asociado a las tensiones locales en la íntima, lo que equivale a la hipótesis adicional de que ésta ha sido extraída o dañada durante alguna operación clínica.

Las acciones consideradas en el apartado 6.3.3 se introducen en 1 s, mientras que el incremento de tiempo para cada paso de carga en la fase de crecimiento es de 10 horas (esto sigue siendo válido en el caso de incorporación del crecimiento por flujo que se desarrolla posteriormente).

La velocidad de crecimiento (variación del cambio de volumen por unidad de tiempo) en el instante inicial se recoge en la figura 6.38. Además, en la figura 6.39 se presenta el coeficiente volumétrico en la configuración libre de tensiones para distintos instantes de tiempo (esto es, el coeficiente volumétrico de \mathcal{B}_g respecto a \mathcal{B}_0 , según la notación del capítulo 5).

En esos resultados se observa que la remodelación es debida principalmente a pérdida de masa (velocidad de crecimiento negativa y coeficiente volumétrico menor que la unidad), lo que se corresponde al predominar en la sección las tensiones principales menores que $\sigma_0 = 100$ kPa (véase la figura 6.36).

²Los parámetros de crecimiento han sido motivados por las consideraciones cualitativas y cuantitativas del capítulo 5.

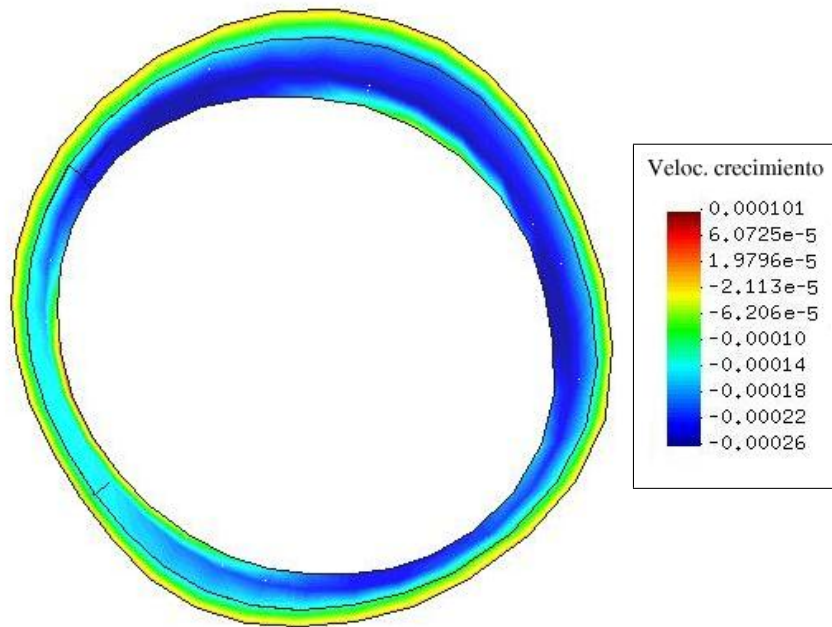


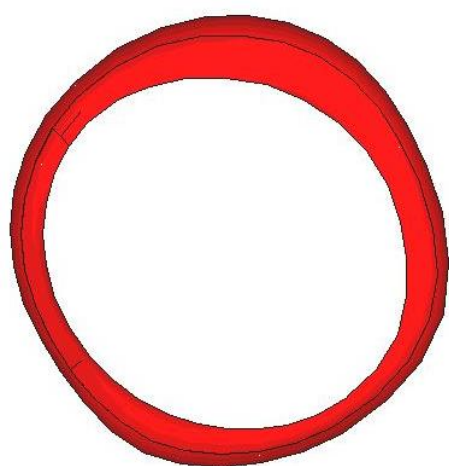
Figura 6.38: Velocidad de crecimiento por tensiones locales en sección media (h^{-1})

Incorporación de crecimiento por flujo. Acerca de la activación del crecimiento por flujo (acoplada al crecimiento por tensiones locales), se destaca la dificultad de captar de forma precisa la tensión tangencial en la pared, dadas las irregularidades en la superficie interior. En el capítulo siguiente se plantea como futura investigación resolver el problema indicado a través de modelos acoplados fluido-estructura.

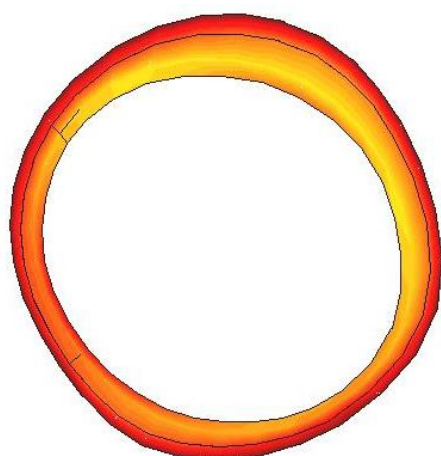
Se ha considerado la limitación del valor absoluto de la velocidad de crecimiento por flujo según el modelo de la sección 5.5.2 (página 134), con los umbrales $\xi_{\tau,1} = -0,9$ y $\xi_{\tau,2} = 0,9$. Por otra parte, el número de nodos asociados a la íntima es de 1760.

De forma análoga al caso de crecimiento por tensiones locales, en las figuras 6.41 y 6.41 se presentan la velocidad de crecimiento en el instante inicial y el coeficiente volumétrico en la configuración libre de tensiones para distintos instantes de tiempo.

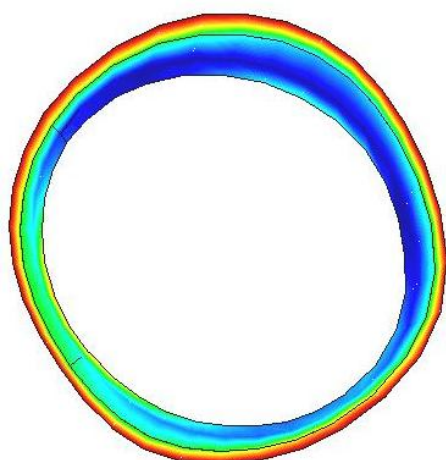
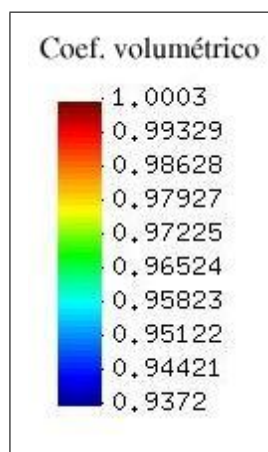
Obsérvese el incremento sustancial de la velocidad de crecimiento, especialmente en las zonas cercanas a la íntima, debido a las tensiones tangenciales sensadas por la superficie interna (véase el contorno de módulos de tensiones tangenciales de la figura 2.10 de la página 31).



(a) A las 24 horas



(b) A las 72 horas



(c) A las 240 horas

Figura 6.39: Crecimiento volumétrico por tensiones locales

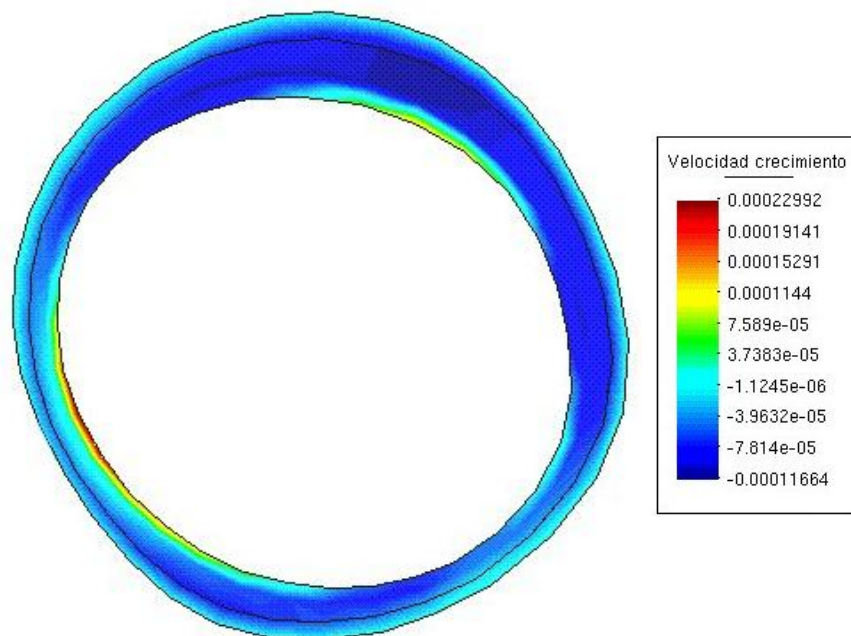
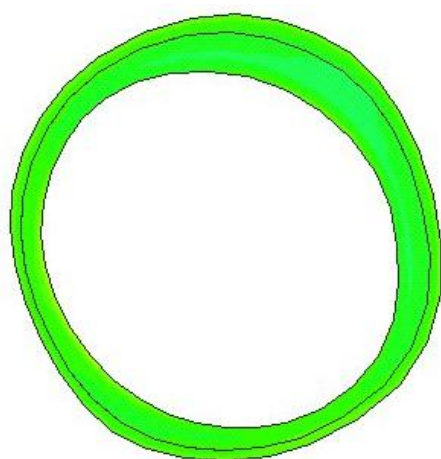
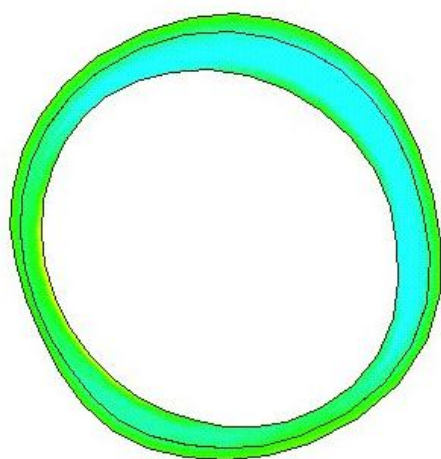


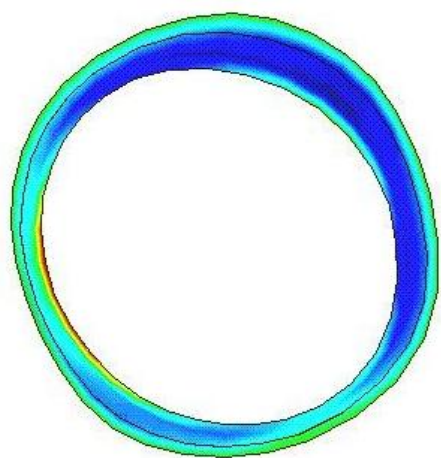
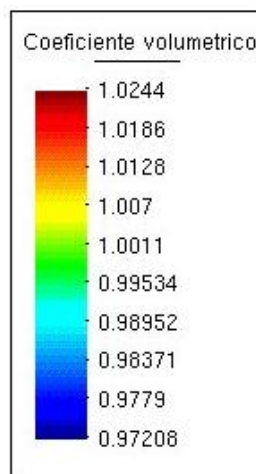
Figura 6.40: Velocidad de crecimiento en sección media con sensibilidad al flujo (h^{-1})



(a) A las 24 horas



(a) A las 72 horas



(c) A las 240 horas

Figura 6.41: Crecimiento volumétrico por crecimiento con sensibilidad al flujo

6.4. Modelización de un proceso de estenosis

En esta sección se modeliza un proceso de estenosis para un caso de geometría, acciones y parámetros de material basados en la modelización de la arteria coronaria del apartado anterior.

El análisis se realiza en una geometría simplificada (cilíndrica) en la que se introduce una ley de variación de la tensión tangencial que produce la estenosis por remodelación de la pared.

Clínicamente, la variación de la tensión tangencial puede deberse a la aparición de placa que disminuye la sensibilidad de la íntima al flujo, o por alguna causa que dañe las células endoteliales (véase la sección 5.5.1).

6.4.1. Planteamiento del modelo

Geometría y condiciones de contorno. Se considera una geometría sin deformar cilíndrica, con radio interior de 2 mm, espesor total de 0,55 mm y 10 mm de longitud. Por otra parte, análogamente a la aplicación del apartado anterior, se admite la hipótesis de que la media ocupa dos tercios del espesor y la adventicia el tercio restante.

Por condiciones de simetría se considera sólo un cuarto del cilindro, que se malla con elementos hexaédricos, adoptando diez en dirección circunferencial, cuatro en dirección radial (dos correspondientes a la media y otros dos a la adventicia) y quince en dirección longitudinal (véase el gráfico tridimensional de la malla en la figura 6.43). El número de nodos asociados a la íntima es de 176.

Se introducen condiciones de contorno en los nodos correspondientes a los planos de simetría que limitan el cuarto de cilindro, de forma que se mantenga la simetría en todo instante (véase la figura 6.43). Además, en las secciones extremas se impide el desplazamiento en dirección longitudinal.

Resulta un número total de 600 elementos, 880 nodos, y 2370 ecuaciones.

Parámetros de material. Se adoptan para la media y para la adventicia modelos hiperelásticos anisótropos de Holzapfel con los mismos parámetros indicados en la aplicación anterior (véase la página 184 de la sección 6.3.1).

Análogamente, los parámetros de remodelación son los mismos que los considerados en la sección 6.3.5 (página 191), sin limitaciones a la velocidad de crecimiento.

Acciones. Las acciones consideradas se corresponden a una presión interior de 100 mmHg en la *configuración deformada*, para un radio deformado de 2,89 mm, introducidas como fuerzas en direcciones radiales.

Esta acción se acompaña de tensiones tangenciales en la superficie interior de forma variable en el espacio (introducidas como fuerzas longitudinales en los nodos). Las tensiones tangenciales varían a partir de un extremo según

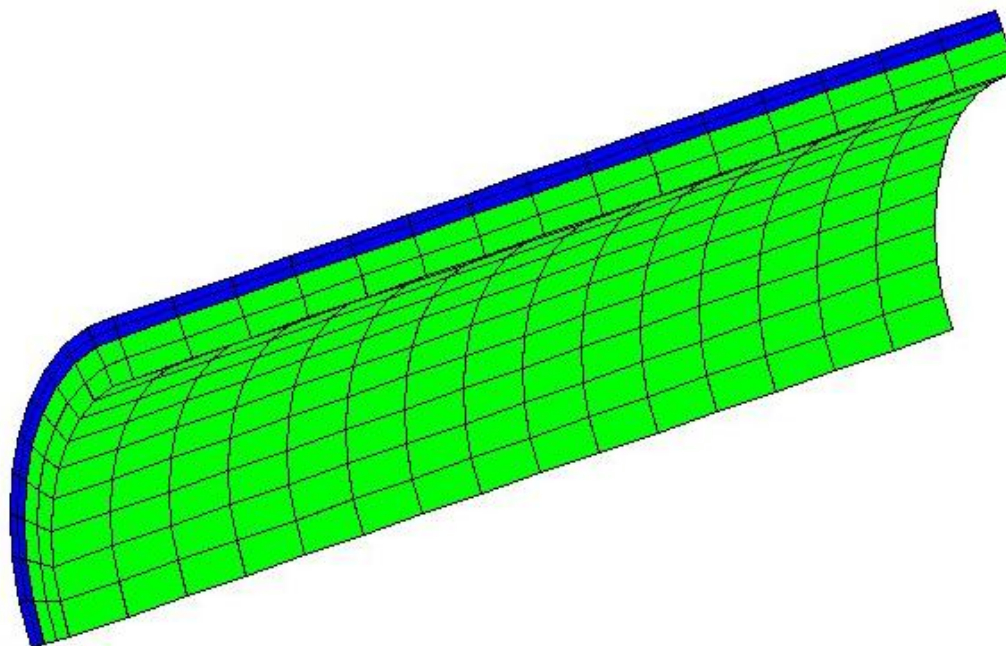


Figura 6.42: Modelo de estenosis. Gráfico tridimensional de la malla

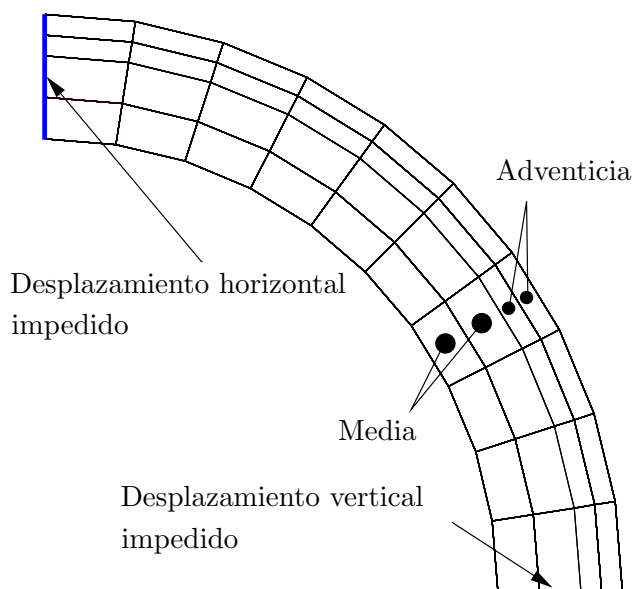


Figura 6.43: Modelo de estenosis. Sección transversal

el esquema de la figura 6.44, donde se considera la tensión fisiológica correspondiente a $\tau_0 = 2,5$ Pa, que disminuye hasta 1,5 Pa conforme se acerca al extremo en el que se produce la estenosis (extremo de referencia de distancias en la citada figura). Se modeliza por lo tanto la mitad de la longitud de estenosis.

Dichas acciones se introducen en 25 pasos de carga durante 1 s, desarrollándose posteriormente al proceso de remodelación en pasos de tiempo de un día hasta un tiempo final de un año.

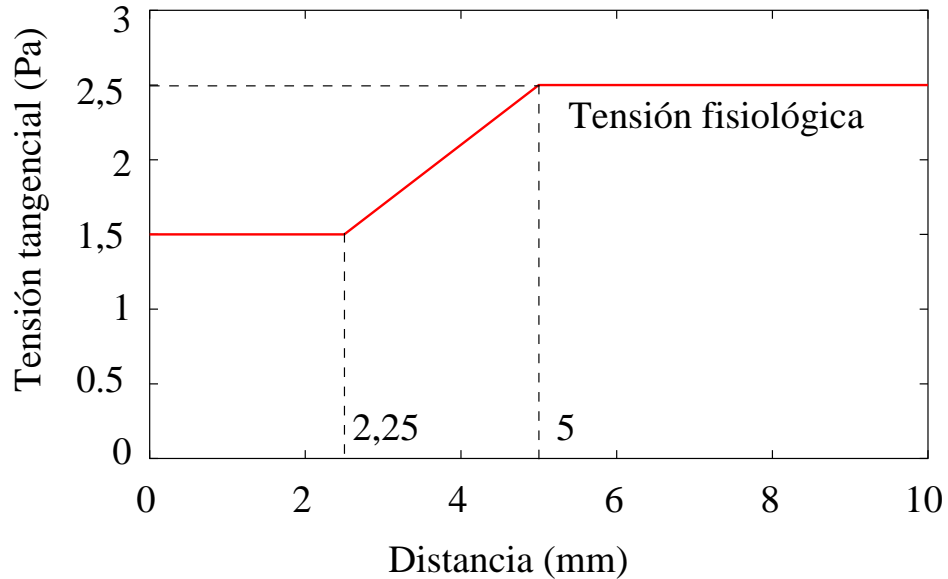


Figura 6.44: Ley de tensiones tangenciales desde el extremo de estenosis

6.4.2. Resultados

En las figuras 6.45 y 6.46 se indican respectivamente la evolución del radio interior y del espesor, para el extremo considerado de comportamiento fisiológico (a 1 cm de la estenosis) y para la sección de estenosis máxima. Además, en el gráfico de evolución del radio interior se indica el límite estimado de éste a tiempo infinito 1,734 mm en la sección de estenosis máxima.

Basado en los resultados anteriores, en la figura 6.47 se indica el porcentaje de estenosis, según la definición

$$\text{Porcentaje de estenosis} = 100 \left(1 - (r_{\text{est}}/r_{\text{fis}})^2 \right),$$

siendo r_{est} y r_{fis} los radios interiores fisiológico y de estenosis máxima, respectivamente. Representa por lo tanto el tanto por ciento de reducción de la superficie luminal.

Por otra parte, en las figuras 6.48, 6.49 y 6.50 se presentan los contornos de tensiones principales mayores, de velocidades de crecimiento y de coeficientes volumétricos por crecimiento, respectivamente.

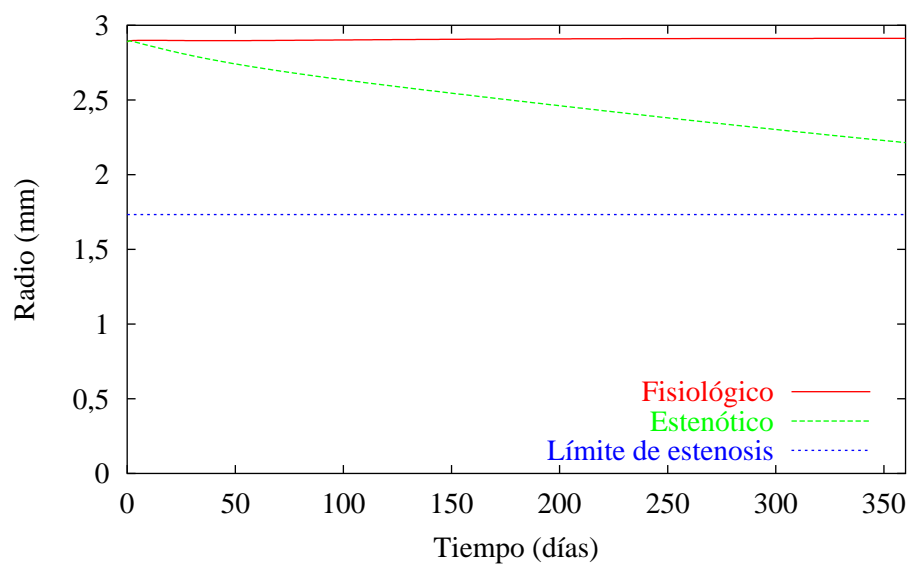


Figura 6.45: Modelo de estenosis. Evolución del radio interior

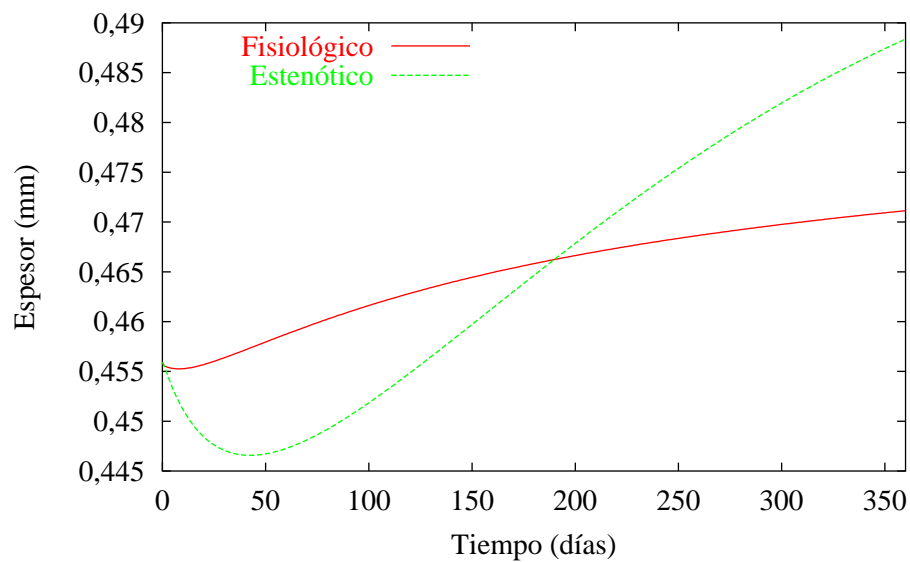


Figura 6.46: Modelo de estenosis. Evolución del espesor

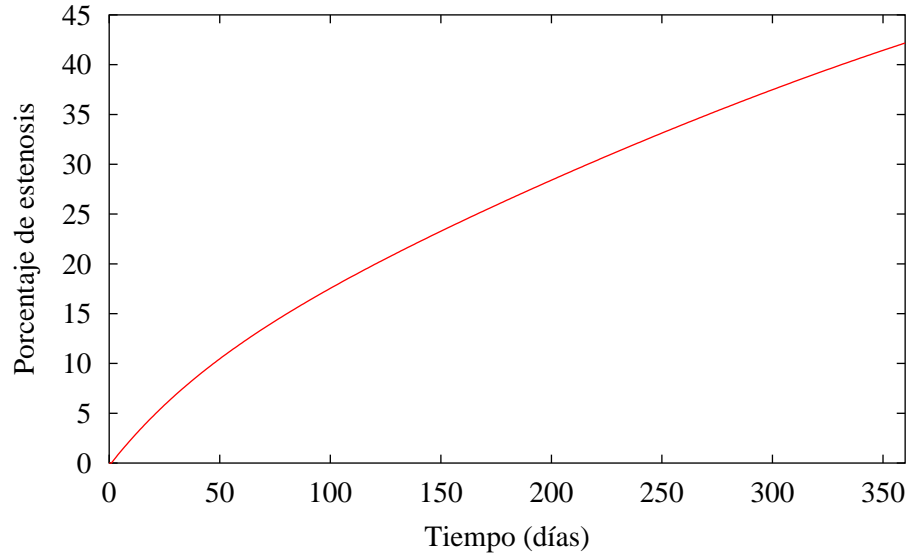


Figura 6.47: Modelo de estenosis. Evolución del grado de estenosis

6.4.3. Comentarios a los resultados

A continuación se exponen algunos comentarios a los resultados obtenidos:

- a) La evolución del radio en la sección alejada de la estenosis (considerada de comportamiento fisiológico) muestra pequeñas variaciones (véase la figura 6.45), esto se debe a que las fuerzas introducidas en los nodos se ajustaron para inducir la tensión tangencial de equilibrio $\tau_0 = 2,5$ Pa en la configuración deformada (véase la sección 6.4.1).
- b) El radio en la sección de estenosis sufre una reducción debido al acortamiento circunferencial por crecimiento al que se ve sometido, al captar una tensión tangencial en los nodos de la íntima inferior a la de equilibrio ($1,5 \text{ Pa} < 2,5 \text{ Pa}$). Este proceso continúa hasta que los nodos de la íntima se acercan de forma que se induzca la tensión tangencial de equilibrio, esto es, hasta que el radio interior resulte

$$r_{\text{est}} = \frac{1,5}{2,5} r_{\text{fis}} = \frac{1,5}{2,5} 2,89 \text{ mm} = 1,734 \text{ mm}.$$

- c) En la figura 6.46 se observa una disminución inicial del espesor interior (tanto en la sección de comportamiento fisiológico como, especialmente, en la de estenosis), alcanzando un mínimo para pasar posteriormente a crecer. Esto se debe a la mayor velocidad inicial en valor absoluto del crecimiento negativo de la zona exterior de la media respecto al crecimiento positivo de la zona interior (véase la figura 6.49), debido a las tensiones locales (véase la figura 6.48).

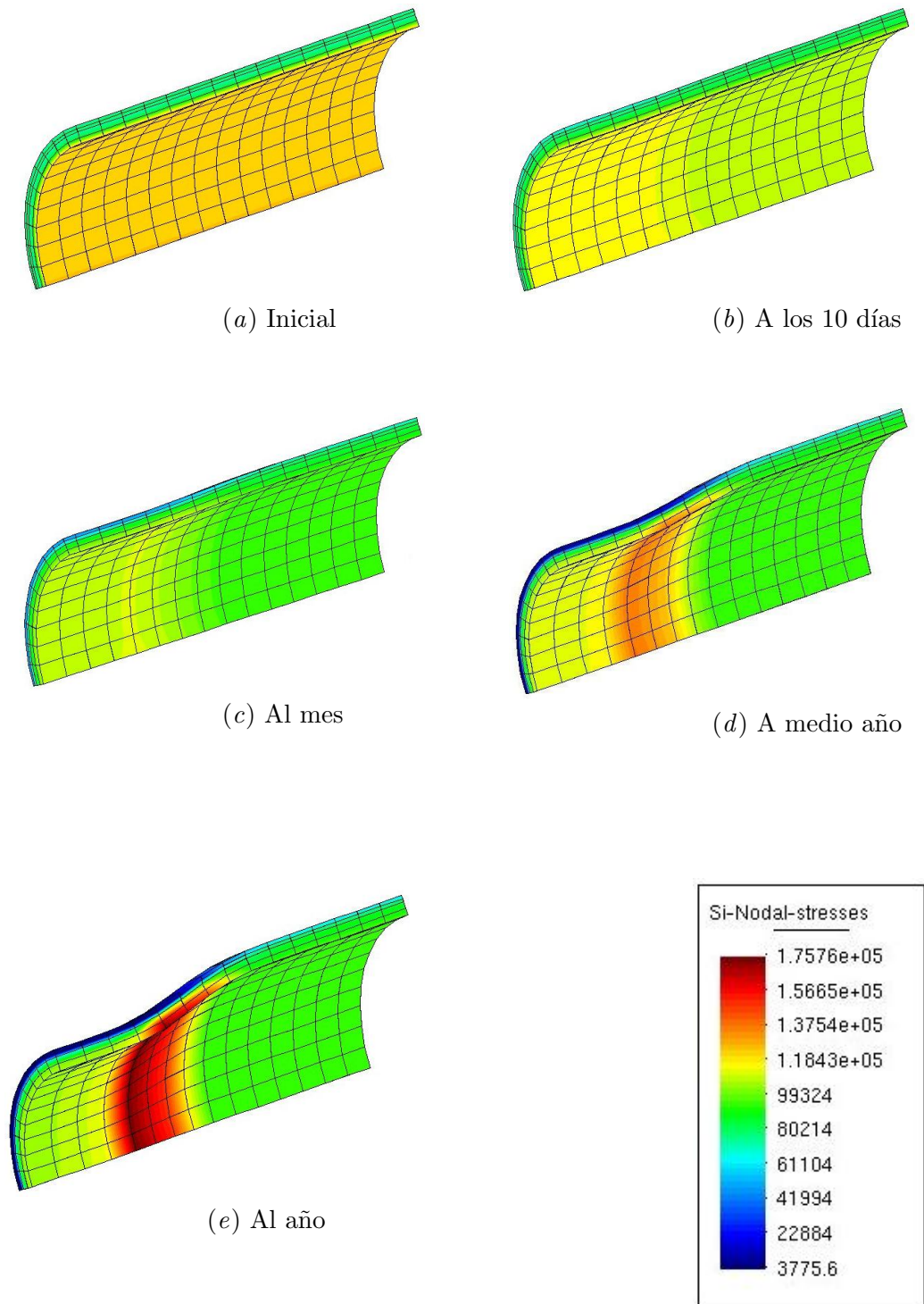


Figura 6.48: Modelo de estenosis. Contornos de tensiones principales mayores (Pa)

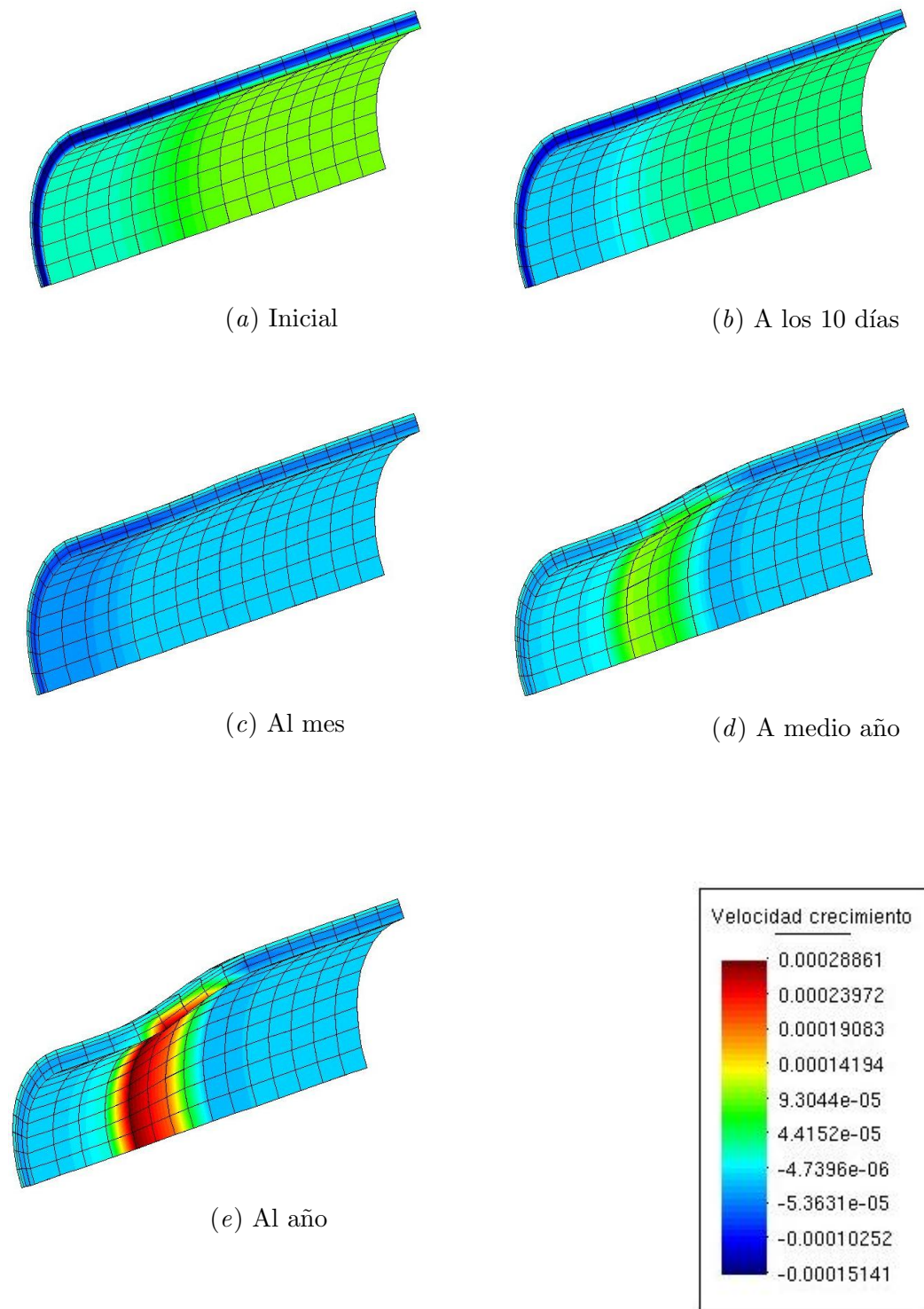


Figura 6.49: Modelo de estenosis. Contornos de velocidades de crecimiento (h^{-1})

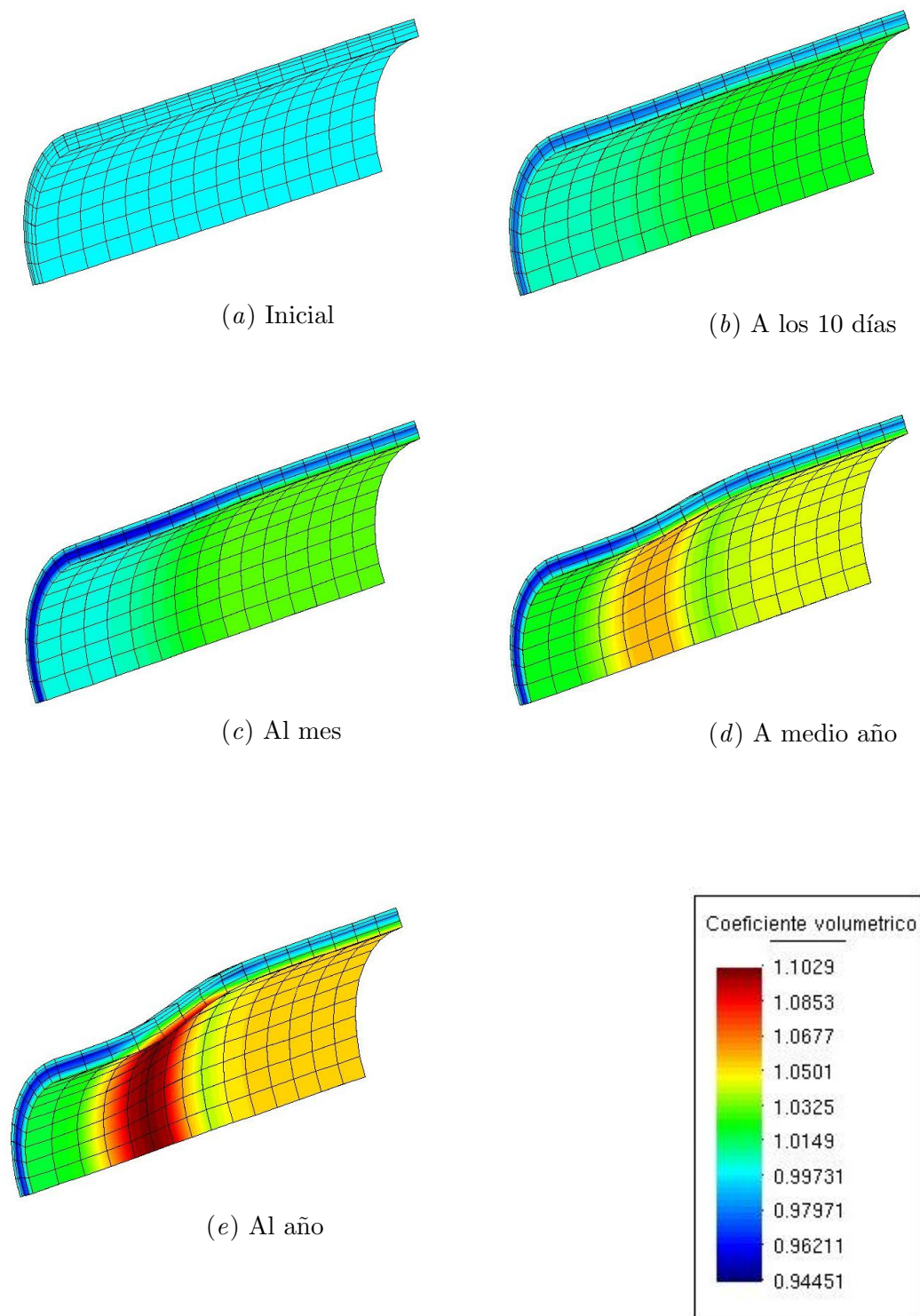


Figura 6.50: Modelo de estenosis. Contornos de coeficientes volumétricos por crecimiento

- d)* En la zona de transición de las tensiones tangenciales, correspondiente a un cuarto de la longitud, se originan elevadas tensiones principales mayores (véase la figura 6.48), que inducen elevadas velocidades de crecimiento (véase la figura 6.49) y consecuentemente de coeficientes volumétricos por crecimiento (véase la figura 6.50).

Capítulo

Conclusiones, aportaciones y trabajo futuro

En este capítulo se muestran las principales conclusiones de la investigación desarrollada para la presente tesis doctoral (sección 7.1). Posteriormente se indican las principales aportaciones resultantes de la investigación (sección 7.2) y por último se exponen algunas líneas de trabajo futuro (sección 7.3).

7.1. Conclusiones

La *importancia social* de las *enfermedades cardiovasculares* motiva el interés en desarrollar *modelos numéricos de las paredes arteriales* que permitan aportar información al *diagnóstico* y a la *terapia cardíaca*. La presente tesis doctoral se centra en ese tipo de modelos:

1. Previamente al desarrollo de modelos constitutivos de material, se ha analizado la *influencia de variables mecánicas en aspectos de importancia clínica*, lo que reforzaría el planteamiento general de la tesis. En particular, se ha desarrollado un estudio de la *correlación entre la tensión tangencial en la íntima y el espesor* de la pared arterial, en las siguientes geometrías:
 - Arteria coronaria derecha de un paciente sometido a un proceso de angioplastia con introducción de stent.
 - Cuatro bifurcaciones del tronco principal izquierdo en la arteria descendente anterior y la arteria circunfleja de pacientes trasplantados de corazón.

Se destacan los resultados:

- a) El estudio de la varianza ha mostrado una *fuerte correlación* entre la tensión tangencial y el espesor.
 - b) La correlación obtenida en los casos de mejor ajuste es *positiva*, en el sentido de que a mayor tensión tangencial se asocia mayor espesor en la pared.
 - c) Se han estudiado diversas variables a correlacionar y subconjuntos del universo muestral, obteniéndose los mejores resultados en el caso de correlación entre el *módulo de la tensión tangencial y el espesor*, utilizando todos los puntos muestrales (*universo muestral*). Esto refuerza la hipótesis de que la orientación de las células endoteliales es local, y no global en la sección.
2. Se han desarrollado *materiales hiperelásticos* en grandes deformaciones para las paredes arteriales. Este tipo de materiales (no disipan energía al deformarse) se ha adoptado como punto de partida para la formulación de otros modelos más complejos considerados en la tesis. La definición del comportamiento de estos materiales se ha realizado bajo condiciones de *objetividad, simetrías de material y estabilidad*.

Entre los modelos presentados se destacan por la mayor posibilidad de ajuste al proceso de *rigidización* con la deformación, y por su mayor justificación desde el punto de vista *micromecánico*:

- a) *Material isótropo de Ogden*. Especialmente adecuado para la simulación de la placa ateromatosa o para las capas de la pared arterial cuando no puedan establecerse hipótesis acerca de direcciones preferenciales.
 - b) *Material anisótropo de Holzapfel con dos direcciones preferenciales*. Este modelo se considera especialmente adecuado para la simulación de la media y de la adventicia.
3. Dada la dificultad en la experimentación de arterias humanas y con objeto de aprovechar la información existente, se ha presentado un método de *correlación entre modelos constitutivos hiperelásticos* para paredes arteriales.
4. Se han desarrollado modelos adecuados para la simulación de la disipación energética en el tiempo (*viscoelasticidad*) de las paredes arteriales, en particular los modelos generalizados de viscoelasticidad de Maxwell y de Kelvin-Voigt.

Estos modelos pueden acoplar su efecto a la mayoría de los materiales hiperelásticos desarrollados (en particular, a aquellos cuya función de densidad de energía pueda descomponerse aditivamente en una partes volumétrica y otra isocórica).

Se ha presentado un método de *ajuste de parámetros viscoelásticos* para el caso de *ensayos cíclicos lentos*.

5. En el mismo marco de los modelos constitutivos anteriores, se ha formulado un modelo de *pseudoelasticidad* (daño continuo) especialmente adecuado para la simulación de procesos en los que las paredes arteriales se ven sometidos a sollicitaciones muy superiores a las fisiológicas, como puede ser el proceso de angioplastia.
6. Se han revisado los principales modelos de *remodelación* existentes en la bibliografía para paredes arteriales, mostrándose sus deficiencias para proponer posteriormente un modelo de *crecimiento* con las siguientes características:
 - a) Es un modelo de material de tipo *no simple* (según la terminología de Truesdell). En particular, el crecimiento es sensible a tensiones locales y al módulo de la tensión tangencial en la íntima (*sensada* por la células endoteliales que mandan una señal que modula el crecimiento).
 - b) El desarrollo del modelo se ha realizado con consideraciones *cualitativas* de ensayos experimentales y buscando la *generalización* de modelos existentes en la bibliografía.
 - c) Se trata de un modelo de crecimiento *volumétrico* (local) adecuado para su implementación en esquemas de elementos finitos.
 - d) Es un modelo de crecimiento *anisótropo* con dos familias de direcciones preferentes. El crecimiento evoluciona preferencialmente en dirección longitudinal y circunferencial.
 - e) Los efectos del modelo se pueden *acoplar* a todos los materiales hiperelásticos (isótropos y anisótropos), viscoelásticos y de pseudoelasticidad desarrollados en la tesis.
 - f) Es aplicable a *geometrías arbitrarias tridimensionales*, siendo adecuado para el análisis en geometrías reconstruidas a partir de imágenes de ultrasonidos y angiografías.
 - g) Se espera que la aplicación de este modelo permita determinar zonas con riesgo de estenosis, y en el caso de operaciones clínicas aportar información acerca de la evolución de los procesos post-operatorios (especialmente la posible reestenosis en el caso de angioplastia, con o sin introducción de stent).
7. Se ha estudiado la incorporación de fenómenos de *presollicitación* en los modelos desarrollados, revisando los modelos existentes y planteando un nuevo método basado en la introducción de una nueva configuración ficticia libre de tensiones. Posteriormente se han mostrado las principales relaciones con los fenómenos de crecimiento.

8. Las *aplicaciones* de los modelos anteriores (tanto en el capítulo específico de aplicaciones como en el resto de los capítulos) muestran:
 - a) Los modelos desarrollados en la tesis son adecuados para su incorporación en códigos de elementos finitos.
 - b) La formulación de los modelos se ha llevado a cabo de tal forma que se facilite el acoplamiento de efectos de distinta naturaleza.
 - c) Los modelos permiten el análisis de geometrías tridimensionales arbitrarias.

7.2. Principales aportaciones

A partir de las consideraciones del apartado anterior, se indican a continuación las principales *aportaciones* de la tesis:

1. Se ha realizado un estudio estadístico que refuerza la hipótesis de algunos investigadores de existencia de *correlación* entre la *tensión tangencial* en la íntima y el *espesor* de la pared arterial. Entre los resultados de mayor originalidad se destaca el mayor ajuste obtenido utilizando como variable el *módulo de la tensión tangencial*, reforzando la hipótesis de que las células endoteliales están sujetas a un proceso de orientación local debido al flujo.
2. Se ha establecido un *marco* adecuado para la simulación y acoplamiento de distintos efectos en las paredes arteriales (*hiperelasticidad*, *viscoelasticidad*, *pseudoelasticidad*, *crecimiento* y *presolicitación*), indicándose esquemas para la *implementación* mediante elementos finitos. Además, los modelos desarrollados han sido implementados en un código de elementos finitos.
3. Se ha desarrollado un método de *ajuste de parámetros* de modelos *hiperelásticos* para paredes arteriales, y un método de ajuste de parámetros *viscoelásticos* a partir de ensayos cíclicos lentos.
4. Se ha propuesto un modelo de *crecimiento* sensible a las *tensiones locales* y a las *tensiones tangenciales en la íntima*. El modelo ha sido adecuadamente motivado a partir de resultados experimentales y de otros modelos de crecimiento. Su formulación es de tipo *volumétrico* (local) adecuado para su incorporación en esquemas de elementos finitos y aplicable a geometrías tridimensionales arbitrarias.
5. Se ha propuesto un marco para la incorporación de fenómenos de *presolicitación*, relacionándose a su vez con los procesos de crecimiento.

6. Se ha desarrollado una metodología para el tratamiento de la *geometría* reconstruida a partir de angiografías y ultrasonidos, para la determinación de parámetros de material (incluida la generación de direcciones de anisotropía a partir de la geometría) y para la introducción de las *acciones* del fluido.

7.3. Futuras líneas de investigación

Motivado por los resultados de la tesis, se proponen las siguientes líneas de investigación futura:

1. Estudio de las relaciones entre la tensión tangencial en la superficie interior y el espesor de la pared arterial para casos clínicos distintos a los contemplados en la tesis. Se propone realizar además un estudio específico de las relaciones entre las tensiones tangenciales en el instante de las intervenciones y transcurrido un tiempo.
2. Desarrollo de un método más preciso al presentado en la tesis para la estimación de *direcciones de anisotropía* a partir de imágenes médicas (angiografías, ultrasonidos, resonancia magnética, microscopía. . .). Se propone estudiar además una aproximación estadística a dichas direcciones para la estimación aleatoria en la geometría (la hipótesis de distribución debe ser contrastada por métodos estadísticos, por ejemplo, por el *método de la χ^2 de Pearson*).
3. Desarrollo de *modelos de interacción* entre la sangre (fluido) y la pared arterial (sólido). Esto permitiría una mayor estimación de las acciones a la que es sometida la pared arterial, siendo de especial importancia para la activación del crecimiento por tensión tangencial en la íntima para el modelo propuesto.
4. Validación del modelo de *crecimiento* con casos clínicos. En particular se propone aplicarlo a pacientes sometidos a un proceso de angioplastia, de los que se disponga de imágenes médicas del instante de la operación y tras un tiempo post-operatorio (por ejemplo, tras una revisión intravascular a los seis meses).
5. Desarrollo de una aproximación más precisa a la *presolicitud* (tensiones iniciales). En particular se proponen dos líneas alternativas de trabajo:
 - Estimación del *gradiente de deformación local* de la configuración de referencia respecto a la configuración ficticia libre de tensiones.
 - Estimación de la *geometría ficticia* y del *tiempo de crecimiento* que den lugar a la configuración de referencia bajo las sollicitaciones fisiológicas.

6. Desarrollo de *experimentos* en paredes arteriales que permitan determinar parámetros de los modelos hiperelásticos, viscoelásticos, pseudoelásticos, de crecimiento y de presolicitación. Es de especial importancia realizar estos ensayos en tejidos vivos, dadas las diferencias en los resultados documentadas por distintos investigadores.

Apéndice



Convexidad y estabilidad material

En este apéndice se exponen algunas definiciones y conceptos fundamentales relacionados con la estabilidad de materiales para grandes deformaciones (secciones A.1, A.2, A.3, A.4 y A.5). Posteriormente, se realiza el estudio de algunos materiales considerados en el desarrollo de la tesis, proponiéndose restricciones al ajuste de los parámetros (sección A.6) y presentando contornos de funciones de densidad de energía (sección A.7)

A.1. Conceptos iniciales

Los conceptos de convexidad y estabilidad tienen importancia en la construcción de leyes constitutivas para tejidos biológicos blandos y para el análisis de las condiciones de contorno (véase, por ejemplo, OGDEN [2001]). Así, por ejemplo, recientemente WILBER Y WALTON [2002] han analizado las propiedades relativas a la convexidad de una cierta clase de modelos relacionados con el de Fung.

Se entenderá por *material estable* un material tal que cualquier variación pequeña del estado cinemático respecto de la posición de equilibrio produce una modificación de la posición de equilibrio a su vez pequeña. La condición analítica para la *estabilidad* del equilibrio cuando las fuerzas provienen de un potencial viene dada por el *teorema de Lejeune-Dirichlet*: «Si el potencial es mínimo en la posición de equilibrio, ésta es estable».

En principio, en este apéndice se entenderá por estabilidad material la referida a cargas (tensiones) muertas y estacionarias. Además, se trata principalmente el caso de estabilidad bajo tensión plana.

Por otra parte, se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de variable una n -upla

de números reales es *convexa* cuando se verifica

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2),$$

para toda pareja de n -uplas $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ y todo $\alpha \in [0, 1]$, si la desigualdad se verifica estrictamente, entonces se habla de *convexidad estricta*. Esta definición se puede extender a variables tensoriales.

A.2. Estabilidad sin cambio en los ejes principales de deformación

Se considera la estabilidad para el caso en que los ejes principales de deformación coinciden con los de las cargas (tensiones) muertas impuestas. En este caso, la energía potencial es

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - \sum_{a=1}^3 t_a \lambda_a, \quad (\text{A.1})$$

siendo λ_1, λ_2 y λ_3 los alargamientos principales y t_1, t_2 y t_3 las tensiones constantes en la configuración inicial impuestas. La condición de equilibrio resulta (ecuaciones de Euler-Lagrange)

$$t_a = \frac{\partial W}{\partial \lambda_a} \quad \text{para } a \in \{1, 2, 3\}.$$

Además, para que el equilibrio sea estable el teorema de Lejeune-Dirichlet expresa que la energía potencial E debe ser mínima, y por tanto debe verificarse que la matriz hessiana $[E_{ab}] = [W_{ab}]$ sea definida positiva, donde

$$E_{ab} = \frac{\partial^2 E}{\partial \lambda_a \partial \lambda_b} \quad \text{y} \quad W_{ab} = \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_a \partial \lambda_b};$$

debiendo verificarse

$$\delta^2 W = \sum_{a,b=1}^3 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_a \partial \lambda_b} \delta \lambda_a \delta \lambda_b > 0, \quad (\text{A.2})$$

para todo $\delta \lambda_1, \delta \lambda_2$ y $\delta \lambda_3$.

Análogamente, bajo tensión plana ($\sigma_3 = 0$) y expresando la función de densidad de energía como $\hat{W}(\lambda_1, \lambda_2)$, entonces la condición de estabilidad lleva a que el hessiano $[\hat{W}_{ab}]$ es definido positivo. Esta condición es apropiada, por ejemplo, para la modelización de una lámina delgada bajo tensión plana.

A.3. Convexidad

Considérese la curva en el espacio (λ_1, λ_2) definida por $\hat{W}(\lambda_1, \lambda_2) = c$ para una constante positiva c y siendo \hat{W} la función de densidad de energía para tensión plana. Diferenciando \hat{W} , en todo punto de la curva se verifica

$$\hat{W}_1 \lambda'_1 + \hat{W}_2 \lambda'_2 = 0, \quad (\text{A.3})$$

donde (λ'_1, λ'_2) es un vector unitario tangente a la curva de forma que λ'_a es la derivada del parámetro λ_a respecto de la longitud de arco y

$$\hat{W}_a = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_a}.$$

La curvatura puede escribirse como $\kappa = \lambda'_1 \lambda''_2 - \lambda''_1 \lambda'_2$, siendo λ''_a la derivada segunda de λ_a respecto de la longitud de arco. Ahora bien, diferenciando (A.3) se tiene

$$\hat{W}_{11} (\lambda'_1)^2 + 2\hat{W}_{12} \lambda'_1 \lambda'_2 + \hat{W}_{22} (\lambda'_2)^2 + \hat{W}_1 \lambda''_1 + \hat{W}_2 \lambda''_2 = 0,$$

y dado que haciendo uso de (A.3) se tiene

$$\hat{W}_1 \lambda''_1 + \hat{W}_2 \lambda''_2 = \frac{\hat{W}_1}{\lambda'_2} \left(\lambda'_2 \lambda''_1 + \frac{\hat{W}_2 \lambda'_2 \lambda''_2}{\hat{W}_1} \right) = \frac{\hat{W}_1}{\lambda'_2} \kappa,$$

resulta que la curvatura se puede escribir como

$$\kappa = - \left(\hat{W}_{11} (\lambda'_1)^2 + 2\hat{W}_{12} \lambda'_1 \lambda'_2 + \hat{W}_{22} (\lambda'_2)^2 \right) \frac{\lambda'_2}{\hat{W}_1}. \quad (\text{A.4})$$

Si el contorno es convexo, entonces $\kappa < 0$ y de (A.4) se tiene que

$$\hat{W}_{11} (\lambda'_1)^2 + 2\hat{W}_{12} \lambda'_1 \lambda'_2 + \hat{W}_{22} (\lambda'_2)^2 > 0, \quad (\text{A.5})$$

para los recorridos de la curva indicados por (λ'_1, λ'_2) de forma que λ'_2 tenga el mismo signo que \hat{W}_1 . Además, el vector (λ'_1, λ'_2) es tangente a la curva mientras que en (A.2) no existe tal restricción.

La comparación de (A.2) y (A.5), con las consideraciones indicadas, permite afirmar que si $[\hat{W}_{ab}]$ es definido positivo (estable bajo cargas muertas) entonces el contorno es convexo, mientras que si el contorno es convexo entonces no se puede asegurar que $[\hat{W}_{ab}]$ sea definido positivo.

A.4. Estabilidad bajo cargas muertas: caso general

Si se permite la variación de los ejes principales de deformación respecto a los de las cargas muertas impuestas, entonces (A.1) debe modificarse de forma que la energía potencial sea

$$E(\mathbf{F}) = W(\mathbf{F}) - \mathbf{T}:\mathbf{F},$$

donde \mathbf{T} es un tensor constante (primer tensor de Piola-Kirchhoff).

La condición de estabilidad (E mínimo) resulta

$$\delta \mathbf{F} : (\mathbb{A} : \delta \mathbf{F}) > 0, \quad (\text{A.6})$$

para todo $\delta \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, donde el tensor de cuarto orden \mathbb{A} es el tensor de elasticidad definido por

$$\mathbb{A} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F}^2}.$$

A.5. Conceptos relacionados con estabilidad y convexidad

A continuación se presentan algunos conceptos relacionados con la estabilidad y convexidad de materiales siguiendo fundamentalmente MARS DEN Y HUGHES [1968] y BALL [1977].

Elipticidad. Un concepto relacionado con la ecuación (A.6) (estabilidad material) es el de elipticidad fuerte. Un tensor \mathbb{A} se dice que presenta *elipticidad fuerte* (condición de Legendre-Hadamard) para una deformación \mathbf{F}_0 si se verifica

$$\mathbf{H} : (\mathbb{A} : \mathbf{H}) > 0,$$

para todo $\mathbf{H} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, con $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}| = 1$. La condición de elipticidad fuerte es necesaria para que el material admita ondas planas en toda dirección, no obstante, aquella no implica la estabilidad material.

Cuasi-convexidad. La función de densidad de energía W es *cuasi-convexa* si para todo contorno Ω , toda matriz constante \mathbf{F} tal que $\det(\mathbf{F}) > 0$ y toda aplicación $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de C^∞ con $\psi(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$, se verifica

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{F} + \text{Grad } \psi(\mathbf{X})) dV(\mathbf{X}) \geq W(\mathbf{F}) \times \text{Volumen}(\Omega).$$

En otras palabras, para una deformación homogénea \mathbf{F} , la energía interna es mínima dentro de todas las deformaciones admisibles con las mismas condiciones de contorno.

Estabilidad uniforme. Dado un espacio vectorial normado V , se llama *norma de un tensor* al determinado por la definición recurrente

$$|\alpha| = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in V \\ |\mathbf{x}| = 1}} |\alpha(\mathbf{x})|.$$

Se dice que un tensor de elasticidad \mathbb{A} es *uniformemente estable* si existe $\eta > 0$ de forma que

$$\mathbf{H} : (\mathbb{A} : \mathbf{H}) \geq \eta |\mathbf{H}|^2,$$

para todo tensor \mathbf{H} de segundo orden.

Policonvexidad. Se dice que W es (*estrictamente*) *policonvexo* si existe una función (estrictamente) convexa $g : M_+^{3 \times 3} \times M^{3 \times 3} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (siendo $M^{3 \times 3}$ el espacio de tensores de segundo orden para tres dimensiones y $M_+^{3 \times 3}$ el constituido por aquellos de determinante positivo) de forma que $W(\mathbf{F}) = g(\mathbf{F}, \text{adj } \mathbf{F}, \det \mathbf{F})$, para todo $\mathbf{F} \in M_+^{3 \times 3}$. Esto es,

$$g(\alpha \mathbf{F}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{F}_2, \alpha \text{adj } \mathbf{F}_1 + (1 - \alpha) \text{adj } \mathbf{F}_2, \alpha \det \mathbf{F}_1 + (1 - \alpha) \det \mathbf{F}_2) \leq \alpha g(\mathbf{F}_1) + (1 - \alpha) g(\mathbf{F}_2),$$

para toda pareja $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \in M^{3 \times 3}$ y todo $\alpha \in [0, 1]$ (si la desigualdad anterior es estricta, entonces se dice que la convexidad es estricta).

Esta condición tiene la propiedad de mantenerse con transformaciones de la forma $W \rightarrow W + \phi$, siendo ϕ funciones de lagrangiano nulo, esto es,

$$\int_{\Omega} \phi(\text{Grad } u(\mathbf{X}) + \text{Grad } \tau(\mathbf{X})) dV(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} \phi(\text{Grad } u(\mathbf{X})) dV(\mathbf{X}),$$

$\forall u, \tau \in C^\infty(\bar{\Omega})$ con $\tau(\mathbf{X}) = 0$ en $\delta\Omega$ (obsérvese que las soluciones de todo problema con desplazamientos impuestos en $\delta\Omega$ para las funciones de densidad de energía W y $W + \phi$ deben coincidir).

Crecimiento de la energía. Otra condición a considerar, necesaria para que un cubo infinitesimal no pueda ser deformado con una cantidad finita de energía para dar lugar a un volumen nulo, evitando la aparición de huecos en el material, es

$$\lim_{\det \mathbf{F} \rightarrow \infty} \frac{W(\mathbf{F})}{(\det \mathbf{F})^3} = \infty. \quad (\text{A.7})$$

Por tanto, esta condición debe ser considerada para modelos de materiales susceptibles de grandes variaciones de volumen.

Comentarios. MARS DEN Y HUGHES [1968] recogen la cadena de implicaciones: Convexidad estricta \Rightarrow Policonvexidad estricta \Rightarrow Cuasi-convexidad \Rightarrow Elipticidad fuerte. No obstante, ninguna de las condiciones anteriores implica la estabilidad material, si bien todas ellas vienen implicadas por la estabilidad uniforme. Según BALL [1977]:

- a) La convexidad es un supuesto inapropiado, dado que entra en conflicto, por ejemplo, con la condición de objetividad $W(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}) = W(\mathbf{F})$ para toda matriz ortogonal \mathbf{Q} .
- b) El criterio de cuasi-convexidad es inadecuado, ya que los teoremas que permiten asegurar la existencia de soluciones de equilibrio (obtenidos por Morrey) hacen uso de condiciones de variación para \mathbf{F} muy fuertes.

Por estas razones el criterio que se suele proponer para la formulación de ecuaciones constitutivas es el de policonvexidad.

A.6. Estudio de la estabilidad de materiales

En este apartado se estudian las condiciones que deben verificar los materiales de Ogden y de Holzapfel (considerados de la mayor importancia en la modelización de las paredes arteriales) para verificar ciertos criterios relacionados con la estabilidad.

Material de Ogden. La expresión de la función de densidad de energía tal y como aparece en la ecuación (3.11) de la página 58 depende del conjunto de variables independientes J y $\{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3\}$. La dependencia anterior permite satisfacer las condiciones de objetividad, por lo que basado en las consideraciones de los apartados anteriores (especialmente motivado para el caso de potenciales exteriores lineales o no convexos en $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ y $\tilde{\lambda}_3$), es deseable la convexidad de la función de densidad de energía respecto de las variables indicadas, esto es,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial J^2} \geq 0 \quad \text{y} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{\lambda}_p^2} \geq 0, \quad p \in \{1, 2, 3\}. \quad (\text{A.9})$$

La inecuación (A.8) lleva a $J \leq e$ para $K > 0$ (se observa que esto implica la violación de la condición de crecimiento de la función de densidad de energía presentada en (A.7)). No obstante, para el tipo de problemas que se consideran en el desarrollo de la tesis (materiales cuasi-incompresibles) se tiene $J \approx 1$.

Por otra parte, las inecuaciones (A.9) se verifican para

$$\begin{cases} \mu_p \geq 0 & \text{si } \alpha_p > 1, \\ \mu_p \leq 0 & \text{si } \alpha_p < 1 \quad \text{y} \\ \mu_p \text{ cualquiera} & \text{si } \alpha_p = 1. \end{cases}$$

Se puede observar que las restricciones a los parámetros indicadas se verifican en todas las aplicaciones del modelo desarrolladas en el capítulo 3.

Material de Holzapfel. En este caso, la función de densidad de energía tal y como viene expresada en la ecuación (3.18) de la página 75 depende de las variables independientes $\{J, \bar{I}_1, \bar{I}_4, \bar{I}_6\}$, y por consideraciones análogas a las expuestas en el estudio de estabilidad del material de Ogden, se deben verificar las inecuaciones

$$\frac{\partial^2 W}{\partial J^2} \geq 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{I}_1^2} \geq 0 \quad \text{y} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{I}_p^2} \geq 0 \quad \text{para } p \in \{4, 6\}. \quad (\text{A.12})$$

La inecuación (A.10) lleva a $J \leq e$ para $K > 0$ (de forma análoga al material de Ogden), verificándose para materiales cuasi-incompresibles (situación habitual en la presente investigación). Además (A.11) se verifica (de forma no estricta) para todo conjunto de parámetros.

Por último, las inecuaciones (A.12) se verifican para todo $\{\bar{I}_4, \bar{I}_6\}$ con $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$.

Las condiciones obtenidas para los parámetros de los materiales de Ogden y de Holzapfel se recogen en el cuadro A.1.

a) Material de Ogden:

$$K > 0, \\ \begin{cases} \alpha_p > 1 \Rightarrow \mu_p \geq 0 & \text{para } p \in \{1, 2, 3\} \\ \alpha_p < 1 \Rightarrow \mu_p \leq 0 & \text{para } p \in \{1, 2, 3\}. \end{cases} \text{ y}$$

b) Material de Holzapfel:

$$K > 0, \quad k_1 > 0 \quad \text{y} \quad k_2 > 0.$$

Cuadro A.1: Condiciones obtenidas para los materiales de Ogden y de Holzapfel

A.7. Representación gráfica de funciones de densidad de energía

A continuación se indican gráficamente las funciones de densidad de energía para tensión plana¹ (según la sección A.3) de algunos de los materiales isótropos y anisótropos considerados en el desarrollo del presente trabajo.

A.7.1. Materiales isótropos

¹Se han desarrollado muchos modelos que admiten esta hipótesis en el comportamiento mecánico de las paredes arteriales (véase, por ejemplo, FUNG [1993]).

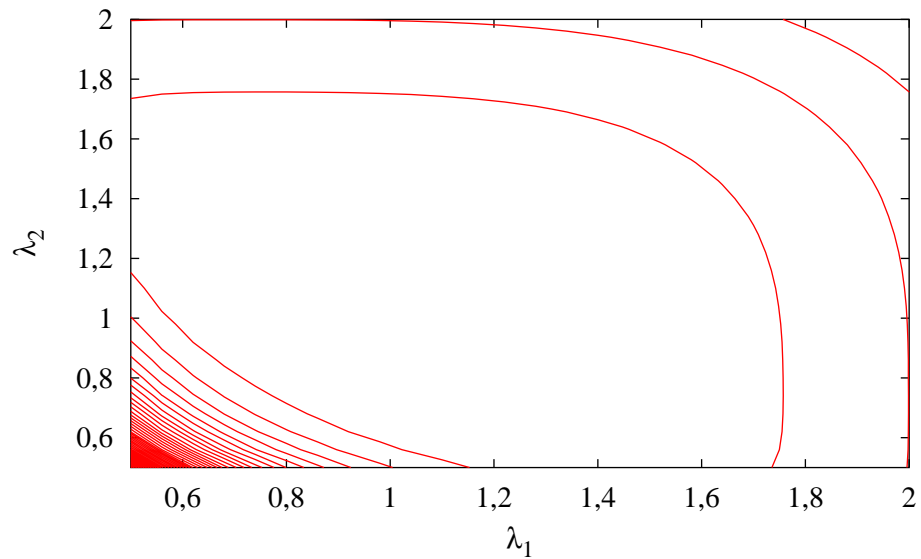


Figura A.1: Función de densidad de energía de un material de Saint Venant-Kirchhoff incompresible con $\mu = 4,225 \cdot 10^2$ kPa

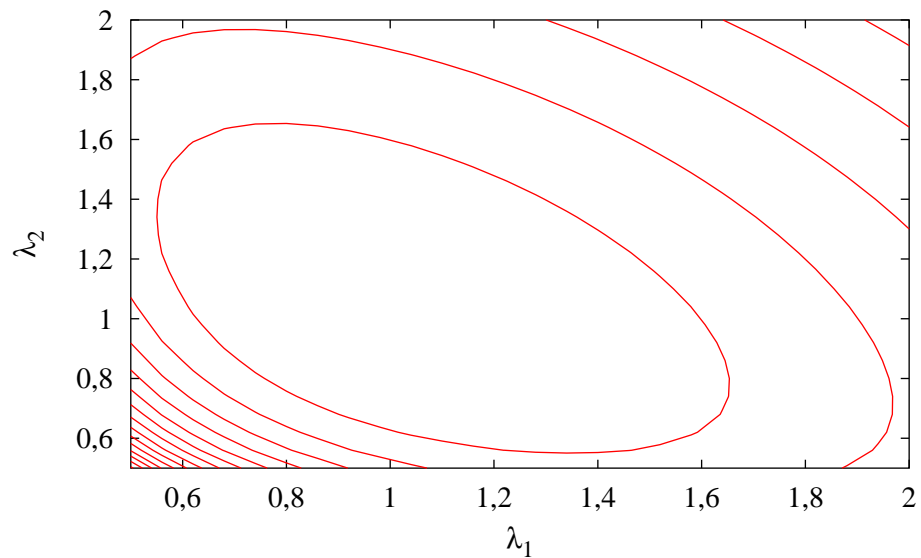


Figura A.2: Contorno de la función de densidad de energía de un material neohookeano incompresible con $\mu = 4,225 \cdot 10^2$ kPa

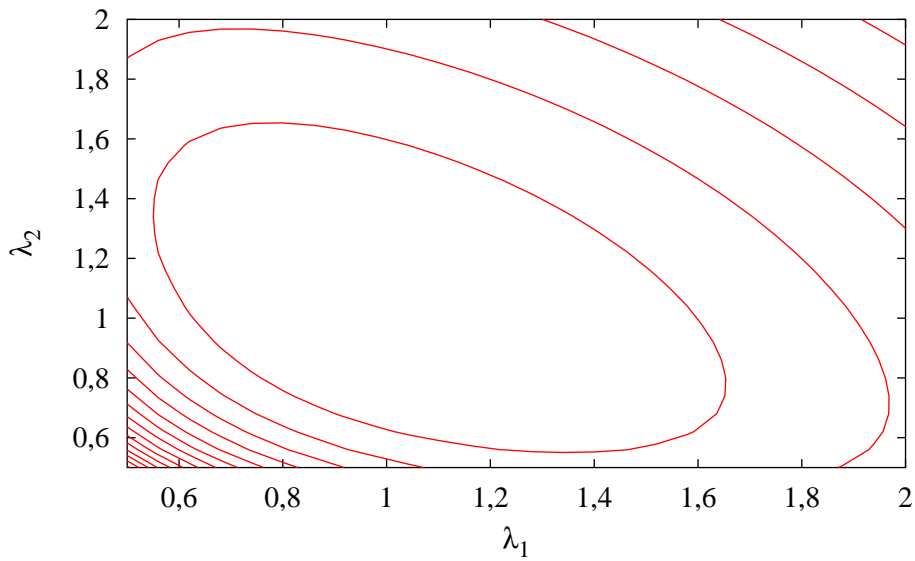


Figura A.3: Contorno de la función de densidad de energía de un material neohookeano modificado incompresible con $\mu = 4,225 \cdot 10^2$ kPa

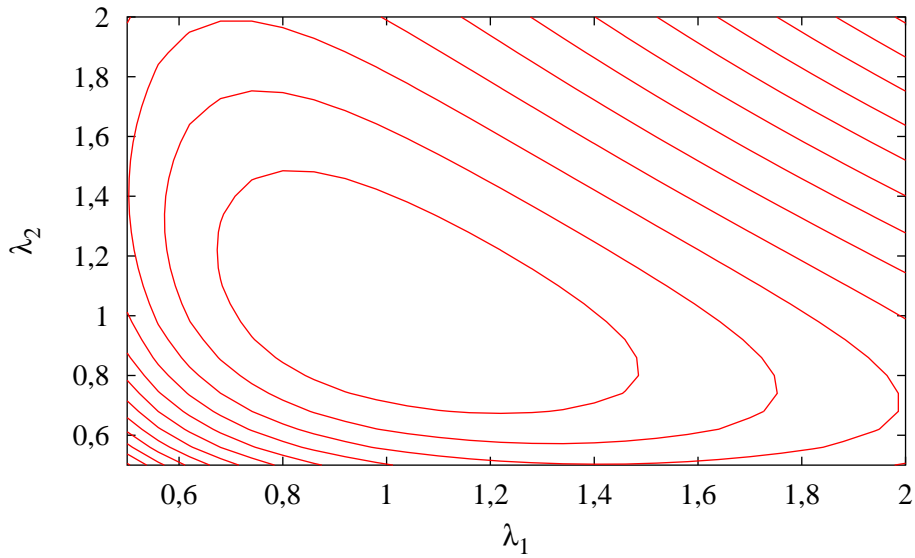


Figura A.4: Contorno de la función de densidad de energía de un material de alargamientos logarítmico incompresible con $\mu = 4,225 \cdot 10^2$ kPa

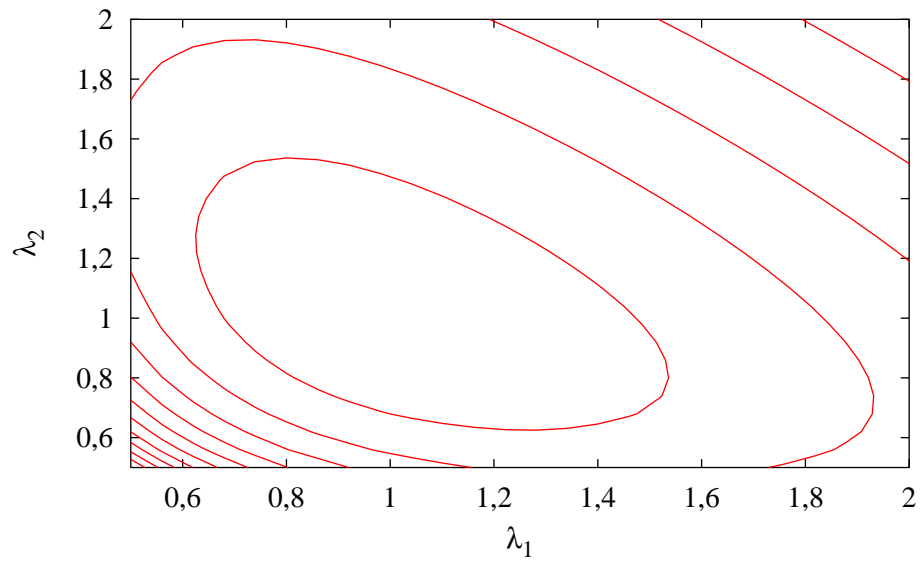


Figura A.5: Contorno de la función de densidad de energía de un material de Ogden incompresible con $\alpha_1 = 1,3$, $\mu_1 = 6,3 \cdot 10^2$ kPa, $\alpha_2 = 5,0$, $\mu_2 = 0,012 \cdot 10^2$ kPa, $\alpha_3 = -2,0$ y $\mu_3 = -0,1 \cdot 10^2$ kPa

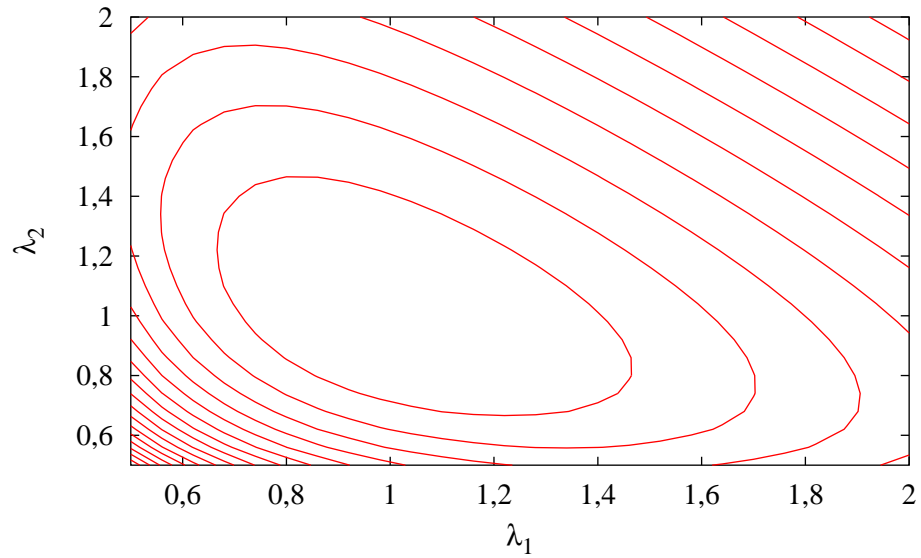


Figura A.6: Contorno de la función de densidad de energía de un material de Varga con $c_1 = 8,45 \cdot 10^2$ kPa

A.7.2. Materiales anisótropos

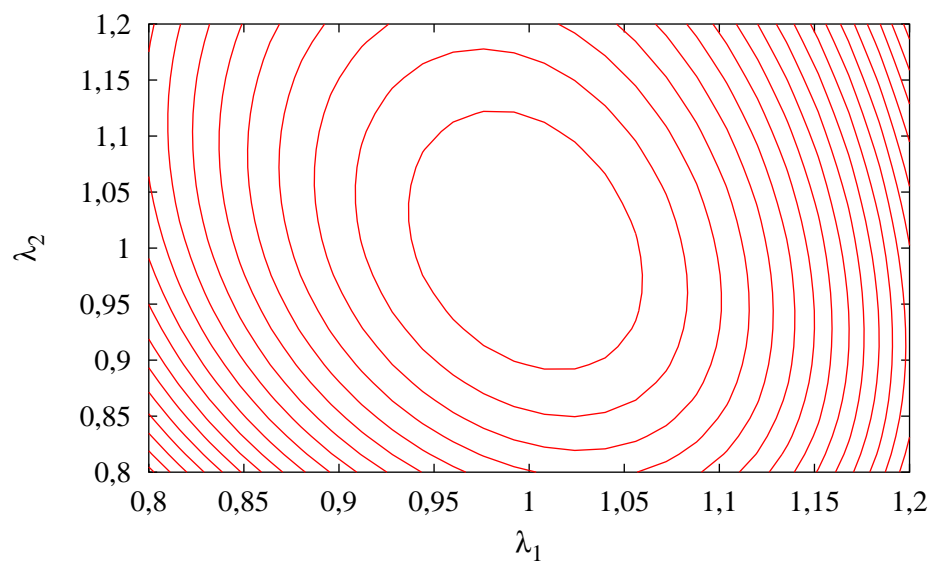


Figura A.7: Contorno de la función de densidad de energía de un material de Weiss incompresible con $c_1 = 10$ kPa, $c_2 = 10$ kPa, $c_4 = 100$ kPa y dirección de anisotropía correspondiente con el eje de abscisas

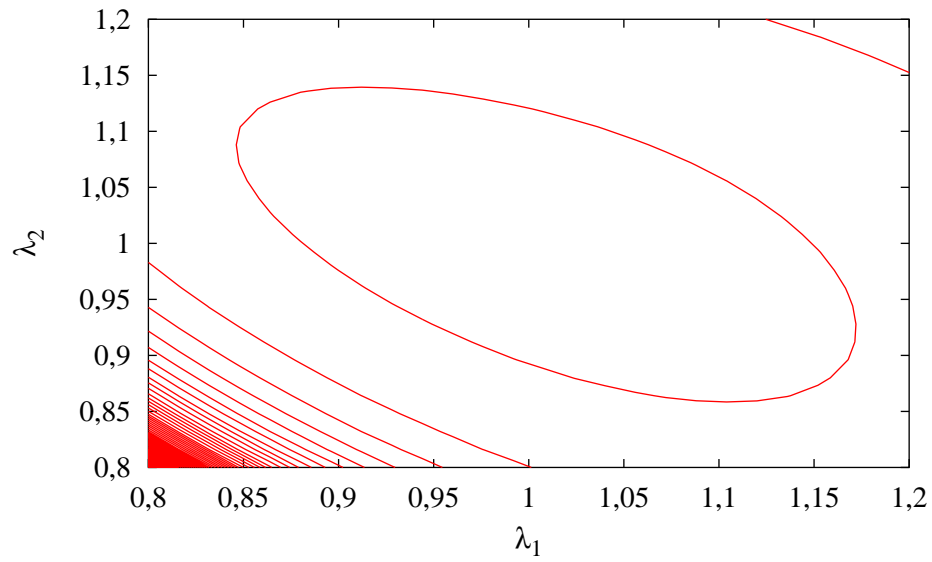


Figura A.8: Función de densidad de energía de un material de Almeida incompresible con $n = 0,6$, $\alpha_0 = 80$ kPa, $\alpha_1 = 7,733$, $\alpha_2 = -3,567$, $\alpha_3 = 1,905$, $\alpha_4 = 3,958$, $\alpha_5 = 0,8904$, $\alpha_6 = -0,0111$, $\alpha_7 = -1,979$ y dirección de anisotropía correspondiente con el eje de abscisas

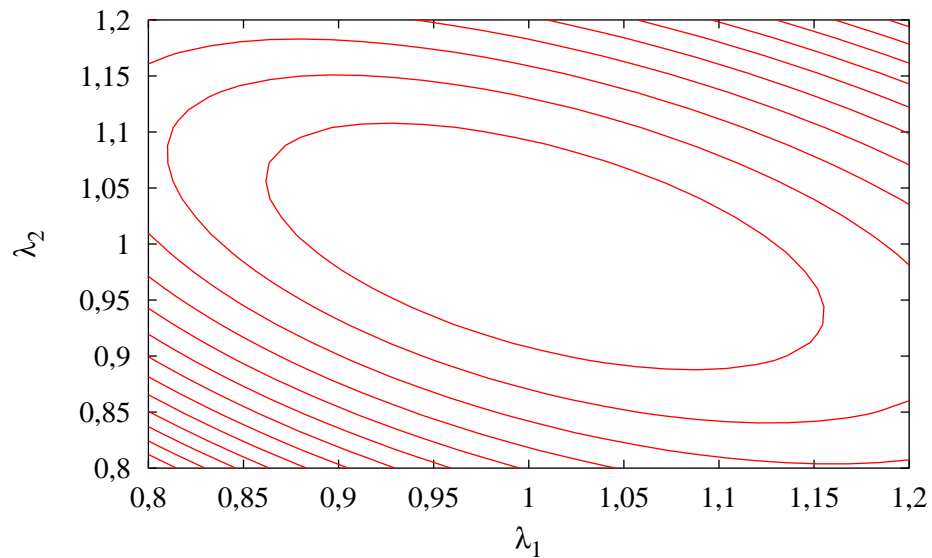


Figura A.9: Contorno de la función de densidad de energía de un material de Holzapfel incompresible con $c = 3$ kPa, $k_1 = 2,3632$ kPa, $k_2 = 0,8393$, y con direcciones de anisotropía en ángulos de 61° con el eje de abscisas

Apéndice **B**

El proyecto MOTRICO

Gran parte de los objetivos y del proceso de investigación que ha dado lugar a la tesis están vinculados con el proyecto MOdelado TRIdimensional de arterias COronarias (MOTRICO). Esta consideración motiva el presente apéndice, con el objetivo principal de mostrar el entorno fundamental en el que se ha desarrollado la investigación.

El apéndice se divide en dos apartados fundamentales, en primer lugar un resumen de la propuesta (sección B.1), presentándose el beneficio social y los objetivos, y en segundo lugar la descripción del equipo de trabajo vinculado al proyecto (sección B.2).

B.1. Resumen de la propuesta del proyecto MOTRICO

B.1.1. Beneficio social

El proyecto MOTRICO [2001] plantea crear un entorno avanzado que permitirá ofrecer asistencia por ordenador al diagnóstico y a la terapia cardíaca. Será útil para las unidades de hemodinámica y cirugía intervencionista de cualquier hospital que tenga la posibilidad de contar con las técnicas instrumentales de angiografía y ultrasonidos intravasculares.

B.1.2. Objetivos

Los objetivos de este proyecto son:

1. Partiendo de imágenes médicas, de segmentos escogidos del árbol coronario, que se obtendrán mediante las técnicas de angiografía y de ultrasonido intravasculares, se realizará la reconstrucción de la anatomía tridimensional de dicha zona y se calcularán la distribución de

tensiones y deformaciones tanto en la zona de interacción sangre-pared (tensión de cizalla), como en la propia pared arterial.

2. Por otra parte pretende, a modo de validación de la hipótesis que relaciona esas tensiones (fundamentalmente la de cizalla) con el desarrollo de la aterosclerosis y reestenosis postangioplastia, aplicar el modelo desarrollado al humano y al animal de experimentación. En el humano se estudiará un modelo de pacientes con aterosclerosis acelerada (situación post-trasplante cardíaco) y un modelo de reestenosis tras implantación de stent, analizando en ambos casos la relación entre factores biofísicos y el desarrollo de ateroma y/o reestenosis. En el animal se aplicará el mismo modelo para obtener un perfil temporal de la reestenosis tras implantación de stents y la influencia de factores biofísicos en las distintas etapas de la misma:
 - a) Reendotelización (una semana).
 - b) Proliferación precoz (un mes).
 - c) Remodelado arterial tardío (tres meses).
3. El procedimiento que se propone en este proyecto para obtener los factores biofísicos es mediante la aplicación de técnicas de simulación de la circulación sanguínea en el interior de arterias basadas en la dinámica de fluidos computacional. Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos, la sangre puede considerarse como un fluido con una viscosidad que depende fundamentalmente del número de globos rojos presentes, ya que éstos pueden considerarse como partículas semi-sólidas. Se piensa resolver el problema inicialmente como si fuese estacionario, posteriormente se tendrá en cuenta la influencia del carácter pulsátil del flujo sanguíneo (efectos transitorios) y también se evaluarán los efectos derivados del comportamiento no-newtoniano del fluido.
4. La simulación del fenómeno propuesto es extremadamente compleja, ya que engloba además de la dinámica de fluidos otras disciplinas diversas como las que están relacionadas con los siguientes problemas:
 - a) El comportamiento de tejidos biológicos blandos sometidos a posibles grandes deformaciones y desplazamientos. Por lo tanto será necesario desarrollar modelos constitutivos del material, lo que justificará el empleo de modelos no lineales (modelos hiperelásticos, comportamiento de tipo reológico, modelos bifásicos acoplados, etc.).
 - b) La aparición de contacto entre el fluido y el sólido. Este desarrollo se prevé en dos fases. En la primera se realizará un cálculo fluido-dinámico con paredes rígidas, a partir del cual se obtendrá información sobre las acciones sobre las paredes y posteriormente se

estudiará el comportamiento estructural bajo las acciones previamente calculadas. La siguiente fase consistirá en desarrollar un modelo totalmente acoplado entre la sangre y las paredes deformables.

- c) Influencia de variables externas como la temperatura, etc.
5. Para que todo lo anterior sea posible es necesario construir el modelo geométrico tridimensional de la zona anatómica de estudio. El entorno que se propone permitirá no sólo la generación de dicho modelo a partir de secuencias de imágenes de IVUS y angiografías, además ofrecerá la posibilidad de obtener medidas volumétricas cuantitativas. Alcanzar este objetivo requiere resolver varios problemas que caen dentro de áreas de conocimiento de la visión por computador y de la informática gráfica.
 6. Es fundamental para que el sistema sea aceptado que el entorno sea «amigable», por ello se desarrollará un entorno interactivo con una interfaz hombre-máquina inteligente e intuitiva. Lógicamente, dadas las características del tema de trabajo, la visualización interactiva de los datos 3D basada en técnicas de realidad virtual y aumentada será uno de los elementos más importantes del sistema.
 7. Con objeto de que el prototipo operativo que se propone realizar no esté lejos de lo que podría ser un «producto comercial», el proceso de desarrollo del software va a seguir la línea de ingeniería del software producida por la Agencia Espacial Europea (ESA).

B.2. Equipo de trabajo

Dada la característica multidisciplinar del proyecto se ha reunido un equipo de trabajo con experiencia probada en cada una de las disciplinas que se requieren para el desarrollo del proyecto. Estos equipos son:

- MEDTEC S.A., empresa interesada en los resultados del proyecto.
- Unidad de Hemodinámica y Cardiología Intervencionista. Grupo del Hospital Clínico de San Carlos de Madrid.
- Unidad de Hemodinámica y Cardiología Intervencionista del Hospital de Badalona.
- Grupo de Informática Gráfica avanzada de la Universidad de Zaragoza. En este grupo participa también personal de la Universidad Pública de Navarra.
- El grupo de Biomecánica de la División de Mecánica Estructural de la Universidad de Zaragoza.

- Grupo de Mecánica de Medios Continuos de la Unversidad Politécnica de Madrid.
- Grupo de Mecánica de Fluidos de la Universidad Politécnica de Madrid.
- Centro de Visión por Computador de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Apéndice

C

Implementación en un sistema de elementos finitos

En este apéndice se presenta el sistema de análisis por elementos finitos sobre el que se han implementado los modelos presentados en la tesis. Dicho sistema es el programa FEAP (Finite Element Analysis Program), desarrollado por Robert L. Taylor en la universidad de Berkeley (California, Estados Unidos). Además se indica la forma de manejar el código introducido.

C.1. Acerca de FEAP

Según TAYLOR [2000] (creador del programa), FEAP (Finite Element Analysis Program) es un sistema de análisis por ordenador diseñado para:

- Ser utilizado en el ámbito académico para ilustrar el comportamiento de diferentes tipos de elementos y modelos.
- En proyectos de investigación, y/o aplicaciones que requieran frecuentes modificaciones para adaptarse a nuevas áreas de problemas o requisitos de análisis.

El programa se desarrolló bajo UNIX incorporando un conjunto de módulos para recibir los datos del modelo de elementos finitos, construir los algoritmos de resolución adaptándose a una gran cantidad de aplicaciones, y generar la salida gráfica y de texto de los resultados.

La solución del problema se construye con un lenguaje de comandos de forma que el algoritmo es indicado por el usuario. De acuerdo con esta capacidad, cada usuario puede definir una estrategia en la solución que se adapte a sus necesidades. Hay suficientes comandos incluidos en el sistema para aplicaciones en mecánica estructural o de fluidos, transferencia de calor y muchas otras áreas que requieran la resolución de ecuaciones diferenciales.

Los usuarios pueden añadir nuevas posibilidades para la descripción del modelo e instrucciones a nivel del lenguaje de comandos para adaptarse a los requisitos de una aplicación específica. Estos añadidos pueden ser utilizados para ayudar a los usuarios a generar mallas para clases específicas de problemas o importar mallas generadas por otros sistemas.

El sistema FEAP incluye una librería general de elementos. Hay elementos disponibles para modelizar problemas en una, dos y tres dimensiones para estructuras de sólidos lineales y no lineales, y para problemas lineales de conducción del calor. Los modelos de material consideran la elasticidad, viscoelasticidad, plasticidad y transferencia del calor en las ecuaciones constitutivas. Los elementos también permiten generar las matrices de masa y de rigidez geométrica para problemas estructurales y presentar las magnitudes asociadas a cada elemento (por ejemplo el estado de tensión y de deformación), incluyendo la capacidad de proyección de estas magnitudes a los nodos, lo que permite la salida gráfica de los contornos de resultados.

Los usuarios pueden también añadir elementos al sistema escribiendo, compilando y uniendo un módulo al sistema FEAP.

C.2. Relación de instrucciones y subrutinas

En los cuadros C.1 y C.2 se presenta la forma de invocar los materiales hiperelásticos isotropos y anisotropos implementados, respectivamente. Se indica el nombre de cada material y la descripción de los parámetros con las notaciones utilizadas en el desarrollo del trabajo de la tesis doctoral.

Por otra parte, la forma de activar el algoritmo de generación automática de direcciones y los modelos de viscoelasticidad y daño se presentan en el cuadro C.3; además, la forma de activar los modelos de crecimiento y de remodelación se indican en el cuadro C.4.

Finalmente, el nombre y propósito de las subrutinas que han sido desarrolladas se presenta en la figura C.5.

<i>Material</i>		<i>Parámetro</i>	
<i>Descripción</i>	<i>Identificador</i>	<i>Descripción</i>	<i>Identificador</i>
Saint Venant-Kirchhoff	stvk	E ν	youn pois
Neohookeano	neoh	E ν	youn pois
Neohookeano modificado	mneo	E ν	youn pois
Mooney-Rivlin	moon	c c_1, c_2	c c1, c2
Yeoh	yeoh	K c_1, c_2, c_3	K c1, c2, c3
Blatz y Ko	blat	f μ β	f mu b
Ogden	ogde	K μ_1, μ_2, μ_3 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	K c1, c2, c3 n1, n2, n3
Logarítmico	log	E ν	youn pois

Cuadro C.1: Materiales hiperelásticos isotrópicos implementados

<i>Material</i>		<i>Parámetro</i>	
<i>Descripción</i>	<i>Identificador</i>	<i>Descripción</i>	<i>Identificador</i>
Weiss	weis	a K c_1, c_2, c_4	d K c1, c2, c4
Almeida	alme	a a_0 a_1, a_2, \dots, a_7 n	d a0 a1, a2, ..., a7 n
Holzapfel	holz	a b k c k_1, k_2	d1 d2 K c k1, k2

Cuadro C.2: Materiales hiperelásticos anisótropos implementados

<i>Generación automática de direcciones</i>	El algoritmo de generación automática de direcciones se activa invocando la opción <code>axil</code> , y definiendo las variables del método mediante « <code>phi,phi</code> », « <code>eje,d</code> » y « <code>pto,O</code> ».
<i>Viscoelasticidad de Holzapfel y de Simó</i>	Las variables de comportamiento viscoso deben especificarse mediante « <code>vsim,tau,beta</code> », con la opción <code>vhol</code> (por defecto), para la viscoelasticidad generalizada de Maxwell, y « <code>vsim,tau,gamma</code> », con la opción <code>vsim</code> en el caso de viscoelasticidad generalizada de Kelvin-Voigt.
<i>Daño</i>	El modelo se define de la forma « <code>dano, zeta_infinity, l</code> ».

Cuadro C.3: Modelos de generación automática de direcciones, viscoelasticidad y daño

<i>Crecimiento</i>	El modelo de crecimiento se activa de la forma « <code>crec,sigma_0,T_theta,T_r,tau_0,T_tau,alpha</code> ». Los nodos pertenecientes a la íntima para la activación del crecimiento por flujo se introducen en el entorno <code>mesh</code> con la orden <code>inti</code> .
<i>Remodelación</i>	El modelo de remodelación se activa de la forma « <code>pre,lambda_theta,lambda_z</code> ».

Cuadro C.4: Modelos de crecimiento y remodelación

<i>Subrutina</i>	<i>Propósito</i>
hipe	Modelos constitutivos para materiales isotrópicos y anisótropos con viscoelasticidad y daño en función de los invariantes
dWlx	Cálculo de las derivadas primeras y segundas de la densidad de energía respecto a los (pseudo-)invariantes
cms2v	Cálculo de los indicadores para matrices simétricas
f1d3d2	Elemento tridimensional con deformación finita y formulación mixta. Subrutina modificada respecto a la versión FEAP 7.3
direcciones	Cálculo de las direcciones de simetría
dano	Reducción de la función de densidad de energía por daño
IvAnisot	Cálculo de los pseudo-invariantes y de sus derivadas primeras y segundas respecto al tensor de Cauchy-Green derecho
cIvb	Determina los (pseudo-)invariantes isocóricos
dWlxb	Determina las derivadas de la función de densidad de energía respecto a los (pseudo-)invariantes a partir de los isocóricos
hlam	Modelos constitutivos para materiales hiperelásticos isotrópicos en función de los alargamientos principales
dWlx	Cálculo de las derivadas primera y segunda de la densidad de energía en función de los alargamientos principales
cdelta	Cálculo de los delta de Kronecker
ccgd	Cálculo del tensor de Cauchy-Green por la derecha
spk2sig	Paso del segundo tensor de Piola Kirchhoff al de Cauchy
tanC2dd	Paso del tensor tangente en la configuración de referencia a la configuración instantánea
celas	Constantes elásticas
parvisc	Determina los parámetros viscosos
uconst,umodel	Interface con el módulo principal de FEAP
slcn3m	Proyecta las tensiones a los nodos de los elementos. Subrutina modificada respecto a la versión FEAP 7.3
umesh1	Rutina para la lectura del fichero de entrada
nodoscercanos	Almacena los nodos a cada nodo de la íntima
greacn	Almacena las reacciones de los nodos de la íntima y sus desplazamientos
pmacr2	Lenguaje de comandos. Subrutina modificada respecto a la versión FEAP 7.3
cmrotac	Obtiene el tensor de rotación propia del gradiente de deformación
cFe	Descomposición del gradiente de deformación por crecimiento
cUgx	Calcula los alargamientos por crecimiento
ttangnmc	Calcula la tensión efectiva del nodo perteneciente a la íntima más cercano al punto de Gauss y sus distancias relativas
cFoFp	Cálculo del gradiente de deformación de presolicitación
sig2sig	Elimina la tensión inicial de presolicitación
umacr0, prugid	Permiten generar los ficheros para el postproceso de GiD

Cuadro C.5: Subrutinas implementadas

Apéndice D

Conceptos fundamentales de hemodinámica

Este apéndice presenta los conceptos principales relacionados con la hemodinámica y que son la base de la determinación de las acciones introducidas en los modelos de paredes arteriales de la tesis.

En primer lugar se indican las características fundamentales de la hemodinámica (sección D.1).

Posteriormente se presentan las ecuaciones de balance (conservación de la cantidad de movimiento y de la masa) para los fluidos incompresibles (sección D.2) y su formulación débil para fluidos newtonianos (sección D.3). Estas ecuaciones pueden ser resueltas analíticamente suponiendo paredes cilíndricas y rígidas para ciertas condiciones de contorno; dada la importancia de estos casos, se exponen los resultados fundamentales (sección D.4).

Seguidamente se introducen los principales indicadores para la caracterización del flujo (sección D.5), indicándose los valores significativos en las principales arterias.

Por último se presenta una clasificación de los modelos de interacción entre la sangre y la pared arterial (sección D.6).

D.1. Introducción y objetivos

Siguiendo a MILNOR [1989], la hemodinámica es la rama de la hidráulica motivada por las particulares propiedades de la sangre y del árbol arterial. Las acciones fundamentales sobre las paredes arteriales son debidas a la sangre, lo que justifica la importancia de la *hemodinámica*.

Según JENSEN [2003] las características fundamentales que diferencian los fluidos fisiológicos, y en particular la hemodinámica, de otras ramas de la mecánica de fluidos son:

- a) *Pulsatilidad.* El flujo en las arterias es fuertemente pulsátil debido al bombeo del corazón.
- b) *Deformabilidad.* Los vasos sanguíneos se deforman por las acciones inducidas por el fluido.
- c) *Actividad.* Las células musculares lisas de los vasos sanguíneos responden activamente a las acciones a las que se ven sometidos, modificando el flujo sanguíneo. Este fenómeno se produce con mayor importancia en las pequeñas arterias.
- d) *Remodelación.* Los vasos sanguíneos pueden responder a las acciones provenientes del fluido mediante adaptaciones a largo plazo.

Las características presentadas muestran la íntima relación entre el comportamiento de la sangre (fluido) y la pared arterial (sólido).

D.2. Ecuaciones de Navier-Stokes y fluidos newtonianos

Las *ecuaciones de Navier-Stokes* establecen la conservación de la cantidad de movimiento y de la masa de un fluido, resultando (respectivamente) para el caso incompresible (suposición habitual en la modelización de la sangre) en un dominio abierto y suave Ω con contorno $\delta\Omega$ respecto a una configuración \mathcal{B}_t ,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \right) - \text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b} \quad \text{y} \quad (\text{D.1})$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (\text{D.2})$$

siendo ρ la densidad y \mathbf{b} el campo de fuerzas por unidad de volumen. Estas ecuaciones se completan con las condiciones de contorno

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \quad \text{en } \delta\Omega_u, \\ \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \delta\Omega_\sigma, \end{array} \right\}$$

siendo $\{\delta\Omega_u, \delta\Omega_\sigma\}$ una partición en conjuntos suaves de $\delta\Omega$ y $\bar{\mathbf{v}}$ la velocidad impuesta en $\delta\Omega_u$.

En el caso de

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

en todo Ω , entonces se dice que el *régimen* es *estacionario*, mientras que en caso contrario se habla de *régimen variable*.

Por otra parte, con objeto de obtener un sistema de ecuaciones resoluble, es necesario establecer relaciones entre los campos de velocidades \mathbf{v} y de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ (ecuaciones constitutivas). Así, los *fluidos newtonianos* son aquellos que verifican

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \mu (\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T) = -p\mathbf{1} + \mu \text{grad}^s \mathbf{v}, \quad (\text{D.3})$$

siendo μ un parámetro positivo constante denominado *viscosidad dinámica* (en el caso de μ variable el fluido se dice que es inelástico) y p un campo de multiplicadores de Lagrange con objeto de forzar la incompresibilidad que coincide con el de *presiones hidrostáticas* $-\sigma_{aa}/3$. Un parámetro íntimamente relacionado con la viscosidad dinámica es la viscosidad cinemática, definido como

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

PERKTOLD Y PROSI [2002] exponen que el comportamiento no-newtoniano (debido principalmente a la presencia de glóbulos rojos, que son considerados partículas semi-sólidas que constituyen el hematocrito con la propiedad de agregabilidad ocupando aproximadamente un 40 % del volumen) es de importancia en el análisis del flujo sanguíneo en pequeñas arterias, mientras que en medianas o grandes arterias la sangre puede considerarse un fluido isótropo, incompresible y newtoniano; estando el valor de la viscosidad dinámica comprendido entre 0,003 – 0,004 Pa·s y siendo el valor de la densidad de aproximadamente 1050 kg/m³ según MILNOR [1989].

D.3. Formulación débil del problema de Navier-Stokes

Los esquemas de resolución numérica en el tiempo de las ecuaciones de Navier-Stokes con condiciones de contorno e iniciales puede establecerse mediante el *método de Galerkin* a partir de la formulación débil del problema. En este apartado se presenta la *formulación débil* para fluidos newtonianos.

A partir de (D.3) se obtiene

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} = -\text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v},$$

con la definición

$$\Delta \mathbf{v} = \text{div}(\text{grad}^s \mathbf{v}) = \sum_{b=1}^3 \left(\frac{\partial^2 v_a}{\partial x_b \partial x_b} + \frac{\partial^2 v_b}{\partial x_a \partial x_b} \right) \mathbf{e}_a.$$

Esta ecuación puede introducirse en (D.1), resultando

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v} = \mathbf{f},$$

siendo $\mathbf{f} = \mathbf{b}/\rho$ las fuerzas por unidad de masa. Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por cualquier función vectorial $\boldsymbol{\eta}$ suave con $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ en $\delta\Omega_u$, se tiene

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega + \int_{\Omega} ((\text{grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega - \int_{\Omega} (\text{grad } p) \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega + \nu \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega. \quad (\text{D.4})$$

Análogamente, multiplicando los miembros de (D.2) por cualquier función escalar suave q , resulta

$$\int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v}) q d\Omega = 0. \quad (\text{D.5})$$

Si ahora se aplica el método de integración por partes a (D.4) se obtiene

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega + \int_{\Omega} ((\text{Grad } \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta} \text{ grad } \mathbf{v} : (\text{grad } \boldsymbol{\eta})^T d\Omega - \int_{\Omega} p \text{ grad } \boldsymbol{\eta} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega + \int_{\delta\Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega. \quad (\text{D.6})$$

El problema de Navier-Stokes en su forma débil consiste en obtener el campo de velocidades \mathbf{v} tal que $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$ en $\delta\Omega_u$, y se satisfagan las ecuaciones (D.5) y (D.6) para toda pareja de funciones admisibles $\boldsymbol{\eta}$ y q .

El método de Galerkin en su formulación habitual puede ser aplicado a la forma débil del problema de Navier-Stokes que se ha presentado, no obstante, normalmente es necesaria la estabilización numérica del esquema (véanse, por ejemplo, ZIENKIEWICZ Y TAYLOR [2000] y FRANCA ET AL. [1993]).

D.4. Los flujos de Poiseuille y de Womersley

Las soluciones analíticas de las ecuaciones de Navier-Stokes (D.1) y (D.2) son sólo posibles en reducidos casos. Uno de estos casos es el de un cilindro recto de paredes rígidas (sin deslizamiento con el fluido) en régimen estacionario, que puede ser resuelto expresando las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . Algunos de los resultados de importancia que se obtienen son:

- a) La presión varía exclusivamente en dirección longitudinal, esto es, $p = p(z)$.
- b) El perfil de velocidades que se obtiene, correspondiente al flujo parabólico de Poiseuille, es

$$v_z(r) = \frac{-a^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right),$$

siendo a el radio del cilindro.

- c) El caudal se puede expresar en función del gradiente de presiones de la forma

$$Q = \frac{-\pi a^4}{8\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right).$$

- d) La tensión tangencial en la pared resulta en función del gradiente de presiones y en función del caudal

$$\tau = \frac{a}{2} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{4\mu Q}{\pi a^3}.$$

En grandes arterias la suposición de régimen estacionario puede no ser válida (según MILNOR [1989] un valor representativo de la frecuencia del flujo sanguíneo es 1,2 Hz). En 1950 Womersley y McDonald analizaron el problema del cilindro de paredes rígidas en régimen variable con variación periódica cualquiera del gradiente de presiones. El problema se puede resolver de la forma:

- a) Expresión del gradiente de presiones en forma de serie de Fourier para la frecuencia ω ,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \Re \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{in\omega t} \right).$$

Esto puede obtenerse a partir de la presión arterial pulsátil¹ (evolución de la presión en el tiempo para una sección determinada) de la forma

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t},$$

siendo c la velocidad de propagación de las ondas en el fluido, que suele expresarse en función del valor resultante de no considerar la viscosidad

$$c_0 = \sqrt{\frac{a}{2C\rho}},$$

siendo C el valor de la flexibilidad global utilizada por RACHEV [2001] para describir el grado de funcionalidad de las paredes arteriales. MILNOR [1989] postula que veinte sumandos de la la serie de Fourier son suficientes para describir el flujo de forma adecuada.

- b) Cálculo del perfil de velocidades, del caudal y de la tensión tangencial en la pared asociados a cada uno de los sumandos de la serie anterior

$$\left. \begin{aligned} v_{z,n}(r, t) &= \Re \left(\frac{A_n}{\mu\lambda_n^2} \left(1 - \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0(\lambda_n a)} \right) e^{in\omega t} \right), \\ Q_n &= \Re \left(\frac{\pi a^2 A_n e^{in\omega t}}{\mu\lambda_n^2} \left(1 - \frac{2J_1(\lambda_n a)}{\lambda_n J_0(\lambda_n a)} \right) \right), \\ \tau_n &= \Re \left(\frac{A_n e^{in\omega t}}{\lambda_n} \frac{J_1(\lambda_n a)}{J_0(\lambda_n a)} \right) = \Re \left(\frac{Q_n(t) \mu \lambda_n^2 J_1(\lambda_n a)}{\pi a (\lambda_n a J_0(\lambda_n a) - 2J_1(\lambda_n a))} \right), \end{aligned} \right\}$$

¹HUMPHREY [2001a] propone valores de la presión arterial en forma de serie de Fourier a partir de pacientes anestesiados.

siendo λ_n un número complejo tal que

$$\lambda_n^2 = \frac{-in\rho\omega}{\mu}.$$

Además, J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de primer y segundo orden, que pueden expresarse en forma de serie como

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \quad y$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 4} + \frac{x^5}{2^2 4^2 6} - \dots$$

c) Determinación de resultados globales por superposición,

$$v_z = \sum_{n=0}^{\infty} v_{z,n}, \quad Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \quad y \quad \tau = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n.$$

D.5. Caracterización de flujo

La caracterización del flujo permite establecer condiciones que deben ser tenidas en cuenta en los modelos. La forma usual de realizar la caracterización es a través de variables adimensionales de magnitudes locales o globales. Entre los aspectos tipológicos del flujo destacan:

a) *Flujo laminar o turbulento.* Cuando en el entorno de un punto del fluido existen grandes variaciones de la velocidad alrededor de un valor medio, entonces se dice que el flujo es turbulento, denominándose laminar en caso contrario. El fenómeno de turbulencia tiene implicaciones en la solución práctica de las ecuaciones de Navier-Stokes al dificultarse la verificación en las distintas escalas del problema. Una de las hipótesis más habituales es la debida a Boussinesq, que lleva a la sustitución de la viscosidad dinámica de las ecuaciones de Navier-Stokes por otra propiedad del fluido que considera las fluctuaciones, siendo en general variable en el espacio.

El parámetro adimensional usualmente utilizado como indicador de la turbulencia es el *número de Reynolds*

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu},$$

siendo U un valor representativo de la velocidad del fluido y L una distancia indicativa de la escala del problema. Conforme mayor es el número de Reynolds, mayor es la turbulencia.

En el caso de un cilindro de radio a es habitual tomar

$$U = \frac{Q}{\pi a^2} \quad y \quad L = a.$$

Se suele considerar que el valor de comienzo de la transición de flujo laminar a turbulento para la sangre en vasos largos es de 2000 (véase MILNOR [1989]).

- b) Influencia de los *efectos transitorios*. Los efectos transitorios son despreciables cuando el flujo que se obtiene considerando condiciones de contorno estacionarias para cada instante determinado, coincide aproximadamente con el flujo real del régimen variable. Este aspecto se mide habitualmente a través del *parámetro adimensional de Womersley*

$$\alpha = L\sqrt{\frac{\omega}{\nu}},$$

siendo ω una frecuencia indicativa de la variación de las condiciones de contorno y L una distancia indicativa de la escala del problema. Conforme menor es el número de Womersley, menor es el efecto transitorio (mayor predominio de las fuerzas viscosas).

En el caso de contorno cilíndrico de radio a es usual $U = a$. Según lo anterior, el flujo de Womersley tiende al flujo de Poiseuille cuando α tiende a cero, pudiendo escribirse para el perfil de velocidades, para el caudal y para la tensión tangencial en la pared,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} v_{z,n} &= \frac{-a^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) A_n \cos(n\omega t), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} Q_n &= \frac{-\pi a^2}{8\mu} A_n \cos(n\omega t), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \tau_n &= \frac{a}{2} A_n \cos(n\omega t) = \frac{4\mu}{\pi a^3} A_n \cos(n\omega t). \end{aligned} \right\}$$

MILNOR [1989] afirma que los efectos transitorios son despreciables en las paredes arteriales (incluyendo la deformabilidad de la pared) para $\alpha < 2$.

En el cuadro D.1 se presentan valores representativos de la velocidad media y de los números de Reynolds y de Womersley para distintas arterias.

Vaso	Velocidad media (cm/s)	α	Re
Aorta ascendente	18	21	1500
Aorta abdominal	14	12	640
Arteria femoral	12	4	200
Arteria renal	40	4	700
Arteria pulmonar principal	19	20	1600

Cuadro D.1: Variables hemodinámicas medias humanas para distintas arterias

D.6. Interacción fluido-estructura

El sistema completo de modelización de arterias puede ser descompuesto en *campos físicos* (subsistemas) que vienen descritos por ecuaciones de campo diferenciadas con interacción entre sí: la sangre (fluido) y la pared arterial (sólido). FELIPPA ET AL. [1999] presentan distintas formas de resolver el problema de la interacción entre los subsistemas:

- a) *Eliminación de uno de los campos.* Por ejemplo, análisis de la sangre (fluido) considerando las paredes arteriales rígidas.
- b) *Tratamiento simultáneo o monolítico.* El problema es tratado como una entidad monolítica y todas sus componentes avanzan simultáneamente en el cálculo. Este es el método de la descripción *Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE)*, considerado según TAYLOR ET AL. [1998] el marco adecuado para los problemas con paredes deformables.
- c) *Tratamiento particionado.* Los campos son tratados separadamente en el cálculo. Los efectos de interacción se comunican entre los componentes individuales usando técnicas de *predicción, sustitución y sincronización*. Este método es el que corresponde a realizar el cálculo del fluido considerando paredes rígidas, introducir las acciones en el modelo de sólido de la pared e iterar en los procesos anteriores hasta obtener convergencia.

Entre las investigaciones actuales acerca de modelos de interacción entre la sangre y la pared arterial se destacan las investigaciones de DEPARIS ET AL. [2003] y GERBEAU Y VIDRASCU [2003].

Apéndice

E

Principios variacionales mixtos y elementos finitos

Usualmente el origen de las formulaciones de los métodos de resolución numérica de un sistema mecánico mediante elementos finitos se basa en principios variacionales. El presente apéndice tiene como objetivo principal mostrar algunas formulaciones variacionales, prestándose especial atención a aquellas que permiten considerar coacciones en el continuo, como puede ser la incompresibilidad o la coacción del coeficiente volumétrico en cada punto.

En el apéndice se introducen principios de la energía potencial total (sección E.2) a partir del principio de los trabajos virtuales (sección E.1), con énfasis en el de Simó-Taylor-Pister (sección E.2.3) ya que es el punto de partida de la formulación mixta del método de los elementos finitos adoptada. Posteriormente se desarrollan los aspectos fundamentales de dicha formulación del método de los elementos finitos (sección E.3) y por último se desarrollan algunos ejemplos prácticos (sección E.4).

E.1. El principio de los trabajos virtuales

Sea un dominio acotado abierto y suave Ω con contorno $\partial\Omega$ para una cierta configuración \mathcal{B}_t en equilibrio estático. Los principios de equilibrio de la mecánica de medios continuos permiten escribir en la configuración deformada las siguientes ecuaciones (en la configuración deformada), que constituyen la *formulación fuerte del problema con valores en el contorno de la elastostática*

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{en } \partial\Omega_u, \\ \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} && \text{en } \partial\Omega_\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.1})$$

siendo $\partial\Omega_u$ y $\partial\Omega_\sigma$ subcontornos en los que se imponen las *condiciones de Dirichlet* (desplazamiento impuesto de valor $\bar{\mathbf{u}}$) y *las de Von Neumann* (tensión impuesta de valor $\bar{\mathbf{t}}$), respectivamente, debiendo verificarse

$$\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\sigma = \partial\Omega \quad \text{y} \quad \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_\sigma = \emptyset.$$

Además, \mathbf{b} es el campo de fuerzas por unidad de volumen en la configuración deformada.

Si se multiplican escalarmente los miembros de la primera de las ecuaciones del sistema (E.1) por cualquier campo de *desplazamientos virtuales* $\boldsymbol{\eta}$ tal que $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ en $\partial\Omega_u$ y se integra en Ω se tiene

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\eta} dv = 0.$$

De aquí, haciendo uso de la igualdad

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta},$$

del *teorema de Green*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}) dv = \int_{\partial\Omega_\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}) \cdot \mathbf{n} ds,$$

y de la igualdad $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta}) \cdot \mathbf{n} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\eta}$ verificada al ser $\boldsymbol{\sigma}$ simétrico, se llega a la *forma variacional o formulación débil del principio de los trabajos virtuales*

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}) dv - \int_{\partial\Omega_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} ds = 0. \quad (\text{E.2})$$

Bajo el supuesto de que el campo de desplazamientos \mathbf{u} defina unívocamente el estado mecánico del sistema (lo que siempre ocurre con materiales elásticos), la ecuación anterior motiva las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta} dv \quad \text{y} \\ \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} dv + \int_{\partial\Omega_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} ds, \end{aligned}$$

siendo δW_{int} y δW_{ext} los denominados *trabajos virtuales interno y externo*, respectivamente.

Se trata por lo tanto de encontrar aquel campo \mathbf{u} tal que verifique la condición de Dirichlet y

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}), \quad (\text{E.3})$$

para toda $\boldsymbol{\eta}$ con $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ en $\partial\Omega_u$. El estado tensional se puede reconstruir una vez conocido el campo de desplazamientos \mathbf{u} .

El principio variacional (E.2) se ha expresado en la configuración deformada, pudiendo presentarse en la configuración inicial de la forma

$$\int_{\Omega_0} (\mathbf{P} : \text{Grad } \boldsymbol{\eta} - \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\eta}) dV - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = 0, \quad (\text{E.4})$$

resultando los trabajos virtuales

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \text{Grad } \boldsymbol{\eta} dV \quad \text{y} \\ \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\eta} dV + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\eta} dS. \end{aligned}$$

En el caso de un material hiperelástico, δW_{int} es expresable, en la configuración inicial, de la forma

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial W(\mathbf{F}(\mathbf{u}))}{\partial \mathbf{F}} : \text{Grad } \boldsymbol{\eta} dV.$$

Se puede demostrar que las formulaciones fuerte (E.1) y débil (E.3) son equivalentes cuando se imponen ciertas condiciones de suavidad al conjunto de las funciones \mathbf{u} y $\boldsymbol{\eta}$ admisibles. No obstante, la forma usual de definir los conjuntos de funciones admisibles de los problemas variacionales vienen dados por espacios de Sobolev (véase BRAESS [1997]).

E.2. Principios de la energía potencial total estacionaria

E.2.1. Formulaciones en desplazamientos

Se supone que las cargas \mathbf{B} son independientes del movimiento (cargas muertas). En estas condiciones, para un material hiperelástico con función densidad de trabajo realizado W , se define la *función energía potencial total* para la configuración inicial de la forma:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}) &= \Pi_{\text{int}}(\mathbf{u}) + \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}) \quad \text{siendo} \\ \Pi_{\text{int}}(\mathbf{u}) &= \int_{\Omega_0} W(\mathbf{C}(\mathbf{u})) dV \quad \text{y} \\ \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}) &= - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} dS. \end{aligned}$$

El principio variacional (obsérvese la relación con el principio de los trabajos virtuales en (E.3)) consiste en la estacionalidad de Π , resultando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \text{ tal que } \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega_{0u},$$

esto es, la derivada de Gâteaux del funcional Π es nula para toda $\boldsymbol{\eta}$ admisible,

$$D_{\mathbf{u}} \Pi \cdot \boldsymbol{\eta} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \Pi(\mathbf{u} + \varepsilon \boldsymbol{\eta}) \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Método de penalización para la incompresibilidad. El *método de penalización* se basa en añadir a la parte isocórica de un material incompresible una función suave positiva dependiente del coeficiente volumétrico que se anula en $J = 1$. Esto es,

$$W(\mathbf{C}) = W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\overline{\mathbf{C}}), \quad (\text{E.5})$$

con $W_{\text{vol}}(J) = \kappa \mathcal{G}(J)$, siendo habitualmente

$$\mathcal{G}(J) = \frac{1}{2}(J - 1)^2.$$

La función de energía potencial total resulta por lo tanto en este caso

$$\Pi_{\text{p}} = \int_{\Omega_0} (W_{\text{vol}}(J(\mathbf{u})) + W_{\text{iso}}(\overline{\mathbf{C}}(\mathbf{u}))) \, dV + \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}).$$

Linealización. Las ecuaciones variacionales en problemas no lineales suelen resolverse en escalones de carga sucesivos en los que se itera por el método de Newton sobre las ecuaciones linealizadas. Para ello se hace necesario el cálculo de los tensores de elasticidad (\mathbb{C} en la configuración deformada o \mathbf{c} en la configuración inicial) que aparecen en la *segunda variación* $\delta^2 \Pi$ de la energía potencial total.

E.2.2. Método de los multiplicadores de Lagrange

El método de penalización para la pseudo-incompresibilidad presenta problemas de *bloqueo* (rigidización) que tratan de resolverse mediante la flexibilización mediante *métodos multi-campo* (otras soluciones se basan en la subintegración o en la integración selectiva¹). Esto es, métodos que incorporan en el funcional de energía no sólo el campo de desplazamientos, sino otros campos independientes, destacándose los de tipo tensional (llamados *métodos mixtos*).

El *método de los multiplicadores de Lagrange* es un método de dos campos de variables que surge al plantear la estacionalidad de Π respetándose la coacción interna $J = 1$, resultado

$$\Pi_{\text{L}}(\mathbf{u}, p) = \Pi_{\text{L int}}(\mathbf{u}, p) + \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{u}),$$

¹Se han encontrado teoremas de reciprocidad entre los métodos de elementos finitos multi-campo y los basados en la integración selectiva.

siendo p el campo de coeficientes de Lagrange (equivalente al de presiones hidrostáticas $\sigma_{aa}/3$), con

$$\Pi_{\text{L int}}(\mathbf{u}, p) = \int_{\Omega} (p(J(\mathbf{u}) - 1) + W_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{u}))) \, dV.$$

Obsérvese que la expresión $J - 1$ puede ser sustituida por otra función suave $h(J)$ tal que $h(J) = 0 \Leftrightarrow J = 1$, si bien p puede perder el sentido de presión hidrostática. Se puede demostrar que las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al campo de presiones coinciden con $J = 1$ para todo punto de Ω . Por otra parte, el método de penalización es equivalente al de los multiplicadores de Lagrange para $\kappa \rightarrow \infty$.

Método de los multiplicadores de Lagrange aumentado. Este método trata de evitar sistemas mal condicionados de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a Π_{L} . Se trata de introducir un término en el funcional de energía que relaja la condición de incompresibilidad. En particular,

$$\Pi_{\text{PL}}(\mathbf{u}, p) = \Pi_{\text{L}}(\mathbf{u}, p) - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \frac{1}{K} p^2 \, dV, \quad (\text{E.6})$$

teniendo K el sentido de módulo volumétrico. En este caso p pierde el sentido de presión hidrostática.

E.2.3. Principio variacional de Simó-Taylor-Pister

Este principio variacional no implica la incompresibilidad pero trata de dar un tratamiento diferente al comportamiento volumétrico e isocórico con objeto de evitar el bloqueo que puede surgir en materiales de elevada rigidez volumétrica respecto a la isocórica (habitual en elastómeros y tejidos biológicos blandos). Para ello se consideran tres campos independientes en el funcional de energía: el campo de desplazamientos \mathbf{u} , el de presiones hidrostáticas p y un tercer campo cinemático, denominado de dilataciones y que denotaremos con \tilde{J} . En particular,

$$\Pi_{\text{STP}}(\mathbf{u}, \tilde{J}, p) = \int_{\Omega_0} (W(\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{u}, \tilde{J})) + p(J(\mathbf{u}) - \tilde{J})) \, dV + \Pi_{\text{ext}}, \quad (\text{E.7})$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}} &= \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{F}} \quad \text{y} \\ \tilde{\mathbf{F}} &= \tilde{J}^{1/3} \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) = \tilde{J}^{1/3} (J(\mathbf{u}))^{-1/3} \mathbf{F}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Para el caso en que la función de trabajo realizado pueda ser descompuesta aditivamente en partes volumétrica e isocórica, (E.7) resulta

$$\Pi_{\text{STP}}(\mathbf{u}, \tilde{J}, p) = \int_{\Omega_0} (W_{\text{vol}}(\tilde{J}) + W_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{u})) + p(J(\mathbf{u}) - \tilde{J})) \, dV + \Pi_{\text{ext}}.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a los campos \tilde{J} y p , aseguran la equivalencia en sentido débil de los campos J y \tilde{J} , y la equivalencia de la presión hidrostática con p .

Entre las ventajas en el uso del principio de Simó-Taylor-Pister para la construcción del método de los elementos finitos destacan (véase WEISS [1996]):

- a) El campo independiente p coincide con el de presiones hidrostáticas.
- b) El campo independiente \tilde{J} puede restringirse a la unidad (o cualquier otro valor) a través del método de los multiplicadores de Lagrange.
- c) Proporciona un marco variacional apto para métodos de penalización, *métodos de los desplazamientos supuestos* (véase KASPER Y TAYLOR [1997]) y esquemas de integración selectiva.

Restricción en la deformación volumétrica. La energía potencial Π_{STP} puede ser modificada introduciendo un nuevo campo independiente (multiplicadores de Lagrange) con objeto de forzar la incompresibilidad. El funcional (E.7) se transforma de la forma

$$\Pi_{\text{LSTP}}(\mathbf{u}, \tilde{J}, p; \lambda) = \Pi_{\text{STP}}(\mathbf{u}, \tilde{J}, p) + \int_{\Omega_0} \lambda h(\tilde{J}) dV, \quad (\text{E.8})$$

siendo habitual en este caso $h(\tilde{J}) = \log(\tilde{J})$.

Si se impone una coacción en el coeficiente volumétrico de valores distintos a la unidad (incompresibilidad), \tilde{J} , se modifica el potencial (E.8) de la forma

$$\Pi_{\text{PSTP}}(\mathbf{u}, \tilde{J}, p; \lambda) = \Pi_{\text{STP}}(\mathbf{u}, \tilde{J}, p) + \int_{\Omega_0} \lambda h(\tilde{J} - \tilde{J} + 1) dV.$$

Este problema puede aproximarse mediante un método de penalización análogo al indicado en (E.5), en el que $W_{\text{vol}} = \kappa \mathcal{G}(J - \tilde{J} + 1)$.

E.2.4. El principio variacional de Hu-Washizu

Se trata de un principio variacional mixto de tres campos independientes: dos de tipo cinemático, \mathbf{u} y $\tilde{\mathbf{F}}$, y uno de tipo tensional, $\tilde{\mathbf{P}}$. La expresión de la energía potencial total que se considera (véase WASHIZU [1982]) es

$$\Pi_{\text{HW}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{P}}) = \Pi(\mathbf{u}) - \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{P}} : (\tilde{\mathbf{F}} - \text{Grad } \mathbf{u}) dV.$$

Este funcional es de gran generalidad y es la base de multitud de formulaciones del método de los elementos finitos, además puede transformarse en el de Simó-Taylor-Pister bajo ciertas condiciones.

E.3. Formulación mixta del método de los elementos finitos

La formulación mixta del método de los elementos finitos que se propone parte del principio variacional de Simó-Taylor-Pister. Para ello, se particiona (discretiza) el dominio Ω en N_{elm} elementos Ω_e , esto es,

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_{\text{elm}}} \Omega^e, \quad \Omega^a \cap \Omega^b = \emptyset, \text{ si } a \neq b.$$

La interpolación del campo de desplazamientos en el elemento e es de la forma

$$\mathbf{u}_e = \sum_{a=1}^{N_{\text{nod}}} N_a(\boldsymbol{\xi}_e) \mathbf{u}_a,$$

siendo N_{nod} el número de nodos por elemento, N_a las funciones de forma,

$$\boldsymbol{\xi}_e \in \square = \{(-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1)\}$$

las coordenadas locales del punto (véase, por ejemplo, ZIENKIEWICZ Y TAYLOR [1995]), y \mathbf{u}_k los desplazamientos nodales en el elemento e . En el caso de elementos isoparamétricos, se tiene

$$\mathbf{X}_e = \sum_{a=1}^{N_{\text{nod}}} N_a(\boldsymbol{\xi}_e) \mathbf{X}_a,$$

siendo \mathbf{X}_k las coordenadas de los nodos en la configuración inicial. La configuración deformada viene dada por lo tanto como

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{X}_e + \mathbf{u}_e = \sum_{a=1}^{N_{\text{nod}}} N_a(\boldsymbol{\xi}_e) (\mathbf{X}_a + \mathbf{u}_a).$$

Análogamente, los campos de dilataciones y presiones son interpolados de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{J}_e &= \sum_{a=1}^{\bar{N}} \psi_a(\mathbf{X}) \tilde{J}_a \quad \text{y} \\ p_e &= \sum_{a=1}^{\bar{N}} \psi_a(\mathbf{X}) p_a, \end{aligned}$$

para \bar{N} polinomios asociados a nodos de dilatación y presión, con valores \tilde{J}_a y p_a , respectivamente. Con objeto de conseguir rapidez de cálculo es usual aproximar de forma constante la dilatación y la presión en cada elemento. Esto es, $\bar{N} = 1$ con la única función de forma $\psi = 1$. Por tanto, el campo \tilde{J}_e en cada elemento coincide con

$$\tilde{J}_e = \frac{V_e}{V_e^0} = \frac{\int_{\square} J_e(\mathbf{u}) j_{\xi} d\square}{\int_{\square} j_{\xi} d\square},$$

siendo j_ξ el jacobiano de la aplicación isoparamétrica, esto es,

$$j_\xi = \det \left[\sum_{a=1}^{N_{\text{nod}}} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \mathbf{X}_a \right].$$

Además, el campo de presiones p , constante en cada elemento, resulta para el caso de descomposición aditiva en partes volumétrica e isocórica,

$$p_e = \frac{1}{V_e^0} \int_{\square} \frac{\delta W_{\text{vol}}(\tilde{J})}{\delta \tilde{J}} j_\xi d\square.$$

Estas expresiones de los campos \mathbf{u}_e , \tilde{J}_e y p_e se introducen en la ecuación variacional

$$D_{\mathbf{u}} \Pi_{\text{STP}} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0. \quad (\text{E.9})$$

Expresión matricial. Linealizando (E.9) en el campo \mathbf{u} a partir de la solución conocida \mathbf{u}_n en el tiempo n se llega a la ecuación matricial

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{N_{\text{nod}}} \sum_{b=1}^{N_{\text{nod}}} (\mathbf{K}^{\text{M}}(\mathbf{u}_n) + \mathbf{K}^{\text{G}}(\mathbf{u}_n) + \mathbf{K}^{\text{MIX}}(\mathbf{u}_n))_{ab} (\Delta \mathbf{u})_b \\ = \sum_{a=1}^{N_{\text{nod}}} (\mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}_n))_a. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Los términos \mathbf{K}^{M} y \mathbf{K}^{G} representan las matrices usuales en elementos finitos no lineales (véase, por ejemplo, ZIENKIEWICZ Y TAYLOR [1995]) de rigidez (análoga a elasticidad lineal) y geométrica (debido a la presencia de tensiones iniciales). La matriz \mathbf{K}^{MIX} resulta de la interpolación discontinua de los campos p y \tilde{J} , coincidiendo con la obtenida en problemas lineales (véase TCHONKOVA Y STURE [2001]). Por último, los términos \mathbf{F}^{ext} y \mathbf{F}^{int} son los vectores de fuerzas internas (debido a desplazamientos impuestos en $\delta\Omega_\sigma$ y a la carga másica \mathbf{B}) y externas (debido a las tensiones aplicadas en $\delta\Omega_u$).

El cálculo de la solución aproximada \mathbf{u}_{n+1} de (E.9) puede obtenerse a través del método iterativo de Newton a partir de (E.10).

E.4. Ensayos

Se considera el inflado del globo de la sección 3.2.5 (página 71) con el objetivo de comparar los distintos resultados obtenidos por el método de los elementos finitos con formulación pura en desplazamientos y con formulación mixta. El material adoptado en el ensayo es el neohookeano modificado, aproximando la incompresibilidad con dos coeficientes de Poisson: $\nu = 0,49$ y $\nu = 0,4999$. Ambas situaciones se analizan con la formulación pura en desplazamientos y con la formulación mixta, utilizando hexaedros de ocho nodos.

En las figuras E.1 y E.2 se observa que los resultados obtenidos en la formulación mixta para $\nu = 0,4999$ son aproximadamente los teóricos, mientras que en la formulación pura en desplazamientos el sistema resultante está muy mal condicionado, produciendo resultados «absurdos». La relajación de la condición de incompresibilidad mejora los resultados de la formulación en desplazamientos, siendo no obstante peores a los obtenidos con la formulación mixta.

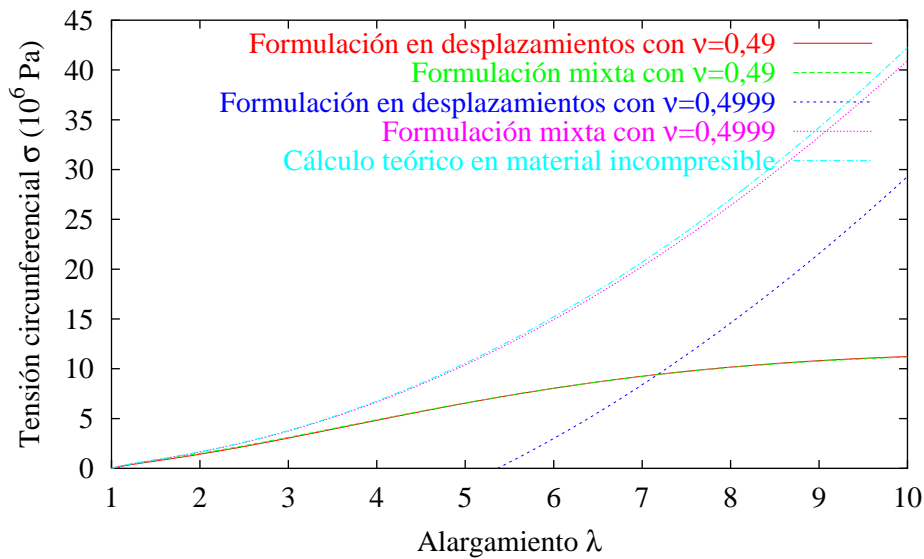


Figura E.1: Inflado de un cilindro. Comparación de tensiones circunferenciales con formulación pura en desplazamientos y formulación mixta

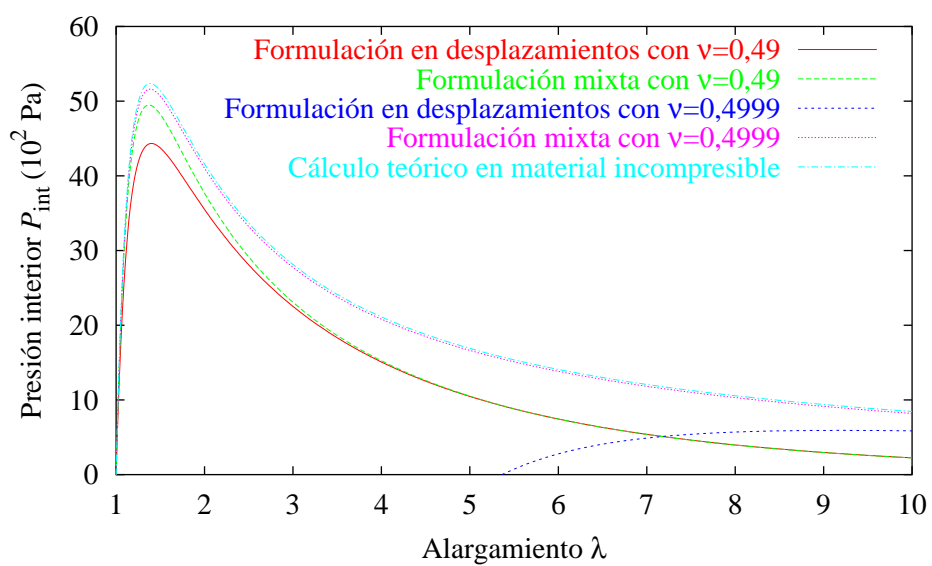


Figura E.2: Inflado de un cilindro. Comparación de presiones interiores con formulación pura en desplazamientos y formulación mixta

Bibliografía

- E. S. ALMEIDA Y R. L. SPILKER [1998]. Finite element formulations for hyperelastic transversely isotropic biphasic soft tissues. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **151**: 513–538.
- R. APARDIAN, E. BESADA, A. GLAUSIUS, G. ROMERO Y A. SANTINI [2000]. Radioterapia vascular: prevención de la reestenosis. aspectos radiobiológicos, físicos y clínicos. *Revista Uruguaya de Cardiología* **15**: 45–55.
- J. M. ATIENZA, P. ARAGONCILLO, G. V. GUINEA, F. J. GOICOLEA Y M. ELICES [2003]. Influencia de la temperatura en el comportamiento mecánico de arterias humanas y su repercusión en la formación de inestabilidades. *XX Encuentro del Grupo Español de Fractura*.
- F. AURICCHIO, M. D. LORETO Y E. SACCO [2000]. Finite-element analysis of a stenotic artery revascularization through a stent insertion. *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering* **4**: 249–263.
- F. AURICCHIO Y R. L. TAYLOR [1997]. Shape-memory alloys: modelling and numerical simulations of the finite-strain superelastic behavior. *Computer methods in applied mechanics and engineering* **143**: 175–194.
- J. M. BALL [1977]. Constitutive inequalities and existence theorems in nonlinear elastostatics. *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium* **1**: 189–241.
- D. BARLOW, A. D. ROBBINS, P. H. RUBIN, R. STALLMAN Y P. VAN OOSTRUM [1995]. *The AWK Manual*.
- D. BRAESS [1997]. *Finite elements*. Cambridge University Press. Segunda edición.
- C. CAÑERO, P. RADEVA, R. TOLEDO, J. J. VILLANUEVA Y J. MAURI [2000]. 3D curve reconstruction by biplane snakes. *Proceedings of the International Conference on Pattern Reconstruction*.
- W. J. CANTOR, E. D. PETERSON, J. J. POPMA, J. P. ZIDAR, M. H. SKETCH, J. E. TCHENG Y E. M. OHMAN [2000]. Provisional stenting

- strategies: Systematic overview and implications for clinical decision-making. *Journal of the American College of Cardiology* **36**: 1142–1151.
- P. R. A. CARAMORI Y A. J. ZAGO [2000]. Endothelial dysfunction and coronary artery disease. *Arquivos Brasileiros de Cardiologia* **75**: 173–182.
- S. CARLIER, L. C. A. VAN DAMME, C. P. BLOMMERDE, J. J. WENTZEL, G. VAN LANGEHOVE, S. VERHEYE, M. M. KOCKX, M. W. M. KNAAPEN, C. CHENG, F. GIJSEN, D. J. DUNKER, N. STERGIOPULOS, C. J. SLAGER, P. W. SERRUYS Y R. KRAMS [2003]. Augmentation of wall shear stress inhibits neointimal hyperplasia after stent implantation. inhibition through reduction of inflammation? *Circulation* 2741–2746.
- C. G. CARO, T. J. PEDLEY, R. C. SCHROTER Y W. A. SEED [1978]. Mechanics of the circulation. *Oxford Univ. Press*.
- J. R. CEBRAL, P. J. YIM, R. LÖHNER, O. SOTO Y P. L. CHOYKE [2002]. Blood flow modeling in carotid arteries with computational fluid dynamics and mr imaging. *Academic Radiology* **9**: 1286–1299.
- A. W. CHAN Y D. J. MOLITERNO [2001]. In-stent restenosis: Update on intracoronary radiotherapy. *Cleveland Clinix Journal of Medicine* **68**, nº 9.
- H. R. CHAUDHRY, B. BUKIET, A. DAVIS, A. B. RITTER Y T. FINDLEY [1997]. Residual stresses in oscillating thoracic arteries reduce circumferential stresses and stress gradients. *Journal of biomechanics* **30**: 57–62.
- H. R. CHAUDHRY, B. BUKIET Y M. LACKER [1996]. The effect of residual stresses on wave speed in arteries. *Journal of biological systems* **4**: 171–180.
- P. G. CIARLET [1988]. *Mathematical elasticity, Volume 1: Three dimensional elasticity*. North-Holland.
- CIMNE [1999]. *GID. Manual de utilización*.
- A. F. COSTA, M. GAMBOA Y A. M. PORTO [1997]. *Notas de geometría diferencial de curvas y superficies*. Sanz y Torres.
- P. F. DAVIES, K. A. BARBEE, M. V. VOLIN, A. ROBOTOWSKYJ, J. CHEN, L. JOSEPH, M. GRIEM, M.Ñ. WERNICK, E. JACOBS, D. C. POLACEK, N. DEPAOLA Y A. I. BARAKAT [1997]. Spatial relationships in early signaling events of flow-mediated endothelial mechanotransduction. *Annual Reviews of Physiology* **59**: 527–549.

- S. DEPARIS, M. A. FERNÁNDEZ Y L. FORMAGGIA [2003]. Acceleration of a fixed point algorithm for fluid-structure interaction using transpiration conditions. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*. Accepted.
- P. DOSCH, G. MASINI Y K. TOMBRE [2000]. Improving arc detection in graphics recognition. *International Conference on Pattern Recognition* **2**: 2246–2249.
- N. J. B. DRIESSEN, G. W. M. PETERS, J. M. HUYGHE, C. V. C. BOUTEN Y F. P. T. BAAIJENS [2003]. Remodelling of continuously distributed collagen fibres in soft connective tissues. *Journal of Biomechanics* **36**: 1151–1158.
- M. EPSTEIN Y G. A. MAUGIN [2000]. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies. *International Journal of Plasticity* **16**: 951–978.
- J. ESCANED, J. GOICOLEA, F. ALONSO, M. J. PÉREZ-VIZCAYNO, R. HERNÁNDEZ, A. FERNÁNDEZ-ORTIZ, C. BAÑUELOS Y C. MACAYA [1999]. Propensity and mechanism of restenosis in different coronary stent designs. *Journal of the American College of Cardiology* **34**: 1490–1496.
- G. FARIN [1996]. *Curves and surfaces for computer aided geometric design*. Computer Science and Scientific Computing.
- G. FAURY [2001]. Function-structure relationship of elastic arteries in evolution: from microfibrils to elastin and elastic fibres. *Pathol. Biol.* **49**: 310–325.
- C. A. FELIPPA, K. C. PARK Y C. FARHAT [1999]. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Center for Aerospace Structures*. CU-CAS-99-09.
- FLUENT [2001]. *FLUENT 5. Manual de usuario*.
- L. P. FRANCA, T. J. R. HUGHES Y R. STENBERG [1993]. Stabilized finite element methods for the stokes problem. *Incompressible Computational Fluid Dynamics*. M. Gunzburger and R.A. Nicolaides, Eds. Cambridge University Press 87–107.
- Y. C. FUNG [1990]. *Biomechanics. Motion, flow, stress and Growth*. Springer.
- Y. C. FUNG [1993]. *Biomechanics. Mechanical properties of living tissues*. Springer.
- J. C. GARCÍA, J. RODRÍGUEZ Y J. M.^A GOICOLEA [2002]. Application of GiD to 3D biomechanics problems, interfacing with ABAQUS and FEAP (barcelona). *1st Conference on advances and Applications of GiD*.

- F. GARVAN [2002]. *The Maple book*. Chapman & Hall.
- T. C. GASSER Y G. A. HOLZAPFEL [2002]. Failure analysis of an artery by means of discontinuous finite element modeling. *Fifth World Congress on Computational Mechanics*.
- J. GERBEAU Y M. VIDRASCU [2003]. A quasi-newton algorithm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flow. *Rapport de recherche INRIA*.
- C. D. GONZÁLEZ [2000]. *Dos modelos micromecánicos de deformación con daño en materiales compuestos*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.
- M. E. GURTIN [1981]. *An introduction to continuum mechanics*. Academic Press.
- S. HARTMANN [2001]. Parameter estimation of hyperelasticity relations of generalized polynomial-type with constrain conditions. *International Journal of Solids and Structures* **38**: 7999–8018.
- K. HAYASHI [2001a]. Mechanical properties of arterial walls. *Course on biomechanics of soft tissue, CISM*.
- K. HAYASHI [2001b]. Remodeling of tendons and ligaments. *Course on biomechanics of soft tissue, CISM*.
- K. HAYASHI, A. MAKINO, D. K. KAKOI Y H. MIYAZAKI [2001]. Remodeling of arterial wall in response to blood pressure and blood flow changes. *ASME*.
- J. M. V. HERNÁNDEZ [1987]. *Métodos de Regresión y Análisis Multivariante II*. UNED.
- M. HOLEČEK Y P. KRÁKORA [2000]. Scale dependent continuum models in biomechanics. *Numerical Methods in Continuum Mechanics*.
- G. A. HOLZAPFEL [2000a]. Biomechanics of soft tissue. *Computational biomechanics*.
- G. A. HOLZAPFEL [2000b]. *Non linear solid mechanics*. Wiley.
- G. A. HOLZAPFEL [2001]. Structural and numerical models for the (visco)elastic response of arterial walls with residual stresses. *Course on biomechanics of soft tissue, CISM*.
- G. A. HOLZAPFEL Y T. C. GASSER [2000]. A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 4379–4403.

- G. A. HOLZAPFEL, T. C. GASSER Y R. W. OGDEN [2000]. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *Journal of Elasticity* **61**: 1–48.
- G. A. HOLZAPFEL Y C. A. J. SCHULZE-BAUER [2000]. Mechanics of angioplasty: wall, balloon and stent. *Computational biomechanics*.
- J. D. HUMPHREY [1995]. Mechanics of the arterial wall: review and directions. *Critical ReviewsTM in Biomedical Engineering* **23**: 1–162.
- J. D. HUMPHREY [2001a]. *Cardiovascular solid mechanics*. Springer.
- J. D. HUMPHREY [2001b]. The cardiovascular system. *Course on biomechanics of soft tissue, CISM*.
- J. D. HUMPHREY Y L. A. TABER [1999]. Mechanics of vascular remodeling. *Bioengineering Conference*.
- E. A. IBIJOLA [2002]. On some fundamental concepts of continuum damage mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **191**: 1505–1520.
- R. INFANTE [1991]. *Métodos de programación matemática*. UNED.
- O. E. JENSEN [2003]. Physiological fluid dynamics. *Mathematical and Computational Modeling of Biological Systems* **19**: 111–125. Centro Internacional de Matemática.
- E. P. KASPER Y R. L. TAYLOR [1997]. A mixed-enhanced strain method: finite deformation problems. *Universidad de California en Berkeley*. Informe N.º: UCB/SEMM-97/09.
- G. S. KASSAB [1999]. Remodeling of the right coronary artery in placing-induced congestive heart failure. *Bioengineering Conference*.
- B. E. KOOP Y J. L. LEWIS [2003]. A model of fracture testing of soft viscoelastic tissues. *Journal of Biomechanics* **36**: 605–608.
- E. KUHL Y P. STEINMANN [2002]. Geometrically nonlinear functional adaptation of biological microstructures. *Fifth World Congress on Computational Mechanics*.
- R. S. LAKES Y R. VANDERBY [1999]. Interrelation of creep and relaxation: a modeling approach for ligaments. *Journal Biomechanics Engineering* **121**: 612–615.
- J. LEMAITRE Y J.-L. CHABOCHE [1990]. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press.

- P. LIBBY [2003]. Una nueva teoría sobre la aterosclerosis. *Investigación y Ciencia* Julio: 15–23.
- G. LIMBERT Y M. TAYLOR [2002]. On the constitutive modeling of biological soft connective tissues. A general theoretical framework and explicit forms of the tensors of elasticity for strong anisotropic continuum fiber-reinforced composites at finite strains. *International journal solids structures* **39**: 2343–2358.
- A. LLÁCER, R. FERNÁNDEZ-CUENCA Y M. V. MARTÍNEZ DE ARAGÓN [2002]. Mortalidad en España en 1998. evolución en la década 1989-1998. i. mortalidad general, principales causas de muerte y de años potenciales de vida perdidos. *SEMERGEN* **28**: 329–33.
- F. LOTH, S. A. JONES, C. K. ZARINS, D. P. GIDDENS, R. F. NASSAR, S. GLAGOV Y H. S. BASSIOUNY [2002]. Relative contribution of wall shear stress and injury in experimental intimal thickening at ptfe end-to-side arterial anastomoses. *Transactions of the ASME* **124**: 44–51.
- S. L. MABRY, S. L. RODRÍGUEZ Y J. D. HEFFERNAN [1997]. Integrated medical analysis system. *Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference* 1163–1168.
- A. J. MACKAY, C. A. HAMILTON, K. MCARTHUR, G. BERG, A. TROPEANO, P. BOUTOUYRIE, J. L. REID Y A. F. DOMINCZAK [2001]. Radial artery hypertrophy occurs in coronary atherosclerosis and is independent of blood pressure. *Clinical Science* **100**: 509–516.
- J. E. MARSDEN Y T. J. R. HUGHES [1968]. *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall.
- C. F. MARTIN, L. SCHOVANEC Y Y. DEWOODY [2003]. Control theory and biomechanics. *Mathematical and Computational Modeling of Biological Systems* **19**: 153–175. Centro Internacional de Matemática.
- S. MARTÍNEZ [2001]. *Simulación numérica del flujo sanguíneo en la arteria coronaria izquierda. Relación entre el esfuerzo cortante y el espesor de la pared arterial*. Proyecto Fin de Carrera. Universidad Politécnica de Madrid.
- H. MASUDA, Y. ZHUANG, T. M. SINGH, K. KAWAMURA, M. MURAKAMI, C. K. ZARINS Y S. GLAGOV [1999]. Adaptive remodeling of internal elastic lamina and endothelial lining during flow-induced arterial enlargement. *Arterioscler Thromb Vasc Biol* **19**: 2298–2307.
- J. P. MATONICK Y J. K. LI [2001]. A new uniform piecewise linear viscoelastic model of the aorta with propagation characteristics. *Cardiovascular engineering* **1**: 37–47.

- G. A. MAUGIN Y S. IMATANI [2003]. Material growth in solid-like materials. *IUTAM Symposium on Computational Mechanics of Solid Materials at Large Strains*.
- MEDIGUIDE [2003]. Medical guidance systems. *Dirección de internet: <http://www.mediguide.co.il>*.
- R. W. MILNOR [1989]. *Hemodynamics*. William & Wilkins.
- MOTRICO [2001]. *MOdelado TRIdimensional y simulación de las arterias COronarias*. Ministerio de educación y cultura. Proyectos de Investigación y Desarrollo Tecnológico (Proyectos coordinados), n.º TIC2000-1635-C04-03.
- R. W. OGDEN [2001]. Nonlinear elasticity, anisotropy, material stability and residual stresses in soft tissue. *Course on biomechanics of soft tissue, CISM*.
- K. PERKTOLD Y M. PROSI [2002]. Computational models of arterial flow and mass transport. *Course on Cardiovascular Fluid Dynamics, CISM*.
- W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING Y B. P. FLANNERY [1992]. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press. Segunda edición.
- P. PROVENZANO, R. LAKES, T. KEENAN Y R. VANDERBY [2001]. Nonlinear ligament viscoelasticity. *Annals of Biomedical Engineering* **29**: 908–914.
- P. P. PURSLOW, T. J. WESS Y D. W. L. HUKINS [1998]. Collagen orientation and molecular spacing during creep and stress-relaxation in soft connective tissues. *The Journal of Experimental Biology* **201**: 135–142.
- M. A. PUSO Y J. A. WEISS [1997]. Finite element implementation of anisotropic quasilinear viscoelasticity using a discrete spectrum approximation. *ASME, Journal of Biomechanical Engineering*.
- C. M. QUICK, W. L. YOUNG, E. F. LEONARD, S. JOSHI, E. GAO Y T. HASHIMOTO [2000]. Model of structural and functional adaption of small conductance vessels to arterial hypotension. *American Journal of Physiology: Heart and Circulatory Physiology* **279**: H1645–H1653.
- A. RACHEV [1997]. Theoretical study of the effect of stress-dependent remodeling on arterial geometry under hypertensive conditions. *Journal of Biomechanics* **30**: 819–827.
- A. RACHEV [2001]. Remodeling of arteries in response to changes in their mechanical environment. *Course on biomechanics of soft tissue, CISM*.

- E. K. RODRÍGUEZ, A. HOGER Y A. D. MCCULLOCH [1994]. Stress-dependent finite growth in soft elastic tissues. *Journal of Biomechanics* **27**: 455–467.
- J. RODRÍGUEZ [2002]. *Modelos constitutivos para paredes arteriales y su implementación mediante elementos finitos*. Universidad Politécnica de Madrid. Trabajo de investigación.
- J. RODRÍGUEZ, J. C. GARCÍA Y J. M.^A GOICOLEA [2001]. Simulación de las paredes de arterias coronarias en bifurcaciones. *VI Reunión Nacional de usuarios de ABAQUS (Zaragoza)*.
- J. RODRÍGUEZ, J. M.^A GOICOLEA, F. GABALDÓN Y J. C. GARCÍA [2002]. *Modelos constitutivos para paredes arteriales y su implementación mediante elementos finitos*. Métodos Numéricos en Ingeniería V (Madrid).
- J. RODRÍGUEZ, J. M.^A GOICOLEA, J. C. GARCÍA Y F. GABALDÓN [2003a]. Finite element models for mechanical simulation of coronary arteries. *Proceedings of the Second International Workshop on Functional Imaging and Modeling of the Heart (Lyon, France)*.
- J. RODRÍGUEZ, J. M.^A GOICOLEA, J. C. GARCÍA Y F. GABALDÓN [2003b]. Finite element models for remodeling and initial stresses of arterial walls. *First International Congress on Computational Bioengineering (Zaragoza)*. Accepted.
- C. ROGERS, D. Y. TSENG, J. C. SQUIRE Y E. R. EDELMAN [1999]. Balloon-artery interactions during stent placement. *Circulation Research* **84**: 378–383.
- C. S. ROY [1881]. The elastic properties of the artery wall. *Journal of Physiology* **3**: 125–162.
- T. L. SAATY Y J. BRAM [1964]. *Nonlinear mathematics*. McGraw-Hill.
- M. SANMARTÍN, J. GOICOLEA, C. GARCÍA, J. RODRÍGUEZ, J. GARCÍA, J. M.^A GOICOLEA Y A. CRESPO [2003]. Influencia del estrés de corte en la reestenosis intrastent: Estudio in vivo mediante reconstrucción tridimensional y dinámica de fluidos computacional. *Congreso de las Enfermedades Cardiovasculares*. En proceso de aceptación.
- H. SCHILDT [1995]. *C++*. Manual de referencia. McGraw-Hill.
- C. A. J. SCHULZE-BAUER Y G. A. HOLZAPFEL [2003]. Determination of constitutive equations for human arteries from clinical data. *Journal of Biomechanics* **36**: 165–169.

- J. C. SIMÓ [1999]. *Topics on the Numerical Analysis and Simulation of Plasticity. Handbook of Numerical Analysis* 3. Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland).
- J. C. SIMÓ Y T. J. R. HUGHES [1998]. *Computational inelasticity*. Springer-Verlag.
- J. C. SIMÓ Y J. W. JU [1987]. Strain- and stress- based continuum damage models—I.formulation. *International journal of solids and structures* **24**: 821–840.
- T. C. SKALAK Y R. J. PRICE [1996]. The role of mechanical stresses in microvascular remodeling. *Microcirculation* **3**: 143–165.
- A. SÁNCHEZ [1999]. *Simulación numérica del flujo sanguíneo en la bifurcación de la arteria coronaria izquierda*. Proyecto Fin de Carrera. Universidad Politécnica de Madrid.
- D. P. SOKOLIS, H. BOUDOULAS Y P. E. KARAYANNACOS [2002]. Assessment of the aortic stress-strain relation in uniaxial extension. *Journal of Biomechanics* **35**: 1213–1223.
- A. J. M. SPENCER [1984]. Continuum theory of the mechanics of fibre-reinforced composites. *CISM* **282**: 1–32.
- L. A. TABER [1998]. A model for aortic growth based on fluid shear and fiber stresses. *Journal of Biomechanical Engineering* **120**: 348–354.
- D. TANG, C. YANG, Y. HUANG Y D.Ñ. KU [1999a]. Wall stress and strain analysis using a three-dimensional thick-wall model with fluid-structure interactions for blood flow in carotid arteries with stenoses. *Computers & Structures* **72**: 341–356.
- D. TANG, C. YANG Y D.Ñ. KU [1999b]. A 3-d thin-wall model with fluid-structure interactions for blood flow in carotid arteries with symmetric and asymmetric stenoses. *Computers & Structures* **72**: 357–377.
- C. A. TAYLOR, T. J. R. HUGHES Y C. K. ZARINS [1998]. Finite element modeling of blood flow in arteries. *Computer methods in applied mechanics and engineering* **158**: 155–196.
- R. L. TAYLOR [2000]. *FEAP, a Finite Element Analysis Program*.
- R. L. TAYLOR, K. S. PISTER Y G. L. GOUDREAU [1970]. Thermo-mechanical analysis of viscoelastic solids. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **2**: 45–59.
- M. TCHONKOVA Y S. STURE [2001]. Classical and recent formulations for linear elasticity. *Archives of Computational Methods in Engineering* **8**: 41–74.

- M. TEXON [2001]. Hemodynamic basis of atherosclerosis with critique of the cholesterol-heart disease hypothesis. *Cardiovascular Engineering* **1**: 57–58.
- A. THURY, J. J. WENTZEL, R. V. H. VINKE, F. J. H. GIJSEN, J. C. H. SCHUURBIERS, R. KRAMS, P. J. DE FEYTER, P. W. SERRUYS Y C. J. SLAGER [2002]. Focal in-stent restenosis near step-up. roles of low and oscillating shear stress? *Circulation* **23**: 185–187.
- C. TRUESDELL [1977]. *A first course in rational continuum mechanics, Volume 1: general concepts*. Academic Press.
- A. WAHLE, G. P. M. PRAUSE, S. C. DEJONG Y M. SONKA [1999]. Geometrically correct 3-D reconstruction of intravascular ultrasound images by fusion with biplane angiography – methods and validation. *IEEE Transactions on Medical Imaging* **18**.
- K. WASHIZU [1982]. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon Press. Tercera edición.
- J. A. WEISS [1996]. Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **135**: 107–128.
- J. A. WEISS [2001]. Computational modeling of ligament mechanics. *Critical ReviewsTM in Biomedical Engineering* **29**: 1–70.
- J. A. WEISS, J. C. GARDINER Y C. BONIFASI-LISTA [2002]. Ligament material behaviour is non linear, viscoelastic and rate-independent under shear loading. *Journal of biomechanics*. Accepted.
- J. J. WENTZEL [2000]. *Shear stress and the vessel wall*. Tesis Doctoral, Erasmus Universiteit Rotterdam.
- F. D. WHITCHER [1997]. Simulation of in vivo loading conditions of nitinol vascular stent structures. *Computers & Structures* **64**: 1005–1011.
- J. P. WILBER Y J. R. WALTON [2002]. The convexity properties of a class of constitutive models for biological soft tissues. *Mathematics and mechanics of solids*. Accepted.
- T. WILLIAMS Y C. KELLEY [1998]. *gnuplot. An interactive plotting program*.
- P. J. WITHERS Y H. K. D. H. BHADOSHIA [2001]. Residual stress, part 1 - measurement techniques. *Materials Science and Technology* **17**: 355–365.

- C. XU, S. LEE, T. M. SINGH, E. SHO, X. LI, M. SHO, H. MASUDA Y C. K. ZARINS [2001]. Molecular mechanism of aortic wall remodeling in response to hypertension. *Journal of Vascular Surgery* **33**: 570–578.
- T. YAMAGUCHI [2000]. Computational mechanics simulation for clinical cardiovascular medicine. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*.
- S. Z. ZHAO, B. ARIFF, Q. LONG, A. D. HUGHES, S. A. THOM, A. V. STANTON Y X. Y. XU [2002]. Inter-individual variations in wall shear stress and mechanical stress distributions at the carotid artery bifurcation of healthy humans. *Journal of Biomechanics* **35**: 1367–1377.
- O. C. ZIENKIEWICZ Y R. L. TAYLOR [1995]. *El método de los elementos finitos*. McGraw-Hill. Volumen 2. Cuarta edición.
- O. C. ZIENKIEWICZ Y R. L. TAYLOR [2000]. *The finite element method. Fluid dynamics*. Butterworth-Heinemann.
- D. P. ZIPES Y P. LIBBY [1997]. *Heart disease: a textbook of cardiovascular medicine*. Saunders & Noble. Capítulo 30.
- M. A. ZULLIGER, G. MONTORZI Y N. STERGIOPULOS [2002]. Biomechanical adaptation of porcine carotid muscular smooth muscle to hypo and hypertension in vitro. *Journal of Biomechanics* **35**: 757–765.

Índice alfabético

A

Aceleración, 50
Actina, 4
Adventicia, 6, 7, 75, 76, 85, 121, 126,
140, 182, 184, 185
Ajuste de modelo, 1, 17, 83, 85–94,
100, 103–107, 116, 130, 162–
172
Alargamiento, 4, 53, 86, 87, 105–107
 circunferencial, 59, 166, 174, 182
 de referencia, 106
 diferencial, 106
 inicial, 106
 longitudinal, 12, 89, 103, 155, 158,
 159, 174, 182
 medio, 106
 principal, 55, 56, 58, 127
ALE, 13, 240
Anatomía, 2
Aneurisma, 8, 11, 83
Angiogénesis, 122
Angiografía, 8, 19, 24, 223
Angioplastia, *véase* ATP
Angulo de apertura, *véase* Método de
 apertura en ángulo
Anisotropía, 12, 14, 17, 21, 71–221
Antitrombina III, 6
Aorta, 5–7, 126, 127, 155
Arbitrary Lagrangian-Eulerian, *véase*
 ALE
Árbol arterial, 5, 19
Área nodal, 29, 33
Arteria, 5, 6, 14, 15, 54
 aorta, *véase* Aorta
 canina, 5
 carótida, 12, 78, 86, 89, 140, 161,
 162, 164, 174–182
 coronaria, 12, 24, 37, 75, 76, 86,
 110, 184

 esplénica, 162
 ilíaca, 75
 mamaria, 162
 mesentérica, 162
 pulmonar, 6
 torácica, 6, 153
Arteriola, 5
Ateroma, 8, 9, 13, 14, 21, 49, 54, 154
Aterosclerosis, 8, 11, 14, 16, 224
ATP, 2, 11, 24, 111, 112, 158, 224
Aurícula, 5
Autovalor, 55, 56
Autovector, 55, 56
Axilsimetría, 86, 87, 89, 103, 129, 157,
 164

B

Balón, 11, 14
Bifurcación arterial, 20, 24, 37
Biología, 2, 3
Biomecánica, 3, 13–15
Bloqueo, 244
Bondad del ajuste, 33, 34, 39
Braquiterapia, 11

C

CAD, 24
Calcificación, 10
Capilar, 5
Cateterismo, 24
Caucho, 49, 57
Célula, 119, 121, 133
 conjuntiva, 9
 endotelial, 6, 10, 15, 122
 muscular, 3, 6, 9, 11, 12, 15, 21,
 85, 119
Centro de gravedad, 29
CFD, 26, 28, 187
Ciclo
 de carga, 104, 106, 112, 114, 162

- fisiológico, 88
 Cilindro, 59, 68, 71, 126
 Circulación, 5
 Coágulo, 7
 Coeficiente
 de correlación múltiple, 33
 de daño, 111, 113, 114, 116
 de determinación múltiple, 33
 de viscoelasticidad, 99–101, 107, 110
 de viscosidad, 28, 187, 235
 volumétrico, 241, 244
 Colágeno, 3, 4, 6, 12, 21, 75, 83, 110, 167, 176
 Colesterol, 8, 9, 16
 Condiciones
 de compatibilidad, *véase* Ecuaciones de compatibilidad
 de contorno, 20, 28, 185, 187
 fisiológicas, 6
 Conectividad, 26
 Configuración
 de referencia, 50, 86, 127, 134, 153–155
 deformada, 50, 51, 54, 58, 59, 125, 128, 136, 139, 145, 146, 156, 244
 descargada, 153
 inicial, 50, 51, 54, 55, 71, 99, 101, 127, 128, 151, 159, 174, 244
 instantánea, 50
 libre de tensiones, 119, 123, 124, 154
 Convexidad, 211–221
 Corazón, 5, 6, 38
 Correlación, 23–40, 85–94, 127, 184
 positiva, 39
 Crecimiento, 12, 15–17, 23, 24, 117–151, 155, 158, 159, 191
 de Rodríguez, 123, 124
 global, 123
 Cuartil, 32, 34, 38
 Cuasi-convexidad, 214, 215
 Curvatura, 131–133
 máxima, 128, 131
 media, 132
- D**
- Daño, 14, 17, 85, 111–116, 124
 Derivada de Gâteaux, 244
 Descomposición
 multiplicativa por crecimiento, 123, 125
 polar, 50, 55, 56
 volumétrica-isocórica, 74, 85, 114
 Desigualdad de Clasius-Duhem, 53
 Desplazamiento, 114
 impuesto, 22, 246
 transversal, 59
 Diagnóstico, 3, 8, 223
 Diástole, 5, 14, 19, 98
 Dinámica de fluidos computacional, *véase* CFD
 Dirección
 abluminal, 9
 circunferencial, 14, 68, 86, 89, 126, 127, 176
 de anisotropía, *véase* Dirección preferente
 de estiramiento, 59
 del flujo, 37, 38
 longitudinal, 14, 68, 126, 127, 176, 182
 preferente, 12, 21, 49, 76, 83, 85, 116, 136, 157, 180, 185
 principal, 55, 56, 128
 radial, 68, 86, 126, 127
- E**
- Ecuaciones
 constitutivas, 16, 17, 85, 119, 154, 215, 235
 de compatibilidad, 154, 159
 de Euler-Lagrange, 243, 245, 246
 de evolución, 99, 101, 127
 de Navier-Stokes, 20, 236
 Efecto
 Bayliss, 15
 Mullins, 111, 112
 Elasticidad, 13, 17, 112, 126
 Elastina, 3, 4, 6
 Elastoplasticidad, 14
 Elemento, 24, 26, 29, 107, 185
 cuadrilátero, 26
 hexaédrico, 26

- triangular, 26, 29
 Elipticidad, 214
 Endotelio, 15, 122
 Energía, 53, 54, 74, 97
 libre, 52
 potencial total, 244
 Enfermedad cardiovascular, *véase* Patología cardiovascular
 Ensayo experimental, 15, 16, 21, 85, 106, 162–172
 Entropía, 53
 Erosión superficial, 10
 Error de ajuste, 39, 86, 88, 94, 166
 Escalones de carga, 22
 Espesor patológico, 39
 Estabilidad, 53, 58, 75, 83, 154, 211–221
 uniforme, 214
 Estado
 activo, 4, 15
 autoequilibrado, 159
 de deformación, 14, 21, 23, 57, 86, 97, 112
 fisiológico, 86, 106, 153, 158, 162, 184
 pasivo, 4, 15, 119
 tensional, 14, 21, 23, 28, 107, 111, 112, 157
 Estenosis, 8, 10, 13, 14, 196–204
- F**
- F* de Snedecor, 33
 FEAP, 21, 58, 83, 227–228
 Fibras de colágeno, *véase* Colágeno
 Fibroblasto, 6, 122
 Fisiología, 2, 6
 Flexibilidad global, 121
 Fluencia, 21, 103, 106, 107, 169
 Fluido newtoniano, 13, 20, 28, 187, 235
 Flujo
 de Poiseuille, 28, 187, 236
 de Womersley, 236
 pulsátil, 121
 sanguíneo, 5, 6, 13, 15, 37, 110, 122, 233–240
 Formulación mixta, 247, 249
 Fortran, 58, 76
- Fuerza, 53
 impuesta, 22
 nodal, 29
 Función
 de densidad de energía, 57, 58, 73–76, 85, 86, 98, 100, 102–105, 107, 111–114, 116, 184
 de lagrangiano nulo, 215
 de transformación, 50
 inversa, 50
- G**
- Geometría
 arbitraria, 117, 157
 real, 8, 16, 17, 76, 85, 86, 118, 153, 158, 184–192
 tridimensional, 13, 19, 127
 GiD, 83
 GIVUS, 20
 Globo, 71, 248
 Goma, 49, 57
 Grandes deformaciones, 11, 15, 83
 Grupo de rotaciones, 54
- H**
- Hemodinámica, 13, 16, 20, 21, 233–240
 Hessiano, 88, 212
 Hiperelasticidad, 12, 13, 17, 50–94, 97, 154
 Hipertensión, 7, 120–122, 124, 129, 140
 Hipotensión, 120–122, 124, 129, 146
 Histéresis, 104
 hrMRI, 21
- I**
- IGES, 24
 Implementación, 12, 17, 21, 57–59, 75, 76, 107, 114, 136
 Incompresibilidad, 12, 20, 68, 86, 104, 125, 126, 157, 158, 166, 182, 241, 244–246, 248, 249
 Inelasticidad, 112
 Infarto de miocardio, 10
 Integral de convolución, 99, 101
 Interacción fluido-estructura, 13, 20, 192, 240
 Íntima, 6, 8, 9, 11, 14, 24, 122, 126, 128, 129, 131, 136, 139

- Invariante, 54, 55, 57, 58, 74, 76, 116
 Isocoricidad, *véase* Incompresibilidad
 Isotropía, 13, 14, 17, 54–71, 83, 182, 217
 transversal, 71, 103, 182
 IVUS, 8, 19, 20, 24, 85, 223
- L**
- Leucocito, 9, 10
 Linealización, 21, 53, 244
 Lípido, 8, 9
 Lumen, 6, 8, 11, 12, 19, 119
- M**
- Malla, 26, 28, 68, 83, 136, 174, 187
 estructurada, 24
 Mallado, 23, 26
 Material
 con memoria de forma, 14
 de alargamiento logarítmico, 58, 59
 de Almeida, 75
 de Blatz y Ko, 58
 de Cohen generalizado, 75
 de Fung, 75, 86, 89
 de Holzapfel, 75, 78, 83, 85, 86, 89, 94, 116, 136, 157, 167, 168, 184, 187, 191, 216
 de Mooney-Rivlin, 57
 de Mooney-Rivlin generalizado, 75
 de Ogden, 13, 58, 68, 71, 83, 85, 86, 89, 94, 166, 168, 184, 191, 216
 de Saint Venant-Kirchhoff, 57, 59, 83
 de Varga, 58
 de Weiss, 75, 78, 116
 de Yeoh, 58
 entrópico, 53
 neohookeano, 57, 68, 71
 neohookeano modificado, 57, 68, 71, 107, 114
 Material simple, 128
 Matriz extracelular, 4, 6, 9, 10, 119
 Mecanotransductor, 122, 127
 Media, 6, 7, 9, 11, 75, 76, 110, 121, 126, 140, 145, 182, 184, 185
 Medicina, 2
- Membrana elástica, 6, 11
 Método
 de apertura en ángulo, 118, 119, 121, 127, 145, 146, 154, 155, 169–172
 de estabilización, 20
 de gradiente conjugado, 21
 de los multiplicadores de Lagrange, 244
 de mínimos cuadrados, 32, 104, 106
 de Newton, 21, 88, 244
 de penalización, 246
 óptico, 162
 Microcirculación, 10
 Micromecánica, 50, 75, 83, 97
 Microvascularización, 10, 122
 Miosina, 4
 Modelo
 constitutivo, *véase* Ecuaciones constitutivas
 de crecimiento de Fung, 124
 de crecimiento de Taber, 126–127
 de rango completo, 32
 estadístico, 32
 generalizado de crecimiento, 127–151, 154
 Módulo
 de elasticidad, 4, 6, 7, 114
 de Poisson, 114, 248
 de tensión tangencial, 37–40
 tangencial, 57
 volumétrico, 57
 MOTRICO, 223–226
 Movimiento, 54–56
 Multiplicador de Lagrange, 86
 Músculo, 4
- N**
- Neovascularización, 10
 Nivel de significación, 38, 39
 No linealidad, 11, 14, 17, 53
 Nodo, 26, 28, 29, 136, 185, 187
 Normalización, 98
 Nube de puntos, 26, 28, 29, 38
 Núcleo, 21, 85
 Número
 de Reynolds, 238, 239

de Womersley, 239
NURBS, 24, 38

O

Objetividad, 51, 53, 125, 155, 215
Ondas de presión, 13, 154
Operación clínica, 111, 112
Operador de Weingarten, 131
Óxido nítrico, 122

P

Parche volumétrico, 26, 38
Patología cardiovascular, 7, 13, 23
Placa
 ateromatosa, *véase* Ateroma
 aterosclerótica, 8–10, 14
Plasticidad, 11
Policonvexidad, 53, 215
Polímero, 53
Potencia, 52, 130
Práctica médica, 98
Presión, 28, 29, 86, 103–106
 controlada, 106
 fisiológica, 28, 120, 153, 187
 hidrostática, 245, 246
Presolicitación, 151–159, 174, 180
Primer tensor de Piola-Kirchhoff, 51
Principio de Saint Venant, 185
Principio variacional, 241–249
 de Hu-Washizu, 246
 de Simó-Taylor-Pister, 245
Producto escalar, 29, 37, 38
Programación dinámica, 123
Prostaciclina, 122
Pseudo-invariante, 73, 74, 76, 85
Pseudoelasticidad, 111–116
Pullback, 19, 52

R

Radioterapia, 11
Rechazo, 24
Reconstrucción geométrica, 19, 20, 24
Reendotelización, 11
Reestenosis, 11, 24, 224
Régimen
 estacionario, 234, 236, 237
 variable, 234, 237, 239
Regresión, 33

Relajación, 21, 103, 106, 107, 169
Remodelación, 9, 10, 12, 14–17, 117–151, 155
Reología, 12
Resonancia magnética, 14, 21, 85
Respuesta
 activa, 15
 pasiva, 15
Rotura de placa, 10

S

Saturación al daño, 113
Sección arterial, 28, 37, 38
Segundo tensor de Piola-Kirchhoff, 52, 98, 100, 104, 113
Señal de remodelación, 37, 127, 129
Simetrías
 mayores, 54, 129
 menores, 54
Sistema cardiovascular, 5
Sístole, 5, 14, 19, 98
Stent, 2, 11, 13, 14, 24, 154, 224
Subrutina, 21, 58, 76, 228
Superficie, 24, 51
 de daño, 113
 exterior, 24, 26, 29
 interior, 24, 26, 29, 192
 luminal, *véase* Lumen
Sustancia intercelular, *véase* Matriz extracelular

T

Tejido, 85
 biológico blando, 3, 111
 biológico duro, 3
 conjuntivo, 8
 mineralizado, 3
 muerto, 161
Tensión, 29, 51, 99, 100, 107
 circunferencial, 15, 59, 68, 153
 corrotacional, 129
 de cizalla, *véase* Tensión tangencial
 principal, 174
 radial, 89
 residual, 12, 17, 145, 151–159, 174–182

- tangencial, 6, 14, 15, 20, 23–40, 122, 126, 127, 129, 136, 146, 151, 192, 224
- viscosa, 104
- Tensor
- de alargamiento, 50, 55, 56, 158
 - de Almansi, 51
 - de Cauchy-Green, 51
 - de elasticidad, 21, 53, 54, 58, 59, 99, 101, 107, 114, 136, 156, 244
 - de Green, 51, 52, 89
 - de Kirchhoff, 52
 - de tensiones, 21, 51, 53, 55, 58, 86, 128, 136
 - gradiente de deformación, 50, 86, 138, 155, 157
 - gradiente de velocidad, 52
 - ortogonal, 50, 54
 - rotación, 50, 55, 56, 125
- Teorema
- de Cauchy, 51
 - de descomposición polar, 50
 - de Lejeune-Dirichlet, 211
 - de Pi-Buckingham, 132
- Teoría de control, 15, 123
- Terapia, 3, 223
- Termodinámica, 15, 53
- Tiempo
- de relajación, 99–101, 107
 - de residencia, 9
 - de viscoelasticidad, 110
- Tolerancia, 89
- Tono muscular basal, 6, 119, 120, 122
- Trabajos virtuales, 241
- Tracción pura, 21, 111, 112, 114
- Transplante de corazón, 24, 38
- Trombina, 6
- Trombosis, 7, 10
- Tubos delgados, 68, 104, 164, 191
- U**
- Ultrasonido, *véase* IVUS
- V**
- Variable
- activa, 111
 - aleatoria Normal, 32
 - de daño, 111, 113, 114
 - de deformación, 86, 88
 - de entorno, 85
 - dependiente, 32
 - fenomenológica, 113
 - independiente, 32, 86, 88
 - interna, 98–100
- Vasculogénesis, 122
- Vasoconstricción, 4, 6, 15
- Vasodilatación, 6, 120
- Vasodilatador, 122
- Vasomotricidad, 6
- Vector
- de parámetros, 88, 89
 - gradiente, 88
 - normal, 29, 51
 - posición, 50
 - tensión, 38, 51
 - unitario, 71, 157
- Velocidad, 20, 28, 50, 187
- de ateroma, 154
 - de crecimiento, 121, 129, 140, 151
 - de ondas de presión, *véase* Ondas de presión
 - media, 239
- Vena, 5
- Ventrículo, 5
- Viscoelasticidad, 12, 17, 21, 85, 97–110, 119, 124, 159, 168
- de Govindjee y Simó, 99
 - de Kelvin-Voigt, 98, 100–103, 107
 - de Maxwell, 98–100, 102–104, 107, 167

Procesos de adaptación • Modelos numéricos para mecánica cardiorrespiratoria
Javier Rodríguez Soler

Tesis doctoral

Director:
José M.ª Goicolea Ruigómez

