



***UNIVERSIDAD DE CANTABRIA***

**Escuela Técnica Superior de Ingenieros de  
Camino, Canales y Puertos**

**Departamento de Transportes y Tecnología de Proyectos y Procesos**

***CÁTEDRA DE FERROCARRILES***

**TESIS DOCTORAL**

**“Estudio de la Reducción del Ruido Aerodinámico de  
Trenes de Alta Velocidad con Pantallas Acústicas.”**

**Autor**

**ARTURO ROMERO IBÁÑEZ**

**Director**

**JOSÉ MANUEL GARCÍA DÍAZ DE VILLEGAS**

**Santander, 2010**

A María Eugenia, Nicasio y Mari

*“Somos como enanos a los hombros de gigantes. Podemos ver más,  
y más lejos que ellos, no por alguna distinción física nuestra,  
sino porque somos levantados por su gran altura.  
Si yo he visto más lejos es porque estoy sentado sobre los hombros de gigantes.*

**Bernardo de Chartres.** Filósofo. **Sir Isaac Newton.** Físico.

*“Si hay algo verdaderamente cierto es que lo ignoro  
todo o casi todo. Y me da rabia, porque hubo un tiempo  
en el que una mente despierta podría haber adquirido  
todo el saber de la época. Pero ahora ya no es posible.  
Ya no hay más que pequeños sabios que lo saben todo  
sobre casi nada. Y yo soy uno de ellos.”*

**Jean Dausset.** Premio Nobel de Fisiología y Medicina.

*“No hay nada peor que la guerra, Arturo,  
nunca lo olvides.*

**Mariano Romero.** Pastor.

## **AGRADECIMIENTOS.**

Quiero dar las gracias en primer lugar a José Manuel, que supiste descubrir en mí el ansia del conocimiento y me abriste las puertas de la cátedra, de tu casa y de tu amistad. Trabajando contigo en la cátedra comencé a descubrir la verdadera Ingeniería.

Álvaro, sabes que aquellas vacaciones fueron el primer paso para esta Tesis. Gracias por todo lo que me has enseñado y no me refiero sólo a derivadas parciales y matrices de rigidez, eso no tiene importancia.

Gracias Asier, porque tantos paseos por el Sardinero, acantilados, tantas horas de estudio y tanta “meditación” juntos, me hicieron quien soy hoy. Y a ti, Eli, por aguantarnos y por unirte a esta gran amistad.

Iñigo, Eltxo, Guillermo, Sergio, Pancho, Jose, (lo siento pero no cabéis todos) gracias por ayudarme a “remover el chocolate”. Si en la Escuela me fue tan bien, fue por contar con tan grandes compañeros de viaje.

Recuerdo cuando estudiaba que creía que la Ingeniería era una profesión en la que gracias a ella podías ayudar a los demás, hacer un gran servicio a la sociedad, como hicieron los grandes Ingenieros de todos los tiempos. Este sueño se desvaneció rápidamente y la Ingeniería se quedó en ingeniería. Cada día pienso en ti Roberto, y te veo llevando agua a los más pobres, enseñándoles a hacer estructuras que por supuesto no cumplen ningún reglamento ni falta que hace, y vuelvo a creer que otra Ingeniería es posible y me alegro de ser amigo de un Ingeniero.

Pero a los amigos de Anguiano también os tengo que dar las gracias porque no sólo de números vive el hombre, y vuestro apoyo ha sido y es fundamental. Gracias porque sé que siempre estaréis ahí.

Contigo Raúl no hace falta entrar en detalles. Con números es imposible contar todo lo que te debo. Y lo mejor es, que nuestra amistad es como esos grandes vinos que haces, que mejoran con el tiempo y se hacen más sublimes cada día. Con un gran enólogo – amigo como tú a mi lado, sé que nuestra amistad será como esos grandes vinos que nunca mueren.

También me gustaría reconocer la gran suerte que he tenido por poder estudiar. He podido conocer a personas muy inteligentes que no tuvieron la misma suerte. Me apena pensar en cuántos niños admirarán a premios Nobel e investigadores, sin saber que podrían haber sido iguales a ellos, si hubieran nacido en otra parte del mundo u otra época. Estoy seguro de que mis padres y abuelos fueron de esos niños. Por eso os quiero dar las gracias, porque me disteis la oportunidad que vosotros no tuvisteis, porque me permitisteis entrar en el mundo de los libros a la vez que conocer el vuestro. También a Pedro, Elena y Ángel porque habéis sabido llenar el hueco que yo he dejado todo este tiempo. Por eso esta Tesis también en parte es vuestra.

Pero sin duda quien debía figurar como coautora eres tú, María Eugenia. Tu comprensión y tu ayuda han hecho que hoy podamos leerla. Pero tampoco a ti es esto lo que más te agradezco, sino haberme enseñado la vida de verdad, una vida en la que las personas luchan por alcanzar su sueño, en la que los sentimientos de esas personas durante su camino son más importantes que su meta y por enseñarme que el mundo no acaba donde nosotros lo vemos. Ahora empezamos un nuevo viaje, en el que no estaremos solos y en el que seguiré aprendiendo de ti cada día.

Muchas gracias,

Arturo Romero

## **RESUMEN.**

El ruido producido por el ferrocarril tiene unas características intrínsecas que lo diferencian del producido por otras fuentes. Dentro del ferrocarril, se pueden agrupar las fuentes más importantes en dos grupos, las de rodadura y las de ruido aerodinámico. Tradicionalmente han sido las de rodadura las que se han estudiado, pero resulta necesario analizar de manera exhaustiva las de ruido aerodinámico, ya que son las predominantes en los trenes de Alta Velocidad.

Las fuentes de ruido aerodinámico se localizan en toda la altura del tren, siendo destacables, el flujo turbulento, que afecta a toda la superficie; el producido en la región del bogie, que afecta a la zona baja; y el producido por el pantógrafo y otras protuberancias y huecos que se sitúan en la zona alta. Esto hace que pantallas acústicas que han sido diseñadas para ruido de rodadura, que se produce en la zona baja del tren, no sean efectivas frente al ruido aerodinámico.

Para el estudio del comportamiento de las pantallas acústicas se ha elegido el Método de Elementos de Contorno, MEC, el cual se revela como el más idóneo frente a otros métodos, como los geométricos o el Método de Elementos Finitos. El MEC presenta una gran libertad en cuanto a la geometría del problema, y es muy útil para el estudio de problemas de dominio abierto, en los que el Método de Elementos Finitos no es apropiado. Se ha desarrollado un programa en Visual Basic basado en el MEC que ha sido contrastado con métodos analíticos y semiempíricos.

Se han obtenido conclusiones sobre la precisión del MEC en función del tamaño de los elementos, frecuencia, altura de la fuente, tipo de suelo, etc. Se ha analizado el comportamiento de pantallas lisas, y con cumbrera en L invertida, en T, en Y, circular y triangular. También se ha analizado el comportamiento con material absorbente. Se han obtenido importantes conclusiones referentes al comportamiento frente al ruido aerodinámico en función de la altura de la pantalla, distancia de ésta a la fuente y comportamiento según el tipo de suelo.

## **ABSTRACT.**

The railway noise has intrinsic characteristics that differentiate it from that produced by other sources. Focusing in the railway, the sources can be grouped into two major groups, the ones of rolling noise and the ones of aerodynamic noise. Traditionally they have been studied the rolling sources, but we must do a comprehensive analysis of the aerodynamic noise sources, since they are the predominant on High – Speed trains.

The aerodynamic noise sources are located throughout the height of the train. We must emphasize the turbulent flow, which affects the whole surface, produced in the region of the bogie, which affects the lower area, and that produced by the pantograph and other bulges and cavities that are in the high zone. This causes that noise barriers that have been designed for rolling noise, which occurs in the lower area of the train, they are ineffective against the aerodynamic noise.

To study the behavior of noise barriers we have chosen the boundary element method, BEM, which is revealed as the most appropriate compared with other methods, such as geometric ones or Finite Element Method. The BEM has great freedom in terms of the geometry of the problem, and it is very useful for the study of open domain problems, in which the Finite Element Method is not appropriate. It has been developed a Visual Basic program based on the BEM that has been checked with analytical and semi – empirical methods.

Conclusions have been obtained on the accuracy of the MEC in terms of the size of elements, frequency, source height, ground characteristics, etc. It has been analyzed the behavior of thin barriers, and with different shapes as “inverted L”, T, Y, or circular and triangular edges. It has been also analyzed the behavior with absorbent material. Important conclusions were obtained concerning the aerodynamic noise behavior in terms of barrier height, distance barrier – source and the behavior according to ground characteristics.

## ÍNDICE

<b>AGRADECIMIENTOS.....</b>	<b>4</b>
<b>RESUMEN.....</b>	<b>6</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>7</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>18</b>
1.1. Estructura de la Tesis.....	18
1.2. Justificación.....	19
1.3. Objetivos.....	26
1.3.1. Objetivos generales.....	26
1.3.2. Objetivos particulares.....	27
<b>2. FÍSICA DEL SONIDO. ANÁLISIS TEÓRICO.....</b>	<b>28</b>
2.1. El oscilador simple.....	28
2.2. La ecuación de onda.....	35
2.2.1. La ecuación de continuidad.....	36
2.2.2. La ecuación de fuerzas. Ecuación de Euler.....	37
2.2.3. La ecuación de propagación de la onda.....	39
2.2.4. Ondas cilíndricas.....	40
2.3. Fenómenos de propagación.....	42
2.3.1. Reflexión y transmisión.....	43
2.3.2. Refracción.....	47
2.3.3. Difracción.....	48
2.3.4. Pulsaciones.....	51
2.4. Parámetros de medida del ruido.....	52



2.4.1. Intensidad del ruido.....	53
2.4.2. La percepción de los sonidos .....	55
2.4.3. Índices para la medida del ruido ambiental .....	58
2.4.3.1. Índices básicos.....	60
2.5. Cálculo semiempírico de la propagación del ruido. ....	62
2.5.1. Cálculo de la atenuación .....	62
2.5.2. Cálculo de niveles sonoros.....	71
2.6. Pérdida por inserción de barreras ( $IL_{barrera}$ ).....	73
<b>3. ESTUDIO DEL RUIDO PRODUCIDO POR EL FERROCARRIL.....</b>	<b>81</b>
3.1. Caracterización del ruido ferroviario.....	81
3.2. Modelos de predicción de ruido de ferrocarril .....	87
3.3. Fuentes de ruido en los sistemas ferroviarios.....	93
3.3.1. Fuentes ligadas a la rodadura. ....	94
3.3.2. Fuentes de ruido de propulsión. ....	99
3.3.3. Fuentes ligadas al equipamiento auxiliar. ....	100
3.3.4. Fuentes de ruido aerodinámico .....	100
<b>4. COMPROBACIÓN DEL MODELO Y DEL PROGRAMA</b>	
<b>DESARROLLADOS EN ESTA TESIS. ....</b>	<b>115</b>
4.1. Caso 1. Fuente aislada en medio homogéneo.....	118
4.2. Caso 2. Fuente con diferentes tipos de suelos. ....	127
4.3. Caso 3. Fuente con diferentes tipos de suelos y pantalla lisa. ....	136
<b>5. ESTUDIO DEL RUIDO AERODINÁMICO PRODUCIDO POR TRENES</b>	
<b>DE ALTA VELOCIDAD EN PRESENCIA DE PANTALLAS ACÚSTICAS. ....</b>	<b>145</b>
5.1. Introducción.....	145
5.2. Influencia del tipo de suelo.....	149
5.3. Influencia de la altura de la pantalla.....	154

5.4. Influencia de la distancia de la pantalla.....	163
5.5. Influencia del espesor del material absorbente en las pantallas. ....	172
<b>6. CONCLUSIONES. ....</b>	<b>176</b>
<b>7. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN Y TRABAJOS FUTUROS.....</b>	<b>188</b>
<b>8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>191</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>210</b>
<b>A EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....</b>	<b>210</b>
A.1.Revisión Bibliográfica.....	210
A.2.Ideas básicas .....	213
A.3.Ecuación armónica de ondas (Ecuación de Helmholtz).....	215
A.4.Ecuación integral de contorno .....	218
A.5.Solución fundamental.....	220
A.6.Representación matricial del MEC.....	224
A.7.Dominios abiertos.....	237
A.8.Técnicas de integración .....	238
A.8.1. Integración numérica .....	238
A.8.2. Punto de colocación en el contorno .....	239
A.8.3. Aplicación del CHIEF .....	241
A.9.Programación del Método de Elementos de Contorno.....	242
<b>B NÚMEROS COMPLEJOS. ....</b>	<b>244</b>
<b>C FUNCIONES DE BESSEL. ....</b>	<b>246</b>
<b>D INTEGRACIÓN MEDIANTE LA TÉCNICA NUMÉRICA DE GAUSS. ....</b>	<b>249</b>
<b>E FACTORIZACIÓN LU. ....</b>	<b>251</b>

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1. Esquema de un oscilador simple, fijo en un extremo y con una masa en el otro.
- Figura 2. Diferencias de fase entre desplazamiento, velocidad y aceleración. La representación gráfica es para  $\Phi = 0$ .
- Figura 3. Esquema de sistema con amortiguamiento.
- Figura 4. Desplazamiento en un sistema amortiguado con a)  $\beta/\omega_d = 0.1$ , b)  $\beta/\omega_d = 0.2$ , c)  $\beta/\omega_d = 0.3$ .
- Figura 5. Esquema de sistema forzado y con fuerza externa.
- Figura 6. Balance másico en la dirección  $x$ .
- Figura 7. Camino de las ondas sonoras con una pantalla acústica.
- Figura 8. Reflexión y transmisión de ondas planas en una superficie límite.
- Figura 9. Comportamiento de las ondas ante una pantalla acústica por la difracción del sonido.
- Figura 10. Diferentes casos de difracción.
- Figura 11. Frentes de onda secundarios.
- Figura 12. Dos ondas de diferente frecuencia (a) y su resultante (b).
- Figura 13. Esquema comparativo de decibelios.
- Figura 14. Curvas de igual sonoridad.
- Figura 15. Curvas de ponderación en frecuencia.
- Figura 16. Nivel sonoro continuo equivalente y nivel de exposición sonora.
- Figura 17. Reflexión sobre el suelo de una onda sonora.
- Figura 18. Esquema de división de zonas.
- Figura 19. Cálculo de distancia para cálculo de atenuación por vegetación.
- Figura 20. Efectos de la temperatura y viento sobre las ondas acústicas.
- Figura 21. Cálculo de pérdida por inserción de pantallas. Ábaco de Maekawa.
- Figura 22. Sección de una pantalla entre una fuente F y un receptor R.
- Figura 23. Propagación del sonido alrededor de una pantalla de tamaño finito.
- Figura 24. Diferentes tipos de barreras y caminos para el cálculo.
- Figura 25. Geometría de una pantalla gruesa y una pantalla delgada imaginaria.

Figura 26. Valores de K para el cálculo del efecto de una pantalla gruesa.

Figura 27. Notaciones de la difracción de una cuña.

Figura 28. Efectos del ángulo en cuña  $\Omega$  con un parámetro de ángulo de la fuente  $\theta$ .

Figura 29. Efecto de la absorción de la superficie de una pantalla calculada como pantalla delgada semiinfinita.

Figura 30. Firma acústica producida por dos trenes diferentes.

Figura 31. Variación de la velocidad de aumento del nivel sonoro, en función de la velocidad del tren a 30 m de distancia y de la distancia a la vía.

Figura 32. Tiempo de exposición al ruido de un tren.

Figura 33. Tren con frenos de zapata en la rodadura.

Figura 34. Directividad vertical para dos tipos de trenes.

Figura 35. Directividad horizontal del ruido emitido por un tren.

Figura 36. Espectro de frecuencia de dos trenes con sistemas de frenado distintos en diferentes vías a 160 km/h.

Figura 37. Espectro de presión de sonido a 25 metros de la vía, para un TGV Dúplex a 200 Km/h, a 250 km/h y a 300 km/h.

Figura 38. Variación de  $L_{m\acute{a}x}$  en función de la velocidad, a 50 m de la vía

Figura 39. Variación del espectro en frecuencias del ruido en un TGV (medido entre los carriles), en función de la velocidad.

Figura 40. Espectros del ruido de un tren TGV a distintas distancias de la vía

Figura 41. Corrección para el nivel sonoro por efecto de la directividad local.

Figura 42. Espectro medio relativo en bandas de octava para locomotoras al aire libre

Figura 43. Formación de una capa de contorno turbulento alrededor del tren.

Figura 44. Espesor de la capa del contorno en un tren de Alta Velocidad.

Figura 45. Esquema de radiación de un monopolo.

Figura 46. Esquema de radiación de un dipolo.

Figura 47. Esquema de radiación de un cuadripolo.

Figura 48. Flujo típico en el hueco para el pantógrafo.

Figura 49. Máximo nivel de sonido de un TGV-A a 25 metros, sin pantalla y con pantalla de 2 metros de altura.

Figura 50. Espectro típico de un TGV – Dúplex a 25 metros de distancia y a diferentes velocidades.

Figura 51. Ruido combinado aerodinámico más rodadura.

Figura 52. Ruido de trenes de Alta Velocidad.

Figura 53. Firma acústica en dB(A) de un tren Shinkansen a 25 metros de la vía.

Figura 54. Ruido emitido por diferentes pantógrafos en un túnel de viento a 330 km/h

Figura 55. Espectro obtenido para el ruido producido por el área del bogie.  
Comparación entre la configuración inicial y con mejoras.

Figura 56. Configuración tipo de la geometría del problema.

Figura 57. Análisis de un punto perteneciente al contorno en el caso de 3D y 2 D.

Figura 58. Elementos constantes, lineales y cuadráticos, con sus nodos.

Figura 59. Distribución de potencial en elemento constante.

Figura 60. Distribución del potencial a lo largo del elemento.

Figura 61. Elementos discontinuos.

Figura 62. Sentido del vector normal y sentido de giro en un dominio infinito y un hueco.

Figura 63. Diagrama de flujo seguido en la programación.

Figura 64. Valores de algunas funciones de Bessel.

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Frecuencia 600 Hz Radio de la fuente 0,20 m y elementos de 0,021 m

Gráfico 2. Frecuencia 600 Hz Radio de la fuente 0,10 m y elementos de 0,021 m

Gráfico 3. Frecuencia 600 Hz Radio de la fuente 0,20 m y elementos de 0,0063 m

Gráfico 4. Frecuencia 600 Hz Radio de la fuente 0,10 m y elementos de 0,0063 m

Gráfico 5. Frecuencia 4000 Hz Radio de la fuente 0,20 m y elementos de 0,021 m

Gráfico 6. Frecuencia 4000 Hz Radio de la fuente 0,10 m y elementos de 0,021 m

Gráfico 7. Frecuencia 4000 Hz Radio de la fuente 0,20 m y elementos de 0,0063 m

Gráfico 8. Frecuencia 4000 Hz Radio de la fuente 0,10 m y elementos de 0,0063 m.

Gráfico 9. Frecuencia 2000 Hz Radio de la fuente 0,10 m y elementos de 0,021 m

Gráfico 10. Frecuencia 800 Hz Radio de la fuente 0,10 m y elementos de 0,021 m

Gráfico 11. Frecuencia 500 Hz Altura de la fuente 1,20 m y resistividad  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$

Gráfico 12. Frecuencia 4000 Hz Altura de la fuente 1,20 m y resistividad  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 13. Frecuencia 500 Hz, altura de la fuente 0,30 m y resistividad  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 14. Frecuencia 4000 Hz, altura de la fuente 0,30 m y resistividad  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 15. Frecuencia 500 Hz, altura de la fuente 1,20 m y resistividad  $\sigma = 10$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 16. Frecuencia 4000 Hz, altura de la fuente 1,20 m y resistividad  $\sigma = 10$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 17. Frecuencia 500 Hz, altura de la fuente 0,30 m y resistividad  $\sigma = 10$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 18. Frecuencia 4000 Hz, altura de la fuente 0,30 m y resistividad  $\sigma = 10$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 19. Frecuencia 4000 Hz, altura de la fuente 1,20 m y resistividad  $\sigma = 500$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 20. Frecuencia 4000 Hz, altura de la fuente 0,30 m y resistividad  $\sigma = 500$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 21. Frecuencia 500 Hz y resistividad  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .  $\lambda = 0,686 \text{ m}$ .

Gráfico 22. Frecuencia 4000 Hz y resistividad  $\sigma = 10 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .  $\lambda = 0,0857 \text{ m}$ .

Gráfico 23. Frecuencia 500 Hz y resistividad  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 24. Frecuencia 4000 Hz y resistividad  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 25. Frecuencia 500 Hz y resistividad  $\sigma = 10 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 26. Frecuencia 4000 Hz y resistividad  $\sigma = 10 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 27. Frecuencia 4000 Hz y resistividad  $\sigma = 500 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 28. Frecuencia 600 Hz y resistividad  $\sigma = 500 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Gráfico 29. Frecuencia 600 Hz. Altura 5 m. Separación 5 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Gráfico 30. Frecuencia 600 Hz. Altura 5 m. Separación 5 m. Suelo blando  $\sigma = 200 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Gráfico 31. Frecuencia 2000 Hz. Altura 5 m. Separación 5 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1 m.

Gráfico 32. Frecuencia 2000 Hz. Altura 5 m. Separación 5 m. Suelo blando  $\sigma = 200 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1 m.

Gráfico 33. Frecuencia 600 Hz. Altura 3,5 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1 m.

Gráfico 34. Frecuencia 600 Hz. Altura 5,0 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1 m.

Gráfico 35. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1 m.

Gráfico 36. Frecuencia 2000 Hz. Altura 3,5 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Gráfico 37. Frecuencia 2000 Hz. Altura 5,0 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Gráfico 38. Frecuencia 2000 Hz. Altura 6,0 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Gráfico 39. Frecuencia 600 Hz. Altura 3,5 m. Separación 2 m. Suelo blando  $\sigma = 200 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Gráfico 40. Frecuencia 600 Hz. Altura 5,0 m. Separación 2 m. Suelo blando  $\sigma = 200 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Gráfico 41. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 2 m. Suelo blando  $\sigma = 200$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 2 m.

Gráfico 42. Frecuencia 600 Hz. Altura variable 3,5 – 6. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 1 m.

Gráfico 43. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 3 m.

Gráfico 44. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 5 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 3 m.

Gráfico 45. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 10 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 3 m.

Gráfico 46. Frecuencia 2000 Hz. Altura 6,0 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 3 m.

Gráfico 47. Frecuencia 2000 Hz. Altura 6,0 m. Separación 5 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 3 m.

Gráfico 48. Frecuencia 2000 Hz. Altura 6,0 m. Separación 10 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 3 m.

Gráfico 49. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 2 m. Suelo blando  $\sigma = 200$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 3 m.

Gráfico 50. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 5 m. Suelo blando  $\sigma = 200$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 3 m.

Gráfico 51. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 10 m. Suelo blando  $\sigma = 200$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 3 m.

Gráfico 52. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación variable m. Suelo duro  $\sigma = 30000$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 1,5 m. Distancia receptor tren 70 m.

Gráfico 53. Frecuencia 2000 Hz. Altura 6,0 m. Separación variable m. Suelo duro  $\sigma = 30000$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 1,5 m. Distancia receptor tren 70 m.

Gráfico 54. Frecuencia 600 Hz. Altura 5,0 m. Separación 5 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 1 m. Distancia receptor tren 90 m.

Gráfico 55. Frecuencia 600 Hz. Altura 5,0 m. Separación 5 m. Suelo blando  $\sigma = 200$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 1 m. Distancia receptor tren 90 m.

Gráfico 56. Frecuencia 2000 Hz. Altura 5,0 m. Separación 5 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 1 m. Distancia receptor tren 90 m.



## **LISTA DE TABLAS**

- Tabla 1. Valor de  $\alpha$  para cálculo de atenuación de la absorción del aire.
- Tabla 2. Atenuación debida al suelo para suelos duros.
- Tabla 3. Atenuación debida al suelo para suelos blandos o porosos.
- Tabla 4. Atenuación debida al suelo para suelos muy blandos.
- Tabla 5. Factores  $A_s$ ,  $A_r$  y  $A_m$  para diferentes frecuencias.
- Tabla 6. Factores a, b, c y d necesarios para cálculo de factores  $A_s$ ,  $A_r$  y  $A_m$ .
- Tabla 7. Atenuación debida a la vegetación.
- Tabla 8. Bandas de octava.
- Tabla 9. Niveles de referencia  $L_0$  para algunos trenes a diferentes velocidades.
- Tabla 10. Aumento de nivel de referencia para distintos tipos de vía.
- Tabla 11. Aumento de nivel de referencia para distintas condiciones de material móvil y aparatos de vía.
- Tabla 12. Aumento de nivel de referencia para distintos tipos de bogie.
- Tabla 13. Ruido aerodinámico producido por diferentes fuentes a 5 m de distancia según el modelo PROHV.
- Tabla 14. Ruido aerodinámico producido por diferentes fuentes a 25 m de distancia según el modelo PROHV.
- Tabla 15. Ruido aerodinámico producido por diferentes fuentes a 25 m de distancia según el modelo MAT2S.
- Tabla 16. Valores de la resistividad para diferentes tipos de suelo.

## 1. INTRODUCCIÓN.

### 1.1. Estructura de la Tesis.

La Tesis se divide en ocho capítulos y cinco anexos, que comienzan con el *Capítulo 1* con una Introducción al problema estudiado y los objetivos buscados en la Tesis.

En el *Capítulo 2* se estudia la Física del Sonido, con un análisis teórico, en el cual se incluye desde el estudio de la ecuación de onda y los fenómenos encontrados en la propagación, hasta el estudio del ruido, donde se explica un método semiempírico para el cálculo de la propagación del ruido y la pérdida por inserción de pantallas.

En el *Capítulo 3* se realiza un completo estudio del ruido producido por el ferrocarril, explicando las características que lo hacen diferente del de otros modos de transporte y recogiendo diferentes modelos de predicción del ruido ferroviario. También se analizan las diferentes fuentes de ruido en los sistemas ferroviarios, haciendo especial hincapié en el ruido aerodinámico.

Como herramienta de cálculo en la Tesis se ha utilizado el Método de Elementos de Contorno, el cual se desarrolla en el *Anexo A*. A partir de dicho método se ha escrito un programa en Visual Basic para el cálculo del campo acústico producido por un tren circulando a más de 300 km/h, con varios tipos de pantallas, y que es muy flexible, para que sea fácilmente modificable y poder estudiar otras configuraciones del problema, como estudio de viaductos, trincheras o barreras formadas por caballones de tierra, e incluso con inserción de edificios.

En el *Capítulo 4* se realiza una comprobación del Modelo de Elementos de Contorno y del programa mediante la comparación con tres casos diferentes calculados de forma analítica y semiempírica, una fuente aislada en medio homogéneo, una fuente con diferentes tipos de suelos, y una fuente con suelo y pantalla lisa.

En el *Capítulo 5* se recoge el estudio del ruido aerodinámico producido por trenes de Alta Velocidad en presencia de pantallas acústicas. Se estudia la influencia del tipo de suelo, de la altura de la pantalla, de la distancia de la pantalla al tren y del espesor del material absorbente.

En el *Capítulo 6* se exponen las conclusiones obtenidas en la Tesis. Se han encontrado importantes conclusiones, que de forma muy resumida contemplan cuáles son las formas de pantallas más efectivas o la conveniencia de su colocación dependiendo de cada tipo de suelo. También son fundamentales las conclusiones encontradas sobre la altura mínima que debe alcanzar la pantalla acústica y la variación en las pérdidas por inserción en función de la altura de la pantalla. Se han encontrado conclusiones también sobre el comportamiento de las pantallas con material absorbente; y en función de la distancia de la pantalla al tren, encontrando que existe una distancia óptima para cada tipo de pantalla y que es recomendable buscarla en el caso de que exista libertad de espacio para la colocación de la pantalla.

En el *Capítulo 7* se proponen varias líneas de investigación que podrán ser utilizados por otros investigadores para trabajos futuros.

En el *Capítulo 8* se recogen las *Referencias Bibliográficas* utilizadas para la redacción de la Tesis.

Finaliza la Tesis con cinco *Anexos* en los que además del Método de Elementos de Contorno comentado, se recogen fórmulas y procedimientos matemáticos utilizados en el programa de cálculo.

## **1.2. Justificación**

La Tesis analiza el ruido producido por el ferrocarril, especialmente el ruido aerodinámico que se origina cuando circula a Alta Velocidad. Hasta la aparición de los trenes de Alta Velocidad, el único ruido actuante era el de rodadura y se ha estudiado su reducción con pantallas acústicas. En la Tesis de Gil Alías D. (2005) se

realiza un excelente estudio del funcionamiento de pantallas acústicas por el Método de Elementos de Contorno. En ella se analiza el comportamiento de pantallas acústicas lisas y tipo T frente al ruido de rodadura del ferrocarril. Siguiendo las Líneas de Investigación propuestas en ella, se han estudiado en esta Tesis otros tipos de pantallas, y su comportamiento no sólo frente al ruido de rodadura, sino también añadiendo las particularidades que ofrece el ruido aerodinámico ferroviario.

En la actualidad el ferrocarril está siendo potenciado como medio de transporte público tanto en trayectos urbanos, con nuevas líneas de metro, tranvías o cercanías, como interurbanos, con nuevas líneas de Alta Velocidad. Se trata de aprovechar las grandes ventajas que ofrece el ferrocarril frente a otros medios de transporte, como disminuir los problemas de contaminación que provocan los vehículos de combustión interna, por ejemplo el vehículo privado, autobús o el avión; así como la comodidad y puntualidad que ofrecen los servicios de Alta Velocidad.

El ferrocarril es un medio de transporte limpio, rápido, cómodo y seguro que se ha convertido en el medio de transporte por excelencia en grandes ciudades, y también en medias distancias, relegando al avión a un segundo plano. Pero aunque se trata de un medio de transporte limpio, lo es desde el punto de vista de las emisiones atmosféricas, porque genera un tipo de contaminación diferente, la contaminación acústica, la cual se ha convertido en uno de los parámetros más exigentes cuando se trata de medir la calidad de vida de las personas que viven en las cercanías de la vía.

Aunque lo deseable sería una planificación del territorio que evitara la construcción de viviendas en las cercanías de las vías, la realidad es que los grandes intereses económicos que se mueven con la gestión del suelo y del urbanismo, y la planificación desde entidades locales ha hecho que en la mayoría de las ocasiones se hayan creado nuevos barrios a escasos metros de las actuales vías, con lo que no solo se generan problemas acústicos, sino también problemas para futuros cambios de trazado.

El ruido, originado por el tráfico ferroviario, se caracteriza por ser un ruido discontinuo en el tiempo, ya que obedece a fenómenos discretos con una determinada frecuencia de paso. En encuestas realizadas a personas que han vivido durante varios años en las proximidades de las vías, se ha comprobado que este carácter discontinuo hace que sea un ruido menos molesto que el ruido del tráfico rodado, que es de carácter fluctuante.

Las fuentes de ruido principales son según Harris C.M. (1995), Thompson D. (2009), Krylov V.V. (2001) y otros autores recogidos en la bibliografía:

- Fuentes ligadas a la rodadura.
  - conjunto rueda – carril.
  - disposición de las vías (traviesas y soportes) y su conjunto de aparatos de vía.
  - obras civiles.
  - bogies, que según sea su diseño pueden ser muy ruidosos.
  - carrocería, que, sobre todo en el caso de vagones de mercancías medio vacíos, pueden ser fuentes muy importantes de ruido.
- Sistema de propulsión de coches y locomotoras, cuyo ruido predomina a bajas velocidades.
- Equipamiento auxiliar.
- En el caso de trenes de Alta Velocidad, el ruido aerodinámico.

Es este último tipo de fuente en el que se centra esta Tesis. Los primeros problemas detectados fueron en líneas japonesas del Shinkansen, que fueron transformadas de líneas convencionales a líneas de Alta Velocidad manteniendo las pantallas acústicas existentes (Okada T. 2004). Se comprobó que las pantallas perdían su efectividad cuando los trenes circulaban a velocidades superiores a 300 km/h. Es conocido el gran aumento del ruido producido por el ferrocarril circulando a Alta Velocidad, pero es importante el análisis de su génesis y características particulares de ese tipo de ruido con el fin de asegurarse un diseño óptimo de las pantallas acústicas. Si no se

hace de este modo, proyectos de pantallas con un alto presupuesto pueden resultar totalmente ineficaces.

En los proyectos de nuevas infraestructuras ferroviarias, para reducir el problema del ruido producido por el ferrocarril, es importante someterlos al procedimiento de Evaluación de Impacto Ambiental. Este procedimiento, con un carácter totalmente preventivo, pretende detectar situaciones acústicas conflictivas que puedan originarse como consecuencia de la construcción y puesta en funcionamiento de la nueva vía. Es en ese momento cuando la solución al problema del ruido es más factible planificando adecuadamente el corredor del trazado, mediante un diseño correcto de estructuras singulares: boquillas de túneles, viaductos, falsos túneles, etc., así como la utilización de elementos absorbentes bajo la plataforma de vía y en el contacto traviesa – carril.

Lamentablemente, aunque se tomen estas precauciones existe una distancia crítica, que dependerá de la topografía de la zona, el tipo de trenes y la velocidad prevista en cada tramo, en la que la nueva infraestructura tendrá una servidumbre sonora y que debería respetarse en las zonas urbanizadas. Este problema se ve agravado en la penetración en las grandes ciudades, donde los corredores posibles están definidos y deben ajustarse a los ya existentes.

En la actualidad la atenuación de los ruidos y las vibraciones producidos por el tren se consigue actuando tanto en las fuentes de emisión como mediante la intercepción entre la fuente de emisión y el receptor de elementos como barreras, pantallas y otros elementos.

Las actuaciones en las fuentes de emisión han sido constantes y llevadas a cabo por el interés de los fabricantes de material móvil, ya que las exigencias en el confort por parte de los viajeros se han incrementado enormemente en los últimos años, sobre todo con la llegada de la Alta Velocidad. Estas actuaciones han reducido considerablemente las emisiones de ruido de los ferrocarriles y entre otras, se pueden destacar:

- Mejoras en los sistemas de amortiguación de los bogies.
- Aislamientos acústicos y adaptación de los equipos de tracción para evitar la difusión de ruidos.
- Adaptación de equipos de climatización para reducir emisiones.
- Engrase de las pestañas de la rueda para reducir ruidos en las curvas de radio reducido.
- Utilización de neumáticos en las ruedas, como se realiza en algunas líneas de metro con trazado aéreo.
- Investigación en bandas elásticas para las llantas de los vehículos.

También se han realizado actuaciones para reducir los ruidos sobre la infraestructura, pudiendo destacar:

- Recarga de carril en curvas de radio reducido.
- Placas de caucho sobre el alma del carril.
- Placas de base elastoméricas.
- Sujeciones elásticas.

Una vez que el ruido ha sido emitido, solamente se puede tratar de mitigar con la interposición de elementos fijos o aumentando el aislamiento de las viviendas, pero gracias a los primeros se consigue también una calidad acústica aceptable para las personas que circulan por la calle o para las personas que están en su vivienda con las ventanas abiertas.

Las actuaciones e investigaciones de otros autores han sido realizadas en varios campos, como en el aislamiento en los elementos arquitectónicos, planeamiento de calles y edificios con orientaciones que reduzcan el ruido, pero aquí nos centraremos en las pantallas acústicas. Son remarcables los excelentes trabajos realizados por Pfretzschner J., Simón F. y otros investigadores del mismo grupo, habiendo sido

consultados y utilizados en varias ocasiones en esta Tesis. En este campo se pueden destacar:

- Análisis de pantallas por medio de métodos de elementos de contorno.
- Evaluación de efectividad de pantallas por medio de índices de uso sencillo.
- Investigación de las variaciones en el aislamiento conseguido según los diferentes materiales de fabricación o de su colocación en diferentes puntos de la pantalla.
- Reutilización de materiales de reciclaje como neumáticos usados para la fabricación de pantallas con el fin de mejorar también el medio ambiente.
- Configuraciones diferentes de pantallas. Espesor, altura, distancia a la fuente, etc.
- Imposición de cubreras sobre la pantalla. La forma, material y posición de la cubrera puede producir importantes mejoras en la efectividad de la pantalla.

La utilización de caballones de tierra en los márgenes de la vía, en zonas donde no existe problema de espacio, es una solución óptima que resuelve a la vez dos impactos asociados a la nueva infraestructura: respeta una distancia con posibles receptores, aminorando la molestia acústica y se reduce el material sobrante a vertedero.

Donde no existe espacio se debe recurrir a la colocación de pantallas acústicas. Existe gran diversidad de pantallas acústicas, con distintos materiales, cubreras y aislamientos, pero además se debe estudiar la distancia entre la pantalla y el tren, el tipo de suelo y la altura de la pantalla, parámetro que resulta fundamental en el estudio del ruido aerodinámico.



Para el estudio de las pantallas se pueden utilizar métodos tradicionales como analíticos o semiempíricos, o métodos para análisis mediante computador como el Método de Elementos Finitos o el Método de Elementos de Contorno. Es este último el utilizado en esta Tesis por sus ventajas respecto al de Elementos Finitos, las cuales se comentarán más adelante, aunque también se estudian y desarrollan los métodos analíticos y semiempíricos para comprobar la validez del Método de Elementos de Contorno.

La primera parte de la Tesis incluye un análisis teórico de la física del sonido y de su propagación, estudiando con mayor detenimiento el ruido producido por el ferrocarril. Se ha considerado muy importante hacer un recorrido teórico por la física del sonido que permita comprender completamente el fenómeno que se va a estudiar y una vez conseguido este objetivo, la forma de abordarlo. Al conocer desde lo más básico el origen del ruido, se puede posteriormente comprender fenómenos acústicos más complejos. En muchas ocasiones se estudia el ruido únicamente como un fenómeno medible por su presión sonora en dB y en ocasiones acompañado de su espectro. Pero para estudiar, comprender y combatir el ruido es preciso conocer también el comportamiento de una única onda sonora por separado ya que muchos fenómenos acústicos se explican a través del comportamiento de las ondas. Se describen en esta parte fenómenos acústicos de propagación como la reflexión y transmisión, refracción y difracción. De todos ellos el más importante en el estudio de pantallas acústicas es el de la difracción.

Pero el ruido en general, y el del ferrocarril en particular, no se compone de una única onda, sino de la suma de infinidad de ondas, con diferentes frecuencias e intensidades. Por lo que el estudio anterior de la onda de sonido no resulta práctico y se deben definir nuevos parámetros para medir el ruido. Estos parámetros son numerosos, pero se buscan en esta Tesis los que mejor se adecuen al problema del ruido del ferrocarril, como el nivel de presión sonora, el nivel de presión sonora continuo equivalente, etc. todos ellos medidos en dB, incluso con diferente ponderación entre las horas de día y noche. Se recoge un modelo semiempírico de propagación del ruido que permite de una forma práctica y rápida el cálculo de la

atenuación del nivel sonoro. También se aporta el cálculo de las pérdidas por inserción de pantallas acústicas mediante métodos semiempíricos y geométricos.

Pero como se ha indicado, resulta imprescindible para realizar un correcto planteamiento del problema, conocer a fondo las características intrínsecas del ruido producido por el ferrocarril que lo hacen completamente distinto de otras fuentes de ruido y en concreto del ruido aerodinámico. Las fuentes del ruido ferroviario predominantes cuando los trenes circulan a velocidades inferiores a los 200 km/h son las producidas principalmente por la rodadura, la propulsión y el equipamiento auxiliar y han sido las estudiadas tradicionalmente, mientras que en los trenes de Alta Velocidad cuando se superan los 300 km/h, son las fuentes de ruido aerodinámico las predominantes, superando en intensidad a las de rodadura.

La segunda parte de la Tesis se centrará en el análisis por el Método de Elementos de Contorno del ruido aerodinámico y el comportamiento de las pantallas acústicas frente a él. Se han realizado cientos de simulaciones que han permitido además de comprobar el correcto funcionamiento del Método de Elementos de Contorno, el estudio de varios tipos de pantallas, con una o varias fuentes, con diferentes tipos de suelos, presencia de pantallas con diferentes cubreras o sin ellas, con material absorbente o lisas, etc.

### **1.3. Objetivos.**

Los objetivos de la presente Tesis Doctoral son tanto de tipo general como de tipo particular, siendo el principal el conocimiento del ruido producido por el ferrocarril, especialmente el aerodinámico, y el aislamiento producido por la inserción de pantallas, de diferentes tipos, alturas, materiales, en suelos diferentes y posiciones distintas.

#### **1.3.1. Objetivos generales.**

Dentro de este nivel se podrían resaltar los siguientes objetivos:

- Formación y conocimiento sobre la física del sonido.
- Estudio y caracterización de la generación y propagación del ruido del ferrocarril, con especial énfasis en el ruido aerodinámico.
- Análisis de los factores de propagación, reducción o amplificación del ruido.
- Recopilación de datos de ruido producido por distintos tipos de ferrocarril, según su velocidad y entorno.
- Documentación sobre realizaciones de pantallas, con diferentes materiales, espesores, recubrimientos y cubreras.
- Documentación sobre normativa vigente sobre ruidos producidos por el ferrocarril.

### **1.3.2. Objetivos particulares.**

En este nivel se pueden plantear varios objetivos, destacando:

- Comprobación de la efectividad de una variada tipología de pantallas, cubreras, materiales, etc.
- Análisis de la influencia de diferentes parámetros en las pérdidas por inserción de las pantallas, como tipo de suelo, frecuencia estudiada, altura, posición frente al tren, etc.
- Análisis mediante el Método de Elementos de Contorno de la efectividad de las pantallas en función de las variables mencionadas en el punto anterior.
- Optimización del diseño de las pantallas en presencia de ruido aerodinámico, indicando la tipología más adecuada.
- Estudio del comportamiento en función de la altura, previsiblemente la variable más importante en el caso de ruido aerodinámico.

## **2. FÍSICA DEL SONIDO. ANÁLISIS TEÓRICO.**

La Acústica estudia la generación, transmisión, y recepción de energía a través de la materia por medio de ondas. Cuando las moléculas de un fluido o un sólido son desplazadas de su configuración normal, una fuerza elástica interna restauradora aparece. Es esta fuerza elástica restauradora, unida a la inercia del sistema, la que permite a la materia participar en vibraciones oscilatorias y a partir de ahí generar y transmitir ondas acústicas. Se podrían citar como ejemplos la tensión que aparece en un muelle cuando es tensionado, el incremento de presión producido en un fluido cuando es comprimido y la fuerza restauradora producida cuando un punto de un cable en tensión es desplazado transversalmente a su longitud.

El fenómeno acústico más familiar es el asociado con la sensación del sonido. Para una persona joven normal, una vibración es interpretada como sonido si su frecuencia se encuentra en el intervalo entre 20 Hz y 20.000 Hz. Sin embargo un sentido acústico más amplio también incluye los ultrasonidos, con frecuencias superiores a los 20.000 Hz y los infrasonidos, con frecuencias inferiores a 20 Hz.

El proceso de generación de una onda sonora, por lo general tiene su origen en un sólido en vibración que arrastra las partículas de aire en contacto con el mismo produciendo de forma alternativa depresiones y sobrepresiones que se van transmitiendo a las capas de aire adyacentes, dando lugar a una onda de presión que se propaga con movimiento ondulatorio en todas las direcciones alejándose del foco.

Es numerosa la bibliografía que se puede consultar para obtener las fórmulas que rigen la acústica, siendo destacable Kinsler et al. (2000). En el capítulo de Referencias Bibliográficas se recogen todas las consultadas.

### **2.1. El oscilador simple**

Para definir las magnitudes que entrarán en juego en el estudio de la acústica resulta de gran utilidad el análisis del oscilador simple. Si una masa  $m$  unida a un muelle que es obligada a moverse paralelamente a él, es desplazada ligeramente de su posición de reposo, la masa vibrará. Del análisis del desplazamiento de la masa desde su posición de reposo, se desprende que es un movimiento senoidal en función del tiempo. A este tipo de vibraciones senoidales se les denomina vibraciones armónicas.

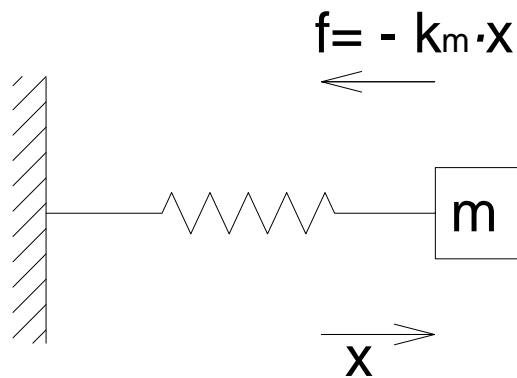


Figura 1. Esquema de un oscilador simple, fijo en un extremo y con una masa en el otro.

En el oscilador de la figura se asume que la ecuación de la fuerza que aparece al desplazar la masa expresada en Newtons es:

$$f = -k_m \cdot x$$

donde  $x$  es el desplazamiento en metros de la masa  $m$ , en kilogramos, desde su posición de reposo, y  $k_m$  es la constante del muelle en N/m y el signo menos indica que la fuerza es opuesta al desplazamiento. Sustituyendo esta expresión de fuerza en la ecuación general del movimiento

$$f = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

con lo que se obtiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_m}{m} \cdot x = 0$$

Como  $k_m$  y  $m$  son positivos se puede definir una nueva constante

$$\omega_0^2 = \frac{k_m}{m}$$

con lo que la ecuación se convierte en

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

La solución de esta importante ecuación puede ser obtenida por varios métodos, siendo la solución de los tipos

$$x = A_1 \cdot \cos \omega_0 t$$

$$x = A_2 \cdot \sen \omega_0 t$$

La solución completa es la suma de las dos

$$x = A_1 \cdot \cos \omega_0 t + A_2 \cdot \sen \omega_0 t$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son constantes arbitrarias y el parámetro  $\omega_0$  es la frecuencia angular en radianes por segundo. La frecuencia  $f_0$  en hercios se obtiene a partir de la frecuencia angular

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Se observa que si decrece la rigidez o aumenta la masa, disminuye la frecuencia. El periodo  $T$  de un vibración completa se obtiene de

$$T = \frac{1}{f_0}$$

Si en el tiempo  $t = 0$  la masa tiene un desplazamiento inicial  $x_0$  y una velocidad inicial  $u_0$ , entonces las constantes  $A_1$  y  $A_2$  son fijadas por esas condiciones iniciales y el subsecuente movimiento de la masa queda completamente determinado. De la sustitución en las ecuaciones anteriores en  $t = 0$  se obtiene

$$x = x_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{u_0}{\omega_0} \cdot \sen \omega_0 t$$

Otra forma de la ecuación puede ser obtenida haciendo  $A_1 = A \cdot \cos(\phi)$  y

$A_2 = A \cdot \sen(\phi)$  donde  $A$  y  $\phi$  son dos nuevas constantes arbitrarias. De la sustitución y simplificación se obtiene

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$$

donde  $A$  es la amplitud del movimiento y  $\phi$  es el ángulo de fase inicial del movimiento. Sus valores vienen determinados por las condiciones iniciales, resultando

$$A = \left( x_0^2 + \left( \frac{u_0}{\omega_0} \right)^2 \right)^{1/2} \quad \phi = \tan^{-1} \left( \frac{-u_0}{\omega_0 \cdot x_0} \right)$$

Derivando sucesivamente se obtiene la velocidad y la aceleración de la masa, donde haciendo  $U = \omega_0 \cdot A$

$$u = -U \cdot \text{sen} (\omega_0 t + \phi)$$

$$a = -\omega_0 \cdot U \cdot \text{cos} (\omega_0 t + \phi)$$

De esta manera se comprueba que el desplazamiento está desfasado  $90^\circ$  o  $\pi/2$  radianes con la velocidad y  $180^\circ$  o  $\pi$  radianes con la aceleración, como se aprecia en la siguiente figura.

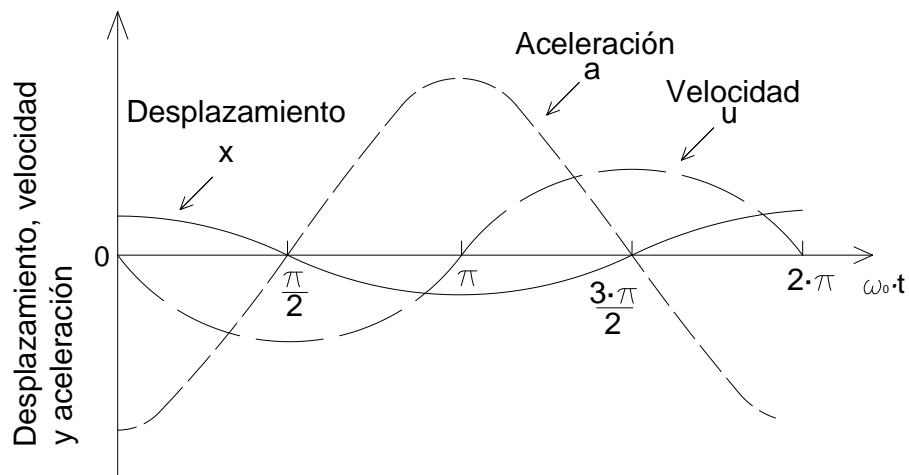


Figura 2. Diferencias de fase entre desplazamiento, velocidad y aceleración. La representación gráfica es para  $\Phi = 0$ .

La energía mecánica del sistema  $E$  es la suma de la energía potencial del sistema  $E_p$  y la energía cinética  $E_c$ . La energía potencial es el trabajo realizado para deformar el muelle, que proviene de la fuerza ejercida para desplazar la masa desde su posición de equilibrio

$$E_p = \int_0^x k_m \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot k_m \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot k_m \cdot A^2 \cdot \text{cos}^2 (\omega_0 t + \phi)$$

La energía cinética que posee el muelle es

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot U^2 \cdot \text{sen}^2 (\omega_0 t + \phi)$$

Siendo la energía total del sistema

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot k_m \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot U^2$$

La energía total es una constante independiente del tiempo e igual al máximo de energía potencial o energía cinética.

En Acústica se usa con frecuencia la notación exponencial compleja para el estudio de muchos fenómenos por su sencillez de manejo y cálculo de expresiones teóricas. La Identidad de Euler dice

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Aprovechando esta identidad se puede resolver nuevamente la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \cdot x = 0$$

con una solución del tipo

$$x = A \cdot e^{\gamma \cdot t}$$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene  $\gamma^2 = -\omega_0^2$  o  $\gamma = \pm i \cdot \omega_0$ . Por lo que la solución general es del tipo

$$x = A_1 \cdot e^{i \cdot \omega_0 \cdot t} + A_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_0 \cdot t}$$

Y obteniendo  $A_1$  y  $A_2$  a partir de las condiciones iniciales se obtiene

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \left( x_0 - i \cdot \frac{u_0}{\omega_0} \right) \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left( x_0 + i \cdot \frac{u_0}{\omega_0} \right)$$

Que sustituyendo y desarrollando conduce a

$$x = x_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{u_0}{\omega_0} \cdot \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Por otra parte, en la naturaleza existen fuerzas de amortiguación que hacen que decrezca la amplitud de las oscilaciones con el tiempo. Si se supone una fuerza viscosa que sea proporcional a la velocidad  $f_r$

$$f_r = -R_m \cdot \frac{dx}{dt}$$

donde  $R_m$  es una constante positiva denominada *resistencia mecánica* del sistema con unidades de Newton por segundo partido por kilómetro. Esta fuerza es similar a la aportada por un amortiguador como el de la figura.



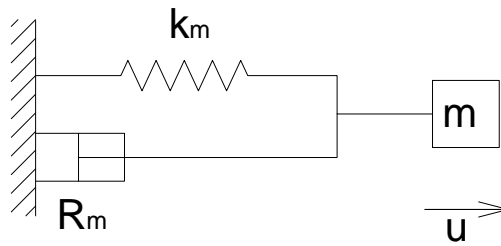


Figura 3. Esquema de sistema con amortiguamiento.

La ecuación que lo modeliza es:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + R_m \cdot \frac{dx}{dt} + k_m \cdot x = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R_m}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

Resolviéndola por el método exponencial con una solución del tipo  $x = A \cdot e^{\gamma \cdot t}$  se obtiene

$$\left( \gamma^2 + \frac{R_m}{m} \cdot \gamma + \omega_0^2 \right) \cdot A \cdot e^{\gamma \cdot t} = 0 \Rightarrow \gamma^2 + \frac{R_m}{m} \cdot \gamma + \omega_0^2 = 0$$

con lo que se obtiene

$$\gamma = -\beta \pm (\beta^2 - \omega_0^2)^{1/2}$$

$$\beta = \frac{R_m}{2 \cdot m}$$

En la mayor parte de los casos  $\omega_0 > \beta$  por lo que  $\gamma$  es complejo y

$$\gamma = -\beta \pm i \cdot \omega_d$$

$$\omega_d = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}$$

definiéndose  $\omega_d$  como la frecuencia natural angular de un sistema forzado que siempre es menor que  $\omega_0$ .

La solución completa sería

$$x = e^{-\beta t} \cdot (A_1 \cdot e^{i \cdot \omega_d \cdot t} + A_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_d \cdot t})$$

o tomando la parte real

$$x = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi)$$

En la siguiente figura se puede apreciar el desplazamiento a través del tiempo de un sistema amortiguado.

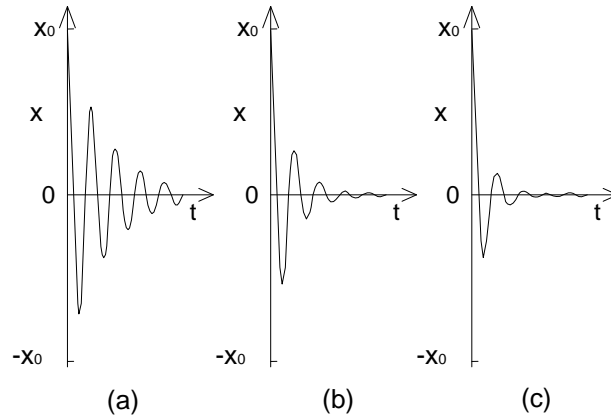


Figura 4. Desplazamiento en un sistema amortiguado con a)  $\beta/\omega_d = 0.1$ , b)  $\beta/\omega_d = 0.2$ , c)  $\beta/\omega_d = 0.3$ .

Un sistema más completo resulta de suponer una fuerza externa aplicada sobre el sistema, con lo que la ecuación sería

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + R_m \cdot \frac{dx}{dt} + k_m \cdot x = f(t)$$

Si la fuerza es del tipo senoidal  $F \cdot \cos(\omega \cdot t)$  y utilizando el modo exponencial, se puede suponer que la solución será también de tipo senoidal  $x = A \cdot e^{\gamma \cdot t}$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + R_m \cdot \frac{dx}{dt} + k_m \cdot x = F \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Sustituyendo

$$(-A \cdot \omega^2 \cdot m + i \cdot A \cdot \omega \cdot R_m + A \cdot k_m) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = F \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

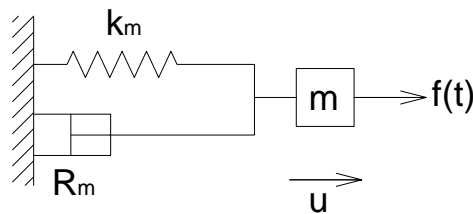


Figura 5. Esquema de sistema forzado y con fuerza externa.

Resolviendo para A se obtiene la ecuación del desplazamiento

$$x = \frac{F \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}}{j \cdot \omega \cdot (R_m + i \cdot (\omega \cdot m - k_m/\omega))}$$

y derivando se obtiene la velocidad

$$u = \frac{F \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}}{R_m + i \cdot (\omega \cdot m - k_m/\omega)}$$

Definiendo la Impedancia Mecánica compleja del sistema

$$Z_m = R_m + i \cdot X_m$$

en la que  $X_m$  es la reactancia mecánica

$$X_m = \omega \cdot m - k_m/\omega$$

A partir de la ecuación de la velocidad se puede escribir

$$Z_m = \frac{F}{u}$$

de donde se puede definir la impedancia, como el ratio entre la fuerza compleja aplicada y la velocidad compleja resultante en el punto donde la fuerza es aplicada siendo el desplazamiento y la velocidad reales los obtenidos de la parte real

$$x = \frac{F}{\omega \cdot Z_m} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \Theta)$$

$$u = \frac{F}{Z_m} \cdot \text{cos}(\omega \cdot t - \Theta)$$

La energía será

$$w = F \cdot u = \frac{F^2}{Z_m}$$

## 2.2. La ecuación de onda

En fluidos y en particular el aire en el que nos encontramos inmersos, y a los efectos de transmisión de vibraciones mecánicas, la vibración de los cuerpos en contacto con el aire, genera compresiones y expansiones en forma oscilatoria mantenida por la elasticidad de volumen del aire.

Para un medio fluido la ecuación de estado relaciona tres magnitudes físicas describiendo el comportamiento termodinámico del fluido. Por ejemplo la ecuación de estado de un gas perfecto  $P = \rho \cdot r \cdot T$  da la relación entre la presión total en Pascales, la densidad en kilogramos partido por metro cúbico y la temperatura absoluta en grados Kelvin para un gran número de gases bajo condiciones de

equilibrio. La constante  $r$  es la constante específica del gas que para el aire es 287 J/(kg·K). Se pueden obtener simplificaciones si existen ciertas restricciones. Por ejemplo para procesos isotérmicos en los que la variación de presión es lenta y se produce la transmisión de calor

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Pero en los procesos acústicos las variaciones son muy rápidas y son procesos adiabáticos por lo que la ecuación que los gobierna es

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

Para fluidos que no sean gases perfectos la ecuación no es tan simple y se puede obtener por el desarrollo del polinomio de Taylor

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} \cdot (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho_0} \cdot (\rho - \rho_0)^2 + \dots$$

donde las derivadas parciales son determinadas para las compresiones y expansiones isentrópicas del fluido alrededor de su densidad de equilibrio. Si las fluctuaciones son pequeñas, solo las de orden más bajo como  $(\rho - \rho_0)$  es necesario tenerlas en cuenta. Esto da una relación lineal entre la fluctuación de la presión y el cambio en la densidad

$$P - P_0 \approx \mathcal{B} \cdot \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$$

Con  $\mathcal{B} = \rho_0 \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho_0}$  coeficiente de compresibilidad adiabático, el cual puede ser reescrito en función de la presión acústica  $p = P - P_0$  y la condensación  $s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$  como

$$p \approx \mathcal{B} \cdot s$$

con la condición esencial de que la condensación sea pequeña.

### 2.2.1. La ecuación de continuidad

Para conectar el movimiento del fluido con su compresión o expansión, se necesita una función que relacione la velocidad de la partícula  $\vec{u}$  y la densidad instantánea  $\rho$ .

Se considera un volumen elemental con forma de paralelepípedo rectangular pequeño  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  el cual está fijo en el espacio y a través del cual los elementos del fluido pueden pasar. La cantidad de masa que entra en el volumen a través de su superficie debe ser igual al incremento en la cantidad de masa del interior del volumen. En la siguiente figura se representa la variación de masa, en la dirección  $x$  y la ecuación que lo rige:

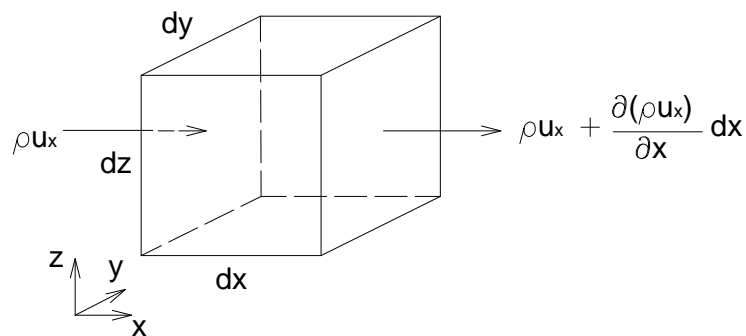


Figura 6. Balance másico en la dirección  $x$ .

$$\left( \rho \cdot u_x - \left( \rho \cdot u_x + \frac{\partial(\rho \cdot u_x)}{\partial x} \cdot dx \right) \right) \cdot dy \cdot dz = - \frac{\partial(\rho \cdot u_x)}{\partial x} \cdot dV$$

Si se tienen en cuenta todas las direcciones

$$- \left( \frac{\partial(\rho \cdot u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u_z)}{\partial z} \right) \cdot dV = - \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{u}) \cdot dV$$

El aumento de masa en el volumen viene dado por  $(\partial\rho/\partial t) \cdot dV$  y como debe ser igual al anterior se tiene la ecuación de continuidad exacta

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{u}) = 0$$

Esta ecuación se puede simplificar sabiendo que  $\rho = \rho_0(1+s)$  y que la variación de  $\rho_0$  es muy pequeña respecto al tiempo y al espacio.

$$\rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \cdot \vec{u}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}) = 0$$

### 2.2.2. La ecuación de fuerzas. Ecuación de Euler.

Si se considera el elemento anterior  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  que se mueve con el fluido y que contiene masa de fluido  $dm$ , estará sometido a la segunda Ley de Newton según  $d\vec{f} = dm \cdot \vec{a}$ . En ausencia de viscosidad la fuerza en la dirección  $x$  será:

$$df_x = \left( P - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \right) \cdot dy \cdot dz = -\frac{\partial P}{\partial x} dV$$

Para  $df_y$  y  $df_z$  existen análogas expresiones pero se debe añadir la fuerza de la gravedad. Combinando todos los términos se tiene:

$$d\vec{f} = -\nabla P \cdot dV + \vec{g} \cdot \rho \cdot dV$$

Para obtener la expresión de la aceleración del fluido se parte de la velocidad que es función del espacio y del tiempo.

$$\vec{a} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(x + u_x \cdot dt, y + u_y \cdot dt, z + u_z \cdot dt, t + dt) - \vec{u}(x, y, z, t)}{dt}$$

o en derivadas parciales

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

Si se define el vector operador  $(\vec{u} \cdot \nabla)$  como

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \equiv u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

y se tiene en cuenta que  $dm = \rho \cdot dV$ , la ecuación  $d\vec{f} = dm \cdot \vec{a}$  se puede escribir

$$-\nabla P + \vec{g} \cdot \rho = \rho \cdot \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} \right)$$

Si en esta ecuación se tiene en cuenta que en caso de excitación no acústica

$$\begin{aligned} \nabla P_0 &= \vec{g} \cdot \rho_0 \quad \text{y} \quad \nabla P = \nabla p + \vec{g} \cdot \rho_0 \\ -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \vec{g} \cdot s &= (1 + s) \cdot \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} \right) \end{aligned}$$

y si se asume que  $\frac{1}{\rho_0} |\nabla P| \gg |\vec{g} \cdot s|$  y que  $|s| \ll 1$  y que  $|(\vec{u} \cdot \nabla) \cdot \vec{u}| \ll \partial \vec{u} / \partial t$  se obtiene la ecuación lineal de Euler, válida para procesos acústicos de pequeña amplitud

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p$$

### 2.2.3. La ecuación de propagación de la onda.

A continuación se combinarán las ecuaciones anteriores. Si se aplica la divergencia a la ecuación de Euler

$$\nabla \left( \rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 p$$

Si se deriva respecto del tiempo la ecuación de continuidad, teniendo en cuenta que el tiempo y el espacio son independientes

$$\rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left( \rho_0 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = 0$$

Eliminando el término de la divergencia entre las dos ecuaciones se obtiene

$$\rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \nabla^2 p$$

Haciendo uso de la ecuación  $p \approx \mathcal{B} \cdot s$  y con la velocidad del sonido en el fluido  $c$  definida por  $c^2 = \mathcal{B}/\rho$  se obtiene la ecuación de propagación de una onda acústica,

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

De la ecuación  $c^2 = \mathcal{B}/\rho$  se puede deducir también que

$$p = \rho_0 \cdot c^2 \cdot s$$

que como  $\rho_0$  y  $c$  son funciones que dependen poco del espacio, conlleva a que  $s$  cumpla también la ecuación.

Como el rotacional del gradiente de una función es cero  $\nabla \times \nabla f = 0$ , se obtiene que la velocidad de la partícula es irrotacional  $\nabla \times \vec{u} = 0$ , lo cual significa que puede ser expresada como el gradiente de una función escalar, que se denominará  $\Phi$ , *potencial de velocidad*.

$$\vec{u} = \nabla \Phi$$

Sustituyendo en la ecuación del balance de fuerzas

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p \Rightarrow \nabla \left( \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p \right) = 0$$

En el caso de que no exista excitación acústica la cantidad entre paréntesis es nula, por lo que

$$p = -\rho_0 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Sustituyendo en la ecuación de onda, se comprueba que  $\Phi$  también la cumple

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Si el sistema de coordenadas se escoge de tal modo que la onda se propague sobre el eje  $x$ , la ecuación de propagación de la onda se reduce a

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

donde  $p = p(x, t)$ . La solución será función de  $(ct \pm x)$  o de  $(t \pm x/c)$  ya que sus derivadas segundas respecto a  $t$  y a  $x$  se diferencian en  $c^2$ . Eligiendo una solución armónica de pulsación  $\omega$ , se tendrá una solución en forma compleja en que  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$

$$p = A e^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)} + B e^{i(\omega \cdot t + k \cdot x)}$$

Y la velocidad que será paralela a la dirección de propagación

$$\vec{u} = \mathbf{u} \cdot \hat{x} = \left( (A/\rho_0 \cdot c) \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)} - (B/\rho_0 \cdot c) \cdot e^{i(\omega \cdot t + k \cdot x)} \right) \hat{x}$$

Otras magnitudes serían

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{\rho_0 \cdot c}$$

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{p}}{\rho_0 \cdot c^2}$$

$$\Phi = -\frac{\mathbf{p}}{i \cdot \omega \cdot \rho_0}$$

La impedancia acústica se define como la relación entre la presión acústica y la velocidad asociada a la partícula en el medio

$$z = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{u}}$$

que para ondas planas es  $z = \rho \cdot c$  que aunque es en este caso real, en general será una magnitud compleja, siendo la parte real la resistencia acústica específica y la imaginaria la reactancia acústica específica, del medio en particular en el que la reactancia es considerada.

#### 2.2.4. Ondas cilíndricas.



Se desarrollan en este apartado la formulación para ondas cilíndricas. Las ondas esféricas no se desarrollan en esta Tesis, ya que los casos que se estudiarán y debido a razones que se expondrán en su momento, únicamente serán en dos dimensiones.

En el caso de ondas cilíndricas se parte de la misma ecuación de onda pero con el laplaciano en coordenadas cilíndricas.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Asumiendo soluciones armónicas y separación de variables, se puede realizar el estudio sólo en la coordenada  $r$ , descartando  $\theta$  por la simetría, y  $z$  debido a que se contemplan ondas cilíndricas concéntricas en  $z$ , quedando la ecuación

$$\frac{d^2 \mathbf{p}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{p}}{dr} + k^2 \cdot \mathbf{p} = 0$$

Siendo la solución del tipo

$$\mathbf{p}(r, t) = (\mathbf{A} \cdot J_0(kr) + \mathbf{B} \cdot Y_0(kr)) e^{i\omega t}$$

Donde  $J_0$  y  $Y_0$  son las funciones de Bessel de orden 0 y primera y segunda clase respectivamente.

Si  $\mathbf{B} = \pm i \cdot \mathbf{A}$  la solución se puede escribir en función de las funciones de Bessel de tercera clase, o de Hankel siendo para una onda armónica cilíndrica con simetría e independiente de  $z$

$$\mathbf{p}(r, t) = \mathbf{A} \cdot H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t}$$

Donde  $H_0^{(2)}(kr) = J_0(kr) - i \cdot Y_0(kr)$  es la función de Hankel de segunda especie y orden 0. Con las relaciones vistas anteriormente se pueden obtener la velocidad y la impedancia

$$\mathbf{u}(r, t) = -i \cdot \left( \frac{\mathbf{A}}{\rho_0 \cdot c} \right) H_1^{(2)}(kr) e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{z} = -i \cdot \rho_0 \cdot c \cdot H_0^{(2)}(kr) / H_1^{(2)}(kr)$$

El cálculo de la intensidad acústica es más complicado. La intensidad instantánea es  $I(r, t) = p \cdot u$ . Esto conduce a

$$I(r, t) = \left( \frac{A^2}{\rho_0 \cdot c} \right) (J_0(kr) \cos \omega t + Y_0(kr) \sin \omega t) \cdot (J_1(kr) \sin \omega t - Y_1(kr) \cos \omega t)$$

El valor medio es

$$I(r, t) = \left( \frac{A^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot c} \right) \cdot (J_1(kr) \cdot Y_0(kr) - J_0(kr) \cdot Y_1(kr))$$

La cantidad dentro del segundo paréntesis es el Wronskiano de  $J_0(kr)$  y  $Y_0(kr)$  cuyo resultado es conocido e igual a  $2/(\pi \cdot k \cdot r)$ , que sustituyendo nos da el valor de

$$I(r, t) = \left( \frac{2 \cdot A^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot c \cdot \pi \cdot k \cdot r} \right) = \frac{P_{as}^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot c}$$

donde  $P_{as}$  es la amplitud asintótica  $P_{as} = A \cdot (2/(\pi \cdot k \cdot r))$

$$P_{as} = A \left( \frac{2}{\pi \cdot k \cdot r} \right)^{1/2}$$

Comprobándose que la intensidad decrece con  $1/r$  como debe ser por la conservación de la energía para ondas cilíndricas. Se debe tener en cuenta que la intensidad no es simplemente  $P^2/2\rho_0c$  en todos los puntos como era para las ondas planas y esféricas.

### 2.3. Fenómenos de propagación

Hasta este punto se ha estudiado la propagación de una onda en campo libre, pero generalmente la onda puede encontrar en su camino obstáculos que dependiendo de sus características provocan una alteración en ella. Entre los fenómenos más relevantes se destacan la reflexión, haciendo por ejemplo que la onda vuelva a ser percibida en la fuente; la transmisión a través del obstáculo, que será de manera atenuada en función de la absorción del material del que esté compuesto el obstáculo; la refracción, que implica cambios en la dirección de propagación; la difracción, que hace que un sonido se perciba aunque la fuente no sea visible desde el punto donde se sitúa el receptor; y las pulsaciones, que aparecen cuando se superponen dos ondas de diferentes frecuencias. En el comportamiento de las pantallas acústicas, el de mayor importancia es la difracción, ya que hace que se perciba el sonido en la zona de sombra de la pantalla aunque de forma más atenuada.

En la mayor parte de las ocasiones, actúan todos o varios de estos fenómenos de forma conjunta. La importancia de cada uno de ellos respecto a los otros en cada caso depende de varios factores, como la posición de la zona de estudio respecto de la situación del elemento, la amplitud de onda y tamaño del elemento, etc.

En la siguiente figura se observan varios de estos fenómenos y su representación en el estudio de una pantalla acústica.

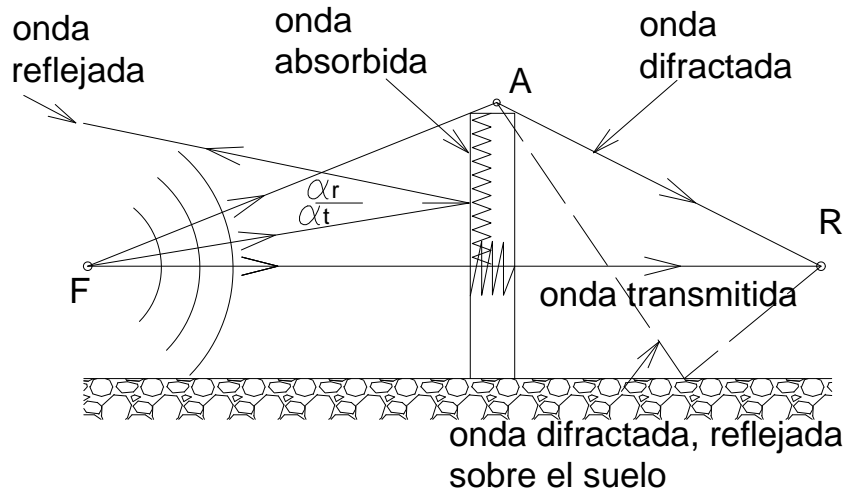


Figura 7. Camino de las ondas sonoras con una pantalla acústica.

### 2.3.1. Reflexión y transmisión

Cuando una onda se propaga a través de un medio y se encuentra con una superficie de separación de un medio diferente, se origina en el punto donde incide la onda y separa los dos medios, una onda reflejada en el primero y una onda transmitida en el segundo. Por ejemplo se pueden experimentar fenómenos de reflexión de las ondas sonoras en un espacio cerrado donde se toca música.

Parte del sonido escuchado, lo forma el sonido directo, que proviene directamente de los instrumentos, y parte un sonido reflejado, que es la misma onda sonora después de rebotar con la pared. Se debe resaltar, que el sonido que se refleja 1/10 de segundo después del sonido original no se detecta por el oído, de forma que los dos sonidos se confunden produciendo el fenómeno de la reverberación. Asimismo, siempre que hay una onda reflejada se crea también una onda transmitida. Un ejemplo podría ser el ruido del tráfico ferroviario dentro de las viviendas, que aunque el material de la pared ha absorbido parte de la energía de la onda atenuando la intensidad, parte de ella penetra en la vivienda.

Para estudiar estos fenómenos es conveniente recordar la definición de impedancia acústica dada en la expresión  $z = p/u = \rho \cdot c$  que dependerá del medio.

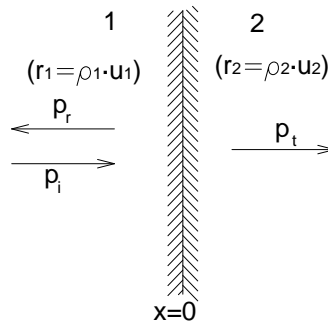


Figura 8. Reflexión y transmisión de ondas planas en una superficie límite.

Así una onda plana, en el medio 1, que incide normalmente y viaja en la dirección positiva del eje de abscisas puede representarse por:

$$p_i = P_i \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k_1 \cdot x)}$$

Análogamente la onda transmitida en el medio 2 y la reflejada en el 1 se describen cómo:

$$p_r = P_r \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k_1 \cdot x)} \quad p_t = P_t \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k_2 \cdot x)}$$

Los números de onda,  $k$ , son diferentes porque las respectivas velocidades de la onda en estos medios también son diferentes:  $k_i = \omega/c_i$ . Las dos ondas, tienen que cumplir las condiciones frontera en los puntos de la superficie de separación de los dos medios:

1. Sobre la superficie del plano de separación la presión a los dos lados de este límite ( $x = 0$ ) es la misma.

Esto implica:

$$p_i + p_r = p_t$$

2. Las velocidades de las partículas con dirección normal y diferente lado del plano límite tienen que ser iguales en los dos lados, sino los dos medios no permanecerían continuamente en contacto. Como hemos presupuesto ondas con incidencia normal resulta:

$$u_i + u_r = u_t$$

Teniendo presente estas dos condiciones de continuidad en el plano límite y la definición de impedancia, dividiendo una ecuación entre otra y despejando, se obtiene:

$$P_r = P_i \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$$

Según esta fórmula, cuando la impedancia del segundo medio es mayor que la del primero (por ejemplo si la onda sonora incide desde la atmósfera sobre el agua) un exceso de presión positiva (condensación) se refleja también como un aumento en la condensación de la onda reflejada. Asimismo, si la diferencia de impedancias es negativa un exceso de presión positiva en la onda incidente se refleja como un exceso de presión negativa.

Una magnitud importante en las ondas planas es la intensidad, que se define como el valor medio del flujo de energía que atraviesa una superficie por unidad de tiempo. Para una onda plana esta magnitud está dada por  $I = p_0^2 / (2 \cdot \rho_0 \cdot c)$  y la relación entre la energía reflejada y la incidente puede expresarse en función de un coeficiente de reflexión de la potencia,  $R_e$ , en términos de la impedancia.

$$R_e = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{P_r}{P_i}\right)^2 = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}\right)^2$$

De la misma forma se podría obtener el coeficiente de transmisión,  $T_e$ , en función de las respectivas impedancias.

$$P_t = P_i \cdot \frac{2 \cdot z_2 / z_1}{z_2 / z_1 + 1} = P_i \cdot T$$

$$T_e = \frac{I_t}{I_i} = \left(\frac{P_t}{P_i}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot z_2 / z_1}{z_2 / z_1 + 1}\right)^2$$

Se debe destacar, que el coeficiente de transmisión,  $T_e$ , es siempre positivo. Es importante describir el fenómeno de transmisión de la onda en dos medios muy comunes en nuestro planeta: el agua y el aire. Se observa, entonces, que cuando la onda pasa de un medio más denso a otro menos denso la amplitud de presión de la onda transmitida se duplica porque el cociente de impedancias es grande.

$$\frac{z_2}{z_1} \rightarrow \infty \Rightarrow P_t = P_i \cdot \frac{\frac{2 \cdot z_2}{z_2}}{\frac{z_2}{z_2} + \frac{z_1}{z_2}} = P_i \cdot \frac{2}{1 + 0} = 2 \cdot P_i$$

En cambio, si el fenómeno ocurre en sentido contrario, y la onda pasa de un medio de baja densidad a otro de mayor densidad (por ejemplo del aire al agua), la relación entre impedancias tiende a cero al igual que la amplitud de presión de la onda transmitida.

$$\frac{z_2}{z_1} \rightarrow 0 \Rightarrow P_t = P_i \cdot \frac{\frac{2 \cdot z_2}{z_2}}{\frac{z_2 + z_1}{z_2}} = P_i \cdot \frac{2 \cdot 0}{0 + 1} = 0 \cdot P_i = 0$$

En el caso de que la onda no pase de un medio compresible a otro de menor o mayor densidad, sino que incida sobre un sólido no deformable que se caracteriza por una impedancia acústica específica,  $Z_n$ , definida por el cociente entre la presión acústica sobre la superficie del sólido y la velocidad normal del fluido en este punto. Estas dos magnitudes no siempre están en fase, entonces la impedancia puede ser una variable compleja:  $Z_n = R_n + i \cdot X_n$ . La parte real  $R_n$  es la componente resistiva, mientras que la parte compleja,  $X_n$ , es la reactiva, que se definen a partir de las condiciones de continuidad en el plano límite ( $x = 0$ ) a partir de los valores de presión y velocidad de la onda incidente y la reflejada.

$$Z_n = \frac{p_i + p_r}{u_i - u_r} = \frac{p_i + p_r}{\frac{p_i}{z_1} - \frac{p_r}{z_1}} = \frac{p_i + p_r}{p_i - p_r} \cdot z_1$$

en el desarrollo final de esta fórmula se ha simplificado la parte compleja de la onda  $e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)}$ . Ahora aislando la amplitud de la onda reflejada en función de los otros términos se puede decir:

$$P_r = P_i \cdot \left( \frac{Z_n - R_1}{Z_n + R_1} \right) = P_i \cdot \left( \frac{(R_n - R_1) + i \cdot X_n}{(R_n + R_1) + i \cdot X_n} \right)$$

La amplitud de la onda reflejada es compleja, entonces puede estar desfasada en relación a la onda incidente. Otras magnitudes de interés son la amplitud de la onda y los coeficientes de reflexión,  $R_e$ , y de transmisión,  $T_e$ . Con razonamientos similares a los que se aplican cuando la onda atraviesa dos medios diferentes se obtiene para la amplitud:

$$R_e = \frac{I_r}{I_i} = \left( \frac{P_r}{P_i} \right)^2 = \frac{(R_n - R_1)^2 + X_n^2}{(R_n + R_1)^2 + X_n^2}$$

$$T_e = 1 - R_e = \frac{4 \cdot R_n \cdot R_1}{(R_n + R_1)^2 + X_n^2}$$

Para la formulación de la reflexión y transmisión entre dos medios por incidencia oblicua, se puede acudir a la bibliografía.

### **2.3.2. Refracción**

La refracción es el cambio de dirección que experimenta una onda al pasar de un medio a otro. Sólo se produce si la onda incide oblicuamente sobre la superficie de separación de los dos medios y si éstos tienen índices de refracción distintos.

La refracción se origina en el cambio de velocidad que experimenta la onda. El índice de refracción es precisamente la relación entre la velocidad de la onda en un medio de referencia y su velocidad en el medio de que se trate.

Un ejemplo muy ilustrativo de este fenómeno se observa cuando se sumerge un lápiz en un vaso con agua: el lápiz parece quebrado. También se produce cuando la luz atraviesa capas de aire a distinta temperatura, de la que depende el índice de refracción.

Es un fenómeno que afecta también a la propagación del sonido. Es la desviación que sufren las ondas en la dirección de su propagación, cuando el sonido pasa de un medio a otro diferente. A diferencia de lo que ocurre en el fenómeno de la reflexión, en la refracción, el ángulo de refracción ya no es igual al de incidencia.

La refracción se debe a que al cambiar de medio, cambia la velocidad de propagación del sonido. La refracción también puede producirse dentro de un mismo medio, cuando las características de este no son homogéneas, por ejemplo, cuando de un punto a otro de un medio aumenta o disminuye la temperatura, que como se ha indicado, hace que varíe la velocidad del sonido.

En el caso de pantallas acústicas, en la frontera entre el aire y la pantalla, aparecen reflexión y refracción parciales. Una parte de la energía sonora se refleja sobre la

pantalla, conforme a las leyes de reflexión explicadas, cumpliéndose para cada rayo sonoro incidente la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión.

Pero hay otra parte de la energía sonora que se refracta en la pantalla, y que también la absorbe, y de la que sólo transmite una pequeña fracción a la zona de sombra de la pantalla tras una nueva reflexión dentro de la pantalla y refracción al volver a salir al aire.

Este fenómeno no es relevante en el estudio concreto de las pantallas acústicas, ya que en la zona iluminada es la reflexión la dominante, y en la zona de sombra la difracción. Su presencia adquiere gran relevancia en ondas que recorren grandes distancias por la atmósfera, ya que es probable que atraviesen zonas con diferentes temperaturas. Su formulación y características más importantes se pueden consultar en la bibliografía.

### 2.3.3. Difracción

Este fenómeno es uno de los más importantes en el funcionamiento de las pantallas acústicas, aunque no el único. En la siguiente figura se aprecia el funcionamiento de la difracción ante una pantalla acústica.

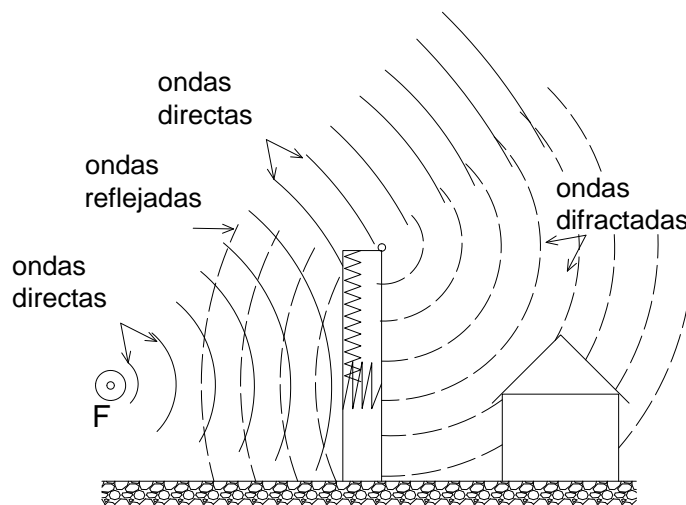


Figura 9. Comportamiento de las ondas ante una pantalla acústica por la difracción del sonido.



La propagación de las ondas es diferente dependiendo del tamaño del obstáculo y de la longitud de onda.

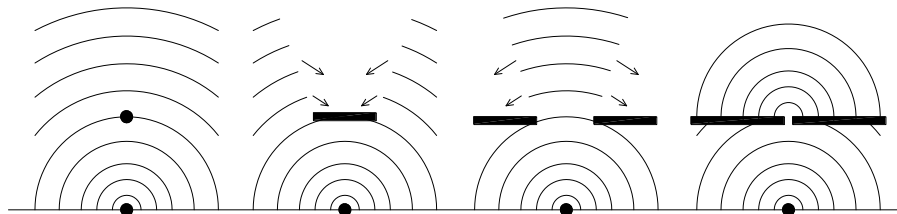


Figura 10. Diferentes casos de difracción.

En el primer caso de la figura la longitud de onda es grande comparada al tamaño del obstáculo por lo que no altera la radiación del sonido. En el segundo caso el obstáculo es grande en términos de longitud de onda por lo que se crea una zona de sombra. Pese a todo, la difracción hace que parte de sonido entre en la zona de sombra. En el tercer caso la abertura es grande en relación a la longitud de onda por lo que el sonido pasa creando una zona de sombra y con la difracción enviando parte del sonido hacia la zona de sombra. En el último caso la abertura es muy pequeña en comparación con la longitud de onda, y la difracción actúa creando una nueva fuente puntual en la abertura, creando nuevos frentes de onda.

El cálculo del diagrama de ondas de difracción es complicado, pero se puede conseguir una buena aproximación empleando un método geométrico descubierto por Christian Huygens alrededor de 1678. El método de Huygens considera cada punto de un frente de onda como un foco puntual de ondas. Pasado un cierto tiempo el nuevo frente de ondas es la superficie correspondiente a la envolvente de todas las pequeñas ondas esféricas elementales emitidas por estas fuentes puntuales.

En la siguiente figura se observa como una onda esférica que sale de una fuente puntual emite un impulso de muy corta duración.

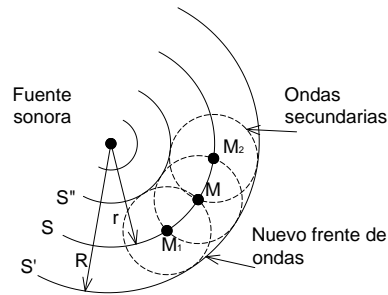


Figura 11. Frentes de onda secundarios.

Cuándo ha pasado un instante de tiempo,  $t$ , los frentes de onda secundarios se alejan de la superficie  $S$  (radio  $r$ ) y forman una familia de esferas con envolventes geométricas las esferas  $S'$  y  $S''$  que tienen por radios  $R_1 = r + c \cdot t$  y  $R_2 = r - c \cdot t$ . Los puntos  $M_1$  y  $M_2$  de  $S$  son fuentes en fase que emiten ondas secundarias esféricas que en el instante inmediatamente posterior tienen el mismo radio, entonces son tangentes a  $S$ , que es la envolvente de todas estas ondas secundarias. Se debe tener en cuenta, que si cada punto de un frente de onda fuera realmente una fuente puntual debería haber también ondas en el sentido contrario de su propagación. Para salvar esta incoherencia Kirchoff en el siglo XIX refinó este método considerando que la intensidad de las ondas elementales secundarias depende del ángulo, siendo nula en el sentido contrario al de propagación. Esta teoría es conocida con el nombre de aproximación de los rayos:

“Si el obstáculo o abertura es grande en comparación a la longitud de onda, no se observa ninguna desviación en el frente de ondas y la onda se propaga en línea recta o radial, de manera similar a como lo haría un haz de partículas”

En casos reales, las longitudes de onda de los sonidos audibles varían dentro de un intervalo que va desde unos pocos centímetros a varios metros y a menudo son grandes respecto a la medida de las aperturas y obstáculos, por lo cual la difracción del sonido es un hecho habitual que podemos experimentar cuando escuchamos el ruido que se produce en otra habitación, sentimos un ruido detrás de la esquina de la calle, y también tras una pantalla acústica.

Un resultado importante que se obtiene del cálculo del diagrama de difracción de las ondas planas que inciden sobre una abertura circular pequeña es que a gran distancia de la abertura, casi toda la intensidad de la onda se confina en un cono de semiángulo  $\theta$  y diámetro  $D$  que está relacionado con la longitud de onda por

$$\text{sen}\theta \approx \frac{\lambda}{D}$$

Así, si la longitud de las ondas es pequeña, en comparación a  $D$ , se confinan en la dirección que tienen delante. Por esta razón las ondas con longitudes de onda cortas y altas frecuencias que proceden de un altavoz tienden a concentrarse en la dirección que tienen delante, más que las ondas de baja frecuencia, que se expanden en todas direcciones.

#### 2.3.4. Pulsaciones

Cuando se superponen ondas en fase con diferentes frecuencias la interferencia será constructiva y la intensidad resultante grande, pero si en un instante posterior se desfasan debido a que las frecuencias son diferentes, la interferencia será destructiva. Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando escuchamos el sonido producido por dos cuerdas de guitarra de frecuencia casi idénticas. El sonido tiene una intensidad alternativamente alta y baja con una frecuencia que se denomina frecuencia de pulsación.

Se puede obtener esta onda de presión a partir de dos ondas de frecuencia angular  $\omega_1$  y  $\omega_2$  e igual amplitud,  $p_0$ . Se puede despreciar la parte espacial y considerar sólo la dependencia con el tiempo si se quiere visualizar la onda en un solo punto del espacio. Así, a partir de dos funciones armónicas simples

$$p_1 = p_0 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \quad p_2 = p_0 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)$$

Para simplificar los cálculos, se ha supuesto sin pérdida de generalidad, que están en fase en el instante inicial,  $t = 0$ . Cuando las ondas se superponen, empleando una identidad trigonométrica resulta que

$$P = p_1 + p_2 = p_0 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + p_0 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) =$$

$$= 2 \cdot p_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right)$$

Esta notación puede simplificarse poniendo la frecuencia angular  $\omega$  en función de la frecuencia natural,  $f$ , pues  $\omega = 2\pi f$ , y haciendo las siguientes identificaciones para la frecuencia media y la diferencia de frecuencias:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

se escribe como

$$P = 2 \cdot p_0 \cdot \cos(\pi \cdot \Delta f \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \bar{f} \cdot t)$$

La siguiente figura ilustra la variación de la onda de presión en función del tiempo.

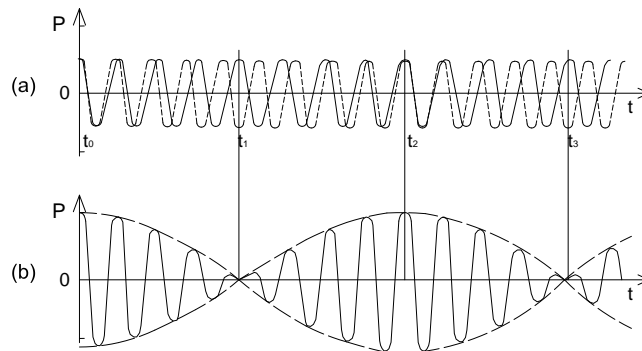


Figura 12. Dos ondas de diferente frecuencia (a) y su resultante (b).

En la parte (a) se representan dos ondas de diferente frecuencia en fase para  $t = 0$ . En (b) se muestra la resultante de las dos ondas. En un instante posterior,  $t_1$ , las ondas están desfasadas  $180^\circ$  como consecuencia de la diferencia de frecuencias y la interferencia es destructiva. En el instante  $t_2 = 2 \cdot t_1$ , por el contrario, las ondas están nuevamente en fase y la interferencia es constructiva y en  $t_3$  vuelve a producirse nuevamente el desfase. La frecuencia de esta oscilación resultante es casi la misma que la de las ondas originales y su amplitud está modulada. El oído percibe la energía de la onda como el cuadrado de la amplitud. Por este motivo el ruido es fuerte siempre que la amplitud es máxima o mínima, o sea siempre que  $\cos(\pi \cdot \Delta f \cdot t)$  sea igual a  $\pm 1$ . La amplitud máxima se presenta con la frecuencia  $\Delta f/2$ , entonces la frecuencia de las amplitudes máxima y mínima es exactamente el doble,  $\Delta f$ .

## 2.4. Parámetros de medida del ruido.

El ruido se define como un caso particular del sonido, aquel sonido no deseado y que interfiere en alguna actividad humana, provocando sensación de molestia. Existen multitud de variables para diferenciar unos ruidos de otros, a continuación se analizan varias de ellas. Se han utilizado entre otros libros de la bibliografía Saura López F.J.et al. (2005) y Sanz Sá J.M. (1987).

### 2.4.1. Intensidad del ruido

Las presiones acústicas a las cuales es sensible el oído humano, varían en un intervalo enorme. Así, el umbral inferior de la audición humana, es decir, la presión acústica mínima que provoca una sensación auditiva, es  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa, y el umbral máximo es de alrededor de 20 Pa. La manipulación de valores que cubren un campo tan extenso no resulta cómoda, por lo que se recurre a la utilización de otra escala, logarítmica, y otra unidad, el decibelio. Se define el nivel de presión sonora  $L$  por la expresión:

$$L(dB) = 10 \cdot \log_{10} \frac{p^2}{p_{ref}^2} = 20 \cdot \log_{10} \frac{p}{p_{ref}}$$

donde  $p_{ref}$  es el valor de referencia de la presión acústica que representa la menor presión acústica audible por un oído humano normal,  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa, y  $p$  la presión acústica eficaz.  $L$  se expresa en decibelios (dB).

El comportamiento del oído humano está más cerca de una función logarítmica que de una lineal. Un oído humano es capaz de percibir y soportar sonidos correspondientes a niveles de presión sonora entre 0 y 120 dB. Este último nivel de ruido marca aproximadamente el denominado “umbral del dolor”. A niveles de ruido superiores pueden producirse daños físicos como rotura del tímpano.

En la siguiente figura se aporta un esquema en el que se indica el nivel de presión sonora en Pascales y en dB para varios escenarios.

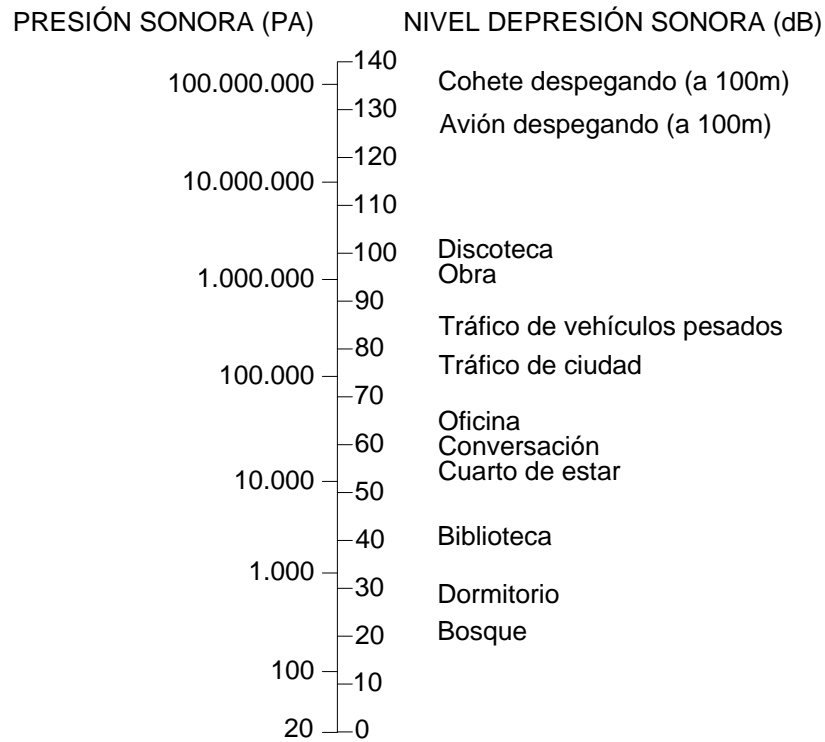


Figura 13. Esquema comparativo de decibelios.

- Suma de niveles sonoros

Cuando dos fuentes sonoras radian sonido, ambas contribuyen en el nivel de presión sonora existente en un punto alejado de dichas fuentes. Si las dos radian la misma cantidad de energía, en un punto equidistante de ambas fuentes la intensidad sonora será dos veces mayor que si solamente tuviéramos una fuente radiando. Ya que la intensidad es proporcional al cuadrado de la presión, entonces al doblar la intensidad produce un incremento de 3 dB en la presión sonora existente. Cuando sumamos la contribución de dos o más fuentes, ésta no es igual a la suma numérica de los valores individuales en dB.

El método numérico para sumar niveles sonoros es el siguiente:

$$L_{\text{Total}} = 10 \cdot \log_{10} \sum_{i=1}^n 10^{\frac{L_i}{10}}$$

donde  $n$  es el número de fuentes sonoras y los niveles  $L_i$  son los niveles debidos a cada una de las fuentes expresados en dB.

## 2.4.2. La percepción de los sonidos

La percepción subjetiva del sonido depende de múltiples factores. Así por ejemplo, la *intensidad* distingue entre sonidos altos y bajos y está relacionada con la intensidad acústica o con la presión acústica eficaz, y el *tono*, diferencia los sonidos agudos de los graves y está relacionado con la frecuencia del sonido (cuanto más agudo es un sonido mayor es su frecuencia). Otros factores pueden ser el *timbre*, el *ritmo*, etc.

Aparecen, pues, dos conceptos esencialmente distintos aunque íntimamente relacionados: por un lado, la onda sonora o ente físico capaz de producir la sensación de sonido; y por el otro, la sonoridad o sensación subjetiva producida por ciertas variaciones de presión en el oído.

En general, los sonidos están formados por la unión de componentes de distinta frecuencia, dependiendo su sonoridad de las contribuciones relativas de cada componente, es decir, de las frecuencias presentes y de las intensidades correspondientes. Físicamente, se representan mediante su espectro de frecuencia. La sonoridad es una característica subjetiva. En el ruido producido por el ferrocarril es muy importante este concepto ya que es muy característico su espectro de frecuencia, y todavía más el de algunos de sus componentes, como el chirrido de las ruedas en las curvas, resultando particularmente molestos.

Estudios realizados sobre un gran número de oyentes ha permitido tabular un conjunto de curvas de igual sonoridad (curvas isofónicas) que indican, para cada nivel de sonoridad, el nivel sonoro de los distintos tonos puros que producen la misma sensación sonora (se comprueba que la corrección de nivel entre dos frecuencias distintas para que ofrezcan la misma sonoridad depende del valor de la sonoridad).

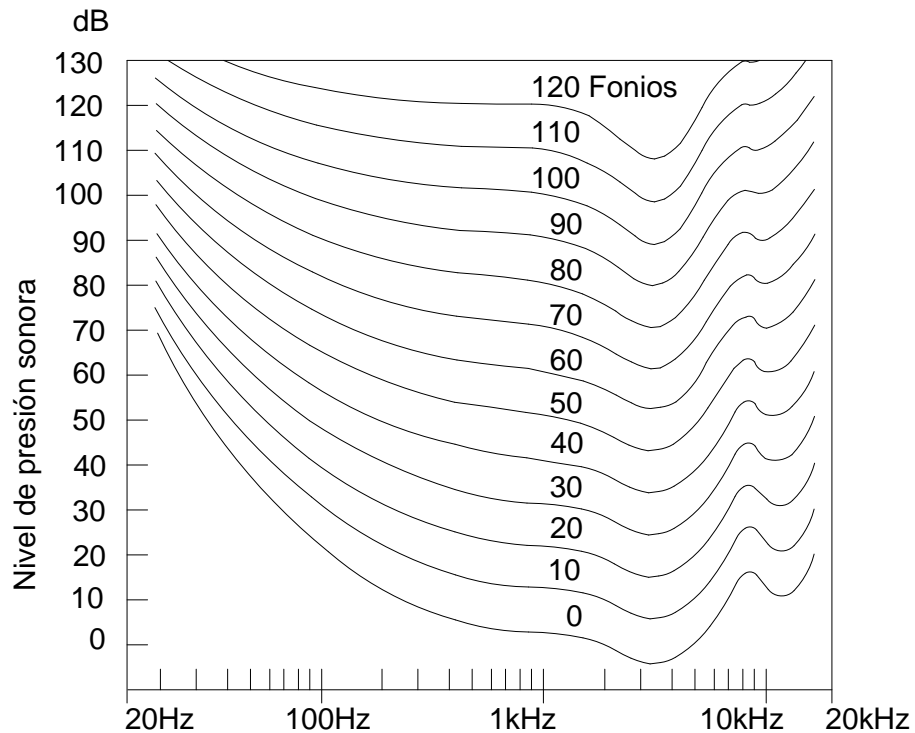


Figura 14. Curvas isofónicas.

- Curvas de ponderación en frecuencia

El oído humano no es sensible de la misma manera a las diferentes frecuencias y además varía considerablemente, con el nivel de presión sonora que escucha. Así, para un mismo nivel de presión sonora, un ruido será tanto más molesto cuanto mayor proporción de altas frecuencias contenga. Para intentar aproximar los analizadores acústicos a la respuesta del oído, se crearon las curvas de ponderación en frecuencia. Se definieron basándose en las curvas isofónicas del oído humano, es decir, atenuando las frecuencias bajas, para poder reflejar un nivel sonoro representativo de la sensación de ruido realmente recibida.

Así, para niveles bajos de presión sonora se usa la ponderación A, que atenúa en mucha medida los bajos (-50 dB a 20 Hz y casi -20 dB a 100 Hz) y en menor medida los agudos (casi -10 dB en 20 kHz). La A es adecuada para la medida de ruidos de fondo, que son por definición de nivel bajo.



La ponderación B se usa para niveles intermedios y es similar a la curva A, excepto porque la reducción de bajos es mucho menor, aunque todavía significativa (-10 dB a 60 Hz). Estudios recientes demuestran que es la mejor ponderación para usar en la medida de niveles de escucha musical.

La ponderación C es muy similar a la B en agudos, y apenas aporta atenuación de las frecuencias graves. Se planteó para la evaluación de ruidos de alto nivel. Las diferentes ponderaciones pueden compararse en la siguiente figura.

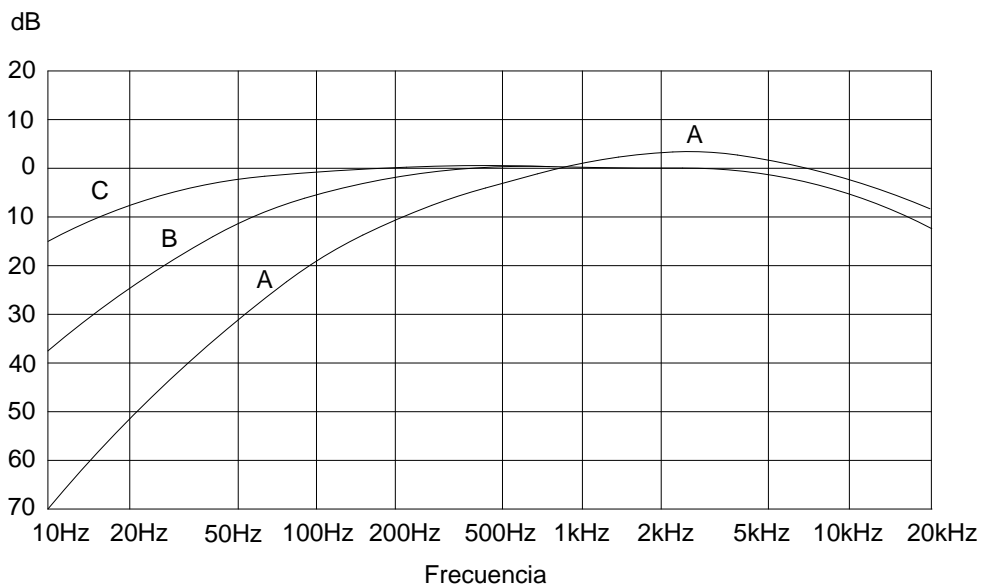


Figura 15. Curvas de ponderación en frecuencia.

En la actualidad se pone en cuestión la exactitud de estas curvas porque están basadas en las primeras curvas isofónicas que se conocieron, que son bastante antiguas y con bastante error por el instrumental de la época. Además, las curvas son muy simples y no incluyen significativas inflexiones de la respuesta en frecuencia que suceden en la zona de medios (alrededor de 3500 Hz) y agudos, que si se aprecian en las curvas isofónicas descritas en el punto anterior. Esto último es debido a que están pensadas para poder realizarse con circuitos eléctricos sencillos, que era lo razonablemente disponible en la época.

Por todo ello, las ponderaciones no son de gran exactitud porque no reflejan de forma exacta el comportamiento en frecuencia del oído, aunque cumplen la función de

atenuar los bajos y los agudos de forma que simulen las variaciones de la respuesta del oído a diferentes niveles de una manera aproximada. Hoy en día sería posible definir unas nuevas ponderaciones basadas en contornos de igual sonoridad más exactos, ponderaciones que podrían adoptar curvas más complejas que reflejaran de forma más exacta las respuestas del oído a diferentes niveles y que serían fácilmente realizables con la electrónica actual. Sin embargo, el uso estandarizado de las ponderaciones estándar clásicas durante décadas hace difícil implantar unas curvas nuevas de ponderación más exactas.

Además de las ponderaciones A, B y C, existen otras ponderaciones para aplicaciones especiales, como la D, para uso de muy alta presión como ruido aeronáutico.

El filtro utilizado en el dominio del ruido del transporte es el A, y los niveles de presión sonora utilizados, por lo tanto, se miden en decibelios A, dB(A).

### **2.4.3. Índices para la medida del ruido ambiental**

Para poder abordar el problema del ruido, es necesario, debido a la subjetividad que presenta, el establecimiento de un indicador que “explique” adecuadamente este grado de molestia. Entre el gran número de parámetros e índices desarrollados en el campo de la acústica para el estudio de los sonidos es preciso seleccionar un indicador de molestias (a ser posible un índice numérico) que sirva de base para la evaluación del impacto y para el establecimiento de valores límite de inmisión que garanticen una determinada calidad del ambiente sonoro. Por otra parte, para ser operativo, este índice debe ser fácil de obtener y de interpretar.

Las molestias debidas al ruido dependen de numerosos factores. El índice que se seleccione debe ser capaz de contemplar las variaciones o diferentes situaciones de los siguientes aspectos, entre otros:

- a) La energía sonora: Las molestias que produce un sonido están directamente relacionadas con la energía del mismo. A más energía más molestia. El índice básico relacionado con la energía sonora es el nivel de presión sonora.
- b) Tiempo de exposición: Para un mismo nivel de ruido, la molestia depende del tiempo al que un determinado sujeto está expuesto a ese ruido. Podemos estar contemplando periodos de segundos, minutos, horas o incluso una vida laboral entera. En general, un mayor tiempo de exposición supone un mayor grado de molestia.
- c) Características del sonido: Para un mismo nivel de ruido y un mismo tiempo de exposición, la molestia depende de las características del sonido: espectro de frecuencias, ritmo, etc. La música es un sonido que en general resulta agradable.
- d) El receptor: No todas las personas consideran el mismo grado de molestia para el mismo ruido. Dependiendo de factores físicos, distintas sensibilidades auditivas, y en mayor medida de factores culturales, lo que para uno son ruidos muy molestos, para otros pueden no serlo. Los factores culturales están relacionados con la experiencia vital del sujeto y sus expectativas. El factor edad parece ser también significativo.
- e) La actividad del receptor: Para un mismo sonido, dependiendo de la actividad del receptor, éste puede ser considerado como un ruido o no. El caso más evidente es el de los periodos de descanso. Algunas actividades o estados requieren ambientes sonoros más silenciosos (lectura, enfermedades, conversaciones, etc.), percibiéndose como ruido cualquier sonido que no esté relacionado con la actividad.
- f) Las expectativas y la calidad de vida: Dentro de este epígrafe se engloban aquellos aspectos subjetivos, difíciles de evaluar, que están relacionados con la calidad de vida de las personas. También sucede que en entornos de una gran calidad ambiental, se aceptan peor los ruidos que en entornos medioambientalmente degradados.

La selección del indicador que se va a utilizar en el estudio se convierte así en una cuestión decisiva, ya que éste tiene por finalidad indicar las molestias que el ruido produce en la población, y dado el carácter subjetivo de las mismas, surgen numerosas discusiones en cuanto a la validez de los indicadores como descriptores de las molestias.

#### 2.4.3.1. Índices básicos

- **Nivel de presión sonora (nivel sonoro).  $L$ ,  $SPL$**

Varía a lo largo del tiempo. Se expresa por  $L_A$  cuando se mide en decibelios A, que es lo habitual en estudios medioambientales. Para un determinado periodo de tiempo  $T$ , se pueden determinar entre otros los valores  $L_{Amáx}$ , el máximo valor de nivel de presión sonora ( $SPL$ ) alcanzado durante todo el intervalo de estudio. Representa el ruido de mayor presión sonora y no aporta información sobre su duración ni sobre la exposición total al ruido.

- **Nivel de presión sonora continuo equivalente.  $L_{Aeq}(T)$**

Es el índice más utilizado para medir las molestias del ruido. Expresa la media de la energía sonora percibida por un individuo en un intervalo de tiempo, es decir, representa el nivel de presión que habría sido producido por un ruido constante con la misma energía que el ruido realmente percibido, durante el mismo intervalo de tiempo. El nivel de presión sonora equivalente debe ir acompañado siempre de la indicación del periodo de tiempo al que se refiere. Su formulación matemática es:

$$L_{Aeq}(T) = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{T} \sum 10^{L_i/10} \cdot t_i \right)$$

donde:

$T = \sum t_i$  = tiempo de exposición

$L_i$  = nivel de presión sonora constante en el intervalo  $i$

$t_i$  = tiempo del intervalo  $i$  correspondiente al nivel  $L_i$

- **Índices de la serie estadística (niveles percentiles).  $L_N$**

La variación del nivel de presión sonora en un periodo de tiempo dado puede registrarse, y descomponer el periodo de medida en intervalos constantes para cada uno de los cuales se obtienen sus correspondientes niveles de presión sonora. Si el periodo es lo suficientemente largo, para ciertas fuentes de ruido, la repartición de los niveles sigue una ley normal.

Se definen los siguientes valores:

Nivel  $L_1$ : nivel alcanzado o sobrepasado durante el 1 % del tiempo en el periodo considerado. (Es un valor muy cercano al ruido máximo).

Nivel  $L_{10}$ : nivel alcanzado o sobrepasado durante el 10 % del tiempo.

Nivel  $L_{50}$ : nivel que se sobrepasa el 50 % del tiempo de medición. Es la mediana estadística. (Representa el ruido medio)

Nivel  $L_{90}$ : nivel alcanzado o sobrepasado durante el 90 % del tiempo. (A veces suele tomarse este valor como el ruido de fondo)

Nivel  $L_N$ : nivel alcanzado o sobrepasado durante el N % del tiempo

- **Nivel de exposición sonora (SEL):**

Se define como el nivel de presión sonora de un ruido continuo que tiene la misma energía en un segundo que la del ruido real durante el intervalo de tiempo  $T$ . Se utiliza para clasificar y comparar sucesos de ruido de diferente duración.

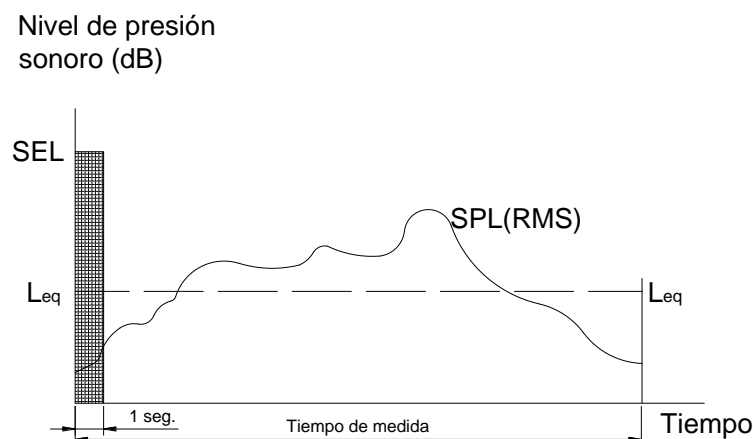


Figura 16. Nivel sonoro continuo equivalente y nivel de exposición sonora.

$$SEL = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{T_0} \sum 10^{L_i/10} \cdot t_i \right)$$

donde:  $T_0 = 1$  segundo

$t_i$  = tiempo durante el cual el nivel sonoro es  $L_i$

$T_0$  = tiempo real de exposición

La relación entre el  $L_{Aeq}$  y el  $SEL$  para un suceso de ruido es:

$SEL = L_{Aeq}(T) + 10 \log(T/T_0)$  donde  $T_0 = 1$  seg.

- **La distribución temporal: los períodos día, noche y tarde-noche.  $L_{den}$**

Es un indicador que tiene en cuenta el momento del día en el que se produce el ruido, ya que es distinta la molestia ocasionada en función de la hora del día.

El día se considera que tiene 12 horas, de las 7 h a las 19 h, la tarde 4 horas, de las 19 h a las 23 h y la noche 8 horas, de las 23 h a las 7 h, aunque pueden variar. El ruido de por la tarde está penalizado frente al del día y el de por la noche frente a los otros dos.

El indicador  $L_{den}$ , propuesto por la Unión Europea, es el nivel equivalente día – tarde – noche en decibelios A, y se calcula según la siguiente fórmula:

$$L_{den} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{12 \cdot 10^{\frac{L_{dia}}{10}} + 4 \cdot 10^{\frac{L_{tarde}+5}{10}} + 8 \cdot 10^{\frac{L_{noche}+10}{10}}}{24} \right)$$

## 2.5. Cálculo semiempírico de la propagación del ruido.

### 2.5.1. Cálculo de la atenuación

Existen métodos de cálculo directo de la atenuación del sonido desde la fuente en función de la geometría del problema, así como de los materiales o terrenos existentes, que servirán para validar el método de los elementos de contorno. En este punto se recoge el desarrollado por Harris C.M. (1995).

Son múltiples los factores que se tendrán en cuenta. La atenuación total  $A_{total}$ , viene dada por

$$A_{total} = A_{div} + A_{aire} + A_{suelo} + A_{misc}$$

Los tres primeros términos comprenden los mecanismos más importantes y se dan siempre.  $A_{div}$  o Atenuación por divergencia geométrica,  $A_{aire}$ , o Atenuación por absorción del aire y  $A_{suelo}$  o Atenuación por el efecto suelo. En el término  $A_{misc}$  o Atenuación por otros mecanismos adicionales, que sólo surgen en casos concretos están reflejados  $A_{refl}$  o Atenuación por reflexión en edificios,  $A_{veget}$  o Atenuación por la vegetación o  $A_{casa}$  o Atenuación a través de áreas de casas, entre otros. El efecto de las pantallas acústicas debe contemplarse en el efecto suelo ya que interactúa con éste. Algunos de los parámetros dependen de la frecuencia, por lo que el estudio se hará para las diferentes frecuencias. La atenuación en algunos casos puede ser negativa, es decir, aumentar el nivel sonoro.

- **Atenuación por divergencia geométrica ( $A_{div}$ )**

Para este tipo de atenuación se consideran dos tipos de fuentes sonoras, las puntuales y las lineales. En el caso del ferrocarril se puede suponer como fuente lineal. En el caso ideal de que no existan objetos reflectantes u obstáculos en su camino, el sonido proveniente de una fuente puntual se propagará en el aire en forma de ondas esféricas según la relación

$$I = \frac{p^2}{\rho \cdot c} = \frac{W}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Si expresamos en decibelios la relación entre el nivel de potencia acústica de la fuente y la presión sonora originada en un punto alejado a una distancia  $r$  obtendremos:

$$A_{div} = 20 \cdot \log_{10} r + 10.9$$

A partir de esta relación, se puede deducir que para un medio homogéneo, cada vez que doblamos la distancia, el nivel de presión sonora disminuye 6 dB.

Si el sonido proviene de una fuente lineal, éste se propagará en forma de ondas cilíndricas, obteniéndose una diferente relación de variación de la energía en función

de la distancia. Una infraestructura de transporte como una carretera o el paso de un tren suficientemente largo, considerados desde el punto de vista acústico, pueden asimilarse a una fuente lineal. Este artificio es una simplificación del problema, trabajándose normalmente en estas condiciones en los estudios de ruido del transporte.

En el caso de fuentes lineales, la propagación del sonido se rige por la expresión

$$I = \frac{p^2}{\rho \cdot c} = \frac{W}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Si se expresa en decibelios la relación entre el nivel de potencia sonora de la fuente y la presión sonora originada en un punto alejado a una distancia  $r$ , se obtiene la siguiente relación:

$$A_{div} = 10 \cdot \log_{10} r + 8$$

En este caso, para una propagación en condiciones homogéneas, al doblar la distancia el nivel de presión sonora disminuye 3 dB.

- **Atenuación resultante de la absorción del aire ( $A_{aire}$ )**

A medida que el sonido se propaga a través de la atmósfera, su energía se convierte gradualmente en calor (el sonido es absorbido) mediante varios procesos moleculares. La atenuación depende en gran medida de la frecuencia y la humedad relativa, y en menor medida de la temperatura. La fórmula que lo modela es

$$A_{aire} = \alpha \frac{d}{100}$$

Siendo  $\alpha$  un coeficiente obtenido de la siguiente tabla para una presión de 101,3 kPa:

Temperatura	Humedad relativa %	Frecuencia, Hz					
		125	250	500	1000	2000	4000
30 °C	10	0.96	1.8	3.4	8.7	29	96
	20	0.73	1.9	3.4	6.0	15	47
	30	0.54	1.7	3.7	6.2	12	33
	50	0.35	1.3	3.6	7.0	12	25
	70	0.26	0.96	3.1	7.4	13	23
	90	0.20	0.78	2.7	7.3	14	24
20 °C	10	0.78	1.6	4.3	14	45	109
	20	0.71	1.4	2.6	6.5	22	74
	30	0.62	1.4	2.5	5.0	14	49
	50	0.45	1.3	2.7	4.7	9.9	29
	70	0.34	1.1	2.8	5.0	9.0	23
	90	0.27	0.97	2.7	5.3	9.1	20



10 °C	10	0.79	2.3	7.5	22	42	57
	20	0.58	1.2	3.3	11	26	92
	30	0.55	1.1	2.3	6.8	34	77
	50	0.49	1.1	1.9	4.3	13	47
	70	0.41	1.0	1.9	3.7	9.7	33
	90	0.35	1.0	2.0	3.5	8.1	26
0 °C	10	1.3	4.0	9.3	14	17	19
	20	0.61	1.9	6.2	18	35	47
	30	0.47	1.2	3.7	13	36	69
	50	0.41	0.82	2.1	6.8	24	71
	70	0.39	0.76	1.6	4.6	16	56
	90	0.38	0.76	1.5	3.7	12	43

Tabla 1. Valor de  $\alpha$  para cálculo de atenuación de la absorción del aire.

- **Atenuación debida al suelo ( $A_{suelo}$ )**

Por encima de un suelo plano reflectante, el sonido llega a un receptor  $R$  desde una fuente  $S$  a través de dos vías: directamente a través de una trayectoria  $r_d$  y mediante la reflexión desde el suelo, a través de la trayectoria  $r_r$ . La atenuación  $A_{suelo}$  es el resultado de la interferencia entre el sonido directo y el reflejado, y depende del tipo de suelo, del ángulo de rozamiento  $\psi$ , la diferencia de longitud de los recorridos ( $r_r - r_d$ ) y la frecuencia del sonido.

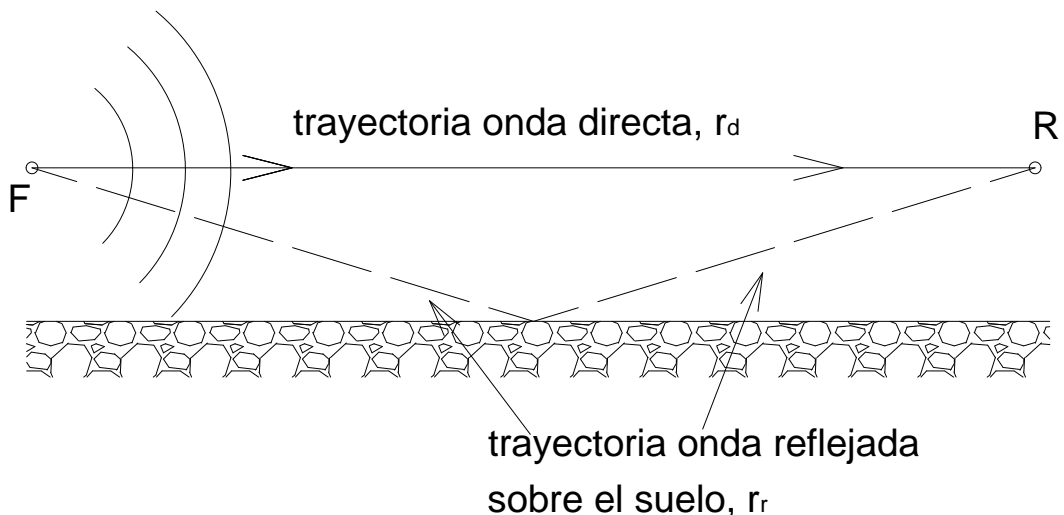


Figura 17. Reflexión sobre el suelo de una onda sonora.

Las superficies del suelo pueden clasificarse, para ángulos inferiores a 20° de la siguiente manera:

- Suelo duro. Poca porosidad. Pavimento de asfalto, hormigón, agua o suelo compactado.
- Suelo blando. Suelos porosos, tierras cultivables o cubierto por hierba, árboles u otra vegetación.
- Suelo muy blando. Suelos muy porosos. Nieve, agujas de pino, etc.
- Suelos mixtos. Superficie que incluye áreas duras y blandas.

**Cálculo de la atenuación del suelo para distancias cortas ( $r < 100 \text{ m}$ )**

De las tablas siguientes se obtiene la atenuación que como se observa en algunos casos puede ser negativa.

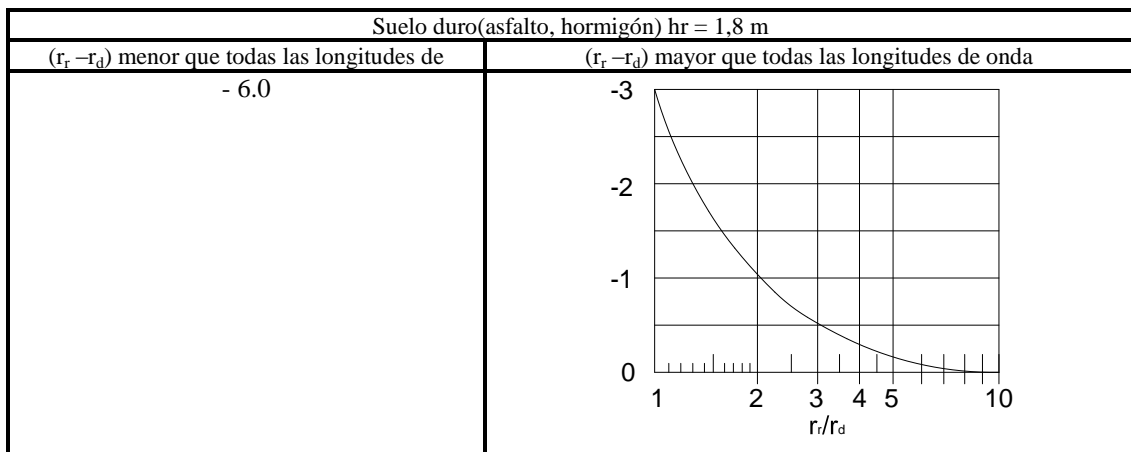


Tabla 2. Atenuación debida al suelo para suelos duros.

Suelo Blando o poroso (vegetación, hierba, $h_r = 1,8 \text{ m}$ )							
Altura de la fuente m	Distancia m	Frecuencia, Hz					
		125	250	500	1000	2000	4000
0,01	10	-5.7	-5.0	-3.6	-1.4	1.1	4.1
	20	-5.6	-4.6	-1.8	1.9	5.1	8.5
	40	-5.5	-3.9	-1.4	6.1	10.7	13.7
	60	-5.4	-3.3	4.2	9.8	13.2	16.9
	80	-5.4	-2.7	6.8	12.2	15.5	19.3
	100	-5.3	-2.2	9.2	14.0	17.4	21.1
0,3	10	-5.4	-4.3	-0.9	5.9	-2.5	-1.9
	20	-5.4	-4.0	-0.1	6.3	-0.1	-3.0
	40	-5.4	-3.4	2.9	10.2	4.1	-2.9
	60	-5.3	-2.8	5.8	13.1	7.1	-0.4
	80	-5.2	-2.2	8.4	15.3	9.3	1.7
	100	-5.2	-1.7	10.8	17.1	11.1	3.4
1,2	10	-4.0	2.0	0.1	-3.0	-3.0	-3.0
	20	-4.8	-1.9	7.5	-2.7	-3.0	-3.0
	40	-4.9	-2.1	6.9	0.5	-3.0	-3.0
	60	-4.9	-1.6	9.1	2.9	-3.0	-3.0
	80	-4.8	-1.0	11.6	4.8	-2.8	-3.0
	100	-4.8	-0.5	13.8	6.4	-1.5	-3.0

Tabla 3. Atenuación debida al suelo para suelos blandos o porosos.

Suelo Muy Blando (nieve, bosque de pinos, $h_s = 1.8$ m)							
Altura de la fuente m	Distancia m	Frecuencia, Hz					
		125	250	500	1000	2000	4000
0,01	10	-3.1	0.8	3.9	6.0	7.3	7.0
	20	-1.5	5.2	8.6	10.9	12.3	11.9
	40	1.4	11.1	14.0	16.3	17.7	17.3
	60	3.9	14.8	17.3	19.6	21.0	20.7
	80	6.2	17.3	19.7	22.0	23.4	23.1
	100	8.4	19.3	21.6	23.8	25.3	24.9
0,3	10	-2.3	2.8	5.0	-0.8	-3.0	-3.0
	20	-0.8	7.0	9.1	2.9	-2.9	-3.0
	40	2.0	12.8	14.2	7.9	1.4	-3.0
	60	4.6	16.5	17.5	11.2	4.5	-1.3
	80	6.9	19.0	18.2	13.5	6.8	0.8
	100	9.1	21.0	21.7	15.4	8.6	2.6
1,2	10	0.1	4.5	-2.5	-2.5	-2.5	-2.5
	20	0.9	7.0	-0.7	-3.0	-3.0	-3.0
	40	3.6	11.6	3.3	-3.0	-3.0	-3.0
	60	6.3	14.8	6.3	-0.6	-3.0	-3.0
	80	8.7	17.1	8.5	-1.5	-3.0	-3.0
	100	10.9	18.9	10.3	3.2	-2.6	-3.0

Tabla 4. Atenuación debida al suelo para suelos muy blandos.

***Cálculo de la atenuación del suelo para distancias largas***

Se supone que las condiciones atmosféricas son favorables, lo que significa que el rayo desde la fuente al receptor se curva hacia abajo, como se explicará más adelante. Al contrario que en el caso de la atenuación de suelo que se debía a la interferencia del rayo directo y reflejado, en este caso al estar el rayo curvado se asegura que la atenuación depende de las superficies en la zona de emisión y de recepción. Para distancias inferiores a 100 metros los resultados son similares a los anteriores por lo que se puede usar cualquiera de los dos métodos.

La superficie del suelo entre la fuente y el receptor se divide en tres zonas como se observa en la figura y a cada una de ellas se le asigna un factor de suelo.

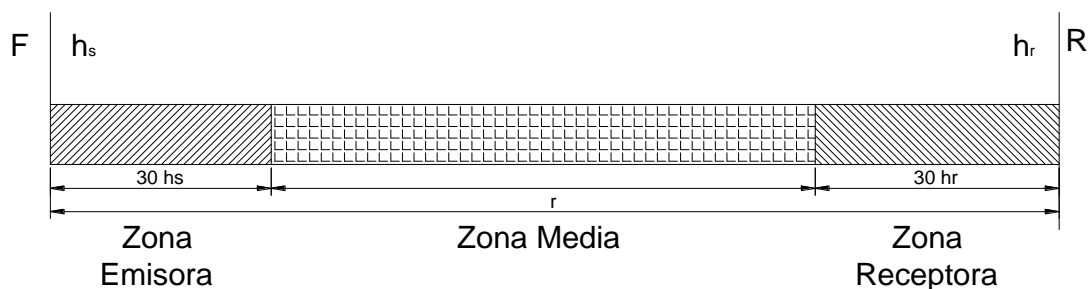


Figura 18. Esquema de división de zonas.

- La zona de la fuente o zona emisora, abarca una distancia de  $30 h_s$ , desde la altura de la fuente  $S$  hacia el receptor  $R$ , con un máximo de  $r$  (donde  $h_s$  es la altura de la fuente y  $r$  es la distancia entre fuente y receptor).
- La zona receptora abarca una distancia de  $30 h_r$ , desde el receptor hacia atrás, con un máximo de  $r$ , donde  $h_r$  es la altura del receptor.
- La zona media se sitúa entre las zonas de la fuente y del receptor. Si  $r < 30 \cdot (h_r + h_s)$  las zonas de la fuente y el receptor se solapan y no existe zona media.

El factor de suelo  $G$  de cada zona es  $G = 0$  en suelo duro,  $G = 1$  en suelo blando, y la proporción de suelo blando en suelos mixtos. No hay valor disponible para suelos muy blandos. Utilizando las tablas siguientes se calculan los factores  $A_s$  para la zona de la fuente,  $A_r$  para la zona del receptor y  $A_m$  para la zona media si es necesario, y se suman.

Frecuencia de banda de octava, Hz	$A_s$ o $A_r$ , dB	$A_m$ , dB
63	-1.5	-3·e
125	(a·G) - 1.5	-3·e·(1-G)
250	(b·G) - 1.5	-3·e·(1-G)
500	(c·G) - 1.5	-3·e·(1-G)
1000	(d·G) - 1.5	-3·e·(1-G)
2000	(1·G) - 1.5	-3·e·(1-G)
4000	(1·G) - 1.5	-3·e·(1-G)
8000	(1·G) - 1.5	-3·e·(1-G)

Tabla 5. Factores  $A_s$ ,  $A_r$  y  $A_m$  para diferentes frecuencias.

Distancia, m	Altura de la fuente o el receptor, m				
	0.5	1.5	3.0	6.0	>10.0
	Factor a				
50	1.7	2.0	2.7	3.2	1.6
100	1.9	2.2	3.2	3.8	1.6
200	2.3	2.7	3.6	4.1	1.6
500	4.6	4.5	4.6	4.3	1.6
>1000	7.0	6.6	5.7	4.4	1.7
	Factor b				
50	6.8	5.9	3.9	1.7	1.5
100	8.8	7.6	4.8	1.8	1.5
>200	9.8	8.4	5.3	1.8	1.5
	Factor c				
50	9.4	4.6	1.6	1.5	1.5
100	12.3	5.8	1.7	1.5	1.5
>200	13.8	6.5	1.7	1.5	1.5
	Factor d				
50	4.0	1.9	1.5	1.5	1.5
>100	5.0	2.1	1.5	1.5	1.5

Tabla 6. Factores a, b, c y d necesarios para cálculo de factores  $A_s$ ,  $A_r$  y  $A_m$ .

Los valores de los factores también se pueden obtener de estas fórmulas:

$$a(h) = 1.5 + 3.0 \cdot e^{-0.12 \cdot (h-5)^2} (1 - e^{-r/50}) + 5.7 \cdot e^{-0.09 \cdot h^2} (1 - e^{-2.8 \cdot 10^{-6} \cdot r^2})$$

$$b(h) = 1.5 + 8.6 \cdot e^{-0.09 \cdot h^2} (1 - e^{-r/50})$$

$$c(h) = 1.5 + 14.0 \cdot e^{-0.46 \cdot h^2} (1 - e^{-r/50})$$

$$d(h) = 1.5 + 5.0 \cdot e^{-0.09 \cdot h^2} (1 - e^{-r/50})$$

$$e = 0 \text{ si } r \leq 30 \cdot (h_s + h_r)$$

$$e = 1 - \frac{30 \cdot (h_s + h_r)}{r} \text{ si } r > 30 \cdot (h_s + h_r)$$

**Ángulos de rozamiento grandes.** Para ángulos de rozamiento superiores a 30°, que suelen presentarse habitualmente en distancias cortas, los suelos blandos y muy blandos se convierten en buenos reflectores del sonido. Por ello se debe utilizar los valores de las tablas para distancias cortas como si fuera suelo duro.

- **Otros tipos de atenuación ( $A_{misc}$ )**

En este término están incluidos términos que no siempre aparecen, y que entre otros se pueden destacar:

**Atenuación debida a la reflexión en los edificios ( $A_{refl}$ )**

Si existe una superficie lateral, como un muro o un edificio a lo largo del recorrido entre la fuente y el receptor, puede actuar igual que el efecto del suelo que se ha analizado anteriormente en  $A_{suelo}$ , tomando el edificio como suelo, con los siguientes condicionantes:

- La superficie ha de ser plana en el punto de reflexión, al menos para una distancia de una longitud de onda del componente de menor frecuencia del sonido en cuestión.
- $A_{refl}$  tendrá signo negativo, ya que la reflexión aumenta el nivel.
- Puede haber más de una superficie reflectante.

**Atenuación debida a la vegetación ( $A_{veget}$ )**

Los árboles y arbustos son malas barreras contra el ruido, porque como pantalla aportan poca atenuación. Si aportan al mantener el suelo poroso pero esto ya se ha considerado en  $A_{suelo}$ . Si la vegetación es densa, si que existe una atenuación, que puede variar a lo largo del año al perder los árboles las hojas. Si la vegetación es superior a 200 metros se consideran solo 200 m. A continuación se expone la tabla para calcular la atenuación.

Distancia de propagación. $10\text{ m} < d_r < 20\text{ m}$									
Frecuencia, Hz	31.5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000
$A_{veget.}$ , dB/m	0	0	0	1	1	1	1	2	3
Distancia de propagación. $20\text{ m} < d_r < 200\text{ m}$									
Frecuencia, Hz	31.5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000
$A_{veget.}$ , dB/m	0.02	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.08	0.09	0.12

Tabla 7. Atenuación debida a la vegetación.

Donde  $d_f = d_1 + d_2$ , se calcula según la figura con un radio de 5000 metros.

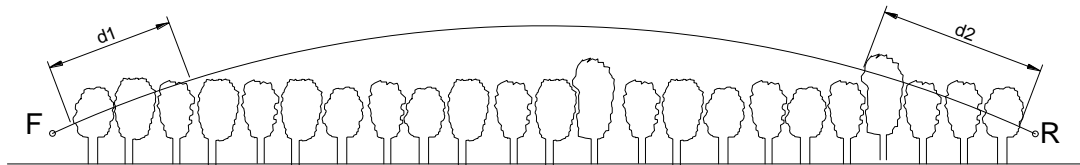


Figura 19. Cálculo de distancia para cálculo de atenuación por vegetación.

### **Atenuación en zonas edificadas ( $A_{casa}$ )**

El valor de la atenuación debido al paso del sonido entre áreas edificadas depende de  $B$  que es el porcentaje del área ocupada por la edificación y de  $s_b$  o camino recorrido por el sonido a través de la misma. El valor es independiente de la frecuencia y a menudo presenta desviaciones de hasta 10 dB.

$$A_{casa} = 0.1 \cdot B \cdot s_b$$

Su valor se compara con el de  $A_{suelo}$  y el menor de ellos se iguala a 0.

### **Efectos del viento y la temperatura**

La propagación del sonido para distancias inferiores a 100 m es independiente de las condiciones atmosféricas. Pero para distancias mayores aparece el fenómeno de la refracción. Durante el día, la temperatura del aire desciende regularmente al aumentar la altura por encima del suelo, lo que se denomina gradiente de temperatura. Por la noche es al contrario, debido a la radiación fría del suelo,

denominado inversión térmica. En las figuras siguientes se observa como en condiciones de gradiente de temperatura los rayos del sonido tienden a desviarse hacia arriba, creando zonas de sombra, donde se pueden alcanzar atenuaciones de hasta 20 dB. Por el contrario en condiciones de inversión térmica los rayos tienden a curvarse hacia el suelo, aumentando el sonido percibido.

El viento hace que los rayos se curven hacia arriba en la dirección contraria a su movimiento y hacia abajo en la dirección favorable, por lo que en caso de gradiente se acentúa el efecto sombra en la zona de dirección contraria al viento, y en caso de inversión térmica se acentúa el efecto de curvado hacia el suelo en la dirección favorable del viento aumentando el sonido percibido.

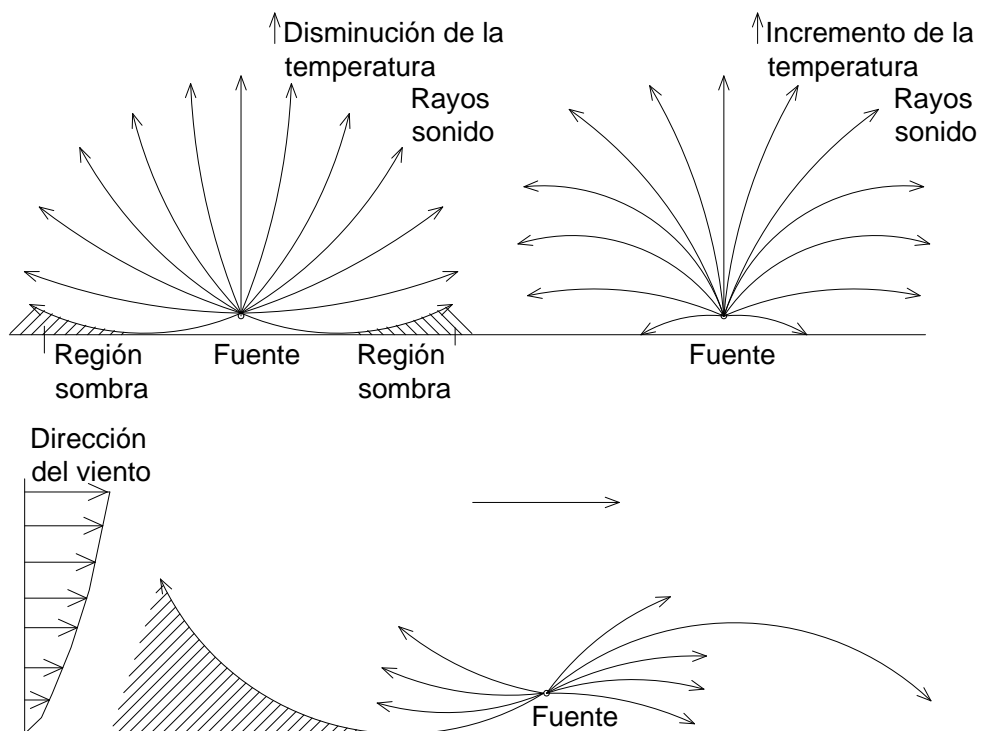


Figura 20. Efectos de la temperatura y viento sobre las ondas acústicas.

### 2.5.2. Cálculo de niveles sonoros

Primero es necesario recordar el concepto de banda de octava. Una banda de octava es cada una de las partes en las que se puede dividir todo el espectro de frecuencia,

estando definida por la frecuencia central  $f_c$  o por las frecuencias superior  $f_2$  e inferior  $f_1$ . Estos dos límites guardan una proporción entre ellos de  $f_2 / f_1 = 2$ . Por ejemplo, la banda de octava de 1000 Hz comprende las frecuencias de 707 a 1414 Hz. La frecuencia central  $f_c$  es la media geométrica de las dos frecuencias.  $f_c = \sqrt{f_1 \cdot f_2}$ .

Las frecuencias centrales de octavas adyacentes también están espaciadas en una relación de 2, como las octavas de 500 y 1000 Hz. Los centros de las bandas de octava están normalizados por el ISO a números redondeados como sigue:

Frecuencia inferior, $f_1$ , Hz	Frecuencia central, $f_c$ , Hz	Frecuencia superior, $f_2$ , Hz
22	31.5	44
44	63	88
88	125	176
176	250	355
355	500	710
710	1000	1420
1420	2000	2480
2480	4000	5680
5680	8000	11360
11360	16000	22720

Tabla 8. Bandas de octava.

También se pueden subdividir las bandas de octava en tercios de octava, que es útil para determinadas aplicaciones de audio en los que se necesite mayor precisión. La proporción en este caso es  $f_2 / f_1 = 2^{1/3}$ . Se puede consultar en la bibliografía las frecuencias centrales de las bandas de tercio de octava.

Una vez recordado el concepto de banda de octava, se puede calcular el nivel sonoro. Para obtenerlo, se calculan los valores de atenuación de los distintos mecanismos mediante los métodos descritos anteriormente para cada banda de octava.

Se suman para obtener la atenuación total para la banda de octava y entonces se le resta a  $L_w$ , nivel de potencia sonora efectivo de la fuente en esa banda de octava. Tras realizar el análisis para todas las bandas de octava, se realiza la combinación de todas las contribuciones. Si los mecanismos existentes no dependen de la frecuencia se puede hacer el estudio independientemente de la frecuencia

$$L_p = L_w - A_{total}$$



Para obtener el valor de una fuente se puede hacer de forma experimental, utilizando el método descrito pero de forma inversa, es decir, conociendo el valor en dB a una distancia de la fuente, se calcula la atenuación existente y se suma al valor medido, por lo que se obtiene el nivel de potencia sonora de emisión.

## 2.6. Pérdida por inserción de barreras ( $IL_{barrera}$ ).

La medida habitual de la eficacia acústica de una barrera es la pérdida por inserción. La pérdida por inserción de una barrera para una banda de octava, en un punto determinado, es la diferencia entre los niveles de presión sonora de la banda (medidos en ese punto) antes y después de la construcción de la barrera:

$$IL_{barrera} = L_{p(antes)} - L_{p(después)} \text{ dB}$$

Esta medida es de gran interés a la hora de la construcción de una barrera, evita la ambigüedad que surge, debido a que la barrera, además de introducir la atenuación debida a la difracción, también suele reducir la atenuación debida al suelo (al aumentar la altura del recorrido del rayo por encima del suelo). La pérdida por inserción varía dependiendo de distintos parámetros, sobre todo la frecuencia del sonido, por ejemplo las frecuencias más altas son más atenuadas.

A continuación se explican distintos métodos de cálculo de la pérdida por inserción de una pantalla desarrollados por Maekawa (1968 y 1990). También han sido consultadas otras referencias bibliográficas, en especial los trabajos que sobre pantallas ha elaborado el grupo de investigación de Pfretzschner J., Simón F., Moreno A., Colina C., Rodríguez R. de referencia en España. Las suposiciones que se han hecho salvo que se indique lo contrario, son, que la longitud de la pantalla es mucho mayor que su altura, el sonido emana de una fuente puntual y la pantalla no presenta ni grietas ni agujeros y su masa es al menos  $10 \text{ kg/m}^2$ .

En la figura siguiente se puede obtener la atenuación del ruido con precisión razonable, aunque los resultados generalmente tienen valores más bajos por unos

pocos decibelios que los obtenidos por la teoría aproximada de Kirchhoff que también se refleja en dicha figura.

En la región de  $N > 1$  la atenuación se puede expresar por:

Fuente puntual  $IL = 10 \cdot \log_{10}(3 + 20 \cdot N)$

Fuente lineal  $IL = 10 \cdot \log_{10}(2 + 5.5 \cdot N)$

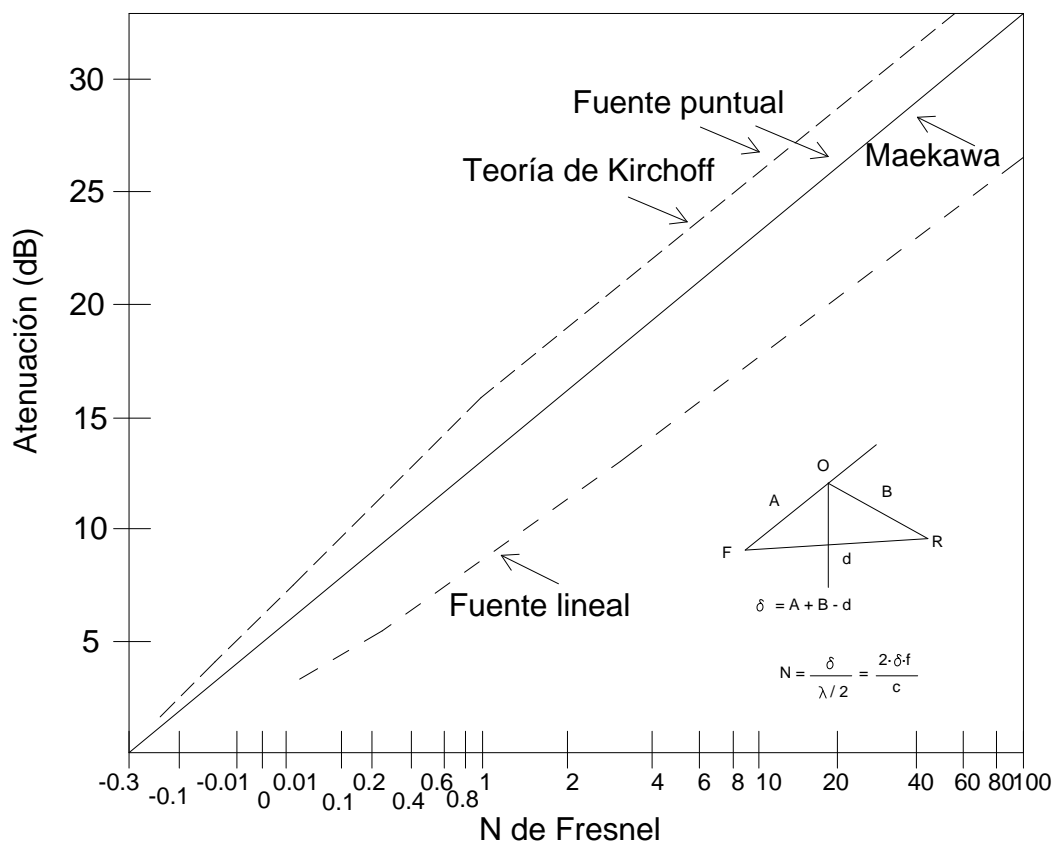


Figura 21. Cálculo de pérdida por inserción de pantallas. Ábaco de Maekawa.

Otra expresión para la fuente puntual es

$$IL = 5 + 20 \cdot \log_{10} \frac{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot N}}{\tanh \sqrt{2 \cdot \pi \cdot N}}$$

Para el rango entero de  $N$  se tiene la fórmula que aparece en la gráfica. La variable  $N$  se calcula con el valor de  $\delta$ , la diferencia de longitud recorrida la cual puede ser obtenida por geometría.

En dicha figura se muestra en escala horizontal, que es escala logarítmica, en la región de  $N > 1$ , ajustada para que la curva experimental se convierta en una línea recta continua en la región de  $N < 1$ . Dependiendo de si  $N < 0$  ó  $N > 0$ , el punto receptor  $P$  entra en la región “iluminada” o en la sombra geométrica, respectivamente. La atenuación es relativa a la propagación en el espacio libre.

La reducción sonora global se expresa por la siguiente fórmula:

$$IL_{global} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{n} \sum 10^{L_i/10} \right) - 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{n} \sum 10^{(L_i - IL_i)/10} \right)$$

Donde  $L_i$  es el nivel sonoro en cada banda de octava o de tercio de octava, e  $IL_i$  es la reducción sonora estimada por el método de Maekawa.

### Estimación simple del efecto de la reflexión del terreno.

En la siguiente figura se observa una pantalla WO que cuando está levantada en el terreno entre  $F$  y  $R$ , y las distancias entre ellos no son demasiado largas, como se muestra en la figura, el nivel de presión sonora en  $R$  puede ser predicho de acuerdo con el siguiente proceso:

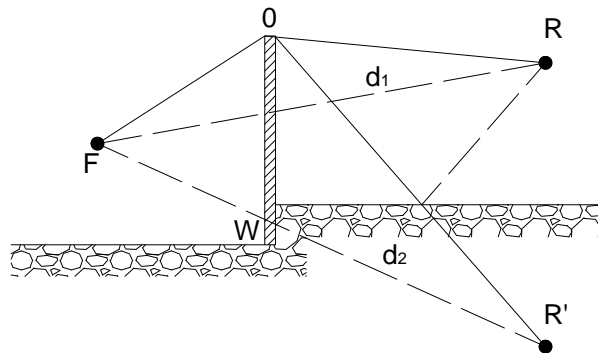


Figura 22. Sección de una pantalla entre una fuente F y un receptor R.

1º.- El nivel sonoro  $L_0$  en el extremo superior de la pantalla es asignado como el valor de referencia del nivel sonoro en cualquier punto de la zona de sombra de la pantalla. Por este procedimiento tanto la directividad de la fuente del ruido y la reflexión proveniente del terreno entre  $F$  y la pantalla pueden ser aproximadamente despreciables.

2º.- El efecto de la reflexión del terreno es calculado por la suma de la energía sonora recibida en  $R$  y  $R'$ , que es la imagen del receptor  $R$  asumiendo perfecta reflexión en el terreno y despreciando sus fases. Si la suma se expresa por  $L_3$ , el nivel sonoro en  $R$  con la pantalla se obtiene por

$$L = L_0 - 20 \cdot \log_{10} N - L_3$$

3º.- El efecto protector de la pantalla, sin embargo, debe ser obtenido por la expresión  $(L_r - L)$  dB, donde  $L$  es el valor calculado por el método mencionado anteriormente y  $L_r$  es el valor medido del nivel sonoro en el punto  $R$  cuando el muro no existe. Se le puede llamar la *pérdida por inserción de la pantalla*, y es variable dependiendo de la directividad de la fuente del sonido y la reflectividad del terreno.

#### Atenuación por una pantalla de tamaño finito.

Se observa en la figura la geometría del problema.

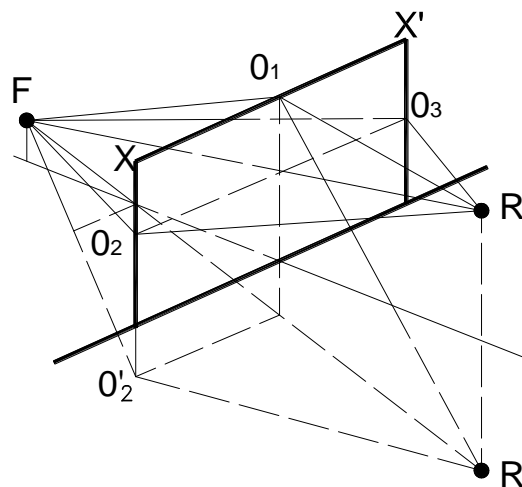


Figura 23. Propagación del sonido alrededor de una pantalla de tamaño finito.

Del mismo modo como se observó en la figura de la reflexión, la onda sonora reflejada por el terreno es calculada en el punto  $R'$ , la imagen del punto  $R$  considerando la reflexión del terreno. La energía sonora en el punto receptor  $R$  y en la imagen  $R'$  debería entonces ser añadida. Pero para las ondas que viajan por los laterales no se tiene en cuenta la reflexión en el suelo.

**Estimación simple para barreras de varios cuerpos.**

Hasta ahora, la pantalla se ha asumido con espesor cero. Las barreras, sin embargo, tienen su propio cuerpo como se muestra en la siguiente figura. Como primera aproximación para calcular la reducción del ruido, se pueden usar los métodos anteriores pero con la fórmula  $IL = 10 \cdot \log_{10}(3 + 10 \cdot N \cdot T)$ , y con el valor de la diferencia de caminos,  $\delta = FO + OR - FR$  o  $\delta = FX + XY + YR - FR$  y  $T$  comprendido entre 1 y 2. Este es el método más simple aunque hay otros métodos.

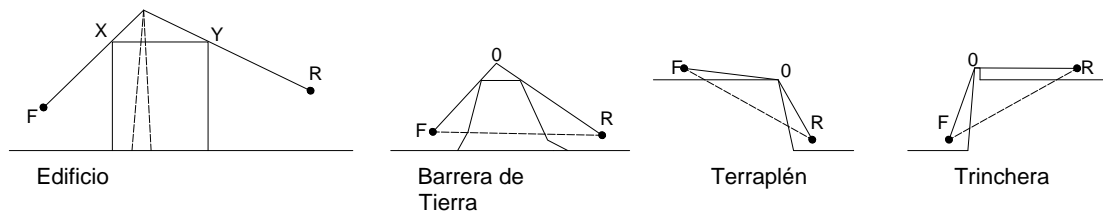


Figura 24. Diferentes tipos de barreras y caminos para el cálculo.

**Atenuación para pantallas gruesas**

De acuerdo a muchos datos experimentales, el efecto del grosor de una pantalla debería ser despreciable cuando la longitud del grosor es menor que la longitud de onda. Una gruesa lámina o pantalla ancha tiene dos aristas las cuales pueden incrementar la reducción del ruido con difracciones dobles.

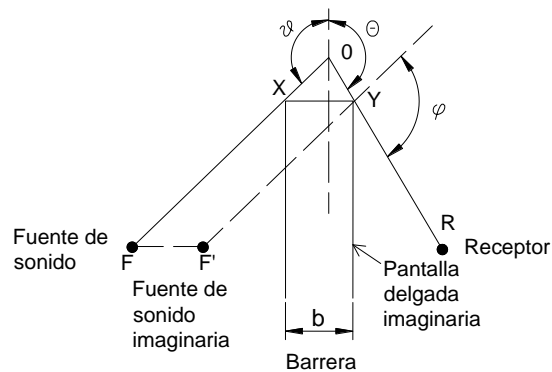


Figura 25. Geometría de una pantalla gruesa y una pantalla delgada imaginaria.

La atenuación del ruido con una pantalla gruesa se asume que se compone de la suma de la atenuación de una pantalla delgada imaginaria y el efecto del grosor de la pantalla. La figura muestra la geometría de una pantalla gruesa y una pantalla delgada imaginaria.  $F$  y  $R$  son las fuentes de sonido y el punto receptor,

respectivamente,  $FO$  es paralelo a  $F'Y$  y  $FF'$  es paralelo a  $XY$ . La pantalla delgada sería la del recorrido  $F'YR$  y se calcularía con los métodos anteriores.

El efecto del grosor de la pantalla se puede obtener de  $K \cdot \log(kb)$  obteniéndose  $K$  de la siguiente figura

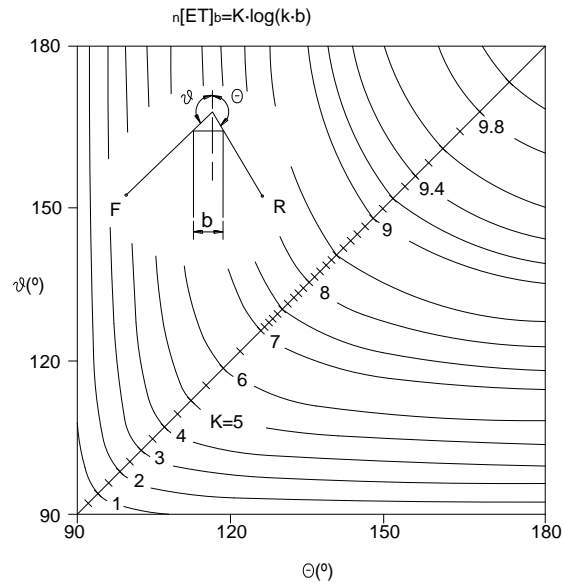


Figura 26. Valores de  $K$  para el cálculo del efecto de una pantalla gruesa.

### Atenuación por el efecto cuña

El efecto cuña que podría asimilarse al efecto de un terraplén, al igual que en el estudio de una pantalla gruesa, se va a proceder a analizarlo añadiendo al efecto de una pantalla delgada el efecto de la cuña. Este efecto es una función no solo del ángulo de la cuña  $\Omega$  y del ángulo de la fuente  $\theta$  sino también del ángulo de la difracción  $\varphi$ .

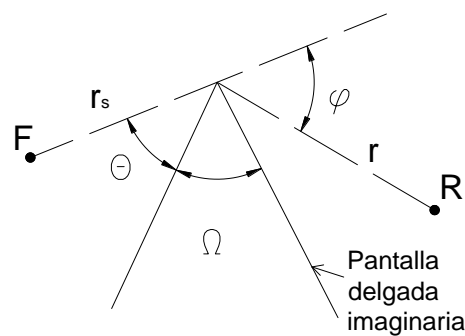


Figura 27. Notaciones de la difracción de una cuña.

Pero el efecto de  $\varphi$  puede ser despreciado, y los valores de las curvas muestran valores del lado de la seguridad. Está claro que la cuña disminuye la atenuación de la pantalla desde la pantalla delgada pero no por encima de  $-6$  dB y desaparece cuando  $\Omega = 0$ .

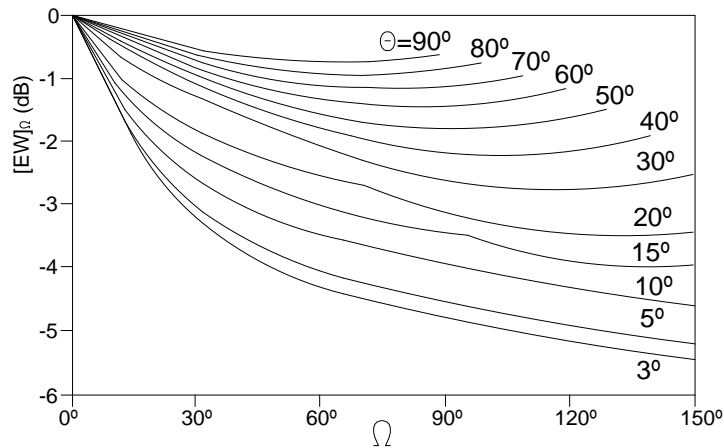


Figura 28. Efectos del ángulo en cuña  $\Omega$  con un parámetro de ángulo de la fuente  $\theta$ .

### Atenuación por pantallas absorbentes

Todas las pantallas estudiadas hasta ahora se han supuesto con superficie rígida. Pero son muy usadas las pantallas tratadas con materiales absorbentes. El efecto de la absorción de la superficie de una pantalla semiinfinita viene dado por la teoría exacta de la difracción. El resultado teórico, simplificando alguna condición, se muestra en la siguiente figura. El efecto de la absorción de la superficie es una función del ángulo de difracción, y del coeficiente de reflexión de la superficie de la pantalla.

Se puede estimar el efecto rápidamente añadiendo el valor de la siguiente figura al valor de atenuación de la pantalla reflexiva. Se ofrecen valores para el caso de fuente puntual y para fuente lineal, en función del coeficiente de reflexión para la presión sonora.

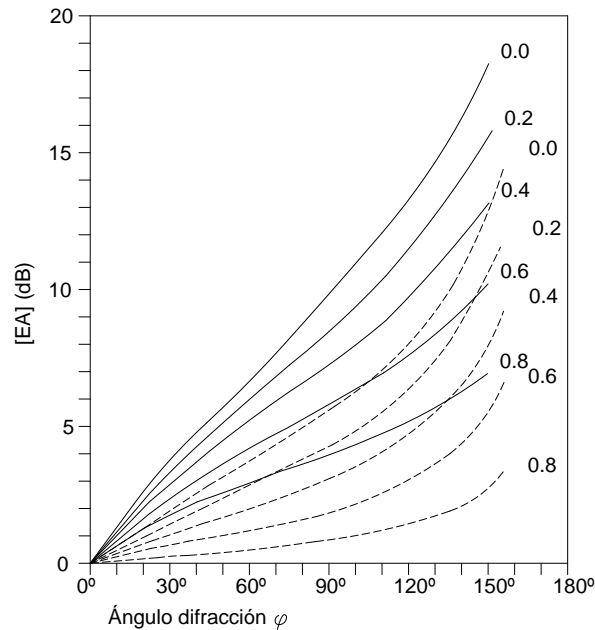


Figura 29. Efecto de la absorción de la superficie de una pantalla calculada como pantalla delgada semiinfinita. Las líneas de puntos corresponden a fuente puntual y las continuas a fuente lineal, en función del coeficiente de reflexión.

Para una fuente sonora de gran extensión es más complicado obtener la solución teórica del problema porque el frente de ondas de una fuente extensa no puede ser expresado exactamente.

Existe un método convencional, sin embargo, si la fuente extensa puede ser reemplazada por una o más fuentes puntuales. Cuando los ruidos son emitidos incoherentemente por fuentes puntuales virtuales, la energía sonora recibida de cada fuente puntual, obtenidas como se ha mencionado anteriormente, deberían ser sumadas juntas en el punto receptor.



### **3. ESTUDIO DEL RUIDO PRODUCIDO POR EL FERROCARRIL.**

El ferrocarril se ha convertido en un medio de transporte fundamental para la mayor parte de los países desarrollados y para muchos en vías de desarrollo. El ferrocarril es un medio de transporte de mercancías y de pasajeros, tanto entre ciudades como metropolitano, cada uno con una generación de ruido muy característica, como en este apartado se indicará. Entre los trenes que circulan por áreas urbanas destacan los *metropolitanos, tranvías y cercanías* y entre ciudades los *trenes de Alta Velocidad, los trenes convencionales de pasajeros y trenes de mercancías*.

Para la redacción de este capítulo se han seguido principalmente los excelentes trabajos de Perera Melero P. (1992) y Thompson D. (2009) aportando muchos de los gráficos, datos y explicaciones, que se han complementado con otros autores de la bibliografía, como Alegre D.M. et al., (1989) y Faus L. et al. (2003), entre otros.

#### **3.1. Caracterización del ruido ferroviario.**

El ruido producido por los trenes se caracteriza por la firma acústica y por la directividad.

##### ***Firma acústica***

En las imágenes, denominadas “firma acústica” se observa la gran diferencia entre estos dos trenes. En los primeros el ruido procede de un tren con cuatro coches autopropulsados por lo que el pico de ruido es similar para cada uno de ellos. Por el contrario en el segundo existen dos locomotoras, una en cabeza y otra en cola, y siete coches remolcados. Los picos de menor tamaño corresponden a irregularidades de la vía y a resonancias de la carrocería. El nivel máximo alcanzado depende del tipo de tren, de la vía y de la distancia, entre otros factores. No obstante todas las firmas acústicas se caracterizan por una forma trapezoidal, compuestas de una parte ascendente, una meseta y una parte descendente.

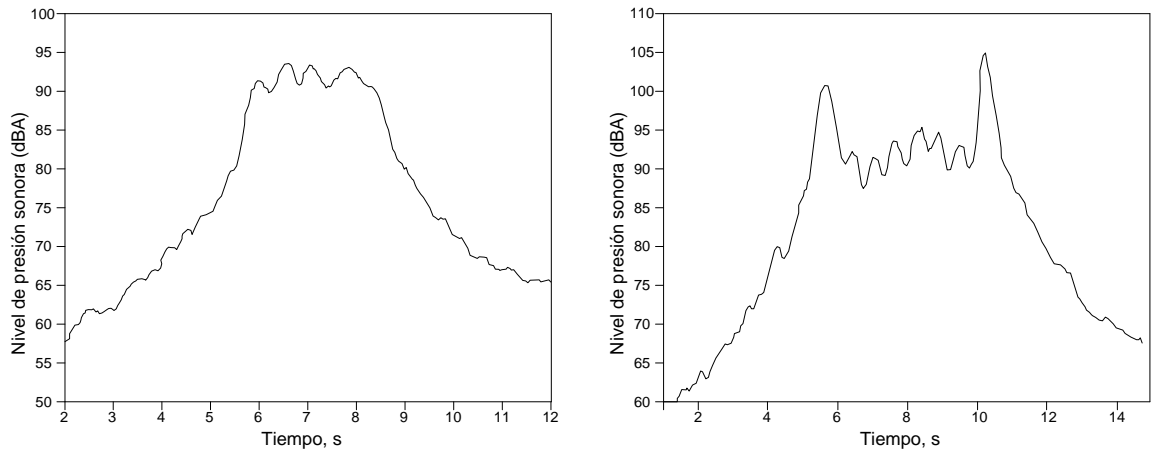


Figura 30. Firma acústica producida por dos trenes diferentes.

La parte ascendente presenta una mayor pendiente a mayor velocidad del tren y a menor distancia a la vía.

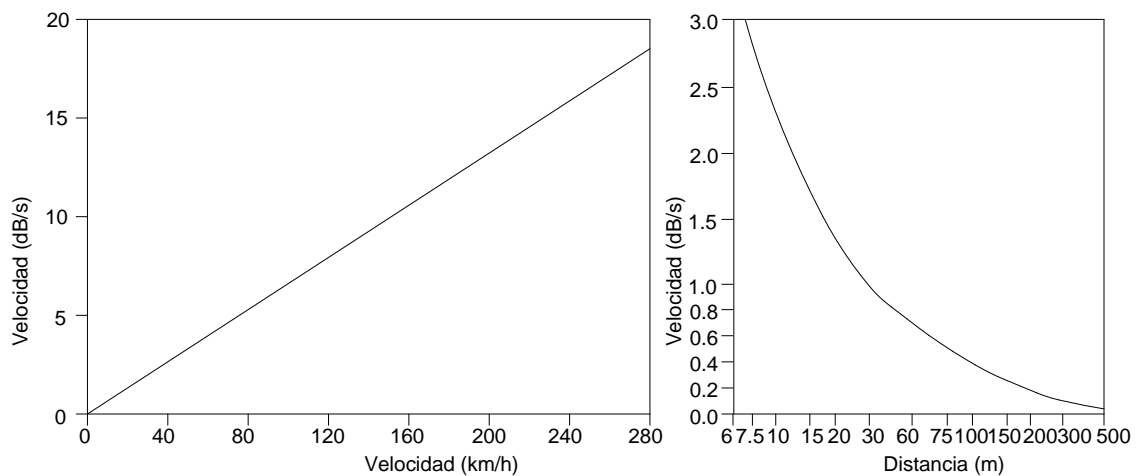


Figura 31. Variación de la velocidad de aumento del nivel sonoro, en función de la velocidad del tren a 30 m de distancia y de la distancia a la vía.

La parte descendente representa la disminución del ruido al alejarse el tren del punto de observación. La velocidad de disminución es más lenta que la de crecimiento debido al efecto Doppler-Fizeau, que depende de la relación entre las frecuencias del ruido y la velocidad del móvil.

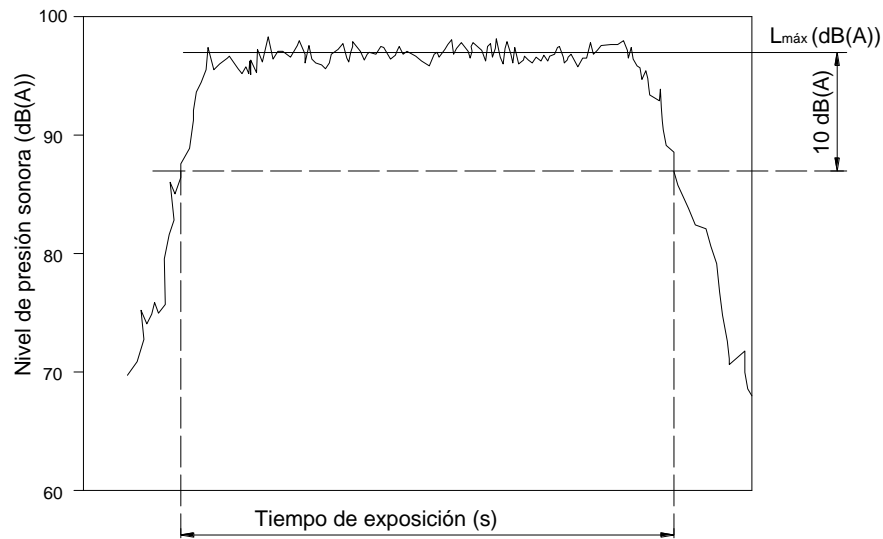


Figura 32. Tiempo de exposición al ruido de un tren.

Los parámetros característicos del ruido son:

- El nivel sonoro máximo,  $L_{máx}$ , en dB(A).
- La duración o tiempo de exposición,  $t_e$ , que se define generalmente como el tiempo transcurrido entre los dos puntos  $L_{máx} - 10$  dB(A) (ver figura anterior). Matemáticamente, se puede expresar el tiempo de exposición mediante la expresión (Alegre et al., 1989), (Faus et al., 2003):

$$t_e(s) = \frac{L}{V} + 6 \cdot \frac{d}{100}$$

siendo  $L$  la longitud del tren en m,  $V$  la velocidad en m/s y  $d$  la distancia de la vía al punto de observación en m.

- El nivel sonoro continuo equivalente,  $L_{eqT}$  en dB(A), que caracteriza la energía sonora debida al paso del tren recibida en el punto de observación durante el tiempo  $T$ . Se expresa por la fórmula (Alegre et al., 1989):

$$L_{eqT} = L_{máx} + 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{t_e}{T} \right)$$

- La pendiente del crecimiento del ruido, en dB/s, que puede ser muy importante a grandes velocidades (del orden de 20 dB/s).
- La pendiente de la disminución del ruido, en dB/s; que puede prolongarse durante mucho tiempo.

- Los niveles de ruido aumentan con la velocidad del tren, siendo proporcional al logaritmo de la velocidad

$$L_P = L_{P_0} + N \cdot \log_{10} \left( \frac{V}{V_0} \right)$$

Donde  $L_{P_0}$  es el nivel de sonido a la velocidad de referencia  $V_0$ . Los valores de  $N$  se obtienen de la recta de regresión de medidas experimentales, oscilando entre 25 y 35, siendo un valor típico 30 (Alegre et al., 1989), (Faus et al., 2003). Esto significa que para un aumento de velocidad del doble, el incremento es de 8 a 10 dB.

En la siguiente figura se aprecia las diferencias entre distintos trenes, siendo como se observa muy importante el sistema de frenado. Se observa como los trenes con frenos de tipo zapata emiten un ruido mucho mayor que el resto. También se observa cómo a partir de 300 km/h el ruido aerodinámico es el dominante. Más adelante se explicará esto con mayor detenimiento.

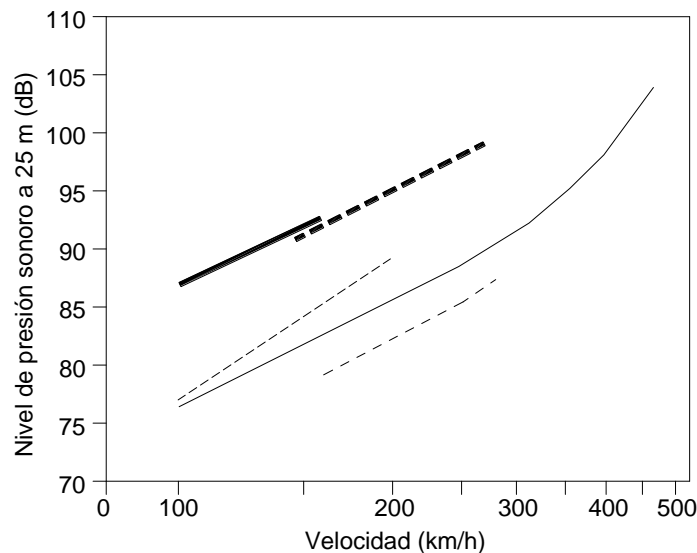


Figura 33. Tren con frenos de zapata en la rodadura. Línea continua y discontinua gruesa. Resto frenos de disco

### **Directividad**

Un tren no emite ruido en todas las direcciones por igual, sino que existen diferencias de emisión hacia uno y otro lado de la fuente sonora, tanto en un plano vertical como

en uno horizontal. En la siguiente figura se representa la directividad de emisión vertical de dos tipos de trenes, de viajeros y de mercancías. Se observa fundamentalmente que, más allá de un ángulo del orden de 25 a 30 grados con respecto a la horizontal, los niveles de ruido disminuyen muy rápidamente, lo cual es debido al apantallamiento de la fuente de ruido de rodadura por la carrocería del tren.

Por lo tanto el ruido emitido por un tren de viajeros se atenúa más rápidamente con la distancia que el de un tren de mercancías, debido a que las fuentes principales están más bajas con respecto al suelo en el primer caso que en el segundo (hay fuentes de ruido importantes correspondientes a la vibración de la carrocería de los vagones medio vacíos en este caso), y el efecto de la difracción y absorción sonoras en el balasto es más importante cuanto más cerca están las fuentes. Tampoco es simétrica a un lado y otro del vehículo, pues en el lado de la derecha existe una absorción suplementaria debida al balasto de la otra vía.

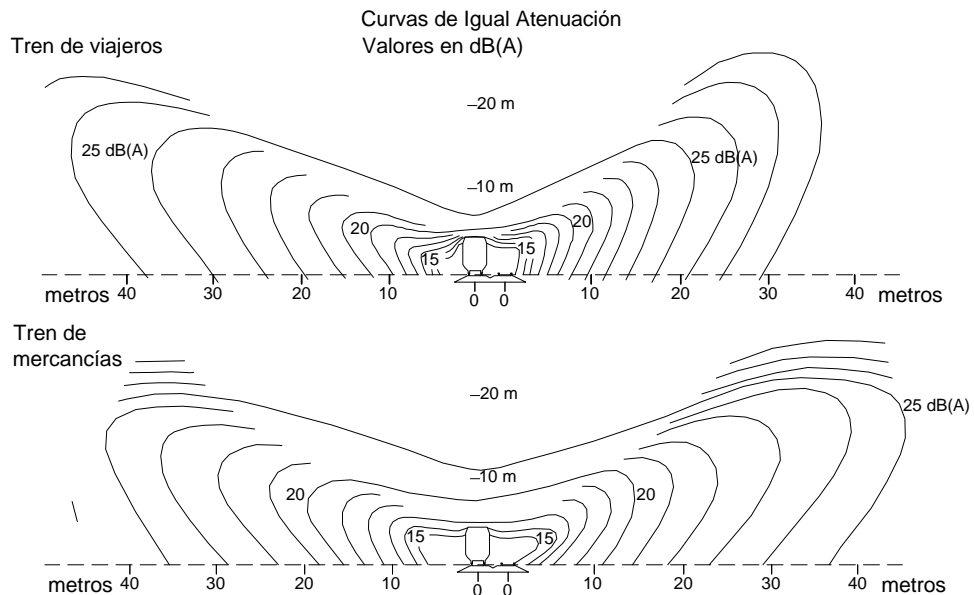


Figura 34. Directividad vertical para dos tipos de trenes.

En la figura siguiente se representa la directividad horizontal en la propagación del ruido de un tren; se puede ver que hacia delante las curvas se comprimen, mientras que hacia atrás son equidistantes y siguen aproximadamente el contorno del tren.

Ello confirma el hecho corriente de que se oye menos el tren cuando se aproxima porque el ruido se propaga mal hacia adelante.

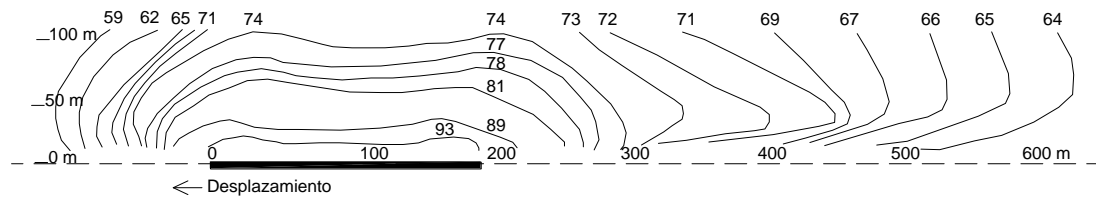


Figura 35. Directividad horizontal del ruido emitido por un tren.

### ***Frecuencia***

A continuación se muestran los espectros de frecuencia de dos trenes, en línea continua con frenos de zapatas y en línea de trazos con frenos de disco. En el primer gráfico se midió sobre carriles en buenas condiciones, y en la segunda con carriles con desgaste ondulatorio.

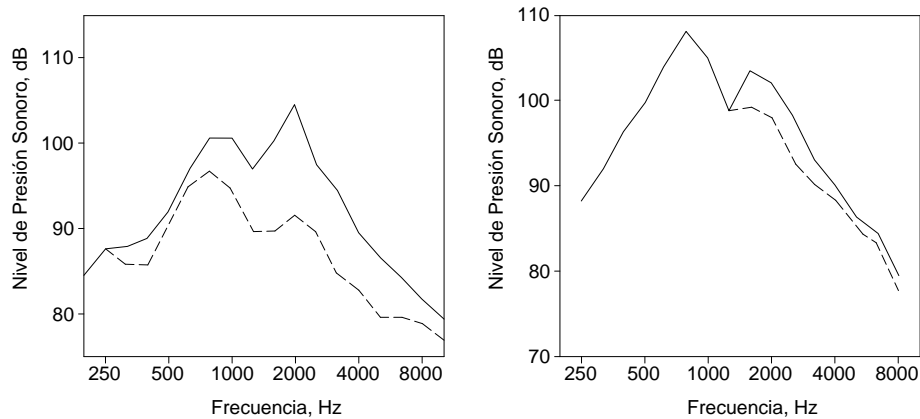


Figura 36. Espectro de frecuencia de dos trenes con sistemas de frenado distintos en diferentes vías a 160 km/h.

Se observa que aunque el ruido abarca todo el espectro, existe un nivel máximo entre 1 kHz y 2 kHz. En la vía con desgaste ondulatorio se observa un pico a 800 Hz que coincide con el del desgaste del carril.

La siguiente figura muestra el espectro del ruido producido por un tren TGV a diferentes velocidades.

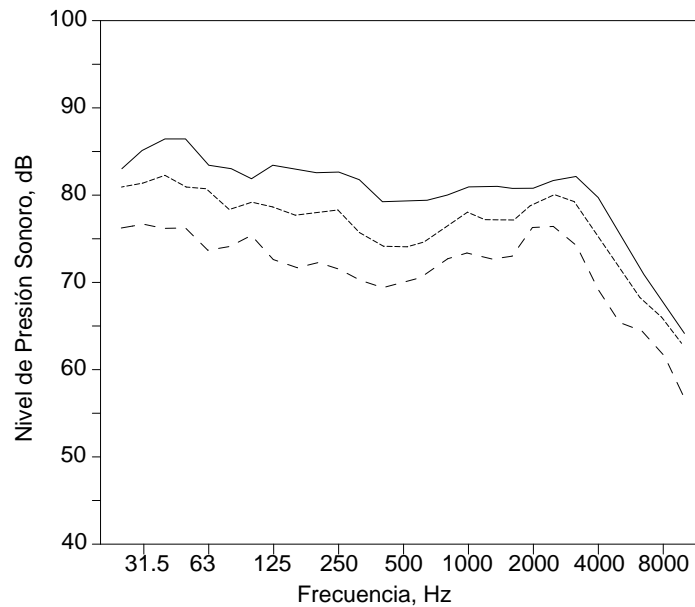


Figura 37. Espectro de presión de sonido a 25 metros de la vía, para un TGV Dúplex a 200 Km/h, a 250 km/h y a 300 km/h.

Se observa un desplazamiento de los picos hacia frecuencias más altas cuando aumenta la velocidad.

### 3.2. Modelos de predicción de ruido de ferrocarril

El ruido producido por el ferrocarril depende fundamentalmente de cuatro factores (Faus et al, 2003):

- Tipo de tren, que produce un nivel  $L_0$  a la velocidad  $V_0$  a la distancia  $d_0$ .
- Velocidad  $V$  (km/h).
- Distancia  $d$  (m).
- Directividad

El procedimiento más utilizado para la predicción de niveles sonoros producidos por un tren está basado en la corrección de niveles de referencia, que consiste en fijar unos niveles base para cada modelo de tren, y posteriormente corregirlo en función del caso concreto en estudio.

***Niveles de referencia***

Resulta complicado definir un nivel de ruido emitido por un tipo de tren, debido a la dispersión de valores que, para una determinada velocidad y con material móvil del mismo tipo, aparece debido al estado de la vía y de los trenes, las oscilaciones rondan los  $\pm 5$  dB(A).

Como ejemplo se pueden ver los valores de la tabla siguiente definidos en campo libre para una vía a nivel del suelo y en buen estado de conservación según la SNCF (Faus et al, 2003) (Ministère de l'environnement, 1980):

Material	Velocidad (km/h)	Niveles de referencia $L_0$ =dB(A)		
		$d_0 = 7.5$ m	$d_0 = 15$ m	$d_0 = 25$ m
Largo recorrido	200	104	100	97
Largo recorrido	140	97	94	92
Tren correo	100	96	92	89
Mercancías	80	93	89	86
Máquinas aisladas o automotores tipo ETG	120	92	88	85
o RTG	155	96	93	91
TGV	270	105	100	97

Tabla 9. Niveles de referencia  $L_0$  para algunos trenes a diferentes velocidades.

***Influencia de la velocidad***

La energía sonora emitida por un tren aumenta con la velocidad de éste, pudiéndose comprobar que varía con el cubo de la velocidad. Ello se puede expresar mediante la fórmula que se representa en la siguiente figura:

$$L_i = L_0 + n \cdot \log_{10} \frac{V_i}{V_0}$$

Donde  $n = 30$  para ruido de rodadura y  $n = 60$  para ruido aerodinámico

Por ejemplo, si  $V_i = 2 \cdot V_0$ ,  $L_i = L_0 + 9$  dB(A)



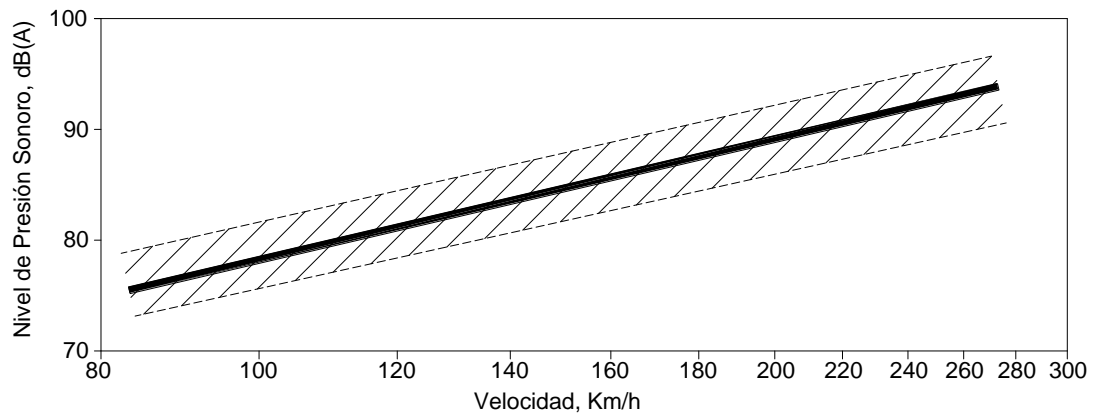


Figura 38. Variación de  $L_{m\acute{a}x}$  en función de la velocidad, a 50 m de la vía

En el campo de la frecuencia, los niveles varían, en función de la velocidad, de forma distinta. En la siguiente figura, y para un tren de Alta Velocidad TGV, se presenta la evolución de las componentes de alta y baja frecuencia; se observa que las frecuencias medias (del orden de 500 Hz), no se modifican.

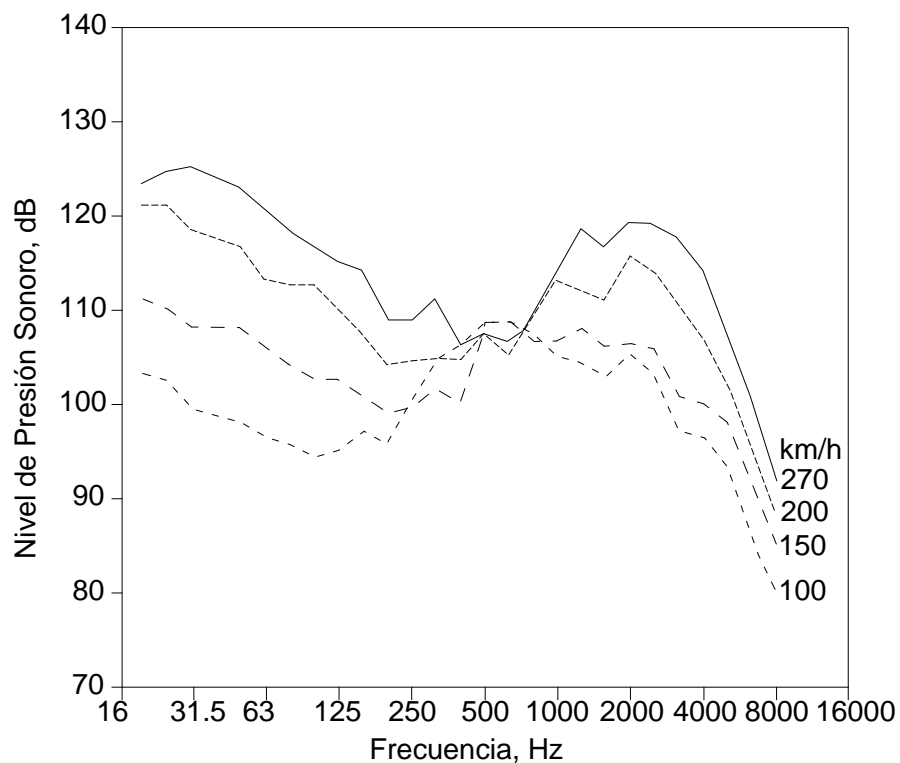


Figura 39. Variación del espectro en frecuencias del ruido en un TGV (medido entre los carriles), en función de la velocidad.

### *Influencia de la distancia*

La composición de un tren es muy variable, pudiéndose tratar desde una sola máquina hasta de un convoy de mercancías de más de 40 vagones, con una o varias máquinas. Por lo tanto, la propagación de la perturbación originada puede estar entre dos modelos teóricos extremos correspondientes a la fuente puntual o la fuente lineal que ya se han explicado anteriormente en el apartado del cálculo de la atenuación.

Si se incluye, para simplificar, en un solo coeficiente  $K_e$  los elementos geométricos de la atenuación (relacionados con la longitud y tipo del tren) y los de absorción en el aire, desglosados en apartados anteriores se encuentra la siguiente ley de propagación para el ruido de un tren dotado de una velocidad  $V_0$ , con  $10 < K_e < 20$  (Faus et al., 2003)

$$L = L_0 - K_e \cdot \log_{10} \frac{d}{d_0}$$

En la siguiente figura se presentan espectros en frecuencia, para un análisis en bandas de 1/3 de octava, del ruido de un TGV circulando a 270 km/h, a distintas distancias.

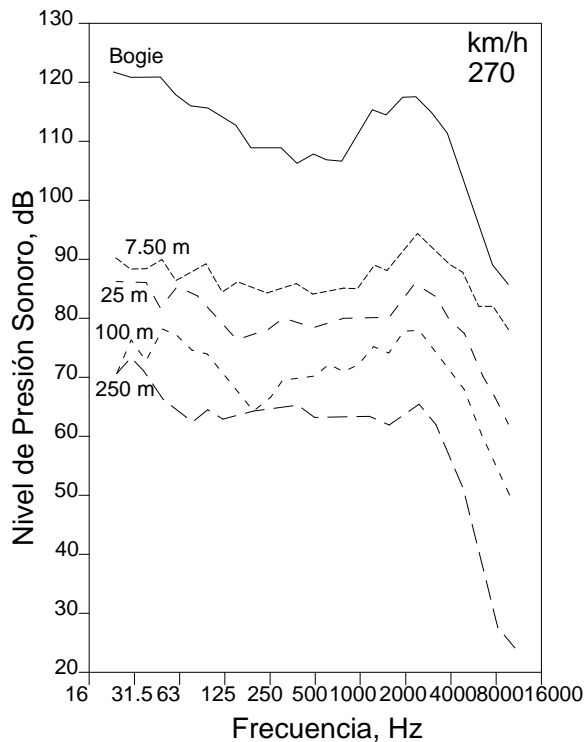


Figura 40. Espectros del ruido de un tren TGV a distintas distancias de la vía

### **Directividad**

El efecto de la directividad se manifiesta para valores del ángulo de observación respecto al suelo, mayores de 30°, debido al efecto de apantallamiento producido por la carrocería del vehículo. En la siguiente figura se presenta un ábaco para la corrección por directividad vertical, en función del ángulo de observación y de la distancia.

Respecto a la directividad horizontal, se toma en cuenta a la hora de calcular el tiempo de exposición al ruido del paso de un tren, pero, al ser las líneas de igual nivel, en primera aproximación, paralelas a la vía, no tiene efecto sobre el nivel máximo.

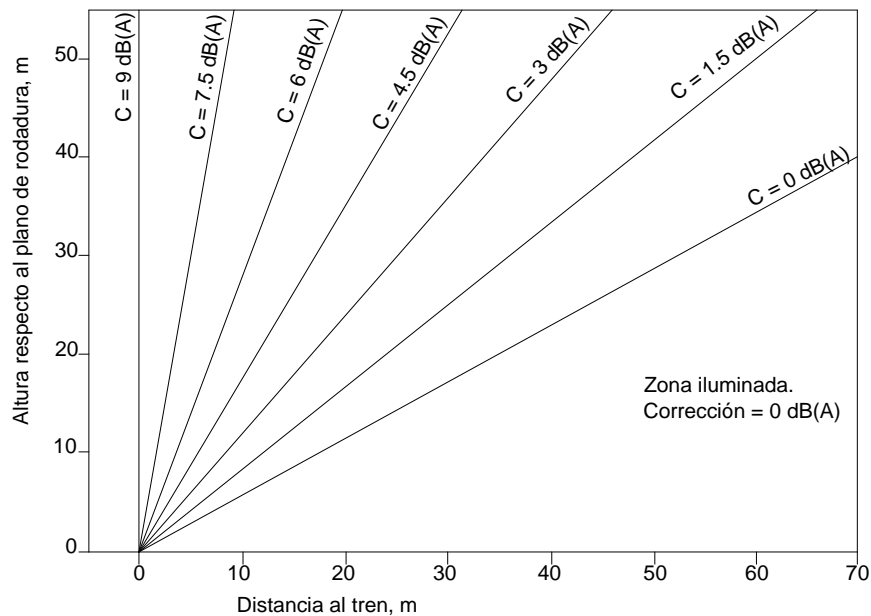


Figura 41. Corrección para el nivel sonoro por efecto de la directividad local.

### **Modelo de previsión del nivel de ruido máximo, $L_{Am\acute{a}x}$ producido por el paso de un tren**

Como resumen de lo anterior, el nivel máximo del ruido producido por el paso de un tren de un tipo determinado, con velocidad  $V$ , a una distancia  $d$ , viene dado por (Faus et al., 2003):

$$L_{Am\acute{a}x} = L_0 - K_e \cdot \log_{10} \frac{d}{d_0} + n \cdot \log_{10} \frac{V}{V_0} - K_d$$

siendo  $L_0$ ,  $d_0$  y  $V_0$  los parámetros que caracterizan las condiciones de referencia para ese tipo de tren,  $n$  es el coeficiente para el tipo de ruido y  $K_d$  y  $K_e$  los coeficientes correctores definidos anteriormente para la directividad y la distancia. Esta expresión se aplica satisfactoriamente hasta distancias del orden de 250 m de la vía, en campo libre, para velocidades superiores a 40 km/h sobre carriles largos soldados colocados sobre traviesas de hormigón y sujeciones clásicas.

### ***Modelo de previsión del ruido de tráfico ferroviario, $L_{Aeq}$***

Ya se ha explicado en puntos anteriores que conocer el nivel máximo de ruido producido por el paso de los trenes no es suficiente para caracterizar su impacto ambiental; dos trenes pueden producir un mismo nivel máximo, pero su tiempo de paso puede ser muy diferente, luego la energía acústica que recibe un observador será distinta, es decir, el nivel sonoro continuo equivalente,  $L_{Aeq}$ , será diferente. Su expresión matemática es

$$L_{Aeq}(T) = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{T} \sum 10^{L_i/10} \cdot t_i \right)$$

donde:

$T = \sum t_i$  = tiempo de exposición

$L_i$  = nivel de presión sonora constante en el intervalo  $i$

$t_i$  = tiempo del intervalo  $i$  correspondiente al nivel  $L_i$

Para el paso de un tren el tiempo de exposición se puede estimar como  $t_e = \frac{1}{V} + \frac{6 \cdot d}{100}$

Por tanto, en campo libre, el nivel sonoro equivalente para el paso de un tren es:

$$L_{AeqT} = L_{m\acute{a}x} + 10 \cdot \log_{10} \frac{t_e}{T}$$

### ***Influencia de la distancia y la velocidad***

La expresión anterior tiene en cuenta las variaciones de  $L_{Aeq}$  en función de la distancia a la vía y la velocidad, ya que intervienen tanto en el cálculo de  $L_{Am\acute{a}x}$  como en el del tiempo de exposición. Por lo tanto es una fórmula general que permite

conocer el nivel sonoro continuo equivalente para cualquier tipo de tren a cualquier distancia de la vía.

### ***Determinación de $L_{Aeq}$ para el conjunto del tráfico ferroviario***

Con la expresión anterior para  $L_{AeqT}$ , se ha calculado el nivel sonoro continuo equivalente durante un periodo  $T$ . Si este intervalo es, por ejemplo, una hora:

$$L_{Aeq(1h)} = L_{Amáx} + 10 \cdot \log_{10} \frac{t_e}{3600} = L_{Amáx} + 10 \cdot \log_{10} t_e - 35.5 \text{ dBA}$$

En el caso general en que circulan  $n_i$  trenes idénticos durante el periodo  $T$ :

$$L_{Aeq} = L_{Amáx} + 10 \cdot \log_{10} \frac{t_e}{T} + 10 \cdot \log_{10} n_i \text{ dBA}$$

Para el caso de  $i$  trenes de  $j$  distintos tipos, el nivel sonoro continuo equivalente total es de la forma:

$$L_{Aeq} = 10 \cdot \log_{10} \sum_{i=1}^{i=j} 10^{\frac{L_{eq,i}}{10}} \text{ dBA}$$

### **3.3. Fuentes de ruido en los sistemas ferroviarios.**

Las fuentes de ruido principales son según Harris C.M. (1995), Thompson D. (2009), Krylov V.V. (2001) y otros autores recogidos en la bibliografía:

- Fuentes ligadas a la rodadura.
  - conjunto rueda – carril.
  - disposición de las vías (traviesas y soportes) y su conjunto de aparatos de vía.
  - obras civiles.
  - bogies, que según sea su diseño pueden ser muy ruidosos.
  - carrocería, que, sobre todo en el caso de vagones de mercancías sin carga completa, pueden ser fuentes muy importantes de ruido.
- Sistema de propulsión de coches y locomotoras, cuyo ruido predomina a bajas velocidades.
- Equipamiento auxiliar.

- En el caso de trenes de Alta Velocidad, el ruido aerodinámico.

Estas fuentes de ruido se caracterizan normalmente por los niveles de presión sonora equivalente a una distancia determinada de la vía y a una altura concreta sobre el terreno. De los trabajos de estos autores comentados se extrae la información que se recoge a continuación.

### **3.3.1. Fuentes ligadas a la rodadura.**

#### ***El conjunto rueda – carril***

La rodadura de una rueda sobre un soporte engendra ruido, sobre todo en el caso de una rueda de acero rodando sobre un carril de acero. Destacan tres fenómenos:

- el desgaste de carril y rueda, debida al desgaste localizado de ambos elementos, para el carril, se trata de una ondulación; para la rueda, de planos de la banda de rodadura producidos por ejemplo por frenadas del vehículo.
- impulsos verticales, debidos a las juntas entre carriles, si existieran y el conjunto de aparatos de vía, como los desvíos.
- aparición de deslizamientos entre carril y rueda que pueden ser provocadas por deslizar la rueda sin rodar sobre el carril, o por rozar la pestaña con el carril. Estos deslizamientos y roces, a baja velocidad, pueden provocar chirridos de alta frecuencia en curvas de radio de curvatura pequeño.

#### ***Disposición de las vías, traviesas y soportes. Conjunto de aparatos de vía.***

Las vías de tren son sistemas montados sobre balasto o soportados. Los tipos más normales son:

- sistema clásico, vías fijadas sobre traviesas de madera u hormigón mediante grapas, y colocadas sobre un lecho de balasto; en general, este conjunto constituye una elevación sobre el nivel del suelo.
- vías tendidas directamente sobre una placa metálica (en puentes y viaductos).
- sistema con carriles fijados, directamente o mediante sujeciones especiales, sobre una placa rígida de hormigón, que a su vez reposa sobre una plataforma a través de soportes absorbentes.

Este último sistema, si bien mucho más caro, es más eficaz desde el punto de vista de la amortiguación de las vibraciones del carril, pero se debe cuidar el apoyo entre placa y plataforma porque se corre el riesgo de aumentar la transmisión de las vibraciones al suelo. Por lo tanto es más propio hablar de radiación del conjunto de la vía, que de solamente de radiación del carril.

En la tabla siguiente se indican las variaciones del nivel de ruido emitido por distintos sistemas, respecto a una vía compuesta por carriles de gran longitud soldados, colocados sobre traviesas de hormigón y balasto.

Disposición de la vía	Variación, dB(A)
Carriles largos soldados (BLS) + traviesas de hormigón + balasto	Referencia, mínimo
BLS + traviesas madera + balasto	+3
Carriles normales + traviesas madera + balasto	+6
BLS sobre placa (colocación directa)	+7 a +10

Tabla 10. Aumento de nivel de referencia para distintos tipos de vía.

El conjunto de aparatos de las vías, generalmente los desvíos, así como los espacios entre carriles, si existieran, producen impactos verticales que excitan la rueda y el carril, y provocan además, ruido de choque y vibración de estos elementos. A continuación se aporta otra tabla en la que se muestra el aumento producido por diversos defectos de la vía o de elementos del material móvil.

Condición más ruidosa / Condición menos ruidosa	Diferencia típica (y rango) en dB(A)
Carril soldado sin tratamiento / Carril soldado amolado liso	4 (3 – 6)
Ruedas sin tratamiento / Ruedas rectificadas lisas	5 (3 – 10)
Carril con desgaste ondulatorio / Carril sin ondulaciones	10 (5 – 15)
Ruedas con zonas planas / Ruedas rectificadas lisas	12 (7 – 15)
Carriles sin soldar / Carriles soldados	
Coches de pasajeros	7 (2 – 10)
Vagones de mercancías en línea principal	6 (0 – 3)
Vagones de mercancías en línea secundaria	6 (2 – 8)
Cambio de vía / Sin cambio de vía	6 (5 – 10)
Ruedas estándar / Ruedas con amortiguación viscoelástica	1 (0 – 2)
Ruedas estándar / Ruedas con anillo de amortiguación	1 (0 – 1)
Ruedas estándar / Ruedas con reborde elástico de montaje	2 (0 – 3)

Tabla 11. Aumento de nivel de referencia para distintas condiciones de material móvil y aparatos de vía.

### *Obras civiles*

En lo que respecta al ruido suplementario que producen las obras civiles, existen dos grupos bien diferenciados, los puentes y viaductos, y los túneles.

#### *Puentes y viaductos*

Según el tipo y la colocación de la vía, los niveles de ruido producidos pueden ser muy diferentes. Los casos más importantes son:

- La colocación directa de la vía sobre un puente metálico es la más ruidosa.
- El balasto favorece la reducción de ruido en relación con el caso de colocación directa sobre placa metálica o de hormigón, ya que los puentes metálicos son a su vez fuente de radiación, y el balasto también amortigua la transmisión de vibraciones.

La solución acústicamente mejor sería un puente de hormigón con vías sobre traviesas y balasto. En las proximidades de un puente, la diferencia de ruido entre



una circulación sobre estructura metálica y sobre estructura de hormigón con balasto puede llegar a 20 dB(A).

En el mejor de los casos, el ruido de rodadura sobre vía libre no se diferencia prácticamente del ruido producido por el paso sobre un puente en placa de hormigón y vía sobre balasto. Pero, sin embargo, al estar la fuente elevada, no existe efecto de atenuación por el suelo y la propagación del ruido es mayor, con lo que la zona afectada por el impacto acústico es igualmente mayor.

### *Túneles*

El túnel en sí constituye una protección total frente al ruido propagado por vía aérea, aunque puede haber propagación de vibraciones a través del terreno, carriles, etc.

Sin embargo, las bocas de un túnel son fuentes de ruido importantes. En efecto, la salida de un tren de un túnel provoca aumentos bruscos del nivel sonoro en sus proximidades, y además, el nivel propio del tren se aumenta entre 3 y 5 dB(A) por la reverberación en el interior del túnel, si las bocas no están tratadas acústicamente. Aparecen asimismo niveles de ruido a frecuencias infrasónicas (que se aprecian también en el interior de los vehículos) debido a que el aire que desplaza el tren no puede expandirse como al aire libre.

### ***Bogies y carrocería de los vehículos***

Como se ha dicho anteriormente, las vibraciones de la rueda se propagan al conjunto del bogie, que se transmite tanto al peso no suspendido, como al peso suspendido, a las timonerías de los frenos y los mazos de los frenos electromagnéticos, con la consiguiente radiación. Además, y según el tipo de freno, la acción de frenado puede ser brusca sobre la banda de rodadura de la rueda y provocar una degradación rápida de ella. Sobre la radiación de las carrocerías, se conocen hechos tales como que, en el caso de vagones de mercancías de construcción metálica, cuando van cargados la radiación es menor. En el caso de coches de viajeros, el tratamiento acústico

introducido para disminuir los niveles sonoros interiores contribuye a una menor radiación hacia el exterior.

En la tabla siguiente se indican ejemplos de la influencia del tipo de bogie y de los sistemas asociados al frenado, sobre el ruido de rodadura.

Tipo de bogie	Variación, dB(A)
Sin timonería ni freno electromagnético de patines	Referencia, mínimo
Suspensión de ballestas, conjunto pesado y compacto	+6
Freno de zapatas y timonería	+8
Freno de discos de fundición + timonería y freno electromagnético	+ 10

Tabla 12. Aumento de nivel de referencia para distintos tipos de bogie.

### ***Ruido generado por trenes circulando sobre vías en curva***

Para trenes que circulan sobre vías en curva de radios muy reducidos, el ruido predominante, a menos que se tomen medidas preventivas, es un chirrido de alta frecuencia. La característica dominante del espectro para este tipo de sonidos es la abundancia de componentes de frecuencia discreta. Las formas del espectro varían considerablemente, incluso para vagones del mismo tipo en la misma curva o para el mismo vagón en días diferentes. El nivel sonoro con ponderación A del chirrido en curvas a 30 metros es de 89 dB(A) con oscilaciones de unos 10 dB(A).

El chirrido se genera al deslizar la rueda sobre el carril, además de rodar. Esto se debe a:

- Los vagones de doble eje mantienen sus ejes paralelos, obligando a deslizarse de modo perpendicular a la dirección de la rodadura.
- En una curva la rueda exterior debe girar más que la rueda interior, ya que recorre más distancia. En este caso el deslizamiento es paralelo a la rodadura.
- La pestaña roza con el carril.
- En ocasiones se instala un carril de contención en la parte interior de la vía, para ayudar a guiar el vagón, lo que provoca rozamiento.

Los factores que influyen para la emisión de chirridos, son el radio de curvatura, la velocidad del vagón, la geometría y rigidez del bogie, la amortiguación de las ruedas y las características del rozamiento de las superficies en contacto. Las frecuencias discretas dominantes corresponden a menudo aproximadamente a las naturales de la rueda cuando no está en contacto con el carril. Como el chirrido en las curvas se produce normalmente debido a la inestabilidad de los elementos rodantes, pueden originarse grandes amplitudes de vibración correspondientes a uno o más modos de vibración naturales de la rueda, particularmente en los modos no planos. Esta vibración tiene como consecuencia la emisión de sonido procedente de las superficies de vibración.

### **3.3.2. Fuentes de ruido de propulsión.**

Son las fuentes de ruido ligadas a la unidad tractora del tren, que constituye una fuente de ruido más o menos preponderante según el tipo y velocidad de marcha. Se incluye el ruido del motor de tracción, los reductores de marchas y el sistema de ventilación del motor de tracción.

En el caso de tracción eléctrica, el ruido de la máquina no es perceptible más que por debajo de una velocidad del orden de 60 km/h, ya que a velocidades mayores queda enmascarado por el ruido de rodadura. En el caso de locomotoras Diesel, el paso de la unidad de tracción se detecta a velocidades más elevadas. La mayor parte de las locomotoras funcionan con motores de tracción eléctrica conectados a los ejes, cuya energía se obtiene gracias a generadores diesel en la locomotora o por líneas superiores de energía eléctrica.

Para una amplia gama de velocidades, grados y tipos de vía, el 90 por 100 de los niveles máximos en locomotoras diesel medidos a una altura de 1,5 metros y a una distancia de 30 metros se sitúan entre 87 y 96 dB(A). Las locomotoras eléctricas emiten de 6 a 7 dB(A) menos que las diesel. En la siguiente figura se observa el espectro de frecuencias de los dos tipos de locomotoras.

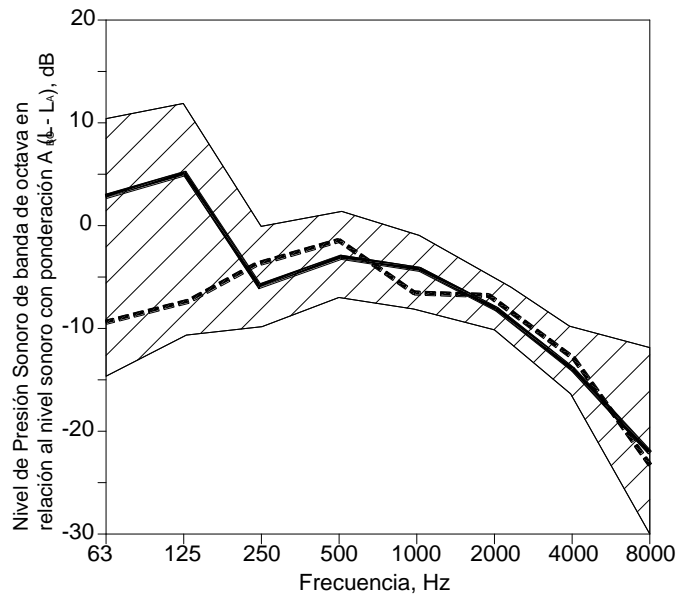


Figura 42. Espectro medio relativo en bandas de octava para locomotoras al aire libre: — locomotoras eléctricas diesel, --- locomotoras eléctricas, //// rango con todos los datos disponibles.

### 3.3.3. Fuentes ligadas al equipamiento auxiliar.

Entre otros elementos se pueden citar el sistema de ventilación forzada o de aire acondicionado. Otra fuente de ruidos es el silbato de señales, que produce normalmente unos niveles sonoros de unos 105 dB(A) a 30 metros por delante de la locomotora y unos 10 dB(A) menos para la misma distancia en los laterales.

En los sistemas con un tercer carril, el ruido de contacto resultante del contacto de la zapata o paleta y el tercer carril, queda enmascarado por el ruido producido por las ruedas y los carriles. También se aprecia en ocasiones el ruido de contacto entre el pantógrafo y la catenaria.

### 3.3.4. Fuentes de ruido aerodinámico

El ruido aerodinámico emitido por un tren es el resultado de presiones, que fluctúan rápidamente, en las turbulencias de aire situadas sobre o cerca de la superficie del tren en movimiento, (Thompson D. 2009). El flujo de aire sobre esta superficie en movimiento se convierte en turbulento a medida que va encontrando protuberancias, superficies rugosas o bordes ásperos. El ruido surge por una combinación de efectos de capas adyacentes turbulentas y separaciones de flujo. Entre las causas del ruido aerodinámico se encuentran los remolinos causado por los perfiles de las ruedas, por algunas partes de los sistemas de suspensión y de los bogies que interfieren en la corriente de aire, y por objetos de la superficie del tren como los limpiaparabrisas y los pantógrafos (Ikeda 2002).

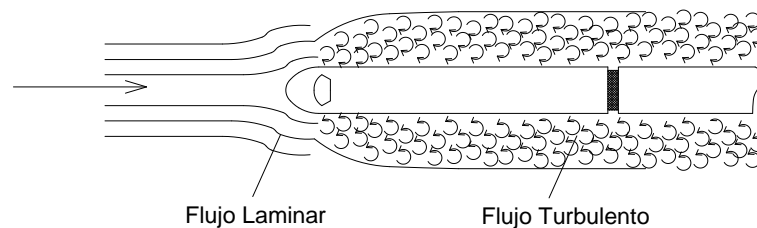


Figura 43. Formación de una capa de contorno turbulento alrededor del tren.

Como se aprecia en la figura cerca de la cabeza de la locomotora el flujo es laminar en la cual partículas con movimiento paralelo se mueven a diferentes velocidades, pero debido a la viscosidad, este flujo laminar, rápidamente se convierte en flujo turbulento. Experimentalmente se ha observado que el flujo se vuelve turbulento cuando el número de Reynolds se acerca a  $2 \cdot 10^6$ . Con el fin de estudiar el fenómeno acústico aerodinámico se definen los siguientes números:

**Número de Mach:** Número adimensional que relaciona la velocidad de flujo con la velocidad del sonido en el fluido

$$M = \frac{U}{c_0}$$

Como la velocidad del sonido en el aire es de 343 m/s para un tren de Alta Velocidad viajando a 300 km/h (83 m/s) el número de Mach es  $M = 0.24$ .

**Número de Reynolds:** número adimensional que representa el ratio entre las fuerzas inerciales con las fuerzas viscosas

$$Re = \frac{U \cdot L \cdot \rho_0}{\mu}$$

Donde  $U$  es la velocidad de flujo lejos de los objetos sólidos,  $L$  es la longitud característica del cuerpo que perturba el flujo,  $\rho_0$  es la densidad del fluido y  $\mu$  es la viscosidad. Para el aire,  $\rho_0/\mu = 6 \cdot 10^4$ .

**Número de Strouhal:** Relaciona la oscilación de un flujo con su velocidad media

$$St = \frac{f \cdot L}{U}$$

Donde  $f$  es la frecuencia de desprendimiento y  $L$  es la longitud.  $L/U$  mide el tiempo de contacto de las partículas del aire con el objeto. Cuando el número ronda el valor de 0.2 se desprenden pequeños remolinos o vórtices.

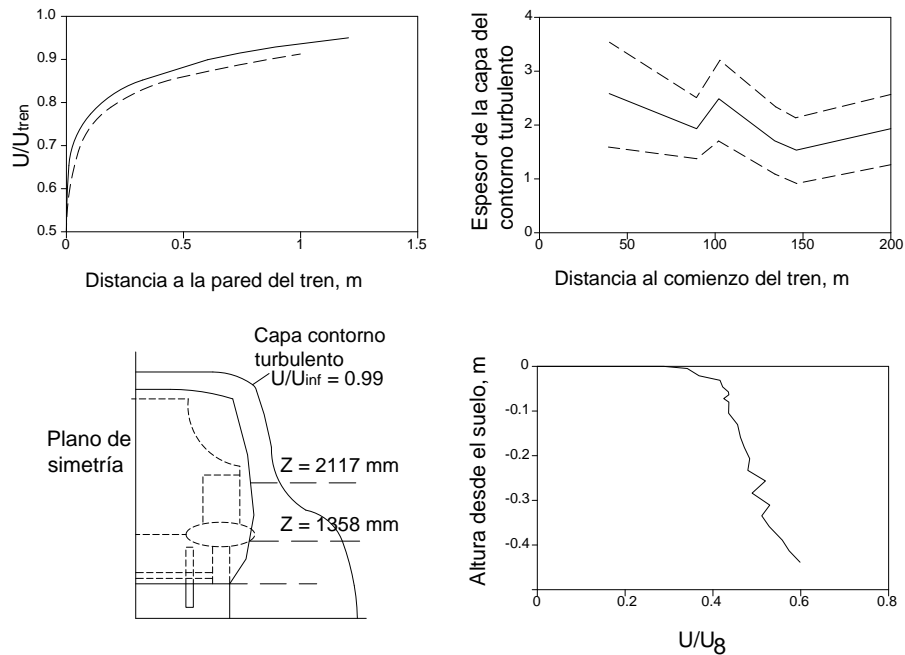


Figura 44. Espesor de la capa del contorno en un tren de Alta Velocidad.

En la figura se muestra el espesor de la capa del contorno en un tren de Alta Velocidad, definida como la capa donde el aire tiene al menos el 99% de la velocidad del flujo libre. Se observa que el espesor es aproximadamente constante, en torno a 2

metros de espesor, pero que aumenta cuando se aproxima al suelo debido a la fricción con el terreno y al efecto de bloqueo del bogie

No resulta obvio comprender como las fluctuaciones aerodinámicas producen ruido. Lighthill (1952) demostró que existe una analogía entre el sonido radiado por un flujo turbulento y el radiado por una fuente de tipo cuadripolar en un medio inmóvil. También se encuentran referencias en Colonius T. et al. (1997). Mientras que una fuente de tipo monopolar representaría una inyección de masa no estacionaria en que puede representarse físicamente como un modo de oscilación de una esfera de gas correspondientes a una dilatación y contracción isentrópicas de la misma, una fuente de tipo dipolar representaría a una fuerza fluctuante actuando sobre el fluido.

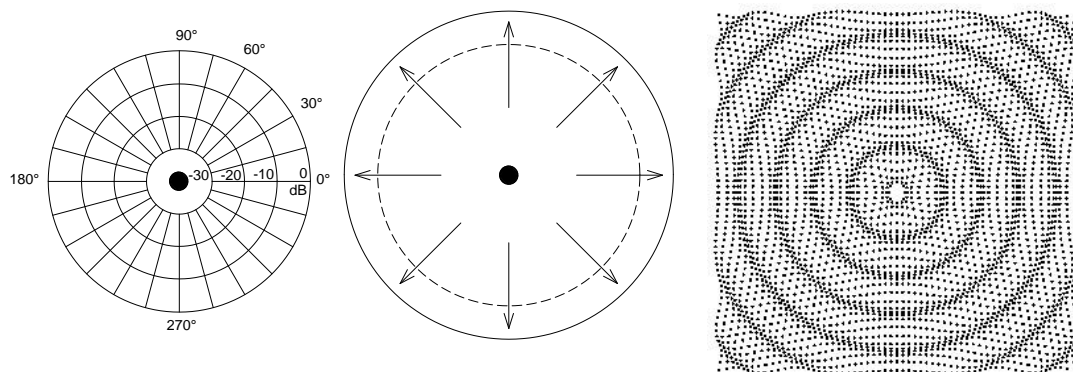


Figura 45. Esquema de radiación de un monopolo.

Una fuente dipolar puede ser modelada como dos monopolos pulsantes desfasados entre sí, separados por una pequeña distancia o por el modo de vibración de una esfera sin deformación. Los dipolos son radiadores menos eficientes de sonido que los monopolos, debido a la cancelación inherente dentro de la región de la fuente y son cada vez menos eficientes cuando la frecuencia se reduce. (Roger M., 1996). Esto es debido a que no existe una fuerza sobre la fuente, pero las contribuciones de la fuente de los dos monopolos llegan a la posición del receptor con ligeras diferencias de tiempo. A bajas frecuencias la diferencia de tiempo es pequeña comparada con el periodo de la oscilación y la contribución se cancela de una manera más patente.

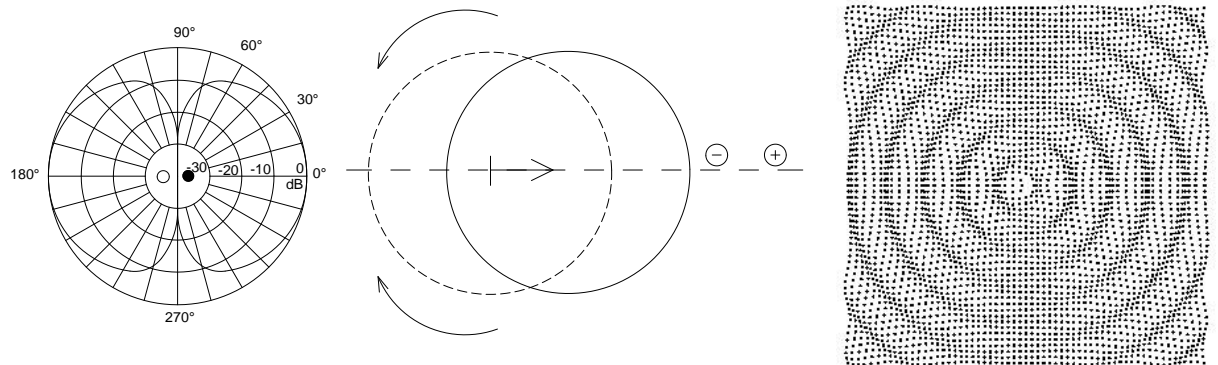


Figura 46. Esquema de radiación de un dipolo.

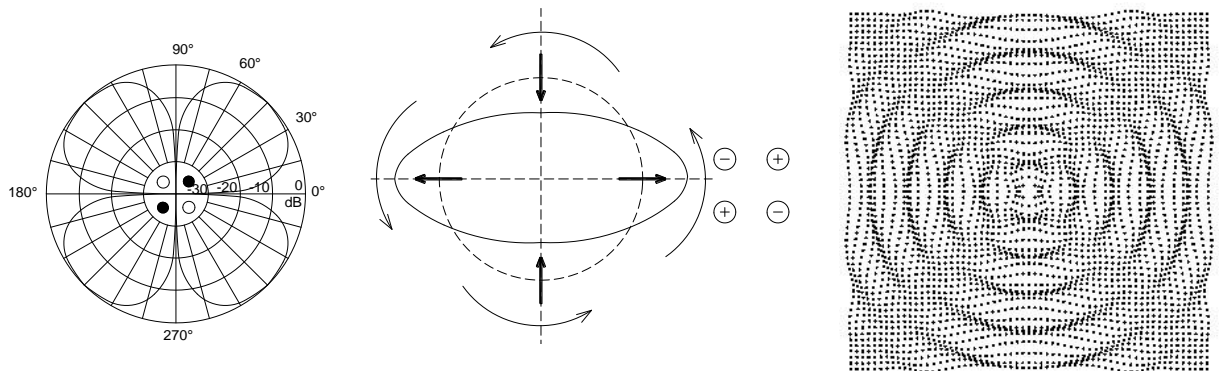


Figura 47. Esquema de radiación de un cuadrípulo.

Similarmente, una fuente de tipo cuadrípulo puede ser representada como dos dipolos actuando con desfase respectivamente, y representaría una tensión fluctuante. Son radiadores mucho menos eficientes que los monopolos o los dipolos. (Roger M., 1996). Consecuentemente se comprueba que el sonido producido por una corriente turbulenta es solo una pequeña fracción de la energía del flujo. Dimensionalmente la potencia sonora producida por un flujo turbulento de aire es proporcional a:

$$W_{rad} \propto \frac{\rho_0 \cdot U^8 \cdot l^2}{c_0^5}$$

Donde  $l$  es el ancho del flujo,  $U$  es la velocidad del flujo,  $c_0$  es la velocidad del sonido y  $\rho_0$  es la densidad del fluido. La fuerte dependencia de la velocidad, ya que el nivel sonoro se incrementa según  $80 \cdot \log_{10} U$  significa que esta fuente de ruido incrementa en importancia a altas velocidades. La eficiencia de generación del sonido, es decir, la potencia sonora dividida por la potencia del flujo, es proporcional



a  $M^5$ , donde  $M$  es el número de Mach. La constante de proporcionalidad es del orden de  $10^{-4}$ .

Sin embargo para el ruido del ferrocarril en el exterior no es la turbulencia libre la principal fuente de ruido aerodinámico. Las fuentes dominantes son del tipo dipolo. Hay varios ejemplos de este tipo de fuentes:

- Flujo sobre objetos sólidos cilíndricos, por ejemplo algunas partes del pantógrafo, otros equipamientos sobre el techo y pasamanos.
- El flujo sobre discontinuidades, por ejemplo los huecos entre coches o en la región del bogie, pueden producir ruidos de banda ancha, debido a la separación y posterior unión del flujo.
- El flujo sobre cavidades y ventanas, por ejemplo los huecos entre coches y el hueco o cuna para el pantógrafo, pueden producir ruidos tonales debido a la interacción entre el flujo y las resonancias acústicas de la cavidad. El flujo típico en el hueco para el pantógrafo se ilustra en la siguiente figura.
- La capa de flujo turbulento sobre superficies en curva o rugosas pueden producir fuentes de ruido de tipo dipolar más que de cuadripolar, particularmente donde la separación del flujo ocurre, por ejemplo en la cabeza o en la cola del tren.

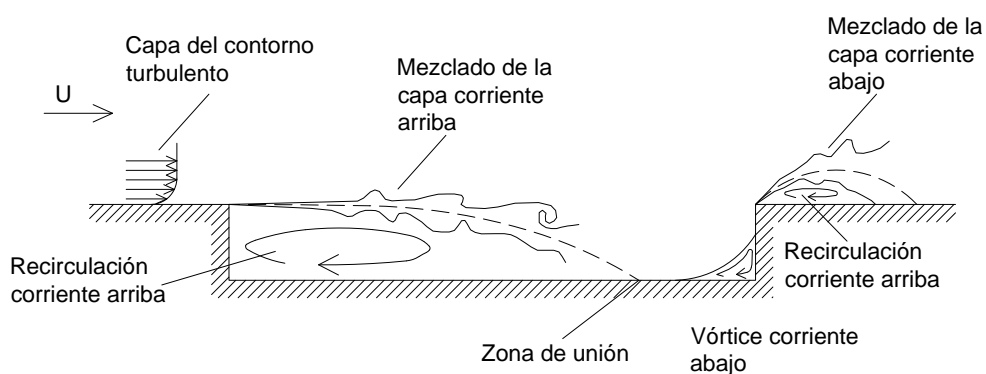


Figura 48. Flujo típico en el hueco para el pantógrafo.

Las fuentes aerodinámicas dipolares incrementan la potencia de sonido de acuerdo con la sexta potencia de la velocidad de flujo,  $U^6$ , por lo que el nivel de sonido en decibelios se incrementa con el ratio de  $60 \cdot \log_{10} U$ . Sin embargo, como el

contenido de frecuencias también cambia con el incremento de la velocidad, aumentando las altas frecuencias, la escala de ponderación en decibelios A, puede incrementarse en un ratio ligeramente mayor.

Las más importantes fuentes de ruido aerodinámico varían de un tren a otro, pero usualmente son:

- Los bogies, particularmente el bogie de cabeza.
- El pantógrafo, su hueco en el techo y otras instalaciones montadas sobre el techo.
- La cabeza del tren.
- Los huecos entre coches.
- Las rejillas de ventilación.
- Protuberancias como manillas y escaleras en las puertas.
- Cavidades resonadoras.
- La propia capa turbulenta sobre la superficie del tren, la cual tiene muy baja potencia pero está distribuida en una gran área.

De todas ellas, las fuentes localizadas encima del tren son particularmente las más importantes cuando están presentes pantallas acústicas, como una típica pantalla de 2 metros de altura, que protege de los ruidos de la parte baja, incluyendo el ruido de rodadura de las ruedas con el carril, pero deja expuestas las fuentes superiores. En la siguiente figura se muestra la dependencia del nivel de sonido de la velocidad del tren, detrás de una pantalla de 2 metros de altura localizada a 9 metros del centro de la vía. En la primera gráfica se observa las mediciones sin pantalla y en la segunda con pantalla. Comparando los resultados, se comprueba que la velocidad de transición entre el ruido de rodadura y el ruido aerodinámico se reduce a un número entre 270 y 290 km/h. Mientras la pantalla da una reducción de 14 dB a una velocidad de 160 km/h, el efecto era sólo de 8 dB a 350 km/h. Y si el análisis es para un receptor situado a una altura de 2 metros, por encima de la cabeza del carril, el efecto se reducía sólo a 3 dB

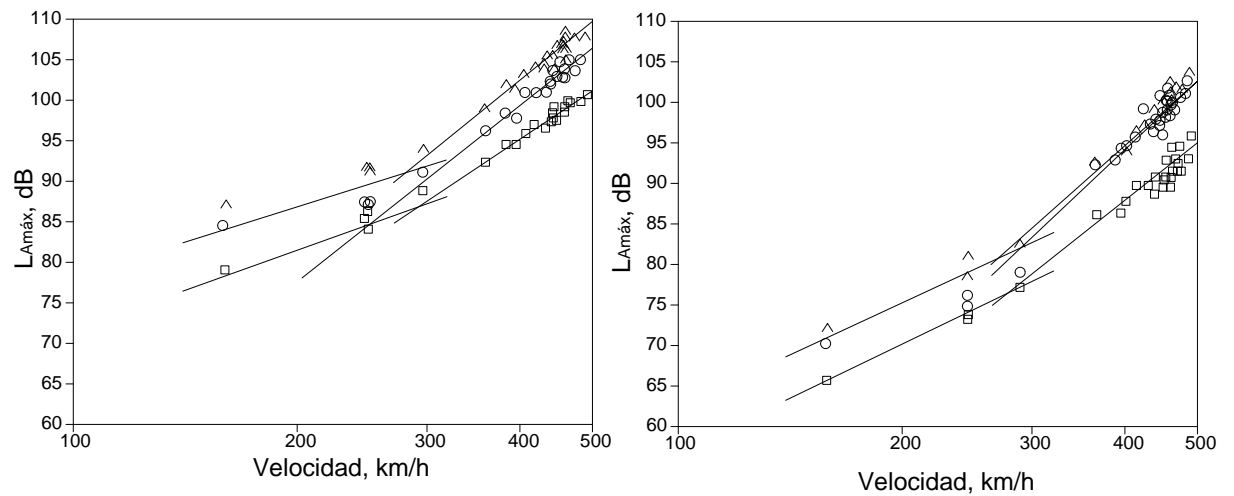


Figura 49. Máximo nivel de sonido de un TGV-A a 25 metros, sin pantalla y con pantalla de 2 metros de altura, para (^) cabeza tractora delantera, (o) cabeza tractora trasera, (□) coches intermedios.

Aparte de las contribuciones tonales, la mayor parte del ruido aerodinámico está dominado por las bajas frecuencias, alrededor de los 500 Hz. En la figura siguiente se aprecia el espectro de ruido de un tren de Alta Velocidad a 25 metros de distancia. En ella se observa que a 200 km/h hay un claro pico entre 2 y 3 kHz, causado por el ruido de las ruedas, y cuando la velocidad se incrementa este pico crece en nivel y se hace más ancho, es decir abarca un mayor rango de frecuencias entre 1,5 y 4 kHz. Sin embargo, el ruido a más bajas frecuencias crece más rápidamente, con el incremento de la velocidad. A 350 km/h el espectro es casi plano. Para bandas de frecuencia por encima de 630 Hz el exponente de la velocidad de estos datos está mayoritariamente entre 5 y 6 por lo que el nivel se obtendría de  $50 \text{ o } 60 \cdot \log_{10} U$ , donde alrededor del pico entre 2 y 3 kHz el exponente está alrededor de 30 y sería  $30 \cdot \log_{10} U$ . Por encima de 3 kHz el exponente de la velocidad es de nuevo mayor debido al desplazamiento del espectro hacia altas frecuencias.

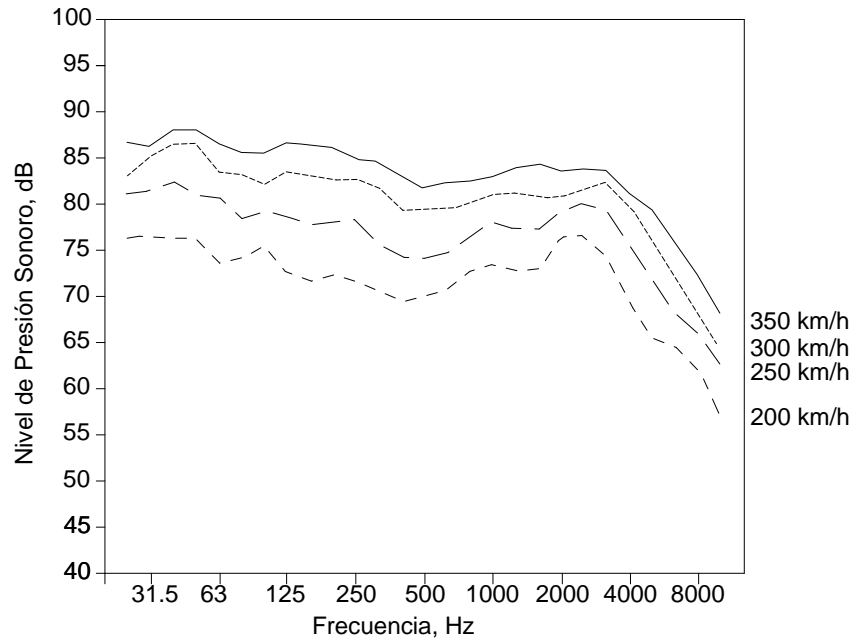


Figura 50. Espectro típico de un TGV – Dúplex a 25 metros de distancia y a diferentes velocidades.

Por lo tanto se puede descomponer el ruido en dos componentes, ruido de rodadura con una dependencia de la velocidad de  $30 \cdot \log_{10} U$  y ruido aerodinámico con una dependencia entorno a  $60 \cdot \log_{10} v$ . Se han hecho estudios empíricos para predecir el ruido aerodinámico obteniéndose diferentes relaciones. Las más importantes serían:

- Relación empírica basada en medidas del tren ICE/V a velocidades entre 200 y 406 km/h.

$$L_{Aeq,tp(aero)} = 64 \cdot \log_{10} \left( \frac{V}{100} \right) + 60$$

- Relación del llamado método mixto. Consiste en extrapolar a altas velocidades, la curva de regresión del rango 99 a 203 km/h para representar el ruido de rodadura. La curva de ruido aerodinámico se deriva de la curva anterior combinada con medidas reales, obteniéndose aproximadamente

$$L_{Aeq,tp(aero)} = 96 \cdot \log_{10} \left( \frac{V}{200} \right) + 67$$

- Relación obtenida mediante el software MAT2S desarrollado por Deufrako K2 representando varias fuentes aerodinámicas. Se obtuvieron diferentes

resultados para cada fuente pero se observó una menor dependencia de la velocidad

$$L_{Aeq,tp(aero)} = 50 \cdot \log_{10}(V)$$

Aunque a primera vista puede parecer que las fórmulas difieren mucho unas de otras, se observa en la siguiente figura que las diferencias son pequeñas, sobre todo por debajo de 350 km/h.

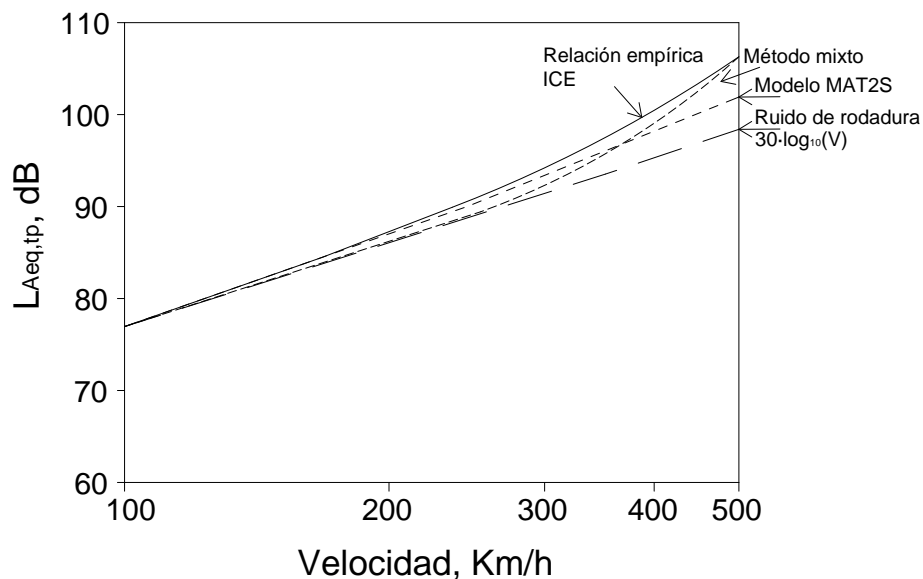


Figura 51. Ruido combinado aerodinámico más rodadura.

En la siguiente figura, se muestran otro ejemplo más de los niveles sonoros representativos de diferentes sistemas ferroviarios de Alta Velocidad, incluyendo trenes convencionales sobre vías de balasto y trenes experimentales de levitación magnética sobre estructuras aéreas. Las curvas de la gráfica muestran la combinación de las fuentes de sonido que se encuentran en los sistemas de Alta Velocidad, incluyendo el ruido de propulsión, el contacto entre ruedas y carriles y el aerodinámico. Se observa que a velocidades inferiores a 160 km/h la relación es  $30 \cdot \log_{10} V$ , que únicamente contempla el ruido del carril y las ruedas. Hasta la velocidad de 240 km/h va cambiando gradualmente hacia  $60 \cdot \log_{10} V$  porque es la suma del ruido producido por el carril y las ruedas y del aerodinámico, y a partir de 290 km/h es de  $60 \cdot \log_{10} V$ . Los datos de los trenes de levitación magnética son más silenciosos a bajas velocidades debido a que se reduce el aerodinámico y no existe

ruido de ruedas y carriles. Los trenes Shinkansen se ha comprobado que su relación a bajas velocidades es de  $20 \cdot \log_{10} V$ .

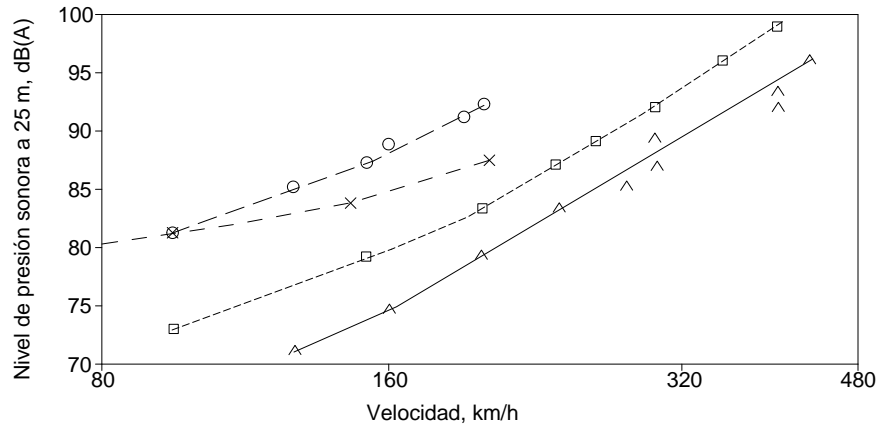


Figura 52. Ruido de trenes de Alta Velocidad. (^) Tren alemán de levitación magnética, (o) Amtrak, (□) Tren Express Intercity alemán, (x) Shinkansen

**Reducción del ruido aerodinámico.**

Lo primero es conocer cuáles son las fuentes más importantes. Tras numerosas medidas en los trenes ICE – 1, TGV – A y el tren de levitación magnética TR07 se obtuvo la siguiente tabla según el modelo PROHV a 200 km/h y a 5 metros de distancia. También se aporta el exponente  $n$ , para la curva  $10 \cdot n \cdot \log_{10} V$ .

	TGV – A		ICE	
	$L_{200}$ (dB)	N	$L_{200}$ (dB)	N
Ruedas, coches remolcados	90.6	2.9	88.0	2.9
Ruedas, cabeza tract. delantera	91.5	3.2	91.5	3.3
Ruedas, cabeza tract. trasera	90.3	3.0	90.0	2.7
Pantógrafo, cabeza tract. delantera	-	-	94.2	4.9
Pantógrafo, cabeza tract. trasera	91.8	5.7	92.4	4.0
Ventilación, cabeza tract. delantera	91.6	4.7	90.5	3.6
Ventilación, cabeza tract. trasera	88.8	4.6	88.0	2.8
Área cercana a la ventana frontal	91.9	5.1	88.2	2.9
Espacio entre coches	86.6	4.2	86.7	4.7
Bogie	78.7	6.1	78.3	4.3
Capa turbulenta (/m2)	70.4	4.3	67.6	4.6

Tabla 13. Ruido aerodinámico producido por diferentes fuentes a 5 m de distancia según el modelo PROHV.

En la siguiente tabla se aportan las predicciones según el modelo PROHV en términos de  $L_{Aeq,tp}$  en dB a 25 metros de distancia para un tren TGV – A. Se observa que a 300 km/h se igualan las fuentes aerodinámicas y las de rodadura. También se observa que la capa turbulenta es solo 3.7 dB menos que el ruido aerodinámico total.

	200 km/h	300 km/h
Ruido de rodadura	86.1	91.5
Ruido de ventilación	74.2	82.7
Capa turbulenta	80.0	87.7
Bogie + espacio entre coches + pantógrafo	79.9	89.0
Total fuentes aerodinámicas	82.9	91.4
Total ruido	88.0	94.7

Tabla 14. Ruido aerodinámico producido por diferentes fuentes a 25 m de distancia según el modelo PROHV.

Según medidas más recientes y analizadas por el software MAT2S a 25 metros de la vía para modernos trenes de Alta Velocidad, se obtuvo que la región del bogie es una de las más importantes. El pantógrafo por el contrario tiene una pequeña contribución a menos que estén presentes pantallas antirruído.

	200 km/h	300 km/h
Ruido de rodadura	85.6	90.3
Pantógrafo	56.7	69.2
Bogies	78.1	86.6
Otras fuentes	71.6	81.0
Total fuentes aerodinámicas	79.0	87.7
Total ruido	86.5	92.2

Tabla 15. Ruido aerodinámico producido por diferentes fuentes a 25 m de distancia según el modelo MAT2S.

### Ruido del pantógrafo

Ha sido principalmente en Japón donde se han realizado mayores esfuerzos para reducir el ruido del pantógrafo debido a que se comprobó su gran importancia en la contribución del ruido porque muchas de sus vías discurren elevadas y con pantallas acústicas. En la siguiente figura se aprecia la firma acústica de un tren Shinkansen.

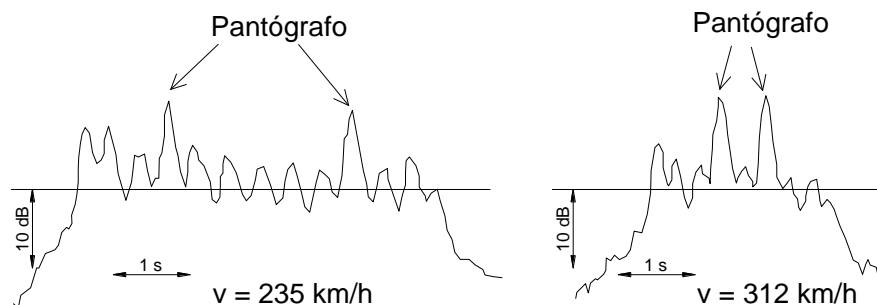


Figura 53. Firma acústica en dB(A) de un tren Shinkansen a 25 metros de la vía a a) 235 km/h y b) 312 km/h.

Aunque se produce ruido en ancho de banda, el ruido producido por el pantógrafo es principalmente tonal. Esto es debido a los vórtices desprendidos de los cilindros que lo forman. Por ejemplo un cilindro de 3 cm de diámetro en un fluido a 300 km/h genera según lo explicado para el número de Strouhal un tono de 550 Hz. También se ha comprobado en túneles de viento que una sección cuadrada produce de 6 a 10 dB más que una circular, y ésta a su vez 10 dB más que las elípticas. Otra técnica para reducir el ruido es hacer más áspera su superficie añadiendo cordones por ejemplo que rompan la formación de vórtices, pero no se consigue reducir el ruido más de 5 dB.

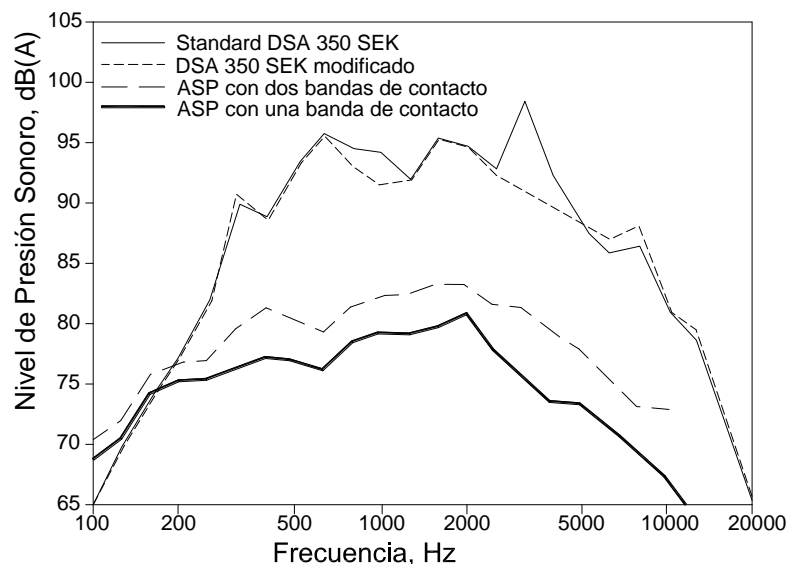


Figura 54. Ruido emitido por diferentes pantógrafos en un túnel de viento a 330 km/h.

Otra técnica consiste en cubrir lo más posible el pantógrafo con escudos y hasta con minipantallas, pero en ocasiones estos mecanismos originan más ruido que el propio pantógrafo. Por lo que se está trabajando en nuevos prototipos de pantógrafos que reduzcan el ruido generado, como utilizar un solo cilindro sustentador, con un diámetro más ancho que reduzca la frecuencia del ruido.

### ***Ruido del hueco para el pantógrafo***

En el TGV por ejemplo el pantógrafo va colocado sobre un hueco en el techo, de tal manera que cuando se retire esté menos expuesto al flujo de aire. Este hueco se



utiliza en caso de que el tren tenga que obtener energía eléctrica de sistemas diferentes. Sin embargo se ha encontrado que el ruido producido es de la misma magnitud que el pantógrafo mismo. Se ha tratado de minimizar con alerones que lo cubran pero no ha habido buenos resultados. Lo mejor es evitar la construcción del hueco.

### ***Bogies y espacios entre coches***

Los bogies son estructuras complejas, con poca o ninguna aerodinámica, localizados en una región de gran turbulencia, por lo que son una gran fuente de ruido aerodinámico especialmente el bogie de cabeza. El flujo del aire a través del bogie es muy importante para la refrigeración de los frenos, el motor y las ruedas, y debido a que el bogie necesita libertad de movimiento con el cuerpo del coche es muy difícil su aislamiento.

Tras experimentos en el túnel de viento para el TGV se colocaron faldones en los bogies, se cerraron completamente los huecos entre coches y se ensanchó el perfil de la parte más baja del coche, consiguiéndose una reducción entre 3 y 10 dB dependiendo de las frecuencias y 8 dB(A) en el total.

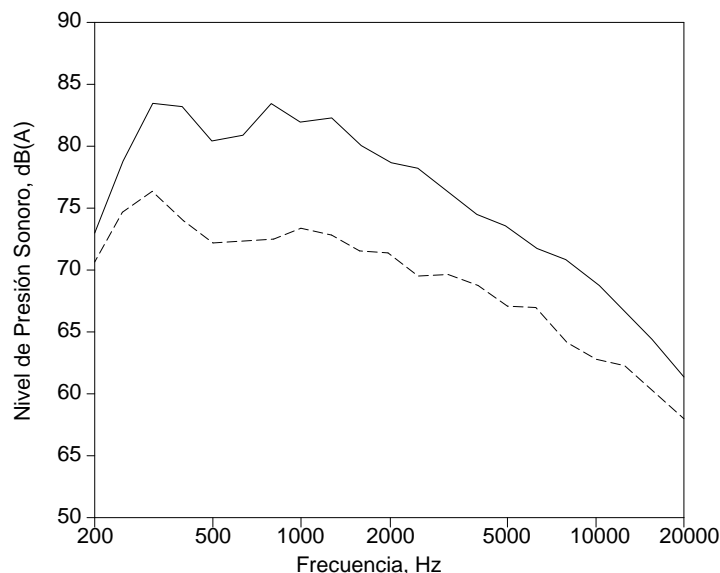


Figura 55. Espectro obtenido para el ruido producido por el área del bogie. Comparación entre la configuración inicial y con mejoras.

### ***Diseño de la carrocería y de la cabeza tractora***

Desarrollos de la forma de la cabeza tractora han sido realizados para mejorar el comportamiento aerodinámico, e indirectamente el acústico. Formas muy alargadas y aerodinámicas en los trenes Shinkansen han sido desarrolladas para disminuir las ondas de micropresión en túneles, que son ondas de choque generadas en túneles largos con vías sin balasto con el resultado de una fuerte onda en el otro extremo del túnel.

Experimentos en el túnel de viento para el TGV con modelos a escala han demostrado una pequeña disminución del ruido generado en función de la forma de la cabeza tractora, solo de 1 o 2 dB, que aumentaban a 5 dB si se tapaba mediante faldones el hueco bajo la cabeza tractora.

Otros detalles también son importantes, como suaves formas en la carrocería, con ventanas sin resaltos. También el limpiaparabrisas produce ruido aerodinámico en la frecuencia de 500 Hz, pero 8 dB menor que la cabeza tractora.

#### **4. COMPROBACIÓN DEL MODELO Y DEL PROGRAMA DESARROLLADOS EN ESTA TESIS.**

Como herramienta de cálculo en la Tesis se ha utilizado el Método de Elementos de Contorno, el cual se desarrolla de forma exhaustiva en el *Anexo A*. En él se explica el Método de Elementos de Contorno y su aplicación al problema acústico en general y de pantallas acústicas en particular. Se ha consultado para la redacción del Anexo y de este capítulo, el importante trabajo de la Tesis de Gil Alías (2005), donde se realiza un excelente estudio del funcionamiento de pantallas acústicas por el Método de Elementos de Contorno. Ha sido también muy importante el libro de Brebbia C.A. & Domínguez J. (1989), y la obra de Kirkup (2007). La decisión de elegir el MEC frente a los métodos de dominio se debe a las ventajas que presenta en el análisis del problema acústico, como son:

- Trabaja sólo sobre el contorno  $S$  del dominio de cálculo  $\Omega$ . Es mucho más sencillo definir el contorno que definir el dominio completo. En particular, el MEC requiere únicamente la discretización del contorno, lo cual trae consigo una reducción de la dimensionalidad del problema con respecto al MEF o al MDF.
- Puede tratar mucho más fácilmente problemas que involucren dominios infinitos.
- Se obtiene el mismo grado de precisión en las dos variables duales del problema (p.ej. desplazamientos y tensiones, potenciales y flujos, etc.).

En la Tesis se desarrolla el caso de fuentes lineales por lo que el problema se reduce al plano. Se explica en el Anexo la formulación para elementos de tipo puntual, lineal, cuadrático y cúbico.

Para la computación de las ecuaciones del Método de Elementos de Contorno se ha desarrollado un programa en Visual Basic que permite calcular diferentes casos, ya sean de tipo teórico para la validación del modelo o de tipo real con presencia de

tren, con una o varias fuentes, diferentes tipos de suelos, presencia de pantallas con diferentes cubreras o sin ellas, con material absorbente o lisas, con terraplenes de tierra, o ausencia de pantallas. También se permite el estudio del caso del ruido producido en viaductos con pantallas y presencia de edificios, aunque no se han analizado en esta Tesis.

El modelo de elementos de contorno desarrollado así como el programa informático para el cálculo del campo acústico del ferrocarril deben ser contrastados y evaluados para conocer su precisión. Dicha comprobación puede ser realizada de forma experimental mediante mediciones en campo con sonómetros, o comparando los resultados con los de otros métodos de los que ya se ha comprobado experimentalmente su efectividad. En puntos previos de esta Tesis se han desarrollado varios de estos métodos que en este apartado se usarán para la validación del modelo.

En ellos se estudiaban casos simples, como campo abierto con diferentes tipos de suelo, pantallas lisas y delgadas, semiinfinitas, o finitas, etc. Una vez validado el modelo para estos casos, se puede proceder al estudio de casos más complicados como pantallas con cubrera, con aislamiento de diferentes espesores y características, etc.

En el caso de una fuente puntual la presión sonora producida por ella en el caso de dos dimensiones, es decir con propagación con ondas cilíndricas se obtuvo la siguiente relación:

$$p(r) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k \cdot r) = -\frac{i}{4} \cdot (J_0(k \cdot r) - Y_0(k \cdot r) \cdot i)$$

Donde  $r = |\vec{y} - \vec{x}|$ ,  $J_0$  es la función de Bessel de primera clase y orden cero,  $Y_0$  es la función de Bessel de segunda clase y orden cero,  $H_0^{(2)}$  es la función de Hankel de segunda clase y orden cero. Del libro de Abramowitz M. & Stegun I. (1970) se obtienen aproximaciones que se detallan en el anexo.

Dicha solución, supone que a grandes distancias de la fuente se produzca un decaimiento en la amplitud de la presión del tipo  $r^{-1/2}$ , lo que equivale a una caída de 3 dB cada vez que se duplica la distancia a la fuente. Cuando la distancia tiende al infinito tiene un comportamiento asintótico, lo que corrobora que cumple la condición de Sommerfeld.

En los casos que se van a estudiar, en los que está presente además del ruido aerodinámico, el ruido de rodadura, las fuentes serán del tipo monopolo, dipolo y cuadripolo, siendo las primeras las dominantes. Según Kinsler et al. (2000), Morgan et al. (1998), Roger M., (1996) y Russell et al. (1998), los cuadripolos son radiadores menos eficientes de sonido que los dipolos, que a su vez son menos eficientes que los monopolos, debido a la cancelación inherente dentro de la región de la fuente y son cada vez menos eficientes cuando la frecuencia se reduce. Esto es debido a que no existe una fuerza sobre la fuente, pero las contribuciones de la fuente de los dos monopolos llegan a la posición del receptor con ligeras diferencias de tiempo. A bajas frecuencias la diferencia de tiempo es pequeña comparada con el periodo de la oscilación y la contribución se cancela de una manera más patente.

Del trabajo de Morgan et al. (1998) se puede concluir que sólo es importante que la fuente sea representada como tipo dipolo cuando la altura de la pantalla es grande. En este caso la altura de las pantallas no es grande, en especial para las fuentes de tipo aerodinámico cuyo problema a menudo es que superan en altura a la pantalla. Por ello las fuentes se supondrán de tipo monopolo, con la consecuente facilidad de representación, frente al otro tipo de fuentes.

Las fuentes se van a suponer de tipo lineal y dado que el modelo es en dos dimensiones se pueden suponer representadas por un punto, pero para introducirlas en el modelo de elementos de contorno es preciso poder discretizarlas, por lo que se supondrán fuentes circulares de pequeño diámetro que serán divididas en varios elementos. El estudio se realizará en diferentes frecuencias. Tras el estudio del espectro del ruido ferroviario se extrae que las frecuencias más importantes son 600 Hz, 800 Hz y 2000 Hz para ruido de rodadura y las mismas más 4000 Hz para ruido

aerodinámico. Se debe recordar que el espectro aparecía prácticamente plano a altas velocidades. Asimismo la potencia de emisión en cada fuente es diferente en función del tipo de ruido y frecuencia, por lo que se podrán aplicar diferentes niveles de presión sonora, incluso en ocasiones puede ser necesario aplicar diferentes niveles de presión sonora para la parte del ruido de rodadura y para la del ruido aerodinámico dentro del mismo estudio. Para ello se utilizará la siguiente fórmula:

$$u = \frac{p}{\rho \cdot c}$$

Donde  $u$  es la velocidad de vibración en m/s,  $p$  es la presión sonora en Pa,  $\rho$  es la densidad del aire, y  $c$  es la velocidad del sonido, ambos parámetros medidos en esta Tesis a 20 °C de temperatura. Por ejemplo para un nivel sonoro de 80 dB o 0,2 Pa.

$$u = \frac{0,2}{1.21 \cdot 343} = 4,8189 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

#### 4.1. Caso 1. Fuente aislada en medio homogéneo.

Como se explicó en el apartado de la ecuación de onda, la presión sonora en el campo generado por una fuente puntual en un medio homogéneo en el caso de dos dimensiones toma la forma de ondas cilíndricas. De Kinsler et al. (2000), se obtiene la ecuación en función de las funciones de Bessel de tercera clase, siendo simétricas e independientes de  $z$

$$p(r, t) = A \cdot H_0^{(2)}(kr)e^{i\omega t}$$

Donde  $H_0^{(2)}(kr) = J_0(kr) - i \cdot Y_0(kr)$  es la función de Hankel de segunda especie y orden 0. El potencial de velocidad se obtiene de:

$$\Phi = -\frac{p}{i \cdot \omega \cdot \rho_0}$$

Por lo que

$$\Phi(r, t) = -\frac{A \cdot H_0^{(2)}(kr)e^{i\omega t}}{i \cdot \omega \cdot \rho_0} = i \cdot \frac{A \cdot H_0^{(2)}(kr)e^{i\omega t}}{\omega \cdot \rho_0}$$

La velocidad se obtiene a partir del potencial de velocidad mediante  $\vec{u} = \nabla\Phi$  y sabiendo que  $H_0^{(2)'} = -H_1^{(2)}$

$$\mathbf{u}(r, t) = -i \cdot \left( \frac{\mathbf{A} \cdot k}{\rho_0 \cdot \omega} \right) H_1^{(2)}(kr) e^{i\omega t} = -i \cdot \left( \frac{\mathbf{A}}{\rho_0 \cdot c} \right) H_1^{(2)}(kr) e^{i\omega t}$$

La impedancia acústica se define como la relación entre la presión acústica y la velocidad asociada a la partícula en el medio, que de modo general es:

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{u}}$$

Por lo que se tiene

$$\mathbf{z} = \frac{i \cdot \rho_0 \cdot c \cdot H_0^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(kr)}$$

En el caso que se va a estudiar, se supone la fuente puntual como una circunferencia de radio  $a$ , por lo que se podría despejar la constante  $\mathbf{A}$  de la siguiente manera, a partir de las condiciones iniciales aplicando las ecuaciones en la superficie de la circunferencia:

$$\mathbf{p} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot H_0^{(2)}(ka) \cdot e^{i\omega t} = \frac{i \cdot \rho_0 \cdot c \cdot H_0^{(2)}(ka)}{H_1^{(2)}(ka)} \cdot U_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{A} = \frac{i \cdot \rho_0 \cdot c \cdot U_0}{H_1^{(2)}(ka)}$$

Por lo que el potencial de velocidad será:

$$\begin{aligned} \Phi(r, t) &= i \cdot \frac{\mathbf{A} \cdot H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t}}{\omega \cdot \rho_0} = i \cdot \frac{i \cdot \rho_0 \cdot c \cdot U_0}{H_1^{(2)}(ka)} \cdot \frac{H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t}}{\omega \cdot \rho_0} \\ &= - \frac{U_0 \cdot H_0^{(2)}(kr) \cdot e^{i\omega t}}{k \cdot H_1^{(2)}(ka)} \end{aligned}$$

Donde  $U_0$  está expresado en m/s,  $k$  es el número de onda expresado en  $\text{m}^{-1}$ ,  $a$  es el radio del cilindro expresado en metros, y  $H_0^{(2)}$  y  $H_1^{(2)}$  son las funciones de Hankel de segunda especie y orden 0 y 1 respectivamente. Dicha solución coincide con la hallada por Ziomek L.J. (1995). Para obtener la presión sonora

$$\mathbf{p} = -i \cdot \omega \cdot \rho_0 \cdot \Phi = i \cdot \omega \cdot \rho_0 \cdot \frac{U_0 \cdot H_0^{(2)}(kr) \cdot e^{i\omega t}}{k \cdot H_1^{(2)}(ka)}$$

$$\mathbf{p} = i \cdot \frac{\rho_0 \cdot c \cdot U_0 \cdot H_0^{(2)}(kr) \cdot e^{i\omega t}}{H_1^{(2)}(ka)}$$

Por otro lado se ha comprobado que la solución coincide con la de Yoon W.S. et al. (1990), aunque escrita de forma diferente:

$$\mathbf{p} = A_0 \cdot (J_0(kr) - i \cdot Y_0(kr)) \cdot e^{i\omega t} = A_0 \cdot H_0^{(2)}(kr) \cdot e^{i\omega t}$$

Donde

$$A_0 = \frac{4 \cdot U_a}{k \cdot C_0^2} \cdot (J_1(ka) - i \cdot Y_1(ka)) \cdot e^{i\omega t} = \frac{4 \cdot U_a}{k \cdot C_0^2} \cdot H_1^{(2)}(ka) \cdot e^{i\omega t}$$

Donde  $U_a$  es el flujo de presión unitaria

$$U_a = \frac{\partial p}{\partial n} = k \cdot U_0$$

Y  $C_0$  es una constante adimensional de valor

$$C_0 = \frac{2 \cdot J_1(ka)}{\text{sen}(\gamma_0)} \quad \gamma_0 = \arctan\left(-\frac{J_1(ka)}{Y_1(ka)}\right)$$

Con  $J_0$ ,  $Y_0$ ,  $J_1$ , y  $Y_1$  funciones de Bessel de primer tipo y segundo tipo, de orden 0 y 1 respectivamente y  $H_0^{(2)}$  y  $H_1^{(2)}$  son las funciones de Hankel de segunda especie y orden 0 y 1 respectivamente

En las primeras simulaciones se han tratado de analizar tres aspectos importantes en el comportamiento del modelo de elementos de contorno, en adelante MEC, como son el tamaño de la fuente, el tamaño de los elementos en la fuente, la influencia de la frecuencia y la influencia de la presión sonora a la que emite la fuente. De los resultados se obtendrán conclusiones para su uso en posteriores simulaciones en las que se analizarán otros parámetros. Los casos analizados contemplan fuentes de 0,20 m y de 0,10 m de radio, aunque se han corroborado los resultados obtenidos con fuentes de otros tamaños. Los elementos elegidos han sido de 0,021 m y de 0.0063 m de longitud.

Las frecuencias estudiadas han sido las cuatro comentadas anteriormente escogidas de la observación de los espectros sonoros de los ruidos de rodadura y de los aerodinámicos con diferentes trenes y tipos y estados de vía, escogiendo las más representativas. Se han escogido 600 Hz, 800 Hz, 2000 Hz y 4000 Hz. Cada una de las frecuencias se ha estudiado con potencia sonora de emisión de la fuente de 100 dB y de 80 dB.



En los siguientes gráficos se muestran las diferencias entre los resultados obtenidos con las fórmulas analíticas y con el MEC, así como su análisis.

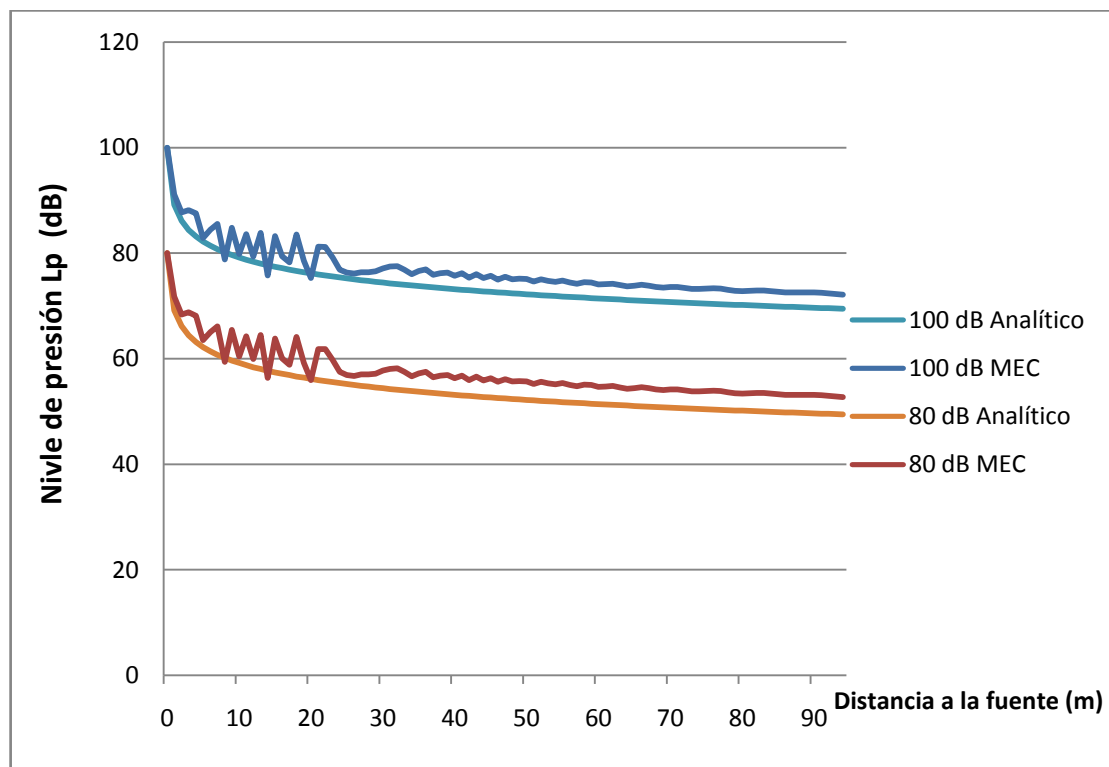


Gráfico 1. Frecuencia 600 Hz Radio de la fuente 0,20 m y elementos de 0,021 m

Se observa en el gráfico para una fuente de 0,20 m que existe cierto desfase entre la solución analítica y la del MEC. Analizando los datos numéricos se observa que está en torno a 2,7 dB de media para la potencia de 100 dB y de 3,3 para la de 80 dB.

Se modificó el tamaño de la fuente hasta un radio de 0,10 m, manteniendo la frecuencia y el tamaño del elemento, obteniendo una gran precisión para los dos niveles de presión. Los resultados difieren hasta 3 ó 4 dB en la zona más cercana a la fuente pero sólo 0,8 dB en la zona más alejada, lo cual es un resultado muy preciso.

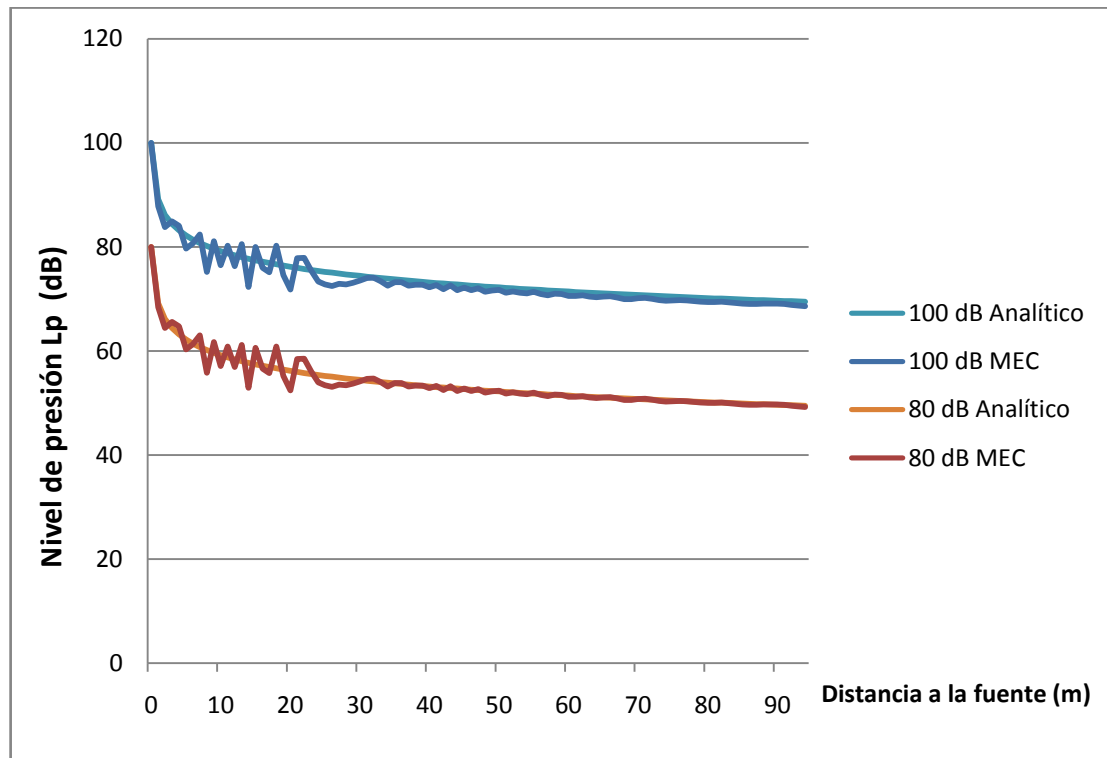


Gráfico 2. Frecuencia 600 Hz Radio de la fuente 0,10 m y elementos de 0,021 m

Con el fin de tratar de lograr mayor precisión en la zona más cercana se volvió a calcular para los mismos tamaños de fuente pero con elementos de 0,0063 metros de longitud pero como se puede observar los resultados mejoraron hasta una divergencia de 0,5 dB pero se siguió manteniendo la pequeña inestabilidad en la cercanía de la fuente.

En los siguientes gráficos se observa lo indicado:

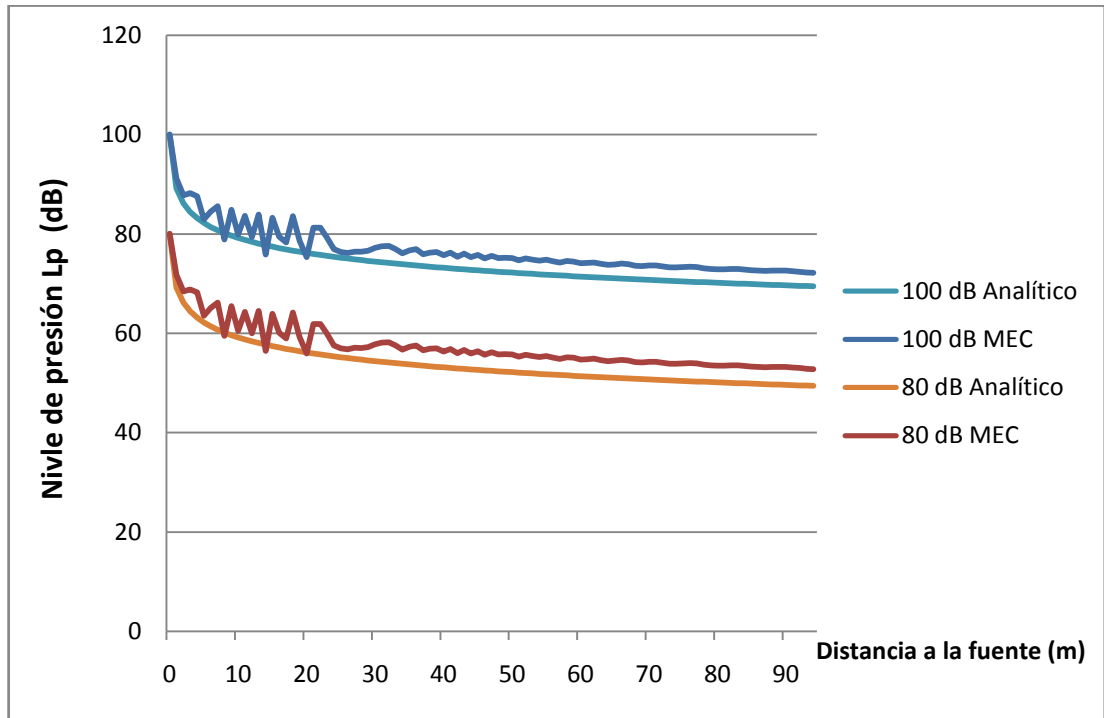


Gráfico 3. Frecuencia 600 Hz Radio de la fuente 0,20 m y elementos de 0,0063 m

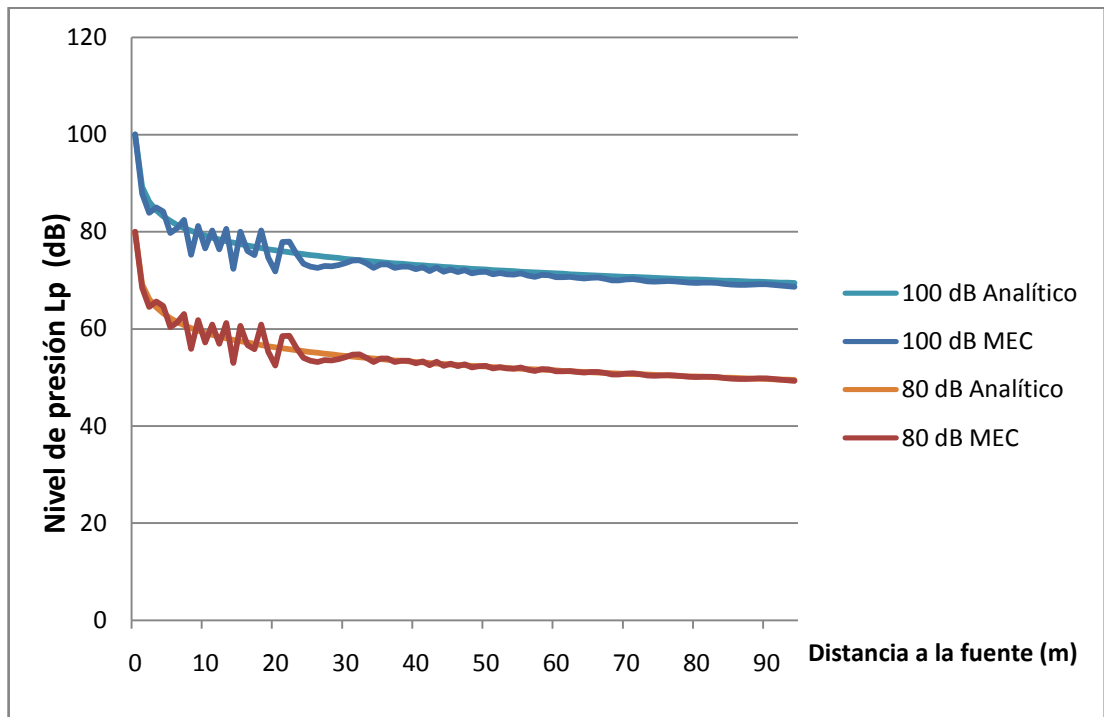


Gráfico 4. Frecuencia 600 Hz Radio de la fuente 0,10 m y elementos de 0,0063 m

El resultado mejoró respecto a los elementos más grandes pero lo hizo de manera discreta, solo en 0.5 dB, por lo que se concluye que el tamaño de la fuente pequeño mejora la precisión siendo suficiente con una fuente de 0,10 m. Asimismo el tamaño de los elementos escogidos es suficientemente preciso, siendo los elegidos para la fuente en posteriores simulaciones 0,021 m. También se puede concluir que el modelo es prácticamente igual de preciso para los diferentes niveles de potencia.

Se realizaron varias simulaciones modificando la frecuencia a 4000 Hz para comprobar si las conclusiones se pueden extrapolar a todo el rango de las frecuencias y los resultados fueron los siguientes:

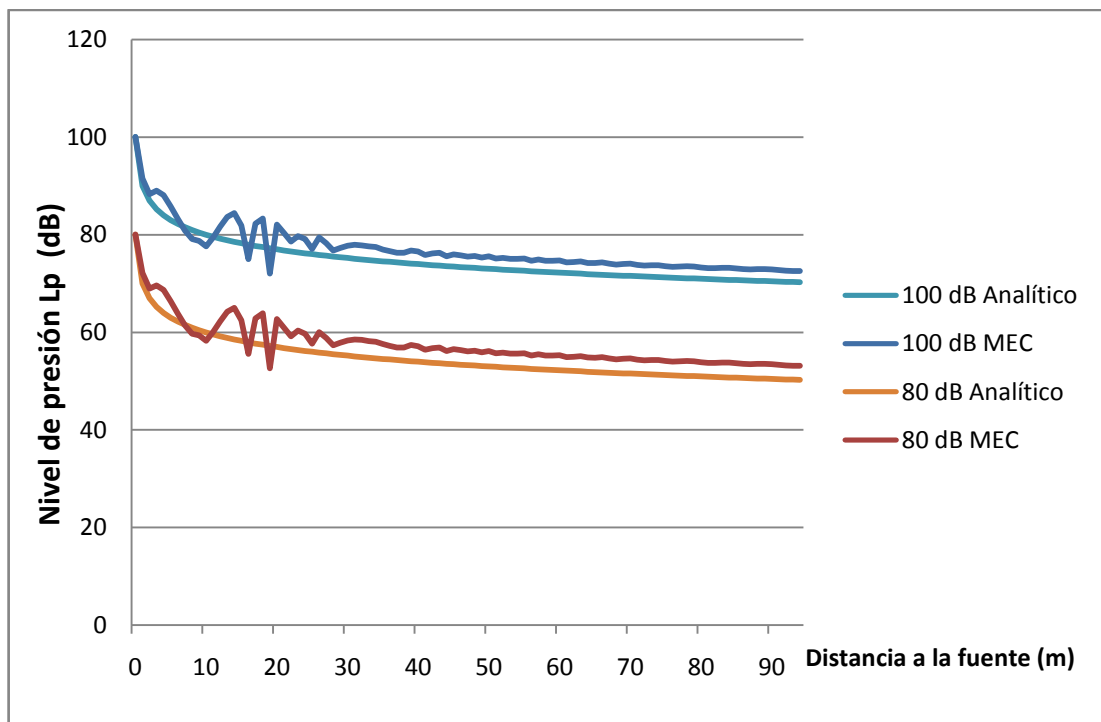


Gráfico 5. Frecuencia 4000 Hz Radio de la fuente 0,20 m y elementos de 0,021 m

Los resultados mejoraron levemente respecto al mismo caso pero con 600 Hz de frecuencia. Se puede considerar que la precisión es la misma. La divergencia obtenida fue de 2,3 dB para la fuente de potencia de 100 dB y de 2,9 dB para la fuente de 80 dB.

En el caso de la fuente de 0,10 m de radio la precisión vuelve a ser muy alta, casi exacta a grandes distancias.

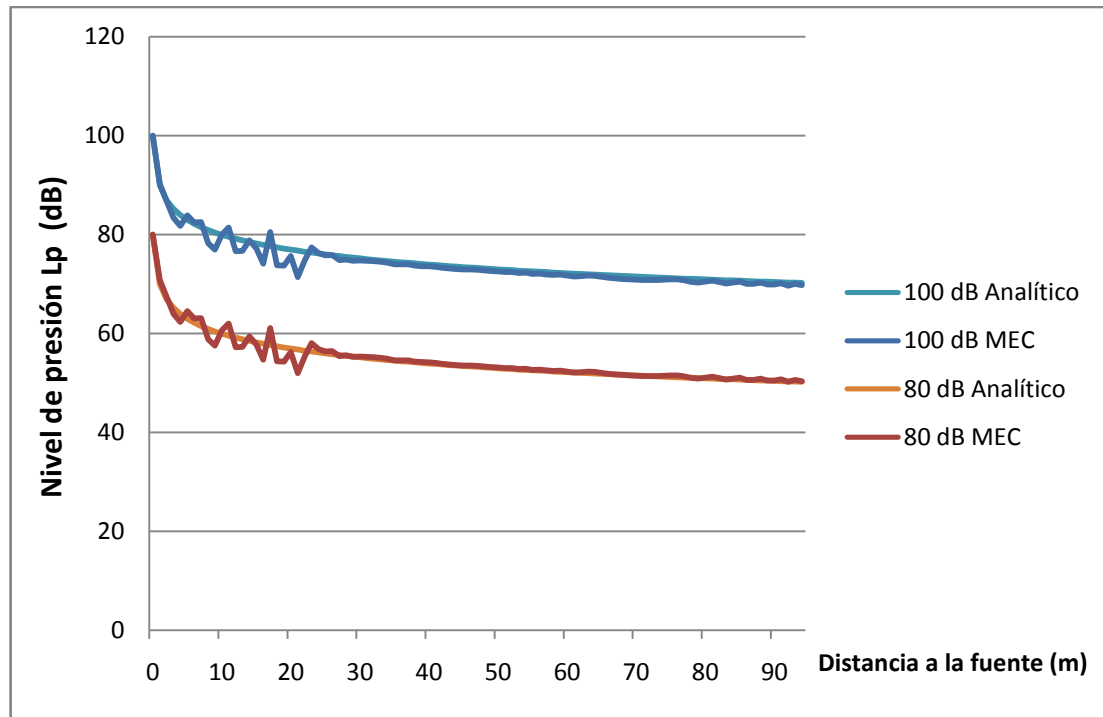


Gráfico 6. Frecuencia 4000 Hz Radio de la fuente 0,10 m y elementos de 0,021 m

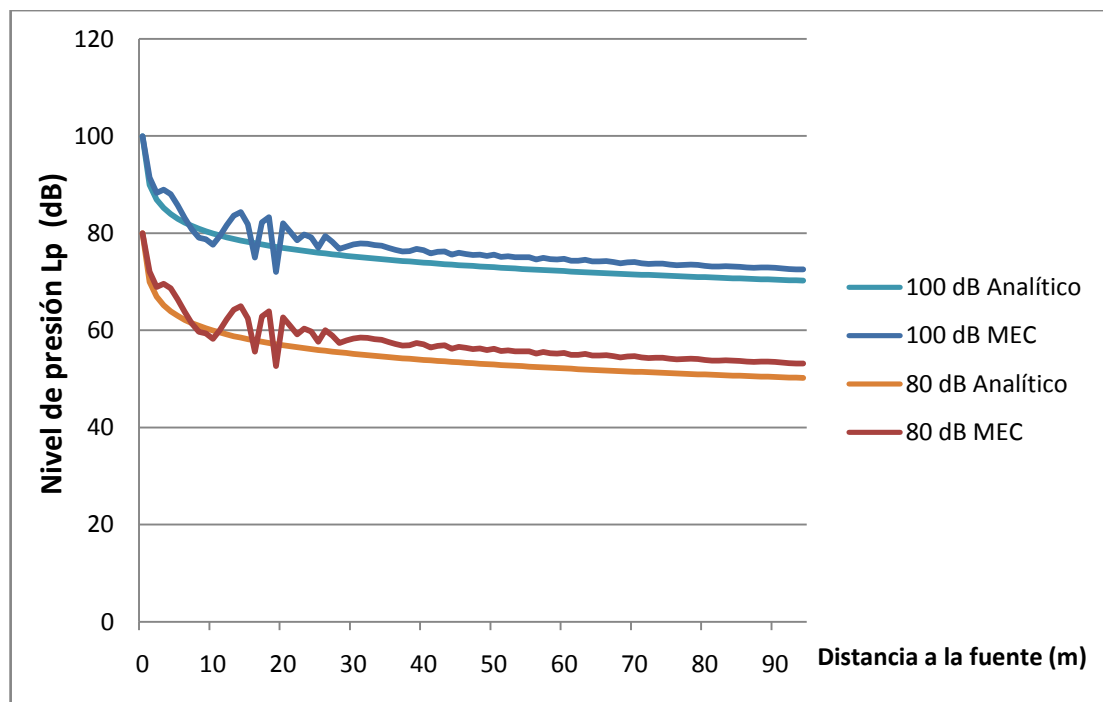


Gráfico 7. Frecuencia 4000 Hz Radio de la fuente 0,20 m y elementos de 0,0063 m

De los análisis de los gráficos se extrae que las conclusiones realizadas con 600 Hz se pueden extrapolar también a 4000 Hz.

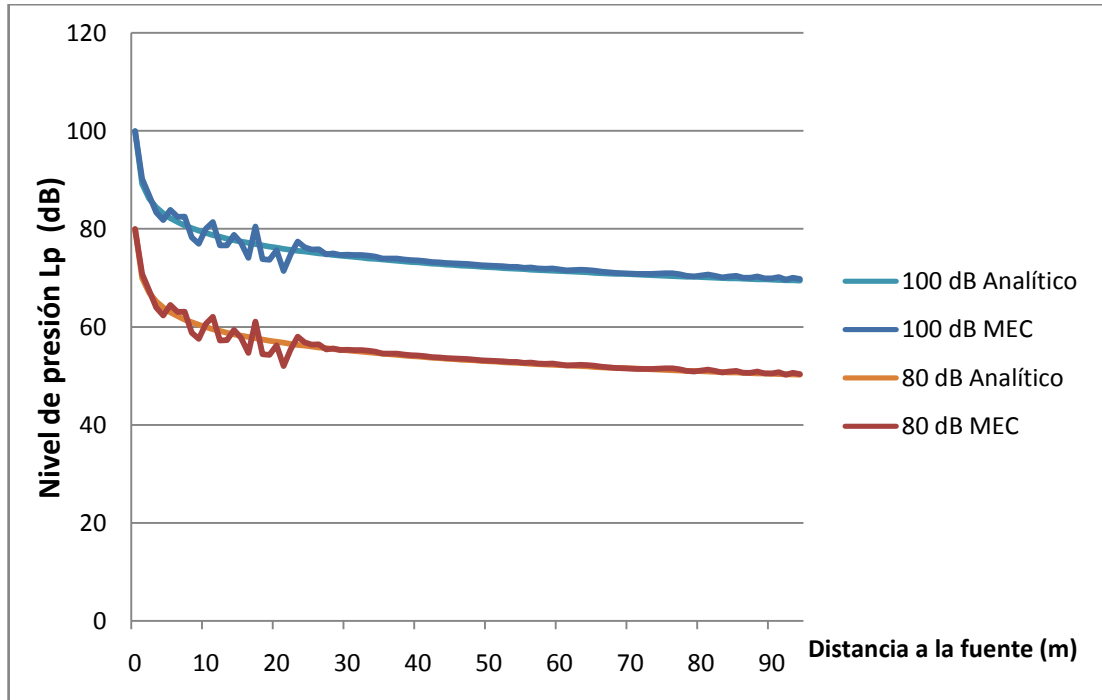


Gráfico 8. Frecuencia 4000 Hz Radio de la fuente 0,10 m y elementos de 0,0063 m.

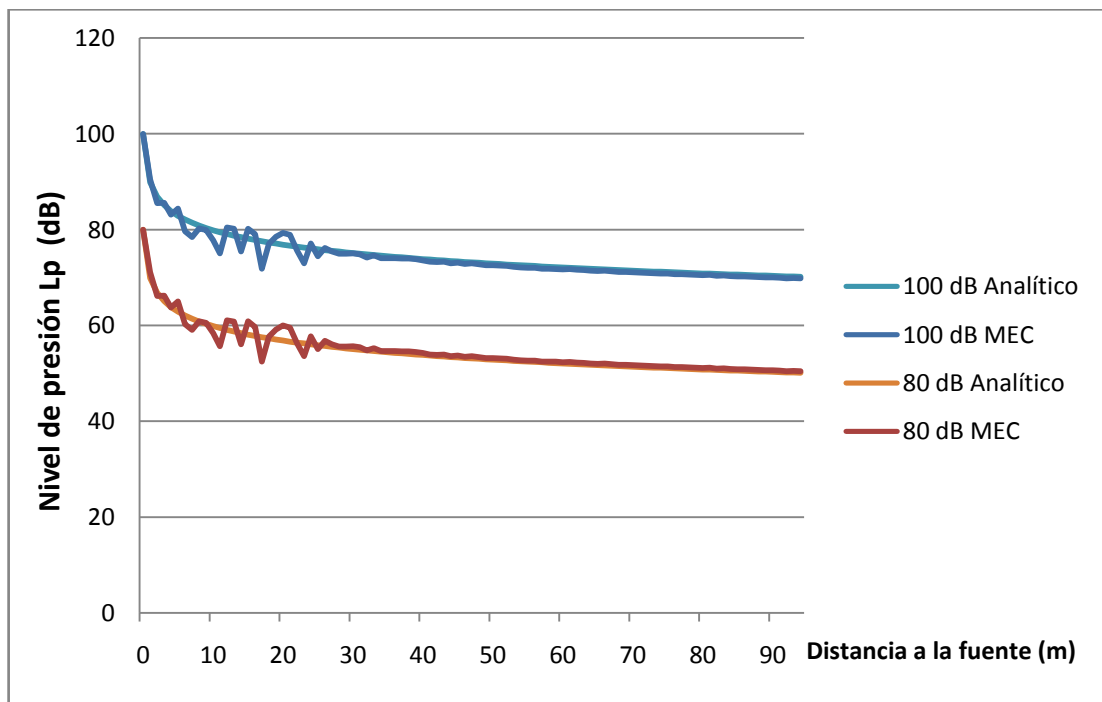


Gráfico 9. Frecuencia 2000 Hz Radio de la fuente 0,10 m y elementos de 0,021 m.

Una vez elegidos el radio de la fuente, 0,10 m, y el tamaño del elemento, 0,021 m, se comprueba la precisión para otras dos frecuencias, 800 Hz y 2000 Hz, siendo los resultados completamente satisfactorios. Se observa que sigue existiendo buena precisión para todas las frecuencias, pero levemente mayor para frecuencias cuanto más altas y menor para frecuencias cuanto más bajas.

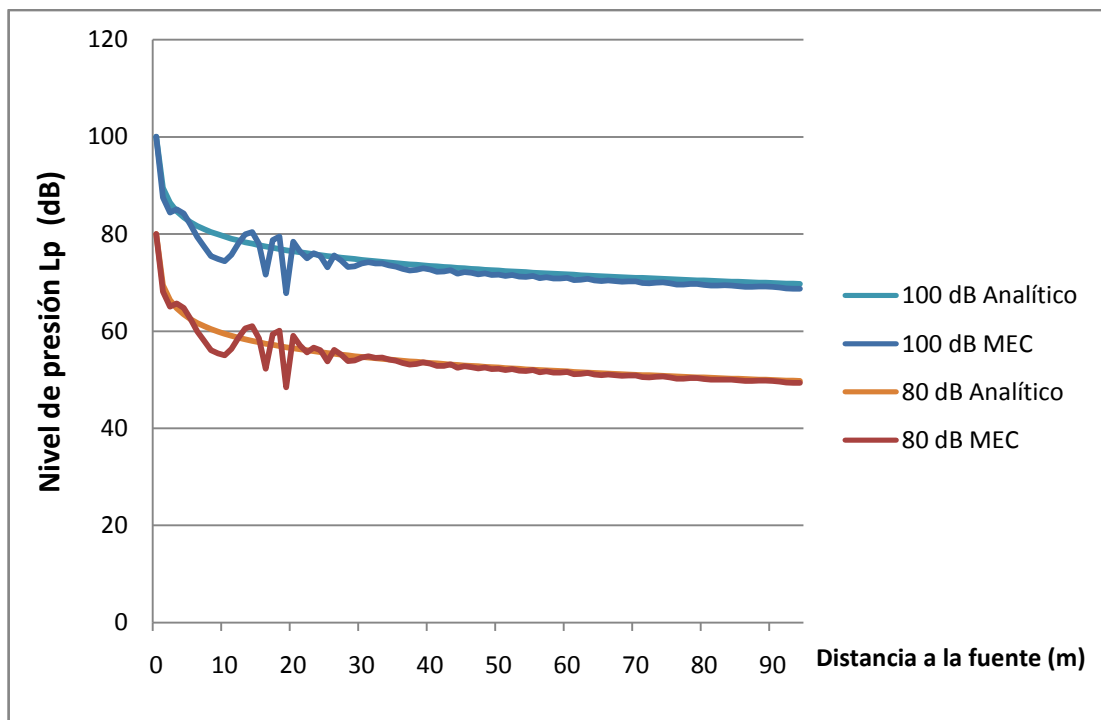


Gráfico 10. Frecuencia 800 Hz Radio de la fuente 0,10 m y elementos de 0,021 m

#### 4.2. Caso 2. Fuente con diferentes tipos de suelos.

El siguiente caso que se ha analizado para comprobar la precisión del MEC y su validación en su caso, se ha realizado suponiendo una fuente que emite sobre un suelo con diferentes grados de dureza. Se trataría de analizar el caso de un tren que circula por un terreno horizontal en campo abierto, sin la presencia de edificios, árboles, terraplenes u otros elementos como pantallas acústicas que alteren el campo acústico.

El estudio de este caso es muy importante, porque como ya se ha comentado al hablar de barreras acústicas, es el parámetro IL o pérdidas por inserción el que mide el aislamiento que produce una barrera, ofreciendo la diferencia de nivel de presión sonora que se percibe tras la barrera entre la situación sin barrera y con barrera.

Para ello se ha utilizado el método explicado en el capítulo Física del sonido, y concretamente en Cálculo semiempírico de propagación de ruido. Resulta muy interesante este método de comparación porque se consigue que una vez comprobado que el modelo cumple con las ecuaciones teóricas de la acústica, también cumple con fórmulas que provienen de mediciones realizadas sobre el terreno en casos reales.

De todos los parámetros que se han detallado en ese apartado sólo se han utilizado los correspondientes a la atenuación por divergencia, la atenuación por la absorción del aire, y la atenuación debida al suelo. La primera de ellas es independiente del tipo de suelo, así como de la frecuencia de estudio, pero no ocurre lo mismo en las otras.

En la atenuación por la absorción del aire se debe indicar la temperatura ambiente, la humedad relativa y la frecuencia de estudio. Se han considerado unas condiciones climáticas normales con una temperatura ambiente de 20 °C y una humedad relativa del 50 %. Como se puede comprobar en la tabla expuesta en el capítulo correspondiente su importancia es pequeña para pequeñas distancias como las aquí estudiadas. No obstante se ha contemplado en el cálculo.

Para el cálculo de la atenuación debida al suelo son importantes varios factores como la altura del receptor, la altura de la fuente, la distancia entre ellos y la frecuencia de estudio. En las tablas del capítulo correspondiente se ofrecen valores para alturas de la fuente de 0,01 m, 0,30 m y 1,2 m. La altura del receptor es siempre constante e igual a 1,80 metros. Se ofrecen también para tres tipos de suelos distintos, duro como pueden ser el asfalto y el hormigón, blando, como el correspondiente a una zona cubierta por vegetación o hierba, y muy blando, como el suelo cubierto por nieve o por un bosque de pinos.



Por todo ello, se ha considerado conveniente el estudio para terrenos duros y muy blandos, por encontrarse en los extremos de los valores de resistividad, con varias frecuencias y con alturas de la fuente de 0,30 m y 1,20 m, y una vez comprobada la bondad de los resultados y primeras conclusiones comprobarlas en los suelos blandos. En todos los casos se han contemplado elementos de 0,10 centímetros de tamaño, dejando el análisis del tamaño del elemento para el siguiente caso, y comprobándose que la elección es correcta.

En el siguiente gráfico se estudia el caso de una fuente situada a 1,20 metros de altura, sobre un suelo duro lo cual supone una resistividad de  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Se observa una gran precisión, excepto en los primeros 15 metros de distancia donde se producen unos picos normales en este tipo de simulaciones al realizarlas para una sola frecuencia y que si se estudiaran en ancho de banda desaparecerían. A partir de ahí converge rápidamente a la solución del método semiempírico.

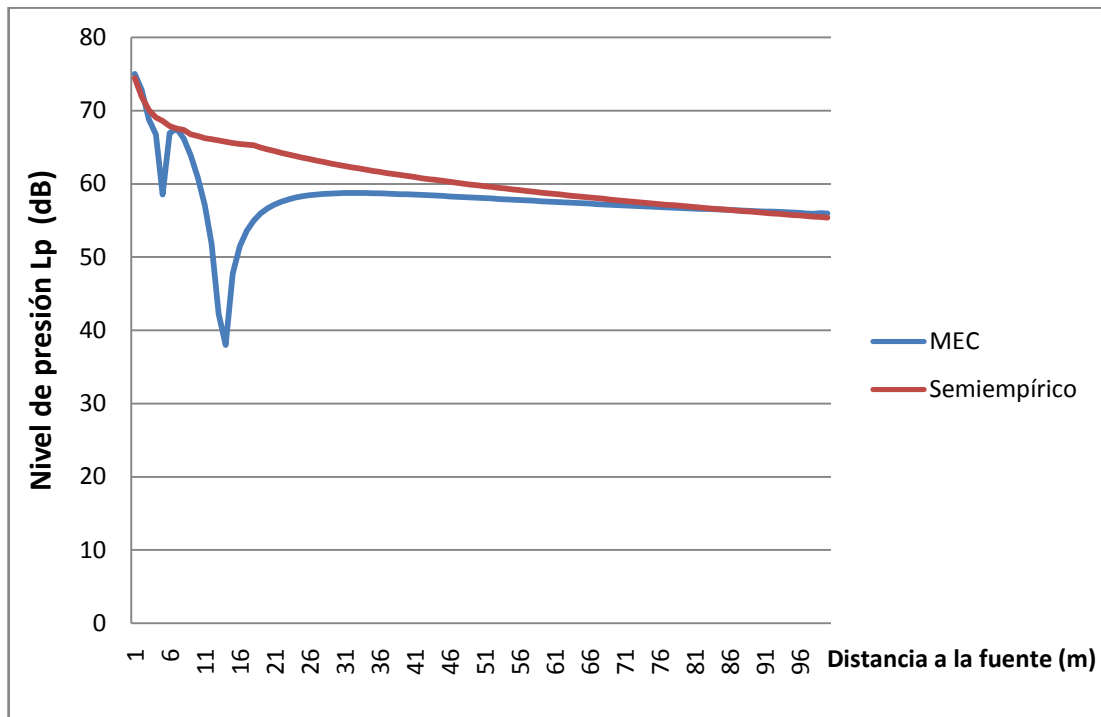


Gráfico 11. Frecuencia 500 Hz Altura de la fuente 1,20 m y resistividad  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$

A continuación se estudia el mismo caso pero para altas frecuencias como son 4000 Hz. La precisión obtenida es ligeramente superior, convergiendo a una distancia más cercana a la fuente.

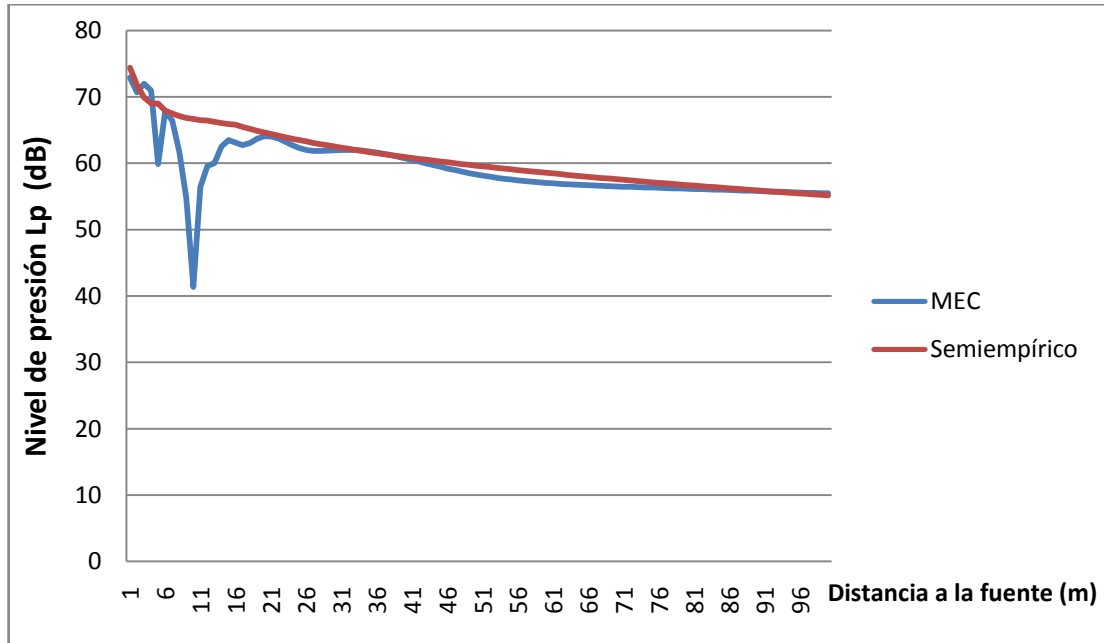


Gráfico 12. Frecuencia 4000 Hz Altura de la fuente 1,20 m y resistividad  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

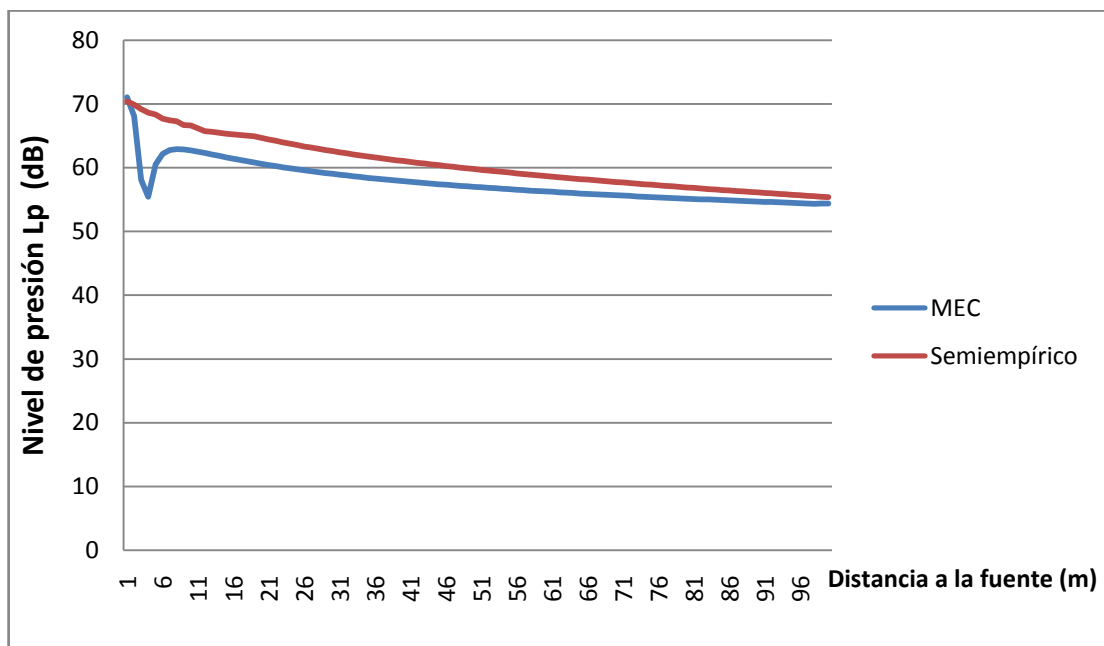


Gráfico 13. Frecuencia 500 Hz, altura de la fuente 0,30 m y resistividad  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Resulta interesante comprobar si el comportamiento es el mismo cuando la altura de la fuente disminuye. Se ha realizado el estudio para los mismos parámetros de frecuencia y de resistividad pero con una altura de la fuente de sólo 0,30 metros. En el gráfico 13 se observa una buena precisión pero un poco menor que en los casos anteriores ya que existe una divergencia que va disminuyendo desde 4 dB hasta 1 dB.

En el caso de altas frecuencias se observa un pico en el MEC, debido a realizar el estudio en una sola frecuencia, en la zona de 40 metros de distancia que distorsiona la gran precisión que en realidad tiene, porque el método semiempírico no puede contemplar estos picos que aparecen en monofrecuencia. En la zona próxima a la fuente el resultado oscila con pequeñas variaciones sobre la solución semiempírica pero a 45 metros de distancia aparece un pico tras el que la solución del MEC converge rápidamente hacia la solución semiempírica. Este hecho por lo tanto no invalida el modelo sino que indica que en las soluciones en monofrecuencia no son definitivas y que muchos de los picos que aparecen, desaparecen al realizar el estudio en ancho de banda.

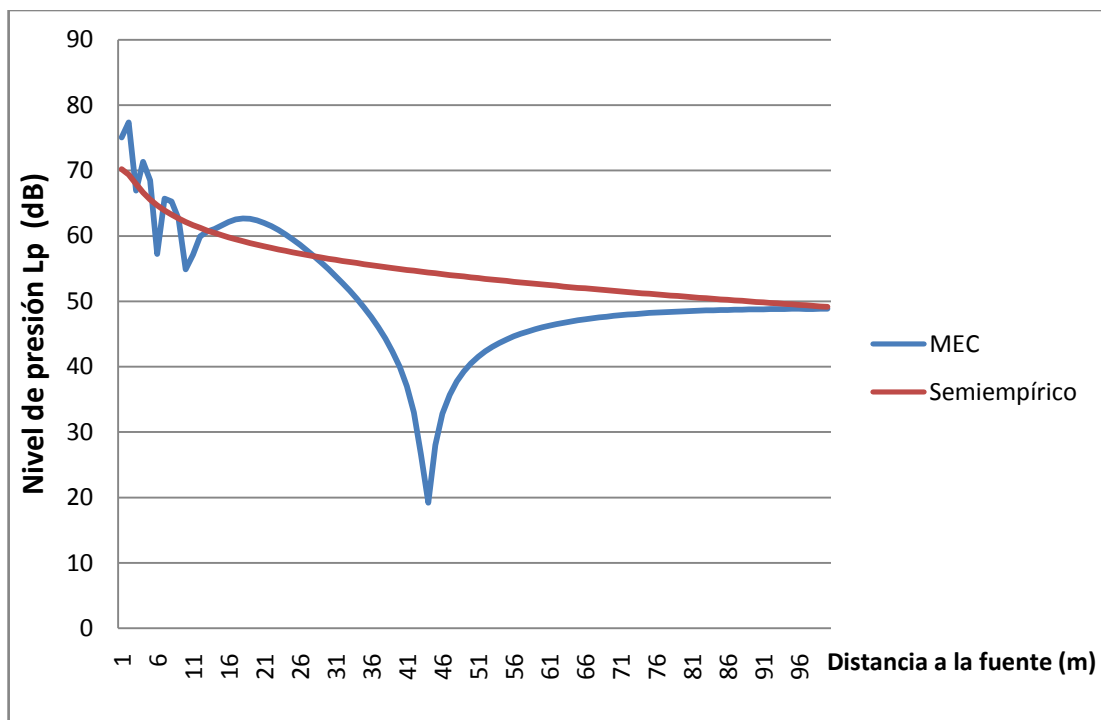


Gráfico 14. Frecuencia 4000 Hz, altura de la fuente 0,30 m y resistividad  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Se concluye por tanto que con suelos duros la precisión es alta para todas las frecuencias y alturas de la fuente, aunque la precisión es mayor según aumenta la frecuencia y la altura de la fuente.

A continuación se realiza el estudio con las mismas frecuencias y alturas de la fuente, pero con suelos muy blandos. Se han realizado las simulaciones con una resistividad de  $\sigma = 10 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

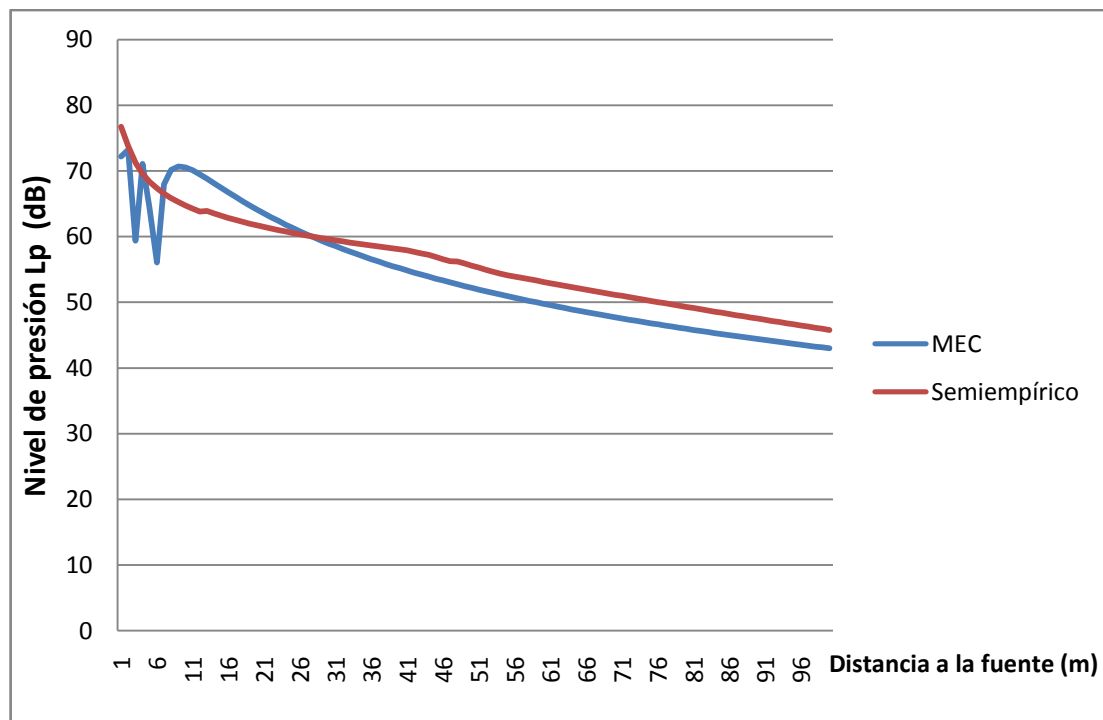


Gráfico 15. Frecuencia 500 Hz, altura de la fuente 1,20 m y resistividad  $\sigma = 10 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

En este caso los resultados siguen siendo precisos pero no tanto como en los casos anteriores. Para el caso de la fuente elevada a 1,20 metros y frecuencia de 500 Hz, el MEC presenta una divergencia de 3 dB con el modelo semiempírico, presentando resultados que convergen hacia esa diferencia. Para el caso de frecuencias elevadas, frecuencia de 4000 Hz el resultado del MEC oscila sobre la solución empírica, presentando bastante precisión los valores medios con una desviación en torno a los 7 u 8 dB, que va disminuyendo progresivamente, pero valores medios con una divergencia de 1 dB.

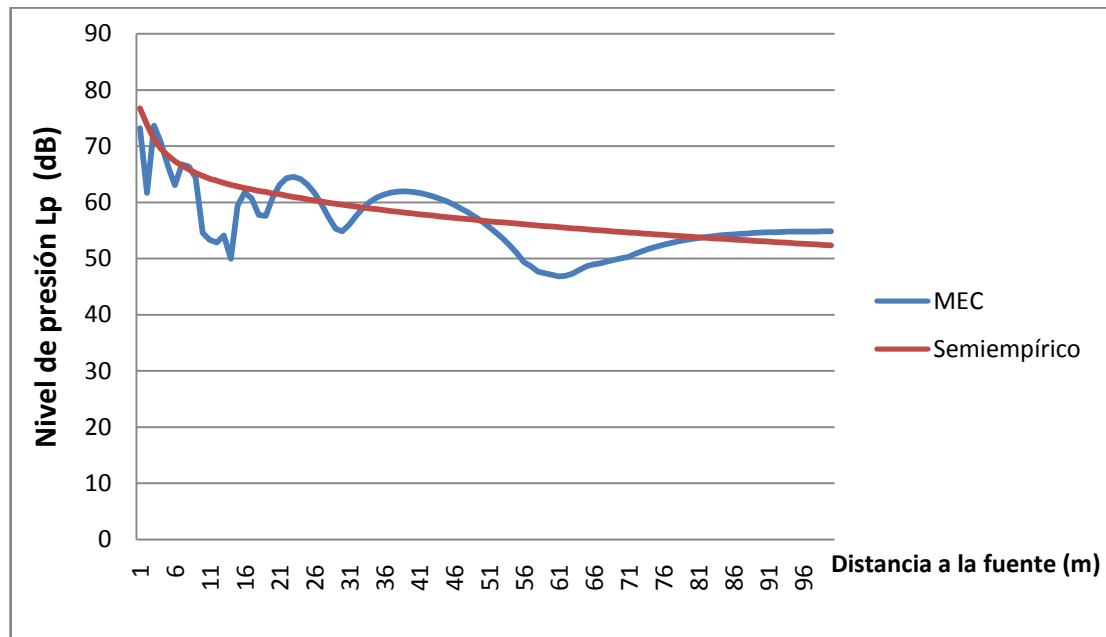


Gráfico 16. Frecuencia 4000 Hz, altura de la fuente 1,20 m y resistividad  $\sigma = 10 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

En el caso de la fuente a una altura de 0,30 metros, para la frecuencia de 500 Hz, si bien sigue manteniendo la convergencia, la diferencia es mayor como se puede comprobar en el gráfico. La divergencia pasa a ser de 5 dB pero disminuyendo para distancias más grandes que las representadas.

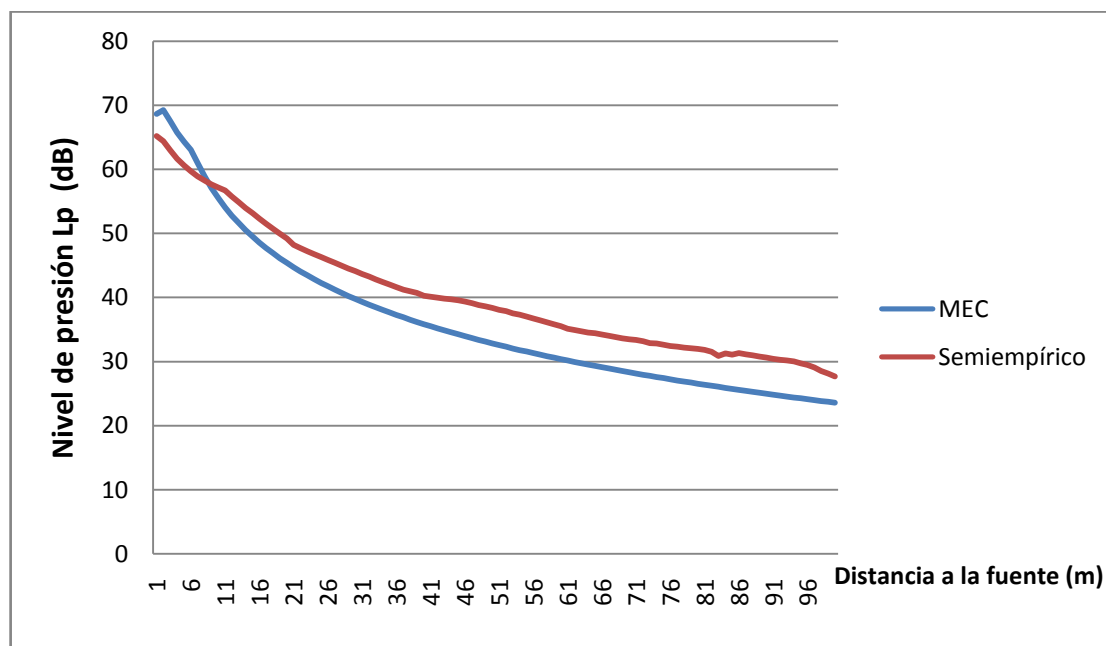


Gráfico 17. Frecuencia 500 Hz, altura de la fuente 0,30 m y resistividad  $\sigma = 10 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Para el caso de altas frecuencias los resultados mejoran consiguiéndose una convergencia y precisión casi total, excepto en las distancias más próximas a la fuente como es habitual.

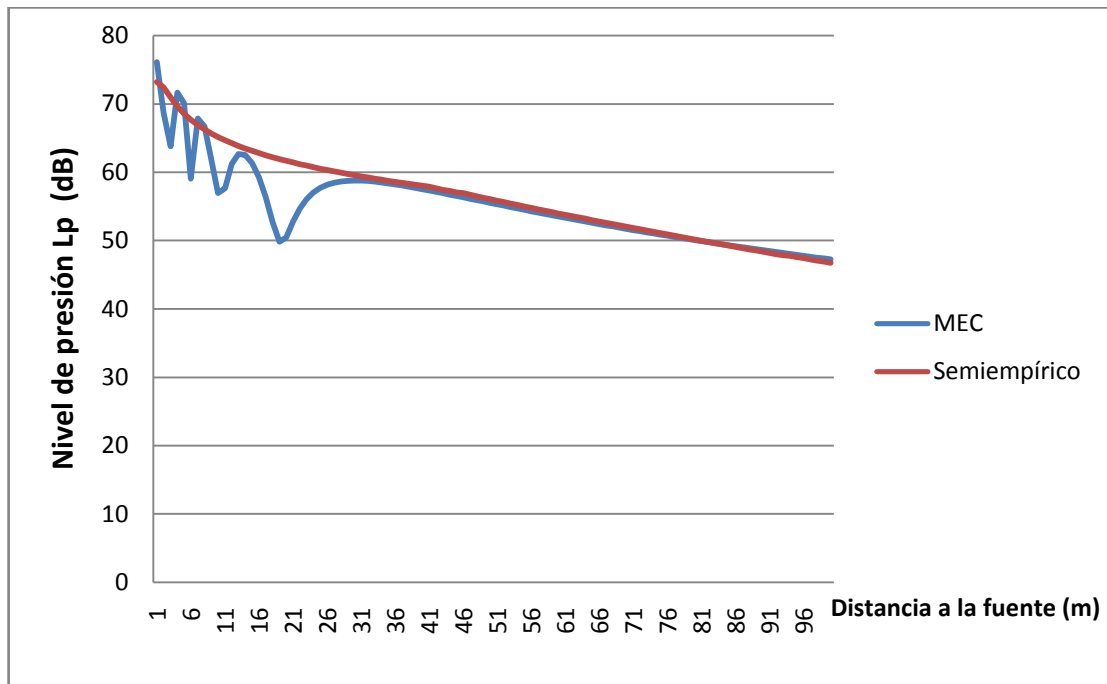


Gráfico 18. Frecuencia 4000 Hz, altura de la fuente 0,30 m y resistividad  $\sigma = 10$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Como conclusión se puede decir que a frecuencias elevadas la precisión es mayor que a bajas frecuencias, mejorando en este caso la precisión para alturas de la fuente más bajas. Los resultados son más precisos para suelos duros que suelos blandos.

Para corroborar estas conclusiones se ha analizado el caso de un suelo de dureza intermedia, con resistividad  $\sigma = 500$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Se ha estudiado sólo con la frecuencia de 4000 Hz observándose un comportamiento similar para bajas frecuencias.

Para el caso de la fuente situada a una altura de 1,20 metros se observa que los resultados son más precisos que para suelo muy blando, aunque guardan bastante similitud en la forma, como no podía ser de otra manera. La amplitud de la divergencia está en torno a 5 dB.

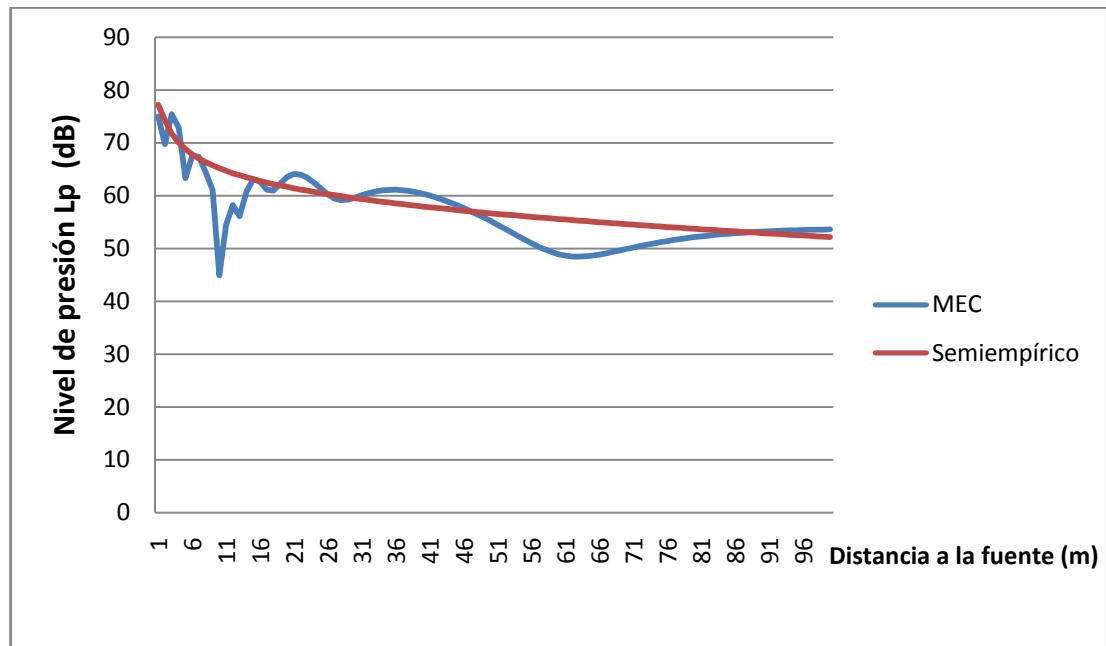


Gráfico 19. Frecuencia 4000 Hz, altura de la fuente 1,20 m y resistividad  $\sigma = 500$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

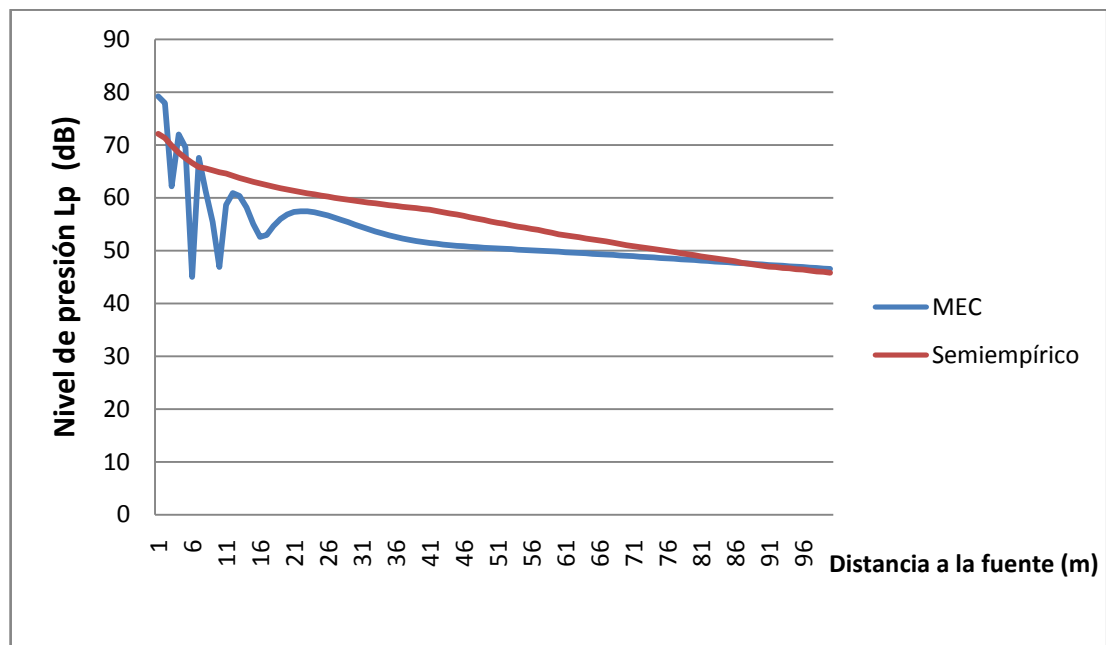


Gráfico 20. Frecuencia 4000 Hz, altura de la fuente 0,30 m y resistividad  $\sigma = 500$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Por otra parte, para la fuente situada a 0,30 metros de altura, se observa que la precisión es menor que para suelo muy blando, aumenta ligeramente la divergencia en la zona de los 45 metros, donde para suelo duro se produce el pico.

Se concluye por lo tanto que la precisión es mayor cuanto mayor es la frecuencia, para todas las alturas de la fuente y todas las durezas de los suelos. Pero para fuentes más elevadas aumenta la precisión con la dureza del suelo, y para fuentes situadas cerca del suelo aumenta la precisión según disminuye la dureza del suelo.

### **4.3. Caso 3. Fuente con diferentes tipos de suelos y pantalla lisa.**

El último caso que se ha analizado para comprobar la precisión del MEC y su validación ha consistido en suponer una fuente que emite sobre un suelo con diferentes grados de dureza ante una pantalla acústica vertical y lisa. Al igual que en el caso anterior se trataría de analizar el caso de un tren que circula por un terreno horizontal en campo abierto, sin la presencia de edificios o árboles, pero con una pantalla acústica. Para el estudio analizado en todos los casos se ha supuesto una pantalla de 3,50 metros de altura y una distancia de la pantalla a la fuente de 10 metros de distancia.

Una vez comprobada la buena precisión que presenta el MEC para el caso liso se calcula la pérdida por inserción,  $IL$ , por diferencia entre los resultados obtenidos para el caso sin pantalla y el caso con pantalla.

$$IL = L_{sin\ pant.} - L_{con\ pant.}$$

Por lo tanto se deben realizar dos simulaciones para cada caso de estudio.

Por otra parte, para compararlo con un método analítico se ha comparado con la Teoría de Rayos Difractados de Keller (1961) y con los trabajos de Sommerfeld (1896), que se desarrolla en la Tesis Doctoral de Simón Hidalgo F. (1997), el cual desarrolla un algoritmo para realizar el cálculo de la pérdida por inserción, que contempla la altura de la fuente y del receptor, la altura de la pantalla, así como la distancia de fuente y receptor a ella y las resistividades de los suelos entre fuente y pantalla y entre pantalla y receptor. El estudio se realiza en frecuencia. El desarrollo de la Teoría de Rayos Difractados de Keller se puede consultar en la bibliografía.



En primer lugar se han analizado dos casos cualesquiera, uno para bajas frecuencias y otro para altas con la única finalidad de estudiar el número de elementos necesario para obtener una alta precisión. La altura de la fuente es de 1,20 metros de altura y la altura del receptor 1,80 metros. Se han realizado varias simulaciones disminuyendo el tamaño del elemento progresivamente. En los gráficos únicamente se aportan parte de las simulaciones realizadas para su mejor comprensión. Se aportan parte de las que no ofrecen precisión y parte de las que alcanzan una precisión aceptable.

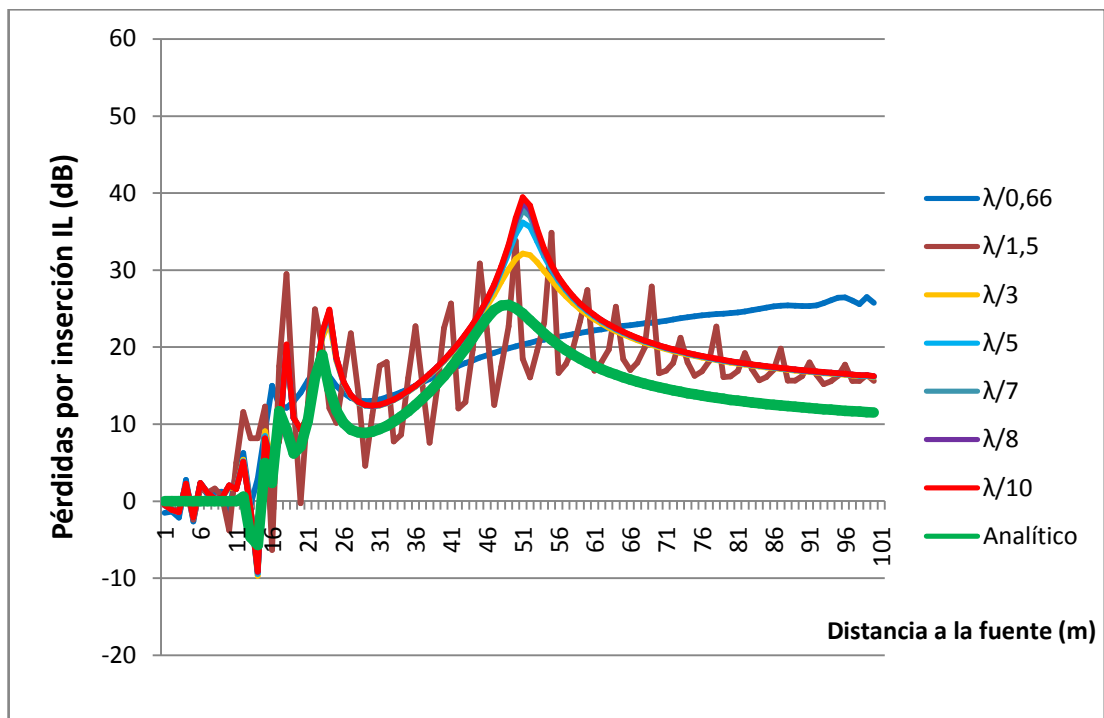


Gráfico 21. Frecuencia 500 Hz y resistividad  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .  $\lambda = 0,686 \text{ m}$ .

Los resultados se ofrecen relacionando el tamaño del elemento con el de la longitud de onda. Esto hace que para los casos estudiados, para un mismo tamaño de elemento la precisión sea distinta para bajas frecuencias que para altas. Se aporta también el resultado ofrecido por el método analítico para poder comparar la precisión alcanzada.

De los resultados se obtiene que para valores de tamaño de elemento del orden de la longitud de onda se obtienen resultados muy malos y es a partir de resultados de

$\lambda/1,5$  cuando comienzan a tender hacia los valores del modelo analítico, encontrando resultados ya totalmente idénticos, para valores superiores a  $\lambda/3$ , excepto una zona alrededor de 55 metros de distancia, en la que existe un punto en el que se produce un pico y en la que se producen resultados idénticos a partir de  $\lambda/7$ . Como se puede apreciar existe una pequeña diferencia entre el resultado analítico y el del MEC de 4 dB para grandes distancias. Estas diferencias se analizarán más adelante.

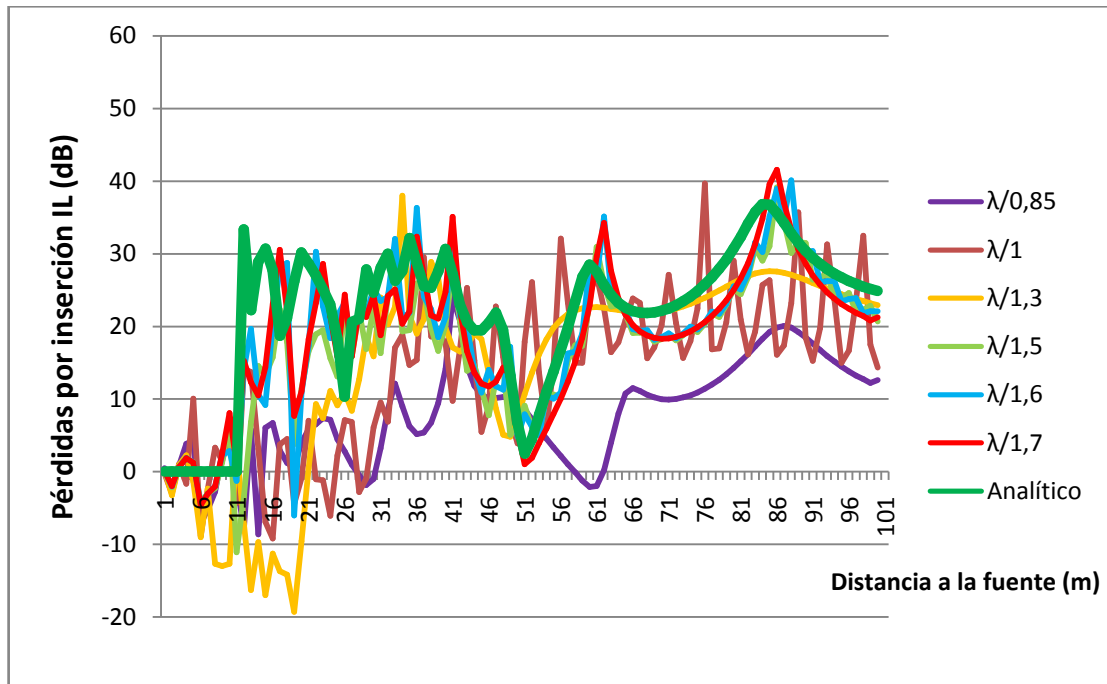


Gráfico 22. Frecuencia 4000 Hz y resistividad  $\sigma = 10 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .  $\lambda = 0,0857 \text{ m}$ .

Para altas frecuencias se necesita un tamaño de elemento mucho menor en valores absolutos, pero no en relativos respecto a la longitud de onda. Incluso se encuentran resultados muy precisos para tamaños de elementos que sean inferiores a  $\lambda/1,5$ . Se observa que para tamaños superiores, los resultados son muy imprecisos, pero que a partir de tamaños inferiores de  $\lambda/1,6$ , los resultados siguen los picos encontrados en el método analítico con cierta diferencia en algunas zonas, pero con una precisión aceptable, que podría disminuir con la reducción del tamaño de los elementos pero que el incremento de tiempo necesario de cálculo no compensa con los resultados.

Se puede concluir que en general para elementos constantes un tamaño aconsejable sería de  $\lambda/3$ . No obstante se obtienen resultados bastante ajustados con tamaños

superiores, que si bien para bajas frecuencias no resulta necesario aumentarlo, en determinados problemas muy complejos sí que puede ser justificado en el caso de altas frecuencias por el elevado tiempo de computación, alcanzándose resultados precisos para tamaños de  $\lambda/1,6$ . Por lo tanto, para los casos estudiados en esta Tesis, el tamaño máximo elegido,  $\lambda/3$ , para la frecuencia de 600 Hz sería suficiente con 19 cm, pero se ha tomado 10 cm, y para 2000 Hz sería necesario 5,7 cm, y se ha tomado 5 cm. La diferencia de tamaño en los elementos provoca que el tiempo de computación aumente considerablemente, multiplicándose por 10 en los casos de altas frecuencias en el equipo informático utilizado. Para las fuentes, se ha tomado en ambos casos un tamaño de elemento de 2 cm.

Una vez analizado el tamaño del elemento necesario para alcanzar una buena precisión de los casos simulados es necesario comprobar la validación del método en presencia de pantallas.

En los siguientes gráficos se estudia el caso de una fuente situada a 1,20 metros de altura, sobre un suelo duro lo cual supone una resistividad de  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Se realiza el estudio en dos frecuencias como anteriormente, 500 Hz y 4000 Hz. Los gráficos obtenidos no son de formas tan suaves como los del caso anterior de sólo suelo, debido a la mayor irregularidad del contorno. Además, como el estudio se realiza para monofrecuencia no se laminan como en el caso de estudio en ancho de banda. No obstante, se observa una gran precisión, sobre todo para el caso de bajas frecuencias con unas diferencias en torno a 4 – 5 dB. Para el caso de altas frecuencias y debido a la gran cantidad de picos, aparenta menor precisión, pero se puede comprobar que la precisión es también muy buena.

De los resultados se concluye que las pérdidas por inserción de la pantalla en el caso de bajas frecuencias van aumentando progresivamente hasta alcanzar un valor de unos 15 dB en los primeros 30 metros tras ella, presentando posteriormente un aumento hasta un máximo de 25 dB que ya posteriormente va disminuyendo hasta el valor asintótico en torno a los 10 dB. Para el caso de altas frecuencias se observa una

oscilación en torno a los 10 dB  $\pm$ 10 dB en los primeros 40 metros para más tarde aumentar y tender hacia un valor asintótico cercano a los 20 dB.

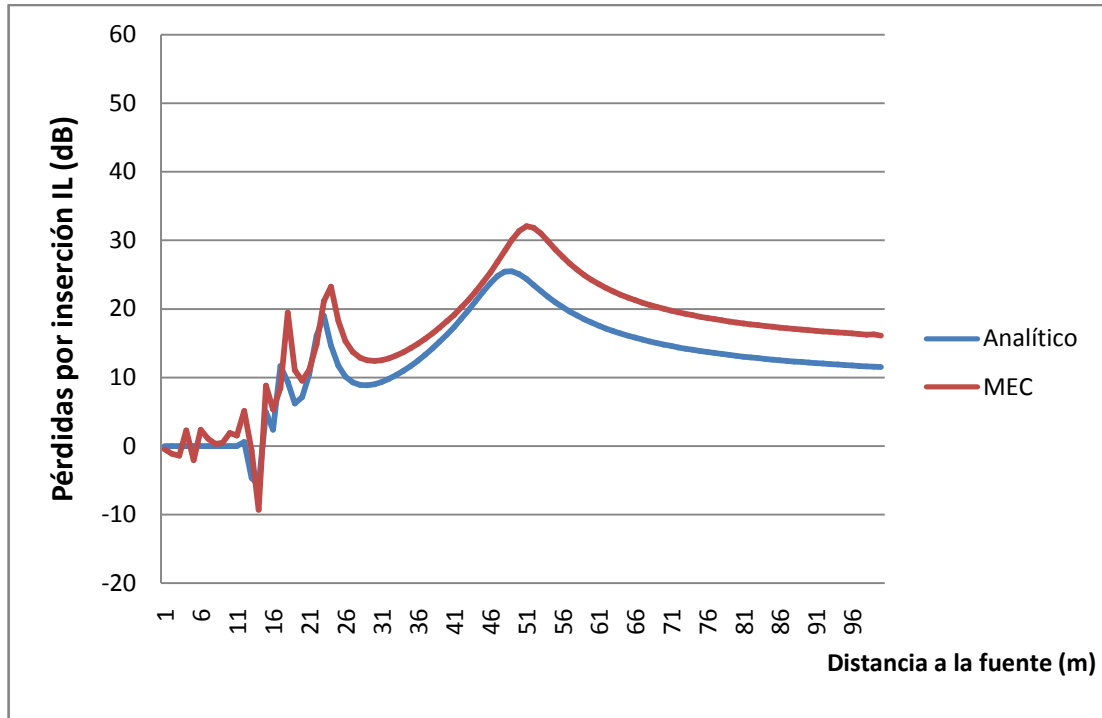


Gráfico 23. Frecuencia 500 Hz y resistividad  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

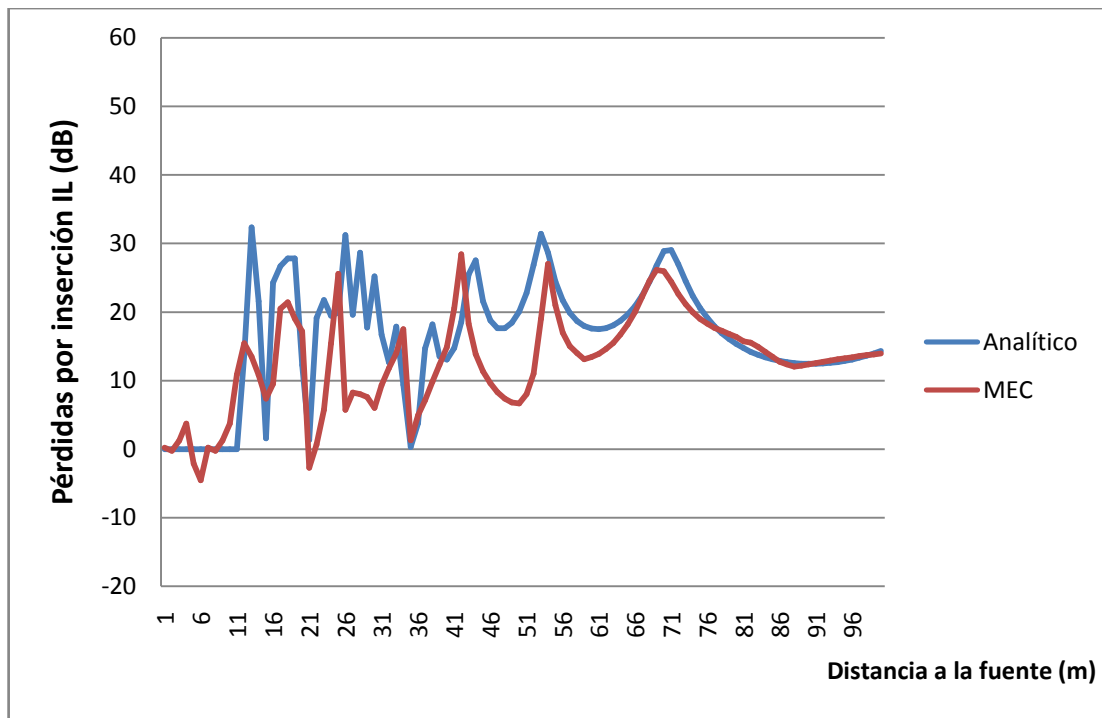


Gráfico 24. Frecuencia 4000 Hz y resistividad  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

En los siguientes gráficos se estudia el caso para suelos blandos, con los mismos parámetros para la fuente, receptor y para la pantalla. Para el suelo blando se supone una resistividad de  $\sigma = 10 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Se realiza el estudio en dos frecuencias como anteriormente, 500 Hz y 4000 Hz. Se observa un comportamiento similar al anterior, es decir, ajuste muy preciso para bajas frecuencias y algo peor para altas frecuencias, pero manteniendo un comportamiento similar en cuanto a los picos que se forman con el resultado analítico.

De los resultados se concluye que las pérdidas por inserción de la pantalla en el caso de bajas frecuencias parten de un valor cercano a 20 dB para ir disminuyendo progresivamente hacia el valor asintótico de 5 dB, comprobándose el mismo efecto que se comenta en la bibliografía de que para suelos blandos la efectividad de las pantallas es menor que para suelos duros. Para el caso de altas frecuencias se observa una oscilación en torno a los  $12 \text{ dB} \pm 15 \text{ dB}$  en los primeros 40 metros para más tarde aumentar y tender hacia un valor asintótico cercano a los 18 dB. Se observan divergencias frente al método analítico ya que pese a que hay zonas en las que la convergencia es perfecta, en otras zonas la divergencia alcanza los 20 dB, siendo la divergencia media de 9 dB. El comportamiento de las curvas es similar. Si se comparan los resultados obtenidos en comparación con el caso de suelo duro para el método analítico, se puede aseverar que el resultado del MEC resulta más coherente con los resultados comentados en la bibliografía.

Se aporta también el estudio para suelos medios para comprobar si el comportamiento es extrapolable. La resistividad del suelo se ha tomado como  $\sigma = 500 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Para el caso de altas frecuencias, se observa una vez más el comportamiento variable del valor de las pérdidas por inserción pero menor que en caso de suelo blando. Los dos métodos de cálculo se acercan bastante en sus resultados, presentando en los primeros 30 metros una diferencia en los cálculos de sólo 4 dB y un perfil muy similar. En la zona comprendida entre 30 y 50 metros se produce una separación de las dos gráficas con una divergencia de unos 10 dB para volver a converger posteriormente a un mismo valor asintótico de 20 dB.

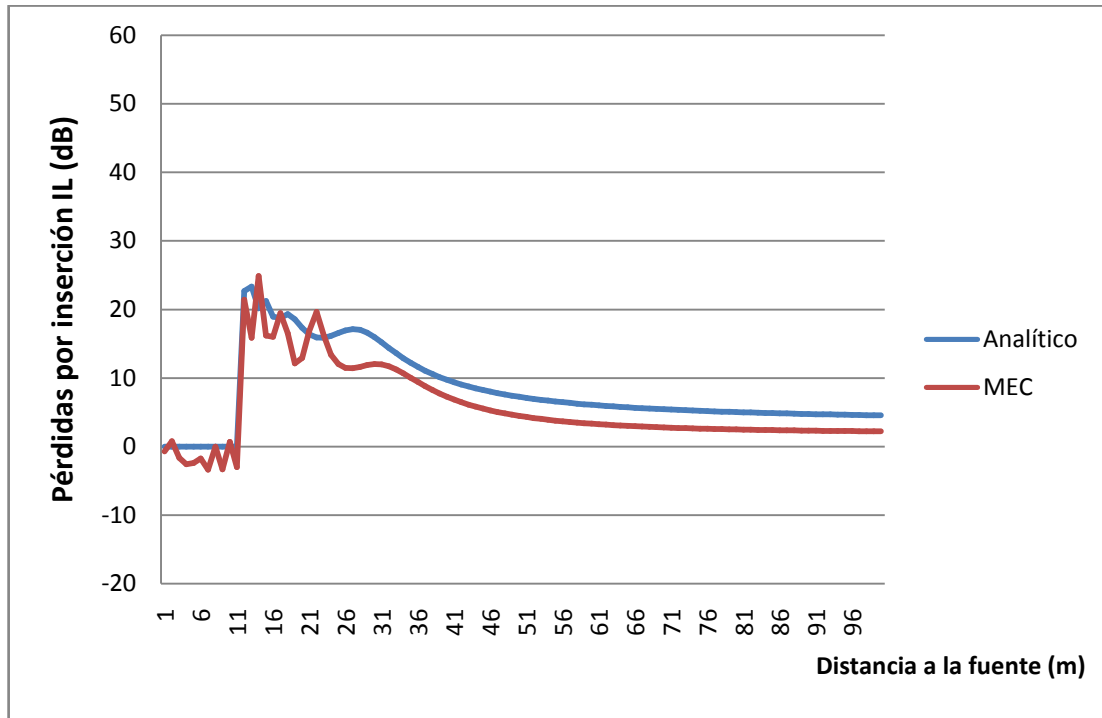


Gráfico 25. Frecuencia 500 Hz y resistividad  $\sigma = 10 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

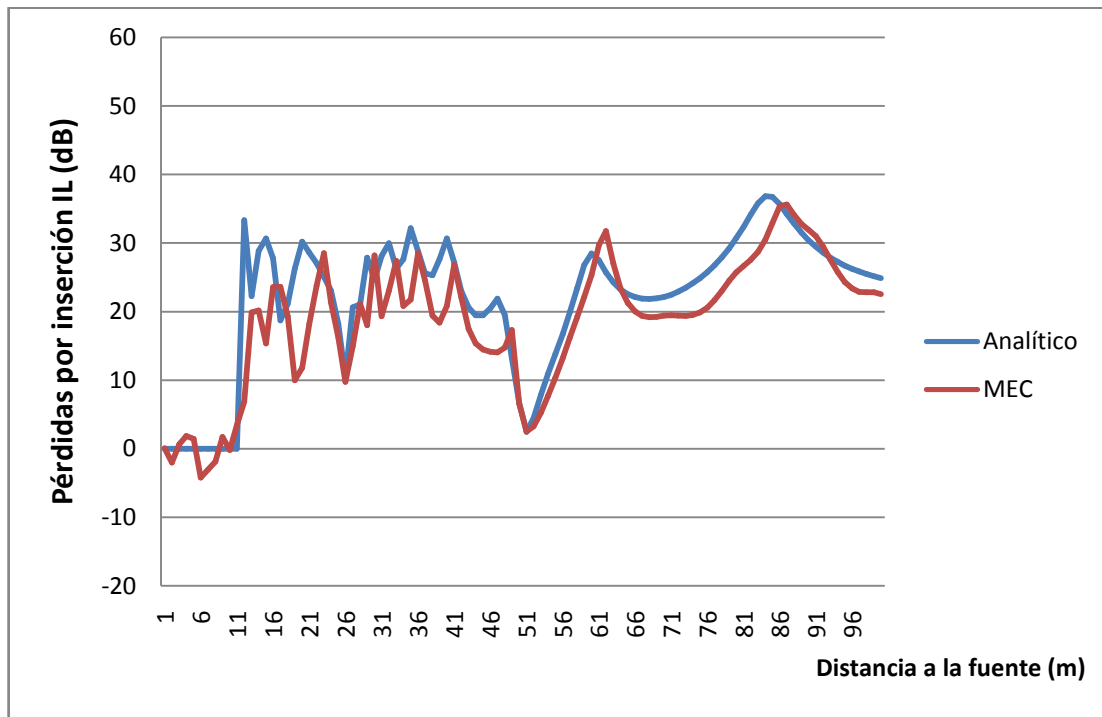


Gráfico 26. Frecuencia 4000 Hz y resistividad  $\sigma = 10 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

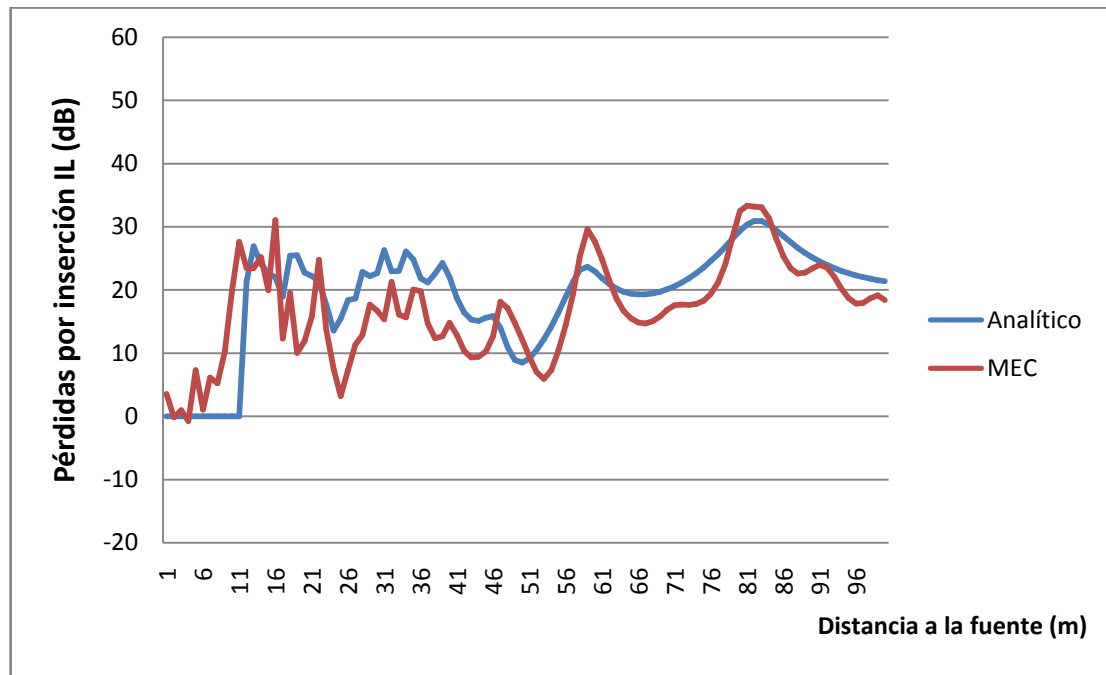


Gráfico 27. Frecuencia 4000 Hz y resistividad  $\sigma = 500 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Para el caso de bajas frecuencias como 600 Hz, se observa una vez más un buen comportamiento, con una divergencia entre ambos métodos que tiende a 6 dB. Como en el resto de los casos, y aunque la frecuencia es ligeramente mayor, las oscilaciones de la gráfica son menores.

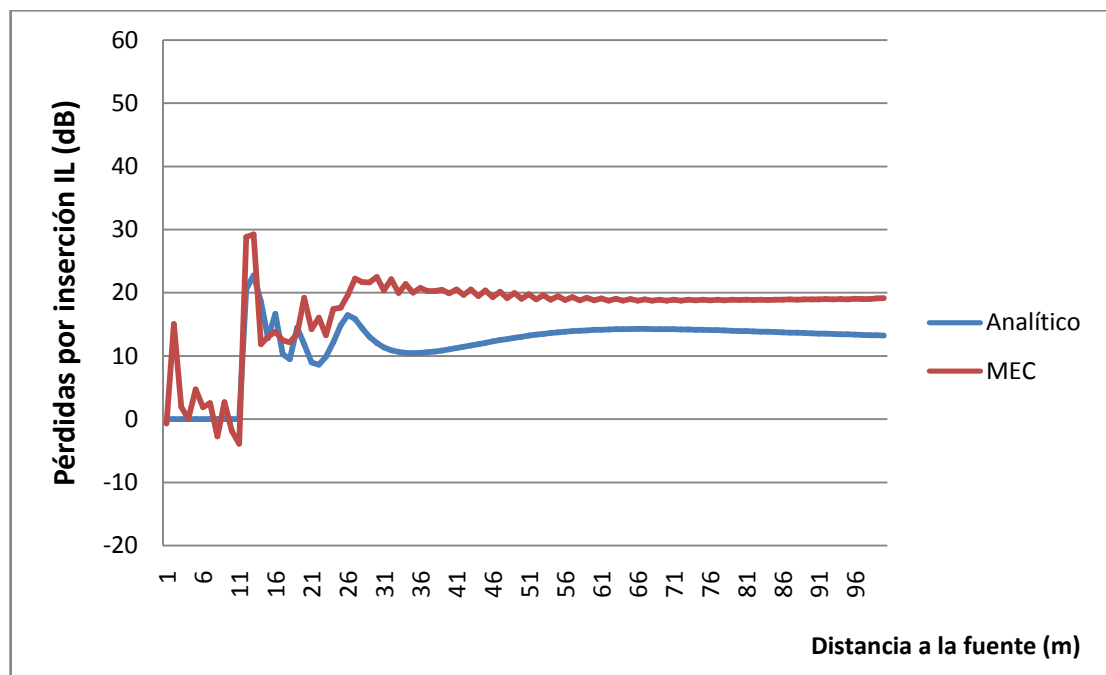


Gráfico 28. Frecuencia 600 Hz y resistividad  $\sigma = 500 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Tras el análisis de todos los casos estudiados, en el caso 1 para una fuente aislada en medio homogéneo, en el caso 2 para una fuente con diferentes tipos de suelos, y en el caso 3 para una fuente con diferentes tipos de suelos y pantalla lisa, en los que se ha contrastado el Método de Elementos de Contorno, con métodos analíticos y semiempíricos, comparando la influencia de la variación de diferentes parámetros, como intensidad de emisión, altura de la fuente, altura del receptor, resistividad del suelo, frecuencias, tamaño de los elementos, etc., se concluye que la precisión lograda por el modelo del Método de Elementos de Contorno es muy buena y permite el estudio de otras configuraciones de pantallas y fuentes de emisión, teniendo en cuenta la existencia de una divergencia que en la mayoría de los casos no será significativa, pero que para determinadas aplicaciones debería ser tomada en cuenta.



## **5. ESTUDIO DEL RUIDO AERODINÁMICO PRODUCIDO POR TRENES DE ALTA VELOCIDAD EN PRESENCIA DE PANTALLAS ACÚSTICAS.**

### **5.1. Introducción.**

En este apartado se recopilan los cálculos más representativos de los realizados con el MEC. Se han analizado varias configuraciones del problema con el fin de obtener conclusiones que ayuden a entender y posteriormente combatir el problema del ruido aerodinámico producido por el ferrocarril.

El estudio se ha realizado en monofrecuencia y aunque su precisión es muy alta, como se ha comprobado, el resultado final sobre el terreno que ofrecerá una pantalla determinada, será el obtenido para la suma de todas las frecuencias y será preciso realizar el estudio en ancho de banda. No obstante resulta muy acertado estudiar el comportamiento de la pantalla individual para cada una de las frecuencias para conocer su comportamiento de forma más detallada, ya que en ancho de banda se ocultan aspectos del comportamiento de la pantalla que en ocasiones podrían ser relevantes o incluso fundamentales, como determinados ruidos de frecuencia discreta y tonales, que en el ferrocarril se encuentran por ejemplo en el chirrido de las ruedas y en muchas de las fuentes de ruido aerodinámico.

Tras todo lo expuesto en los apartados anteriores el problema se plantea con los siguientes elementos básicos:

- Suelo liso, estudiando diferentes resistividades, desde suelos blandos a suelos duros.
- Una pantalla acústica, la cual podrá ser lisa sin cumbre o estar dotada de cumbre, analizándose varios tipos que se detallarán más adelante y estar cubierta o no de material absorbente.
- Tren de Alta Velocidad que provoca el ruido de rodadura y aerodinámico. Se han estudiado varios modelos de trenes de Alta Velocidad, y se ha simulado

como tren tipo un cuadrado de 2,90 metros de lado y altura de la base del tren sobre el balasto de 1,25 metros. La superficie del balasto se ha situado a una altura sobre la superficie de suelo horizontal de 0,60 metros, de tal forma que se contempla la capa de balasto, la de subbalasto y parte de la capa de forma sobre el terreno natural.

- Fuentes sonoras. Se han contemplado dos tipos de fuentes sonoras, una correspondiente al ruido de rodadura producido por las ruedas, los carriles, bogies, etc. y otro producido por las fuentes de ruido aerodinámico, pantógrafo, bogies, discontinuidades y la propia capa turbulenta. En apartados anteriores se ha analizado la conveniencia de tratarlas como fuentes de tipo monopolo.

El ruido producido por la rodadura se puede considerar como una fuente lineal como han modelado varios autores, (Murata et al., 2006), (Hothersall et al., 1991), (Gil Alías, 2005). La fuente en sí no es una fuente lineal en sentido estricto ya que no es infinita. Pero con la longitud de los trenes de Alta Velocidad y para el estudio del ruido máximo producido es más ajustado considerar la fuente como lineal que como puntual. Como se ha explicado anteriormente al considerar la fuente como lineal se está del lado de la seguridad ya que la divergencia geométrica es mayor en las fuentes puntuales. En ocasiones, este tipo de fuentes se puede representar como varias fuentes puntuales cercanas unas a otras en línea recta. La realidad estará en un valor intermedio, pero más cercano al supuesto de fuente lineal. Esta diferencia no es significativa para el análisis de esta Tesis.

Dicha fuente debe situarse bajo el tren o en un lateral próximo a él, existiendo diversidad de opiniones según los autores. Se considera más conveniente colocarla en un lateral del tren a una distancia de 1 metro de él y a 0.25 metros por debajo de la base del tren. Con esta ubicación se consigue que la pared del tren actúe como pantalla que contribuye a la propagación del ruido, con reflexiones primarias, que simulan de manera bastante aproximada el ruido real, porque en la realidad no se emite sólo desde un punto.

En cuanto a las fuentes de ruido aerodinámico, parte de ellas como el flujo turbulento se podrían considerar como fuentes lineales, por las mismas razones que las de rodadura, ya que se producen en toda la longitud del tren, no así el pantógrafo, que sería una fuente puntual. No obstante, si se considera que en bastantes ocasiones hay dos pantógrafos, y todo el conjunto de las fuentes de ruido aerodinámico, es más acertado suponerlas como de tipo lineal, por simplicidad, lo cual, al igual que anteriormente, está del lado de la seguridad. Para simular correctamente estas fuentes, que van distribuidas en toda la altura del tren, y con gran influencia del pantógrafo y de los bogies y ruedas, se ha seguido el estudio de Murata et al., (2006), que para simular el ruido del pantógrafo y parte del flujo turbulento coloca una fuente a 0,50 metros de altura sobre el techo del tren, centrada sobre él, y para simular el resto del flujo turbulento, de los bogies y de la pared del tren, se puede usar la misma fuente que para el ruido de rodadura. Esto no es un problema ya que los diferentes casos estudiados se analizan en frecuencia, por lo que para cada frecuencia se puede elegir el nivel sonoro al que emite la fuente de rodadura y la aerodinámica y se ha realizado la composición de niveles.

En el apartado 3.3 Fuentes del ruido en los sistemas ferroviarios se aportan los espectros de frecuencias de las diferentes fuentes de ruido. Se comprueba que para Alta Velocidad, como por ejemplo 350 km/h, el ruido producido por las fuentes de ruido aerodinámico, aunque depende de la frecuencia analizada, se puede considerar que está en el entorno de los 104 dB y el de rodadura 96 dB. La composición de los dos niveles aporta 104,6 dB, por lo que se comprueba que la fuente más importante es la de ruido aerodinámico. Esta potencia se puede repartir entre las dos fuentes simuladas, la de la parte superior del tren y la del lateral, contribuyendo las dos con igual potencia, ya que de otro modo, con diferencias significativas, la mayor se superpondría casi por completo a la pequeña, por lo que cada una emitirá con una potencia de 101,6 dB. Aunque el estudio de la Tesis y sus conclusiones resultaría válido con otra potencia de emisión, se ha elegido ésta por aportarle mayor acercamiento a la realidad. A la vista de los espectros de frecuencias de las fuentes de ruido aerodinámico se realizarán los estudios en dos frecuencias, 600 Hz y 2000

Hz, lo que permite conocer el comportamiento en la parte baja y alta del rango de frecuencias, siendo además éstas las más importantes.

En cuanto a las pantallas acústicas se analizarán de varias formas, alturas, separaciones pantalla – tren, y materiales. Las posibilidades son infinitas, pero tratando de acotar el estudio se han contemplado los siguientes parámetros y sus combinaciones.

- Forma de la pantalla. Se han estudiado pantallas lisas, en L invertida o  $\Gamma$  con longitud de brazo 1 metro hacia el tren, en T con longitud de cada brazo de 1 metro, en Y con proyección horizontal de cada brazo de 1 metro, cumbrera semicircular de 0,3 metros de radio y cumbrera triangular de 1 metro de base y 1 metro de altura. El modelo permite analizar pantallas de estas tipologías con dimensiones diferentes.
- Altura de la pantalla. Dado que la altura del tren sobre el plano de balasto se ha supuesto de 4,15 metros, y la altura de la fuente sobre el techo respecto al balasto de 4,65 metros, se han estudiado alturas de pantalla usuales como son 3,50 metros, quedando la parte más alta de la pantalla por debajo de la fuente; 5 m, sobrepasando levemente la altura de la fuente; y 6 metros de altura, sobrepasando ampliamente la altura de la fuente.
- Separación pantalla tren. Se han supuesto varias separaciones, 2 m, 5 m y 10 metros.
- Espesor del material absorbente. Se han supuesto pantallas sin material absorbente, y con capas de diferentes espesores, en la cara expuesta al tren y en la parte superior de las cumbreras. La resistividad de la lana mineral se ha considerado  $20 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

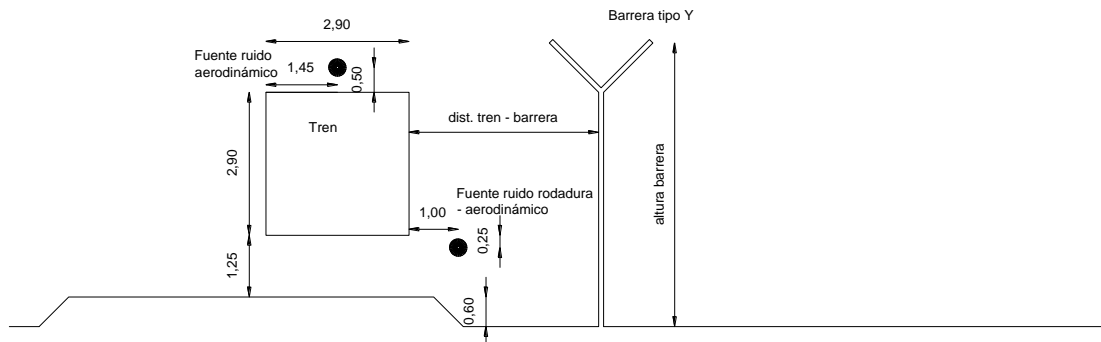


Figura 56. Configuración tipo de la geometría del problema.

En cuanto a los tipos de suelos, se han estudiado dos casos, suelo duro y suelo blando. Como suelo blando se ha supuesto un suelo cubierto de hierba, con resistividad de  $200 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$  y como duro, un suelo pavimentado con asfalto u hormigón de resistividad  $30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ .

Las combinaciones posibles de todas estas variables hace imposible reflejar todos los resultados por separado. Por ello se agruparán cuando sea posible, y algunos de ellos se omitirán en el caso de que el resultado sea poco relevante, porque no aporte datos nuevos o únicamente corrobore alguna conclusión extraída anteriormente. Para el análisis de cada parámetro se hace preciso fijar alguno de los otros como punto de partida, modificándolos posteriormente.

## 5.2. Influencia del tipo de suelo.

Como se ha indicado, la dureza de los suelos estudiados abarca dos tipos de suelo, suelos blandos cubiertos de hierba y suelos duros o pavimentados. Se ha analizado el comportamiento de los 6 tipos de pantalla.

En un primer análisis se ha considerado que la altura de las pantallas es de 5 metros, ya que queda por encima de las dos fuentes. También se ha supuesto una distancia tren pantalla de 5 metros. Se ha estudiado en las dos frecuencias. En los gráficos se

muestran los valores en dB tanto del Nivel de Presión Sonora como de las Pérdidas por Inserción (IL) para todos los tipos de pantalla.

En este gráfico, al estar situado el receptor a 2 metros de altura sobre el suelo, se observa un fenómeno que consiste en que en el primer metro al estar dentro del contorno del tren no aparecen resultados, ya que se están tomando medidas dentro del contorno del tren. Este fenómeno aparece en gráficos posteriores pero no se comenta.

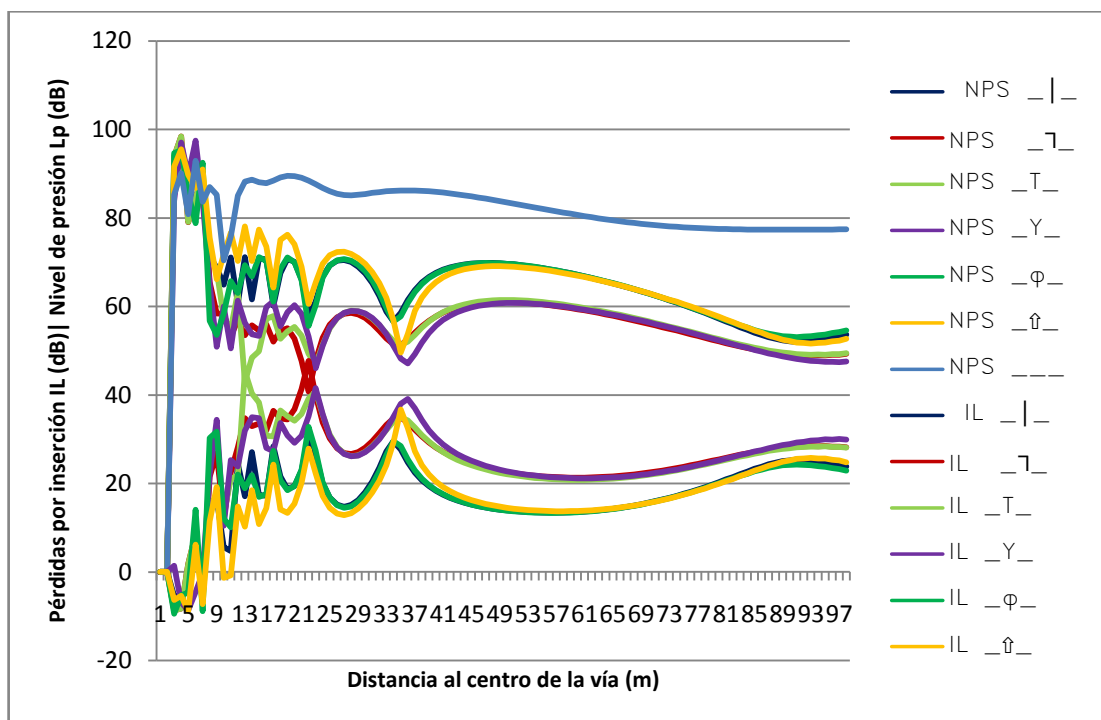


Gráfico 29. Frecuencia 600 Hz. Altura 5 m. Separación 5 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Se aportan los resultados para todos los tipos de pantallas, así como el resultado sin pantalla, el cual se resta a cada una de las pantallas para calcular las pérdidas por inserción. Para este caso se observa un mejor funcionamiento para las pantallas en forma de Y, T, y L invertida. Las pérdidas por inserción que alcanzan para distancias alejadas están en torno a los 30 dB, y para el resto de pantallas a los 22 dB. En los primeros metros tras la pantalla se alcanzan valores de las pérdidas por inserción cercanos e incluso en algunos casos superiores a los 40 dB, mientras que se producen

amplificaciones en la zona entre el tren y la pantalla. Realizando el cálculo con los mismos parámetros excepto el de la resistividad del suelo, que en este caso será suelo blando, se obtiene:

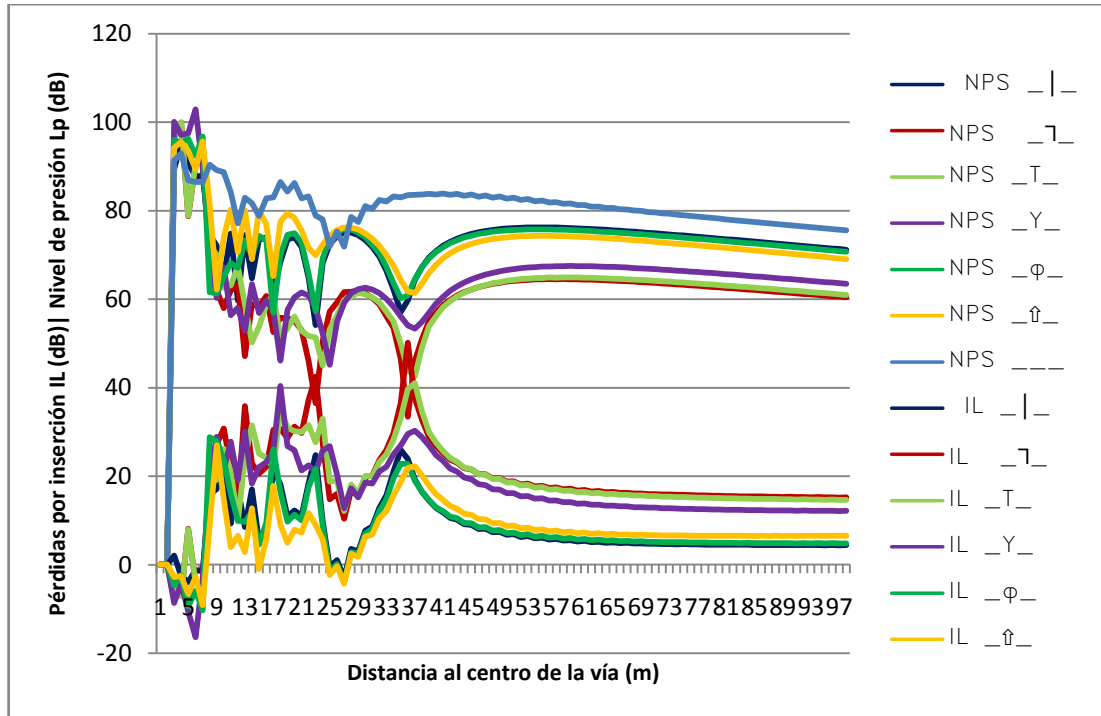


Gráfico 30. Frecuencia 600 Hz. Altura 5 m. Separación 5 m. Suelo blando  $\sigma = 200 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Como se puede comprobar en la zona entre el tren y la pantalla se vuelven a producir amplificaciones debidas a la colocación de la pantalla, cercanas en algunos casos a los 10 dB. En la zona de sombra, durante los primeros 40 metros se obtienen valores en torno a los 30 dB, para las pantallas con forma de Y, T, y L invertida, que vuelven a tener el mejor comportamiento, y con valores variables entre 0 y 20 dB para el resto de pantallas. A partir de los 60 metros tienden a su valor asintótico de las pérdidas por inserción, con valores de 15 dB para los tipos L invertida y T, o 12 dB para el tipo Y, y valores entre 4 y 6 dB para el resto de tipos.

Por lo tanto, se observa que las pantallas, para los parámetros estudiados, resultan más efectivas en el caso de suelo duro que para suelo blando, lo cual concuerda con los resultados encontrados por otros autores para la misma comparación. Del

tratamiento de los datos obtenidos se obtiene que en los primeros 100 metros la media de los valores obtenidos en pérdidas por inserción de todas las pantallas en suelo duro sobre los de suelo blando, es de 8,2 dB, aunque para distancias superiores tiende a valores entre 13 dB para pantallas tipo T y L invertida, y valores de 19 y 20 dB para el resto de pantallas.

Se ha realizado el mismo estudio para altas frecuencias, en concreto 2000 Hz. Se ha realizado el análisis a altura sobre el suelo de 1 metro. De este modo se obtienen resultados a varias alturas, lo cual permitirá un mejor conocimiento del fenómeno acústico.

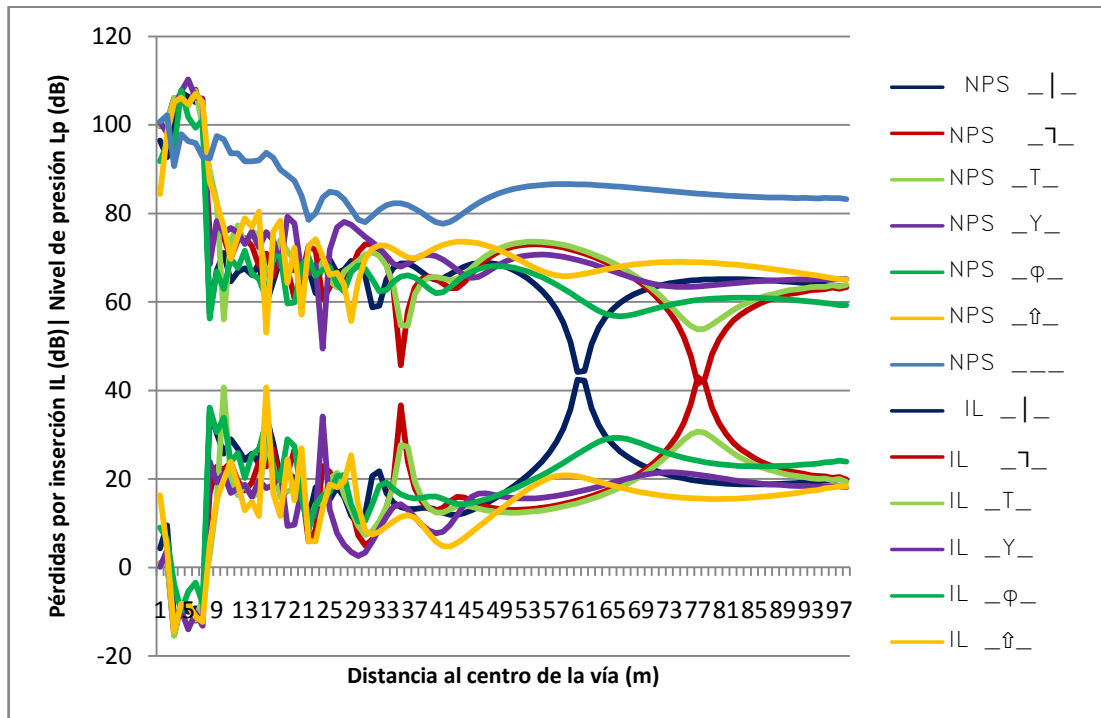


Gráfico 31. Frecuencia 2000 Hz. Altura 5 m. Separación 5 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$  kN·s/m<sup>4</sup>. Altura receptor 1 m.

En este gráfico no se observa el fenómeno de los anteriores en el primer metro, ya que se está calculando el Nivel de Presión Sonora, bajo el tren, aunque no debe ser tenido en cuenta, ya que no se ha modelado el bogie. En la zona iluminada se producen otra vez amplificaciones que alcanzan los 15 dB. En los primeros 40 metros de la zona de sombra se observan pérdidas por inserción con valores medios



de 19,8 dB, el mismo valor al que finalmente convergen las gráficas, excepto en el caso de la pantalla con cumbre circular que alcanza los 23 dB. En este caso de altas frecuencias la efectividad de todas las pantallas es similar, excepto el caso indicado de la pantalla con cumbre semicircular, que es ligeramente mayor. En el caso de suelos blandos el resultado obtenido es:

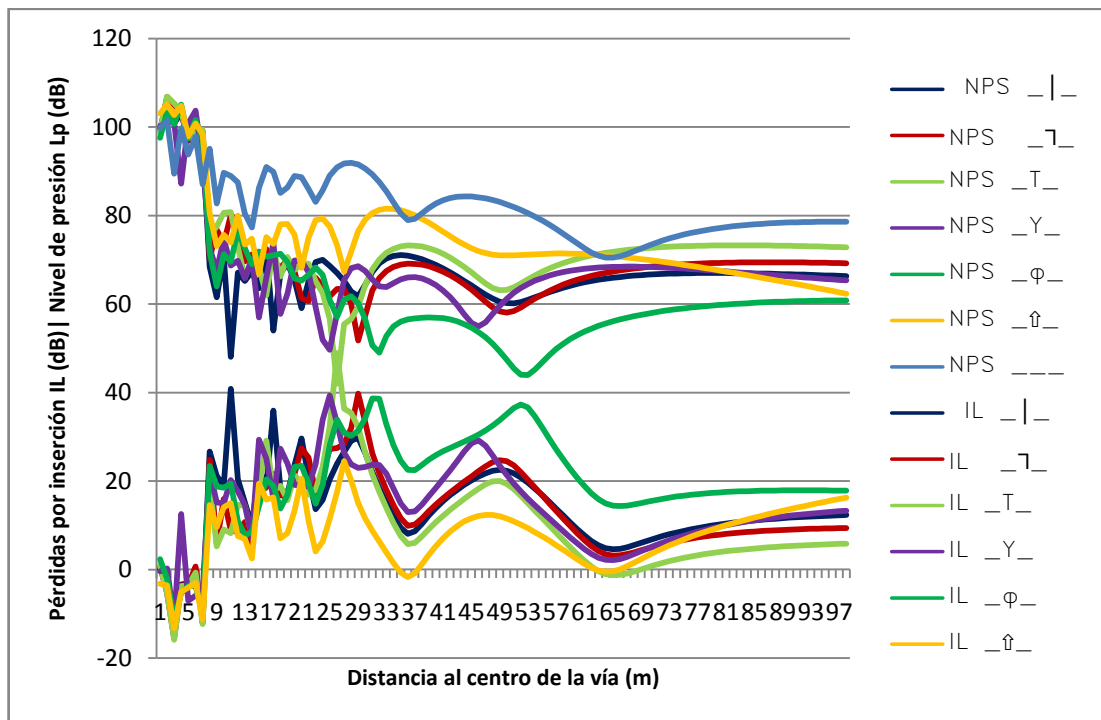


Gráfico 32. Frecuencia 2000 Hz. Altura 5 m. Separación 5 m. Suelo blando  $\sigma = 200 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1 m.

Se vuelven a observar amplificaciones en la zona iluminada, y en los primeros metros de la zona de sombra la media de las pérdidas por inserción es de 20 dB, es decir, muy similar a la de suelo duro. Pero es a distancias mayores de la pantalla, donde se vuelve a comprobar un comportamiento similar al de bajas frecuencias, con efectividad menor, para suelos blandos, ya que los valores asintóticos a los que tienden están entre 9 y 17 dB, siendo la pantalla más efectiva la de cumbre semicircular.

Del tratamiento de los datos obtenidos se obtiene que en los primeros 100 metros la media de los valores obtenidos en pérdidas por inserción de todas las pantallas en suelo duro sobre los de suelo blando, es de 4,0 dB, aunque para distancias superiores la media está en torno a valores de 12,5 dB. Finalmente las diferencias tienden a valores de 6 dB para pantallas con cumbreira circular o triangular, y valores de 13 dB para la pantalla en T.

Por lo tanto, y para los parámetros estudiados, se comprueba que las pantallas resultan más efectivas en el caso de suelos duros que en el de suelos blandos, siendo este efecto más acusado para bajas frecuencias. Se han realizado otros cálculos con diferentes parámetros para comprobar si el comportamiento es similar llegando a la misma conclusión. En apartados posteriores se ofrecen gráficos que reflejan estos cálculos, y aunque se analizan para otras variables, se puede comprobar la conclusión a la que aquí se ha llegado.

### **5.3. Influencia de la altura de la pantalla.**

Para analizar el comportamiento de las pantallas en función de las diferentes alturas que alcanzan sus cumbres, se han realizado simulaciones con suelos duros y blandos, con alturas de pantalla a 3,5 m, 5 m y 6 metros de altura sobre el nivel de balasto, quedando como se ha indicado, las primeras a una altura menor que el pantógrafo, las segundas a una altura ligeramente superior, y las últimas, a una altura mucho mayor. Estos cálculos se han realizado con el tren situado a diferentes distancias de las pantallas. Los cálculos se han realizado también a bajas y altas frecuencias.

Con el fin de ofrecer los resultados del mayor número posible de casos y de no repetir los de apartados anteriores, se aportan en éste los correspondientes a una separación tren pantalla de 2 metros. En los gráficos se muestran los valores en dB tanto del Nivel de Presión Sonora como de las Pérdidas por Inserción (IL) para todos los tipos de pantalla.

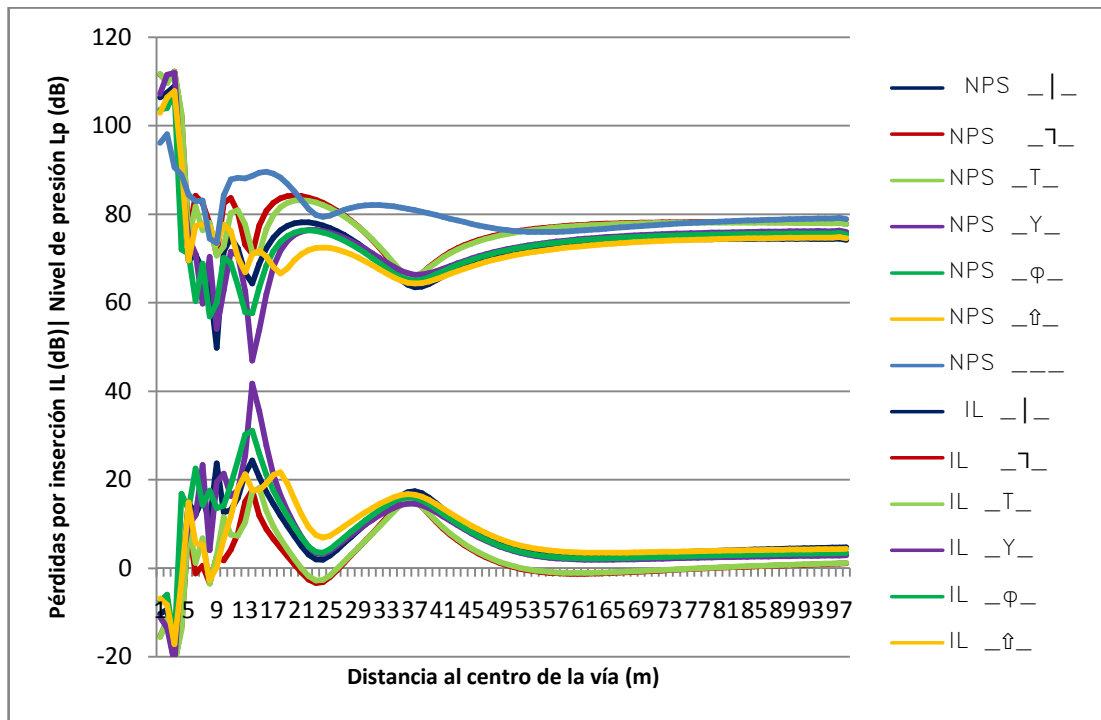


Gráfico 33. Frecuencia 600 Hz. Altura 3,5 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1 m.

En este caso, en el que la pantalla queda por debajo de una de las fuentes, se observa que únicamente se produce una pérdida por inserción relevante en los primeros 10 – 15 metros tras la pantalla, en los que por geometría se consigue cierto apantallamiento. Este efecto sería más relevante si la pantalla estuviera más alejada del tren, como se comprobará más adelante. A grandes distancias, el efecto producido es casi nulo, con valores de IL entre 1 y 4 dB dependiendo del tipo de pantalla.

En el siguiente gráfico se aporta el mismo caso pero con pantallas de 5 metros de altura. Como se puede comprobar en este caso las pantallas resultan ya efectivas, consiguiendo en las zonas próximas a ellas un aislamiento ligeramente superior al caso anterior, y claramente mayor en distancias lejanas, donde los aislamientos convergen a sus valores asintóticos que oscilan entre 8 y 18 dB, siendo la pantalla en forma de Y la más efectiva, y la de cumbrera triangular la menos efectiva.

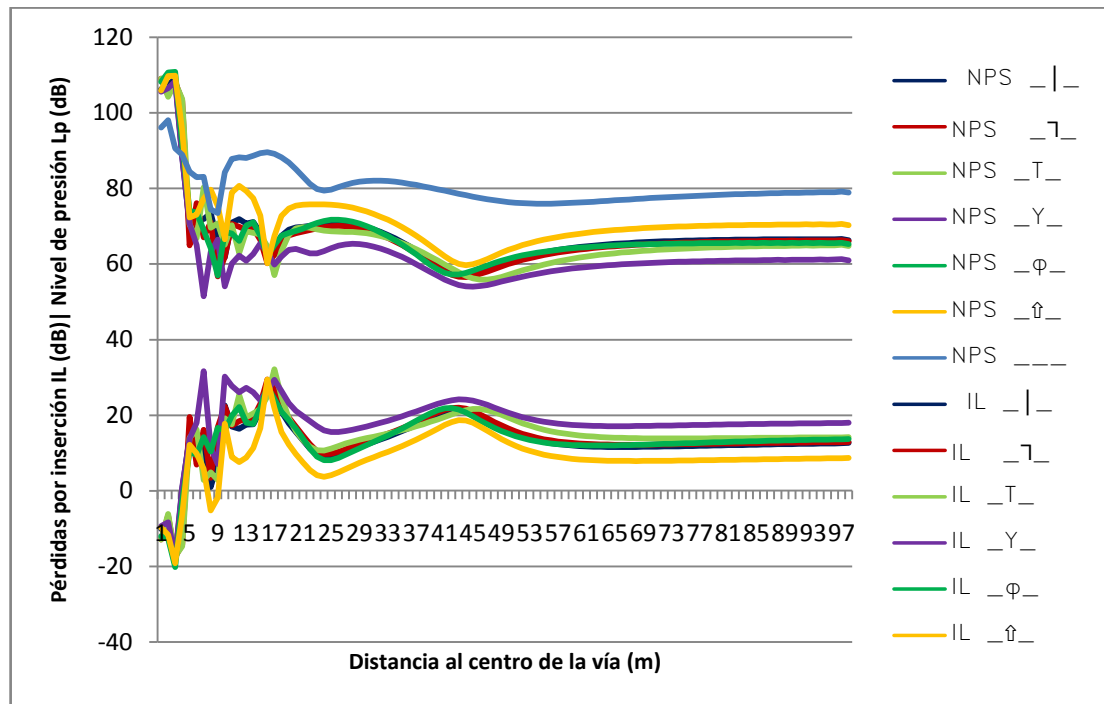


Gráfico 34. Frecuencia 600 Hz. Altura 5,0 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1 m.

En el siguiente gráfico se analiza una pantalla con 6 metros de altura.

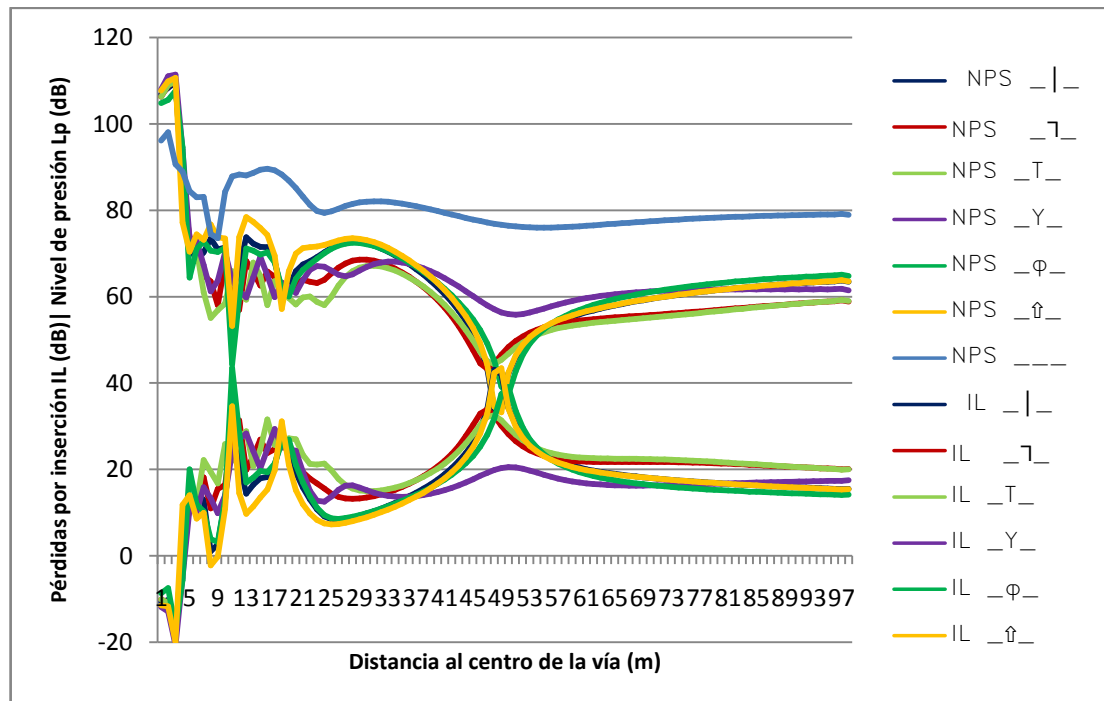


Gráfico 35. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1 m.

Se comprueba que el aislamiento es mayor, tanto en los primeros metros, en los que se consigue un aislamiento medio superior en 5,6 dB al caso anterior, como en los valores asintóticos, que oscilan entre 15 y 20 dB, resultando las pantallas más efectivas las de forma en T y L invertida, seguidas con 18 dB por la de forma en Y.

A continuación se aportan los mismos casos con frecuencia de 2000 Hz.

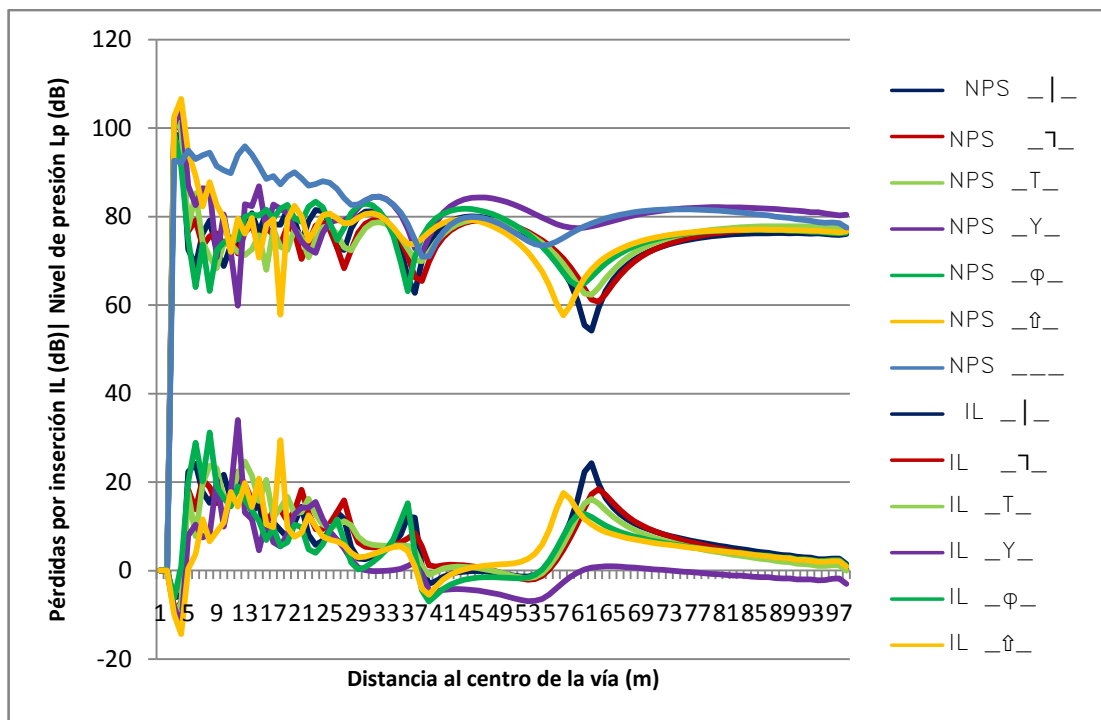


Gráfico 36. Frecuencia 2000 Hz. Altura 3,5 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Los resultados son similares a los de frecuencias bajas, con un ligero repunte de las pérdidas por inserción en la zona situada a unos 60 metros de distancia de la pantalla, para posteriormente converger a unos valores nulos de las pérdidas por inserción.

Con 5 metros de altura, ya se consigue otra vez valores altos de pérdidas por inserción, pero menores que para bajas frecuencias, alcanzando los valores entre 6 y 8 dB, prácticamente sin diferencias entre los diferentes tipos de pantallas.

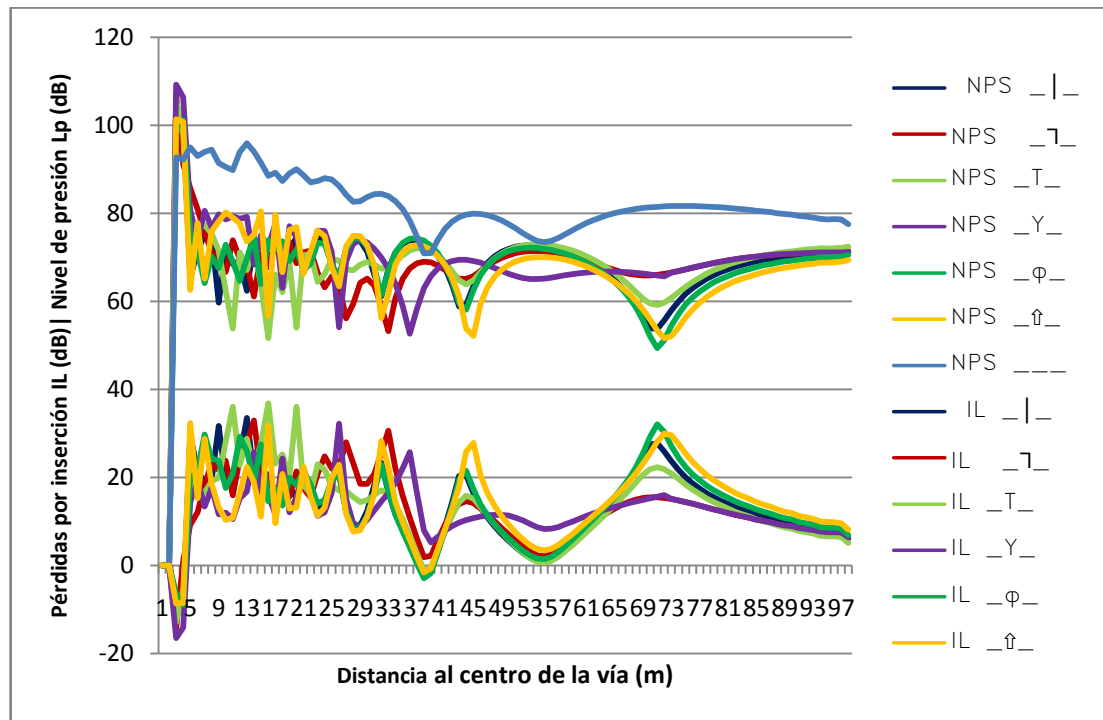


Gráfico 37. Frecuencia 2000 Hz. Altura 5,0 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

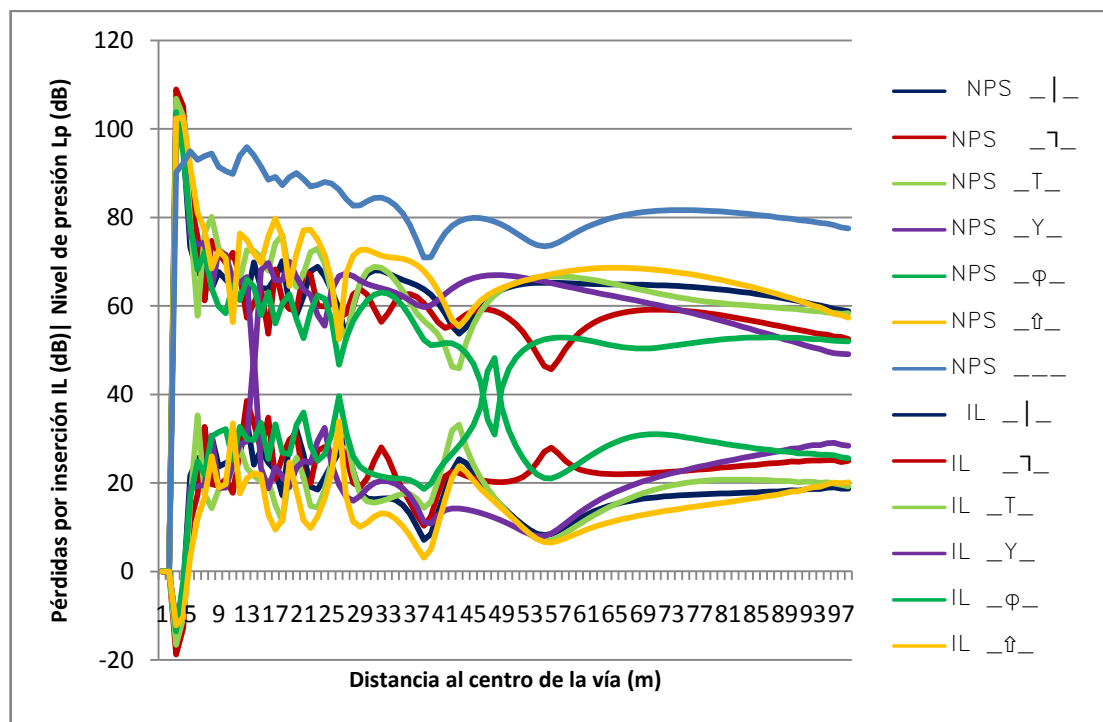


Gráfico 38. Frecuencia 2000 Hz. Altura 6,0 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Para el caso de 6 metros de altura, se observa que aumenta significativamente el aislamiento, con valores entre 18 y 28 dB, siendo la pantalla más efectiva la pantalla en Y. En este caso los valores alcanzados de aislamiento para algunos de los tipos de pantallas son superiores que para bajas frecuencias.

En el anterior apartado se han obtenido conclusiones sobre la influencia del suelo, que consistían principalmente en una mayor efectividad de las pantallas en el caso de suelos duros, observándose un mayor efecto en el caso de bajas frecuencias. Para corroborar los resultados obtenidos y comprobar que son independientes de la altura de la pantalla se han realizado los cálculos de todos los casos anteriores, también para suelos blandos. Sólo se reflejan los de bajas frecuencias por razones de espacio, encontrándose un comportamiento similar para altas frecuencias.

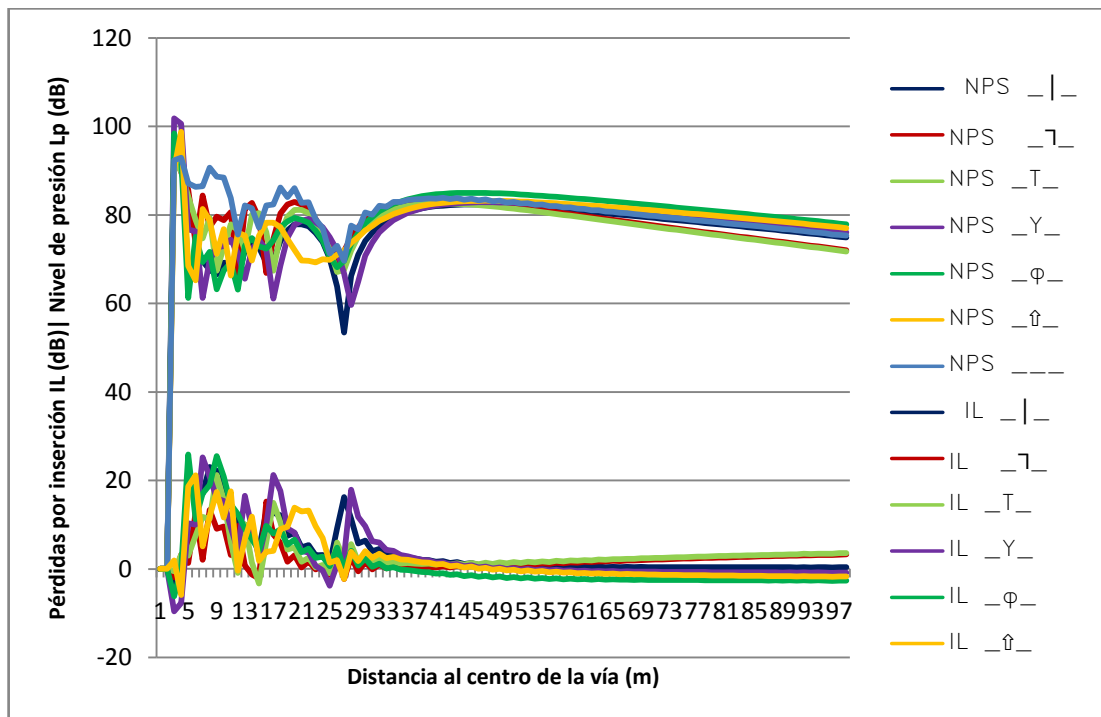


Gráfico 39. Frecuencia 600 Hz. Altura 3,5 m. Separación 2 m. Suelo blando  $\sigma = 200 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Como se puede comprobar se vuelven a obtener valores nulos de las pérdidas por inserción, incluso pequeñas amplificaciones. Los valores obtenidos en la zona

cercana a la pantalla, son menores que en el caso de suelo duro. De la comparación de los valores, calculando valores medios se observa que en el caso de suelos blandos, las pérdidas por inserción son inferiores en 4 dB a las de los suelos duros.

Con alturas de pantalla de 5 metros, se obtienen ya valores de pérdidas por inserción entre 1,5 dB y 12 dB, siendo la pantalla más efectiva la pantalla en Y. Los valores son inferiores en este caso en 6 dB entre los valores propios de cada una de las pantallas, observándose que la mayor o menor efectividad de cada una de ellas sobre las demás se mantiene.

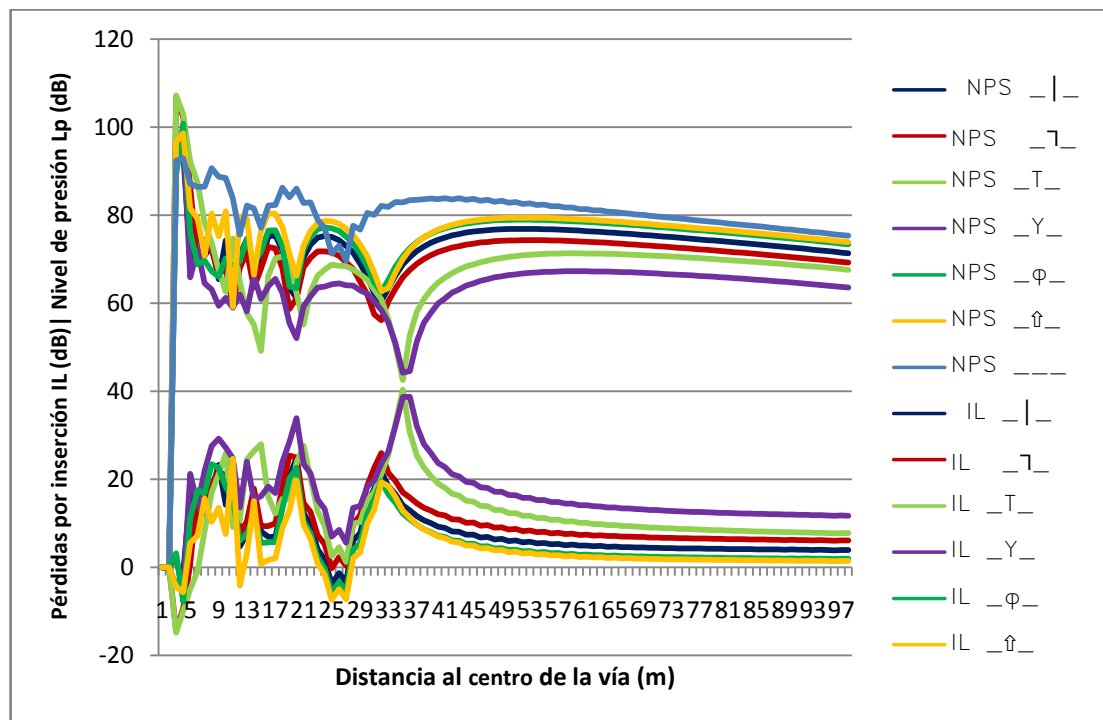


Gráfico 40. Frecuencia 600 Hz. Altura 5,0 m. Separación 2 m. Suelo blando  $\sigma = 200 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Cuando la altura de la pantalla aumenta hasta 6 metros de altura, la diferencia de efectividad de las pantallas entre suelos duros y blandos aumenta, en este caso la diferencia se acerca a los 10 dB, aunque en este caso no se mantiene completamente el ranking de la efectividad de cada tipo de pantalla.



Por lo tanto se comprueba como correcta la conclusión del apartado anterior, que indicaba que resultan más efectivas las pantallas en caso de colocación en suelo duro frente a suelo blando, independientemente de la altura.

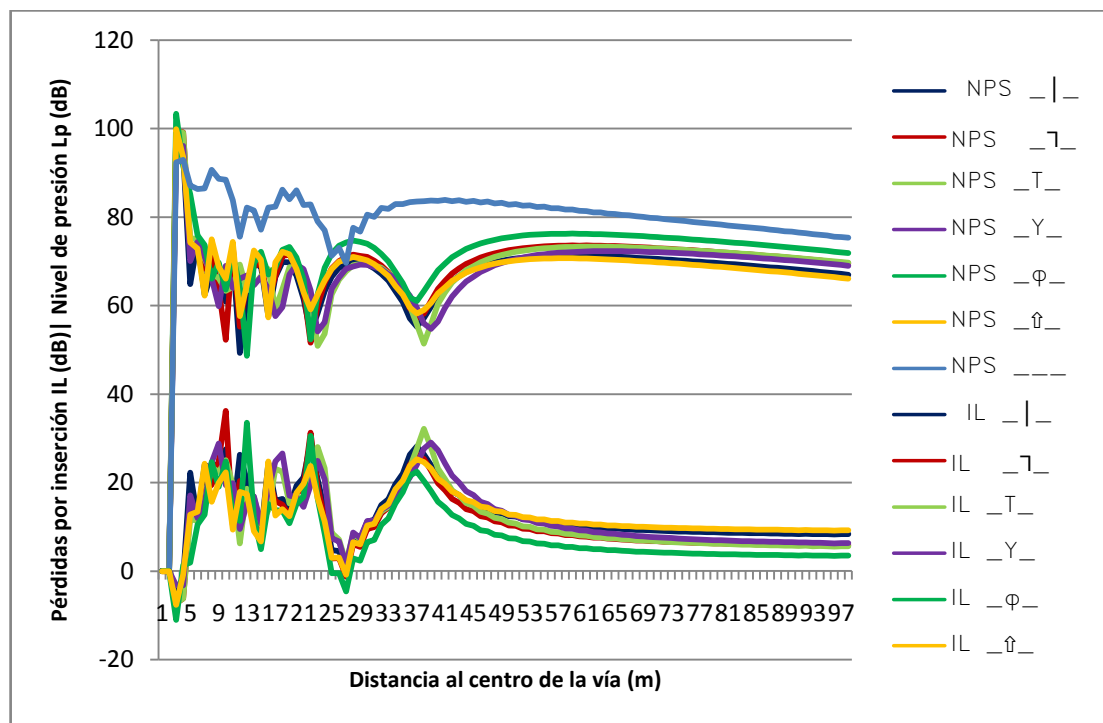


Gráfico 41. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 2 m. Suelo blando  $\sigma = 200 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 2 m.

Tras todos los gráficos y análisis anteriores, se concluye que la altura de la pantalla es de vital importancia para su efectividad en el caso de trenes de Alta Velocidad. El pantógrafo, resulta una fuente importante de ruido por encima de los 300 km/h y se comprueba que en el caso de que la pantalla no sobrepase la altura del pantógrafo, su efectividad disminuye rápidamente hasta hacerse prácticamente nula. Si la pantalla sobrepasa ampliamente la altura del pantógrafo, se mejora la efectividad pero ya no de manera tan clara y puede no ser rentable económicamente.

Una vez analizada la distribución espacial de la pérdida por inserción se ha considerado conveniente para comprobar el comportamiento de las pantallas en función de su altura, elegir un punto fijo tras la pantalla y graficar sus pérdidas por

inserción en función de la altura de la pantalla, para lo cual ha sido necesario realizar numerosas simulaciones. Se han elegido únicamente dos tipos de pantalla para el análisis y se han elegido la pantalla lisa como la más típica y la pantalla en Y, dado que es una pantalla que se comprueba que tiene uno de los mejores comportamientos de aislamiento, encontrándose resultados similares para el resto de pantallas. Se ha elegido un punto lo suficientemente alejado de la pantalla como para obtener resultados cercanos a los valores asintóticos de IL y a una altura del receptor sobre el suelo de 1 metro. La separación de la pantalla se ha elegido de 2 metros, porque mostrará unos resultados más marcados que con otras que se encuentran más separadas. Se ha elegido suelo duro y frecuencia 600 Hz. En el gráfico siguiente se muestran las pérdidas por inserción en dB.

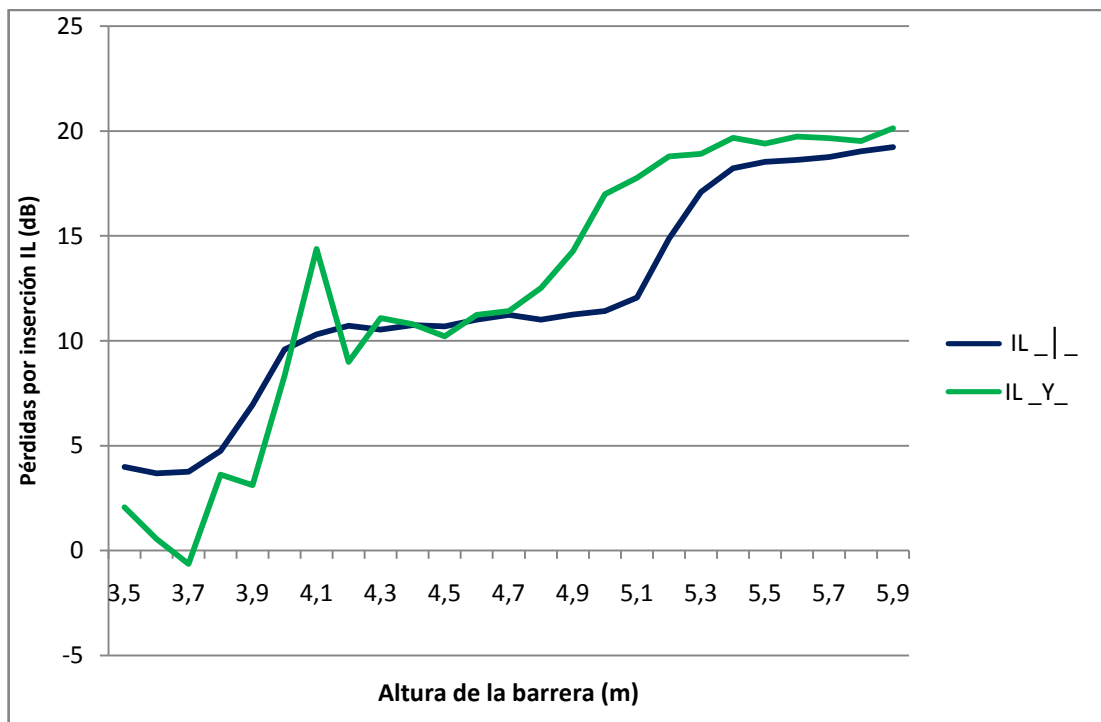


Gráfico 42. Frecuencia 600 Hz. Altura variable 3,5 – 6. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1 m.

Se observa un comportamiento similar para las dos pantallas que corroboran los resultados anteriores, pero con alguna diferencia que es preciso comentar. Como ya se había comprobado, el comportamiento de las pantallas en Y es mejor que el de las pantallas lisas, con comportamientos ligeramente superiores, excepto para alturas

muy bajas de la pantalla, donde este comportamiento no es relevante. Se observa un primer escalón en la gráfica para alturas de pantalla de 4 metros, consiguiendo pérdidas por inserción de 10 dB. Pero cuando la pantalla tiene un efecto mayor es para alturas cercanas o superiores a 5 metros con 20 dB. Se observa un fenómeno reseñable, como es que se produce el escalón de mayor aislamiento en las pantallas en Y para alturas inferiores a las pantallas lisas. Esta diferencia en alturas es pequeña, solo de 20 cm, pero refleja un comportamiento acorde con lo esperado, ya que los dos extremos de las pantallas producen dos vértices difractantes.

A la vista de estos resultados y de los observados en los puntos anteriores se comprueba que el uso de pantallas con cubreras produce generalmente mayores aislamientos, aunque no siempre ocurra, y también mayores aislamientos para alturas menores, pero se debe estudiar la conveniencia de usarlas debido a su mayor coste económico.

#### **5.4. Influencia de la distancia de la pantalla.**

Para analizar el comportamiento de las pantallas en función de las diferentes distancias de la pantalla al tren, se han realizado simulaciones con suelos duros y blandos, con bajas y altas frecuencias, pero únicamente con una altura de pantalla, en este caso 6 metros de altura. Las distancias analizadas han sido 2 metros, 5 metros y 10 metros. La altura de receptor considerada será de 3 metros.

Primero se analizarán los casos de suelo duro para todas las frecuencias, y luego se comprobará que el comportamiento en suelos blandos sigue las conclusiones deducidas anteriormente y que son independientes de la distancia de la pantalla al tren. En los gráficos se muestran los valores en dB tanto del Nivel de Presión Sonora como de las Pérdidas por Inserción (IL) para todos los tipos de pantalla.

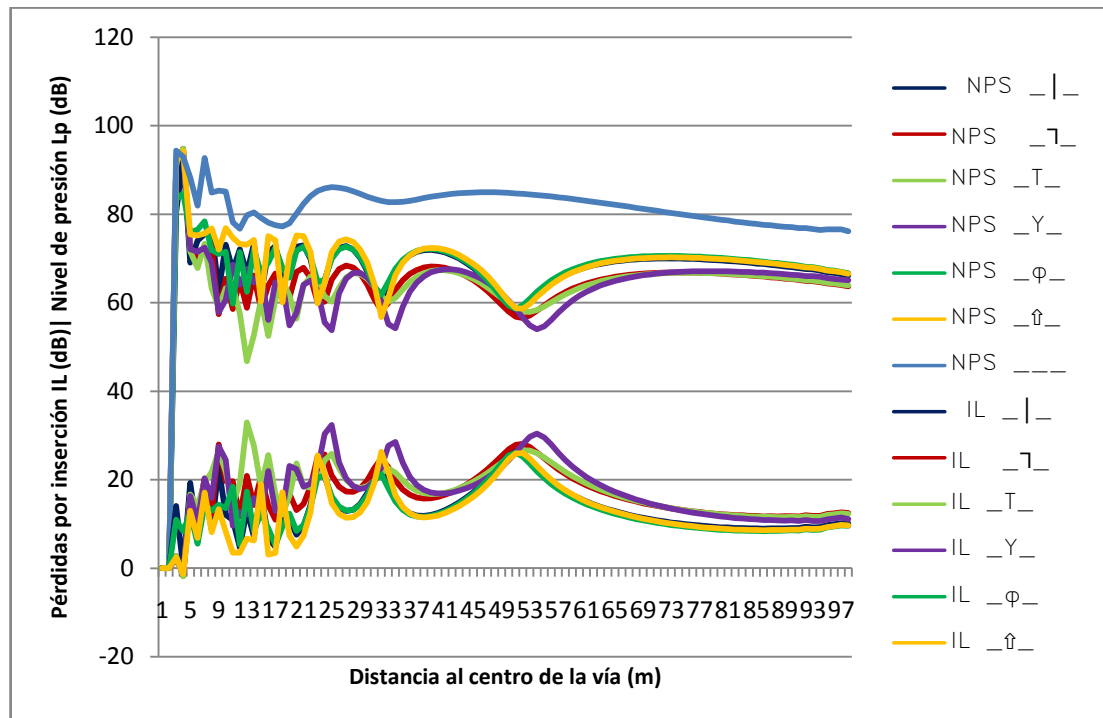


Gráfico 43. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 3 m.

Se puede observar comparando este gráfico con sus homólogos en parámetros de los apartados anteriores, que al aumentar la altura del receptor disminuye el aislamiento. El aislamiento en las zonas más cercanas a la pantalla alcanza un valor promedio de 15 – 18 dB, es decir, 5 dB menos que cuando el receptor estaba situado a 2 metros de altura. Los valores asintóticos, que oscilan entre 8,5 y 12,5 dB, con valores por lo tanto inferiores entre 5 y 8 dB a los obtenidos para el receptor situado a 2 metros de altura. Este comportamiento es similar en todos los casos con pequeñas diferencias por lo que en adelante no se seguirá comentando. Las pantallas más efectivas al igual que para alturas inferiores siguen siendo las de forma en T y L invertida con 12,5 dB, seguidas con 11 dB por la de forma en Y, aunque todas ellas están muy próximas.

A continuación se aporta el gráfico con separación de 5 metros. En este gráfico se observa que aumenta el aislamiento ofrecido por la pantalla, ya que en zonas próximas a ella, el aislamiento es de 22 dB de promedio y los valores asintóticos oscilan entre los 13 y 22 dB en función del tipo de pantalla, siendo en este caso más

grande la diferencia entre los valores ofrecidos por las pantalla en T y L invertida, con una diferencia de 6 dB con la Y y lisa.

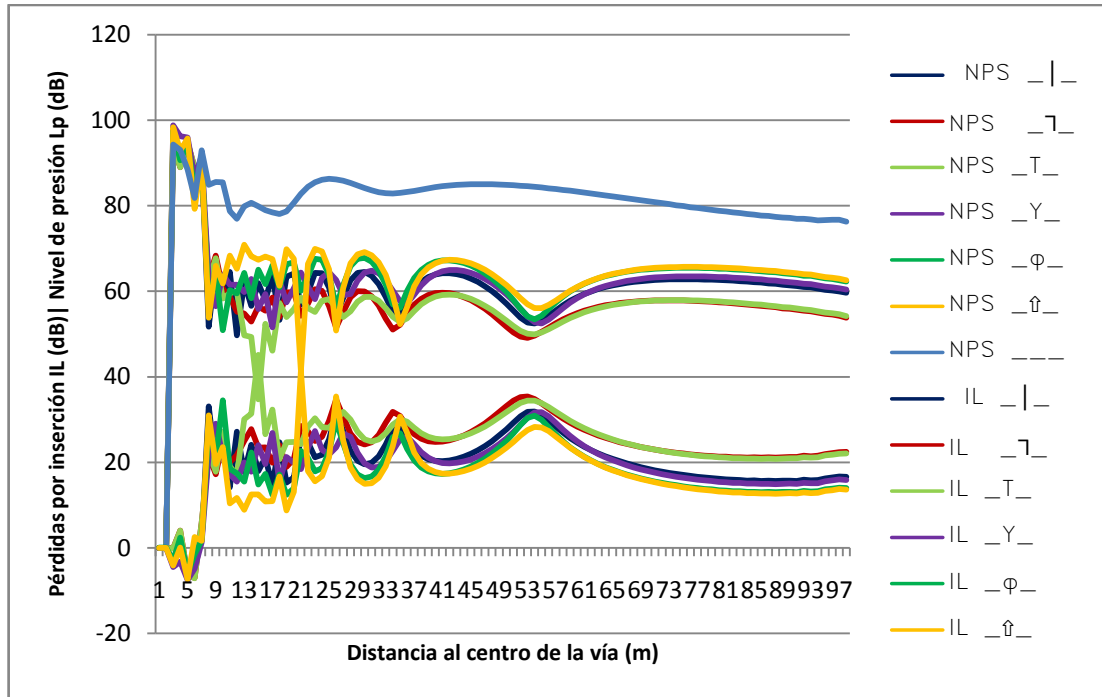


Gráfico 44. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 5 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 3 m.

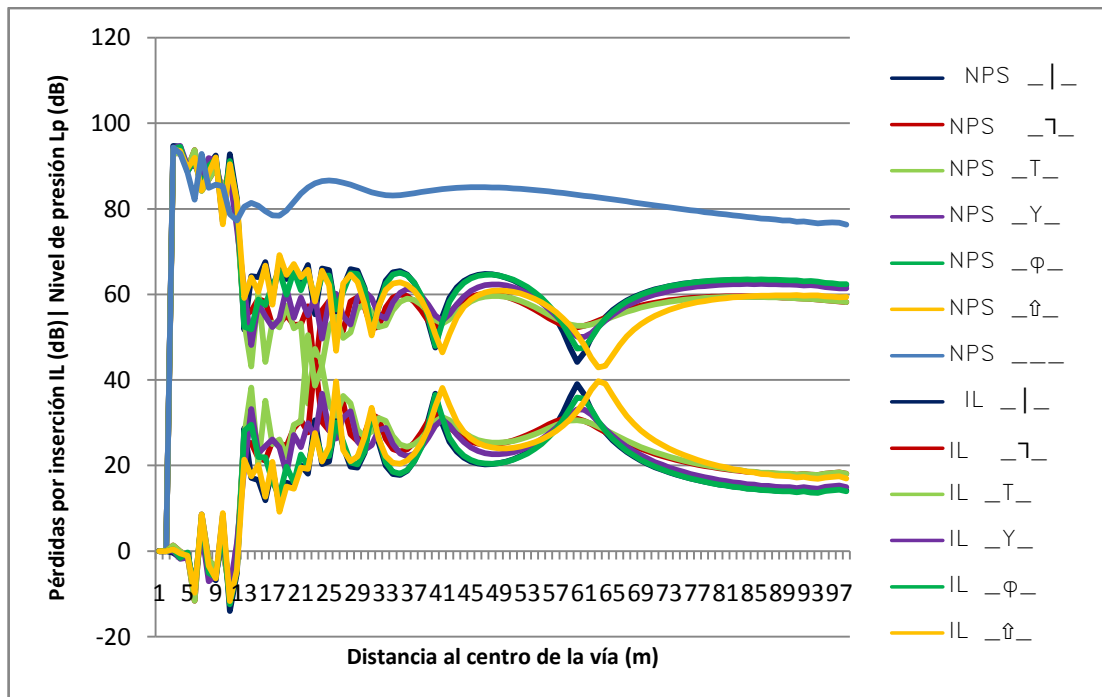


Gráfico 45. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 10 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 3 m.

Cuando aumenta la distancia hasta una separación de 10 metros se observa que disminuyen los valores del aislamiento para los valores asintóticos, no así en las zonas más cercanas a la pantalla donde el promedio es de 25 dB. Las pérdidas por inserción a grandes distancias están en un rango entre 14 y 18 dB, teniendo un mejor comportamiento las pantallas en T y L invertida y con cumbre triangular.

Para altas frecuencias se han realizado las mismas simulaciones.

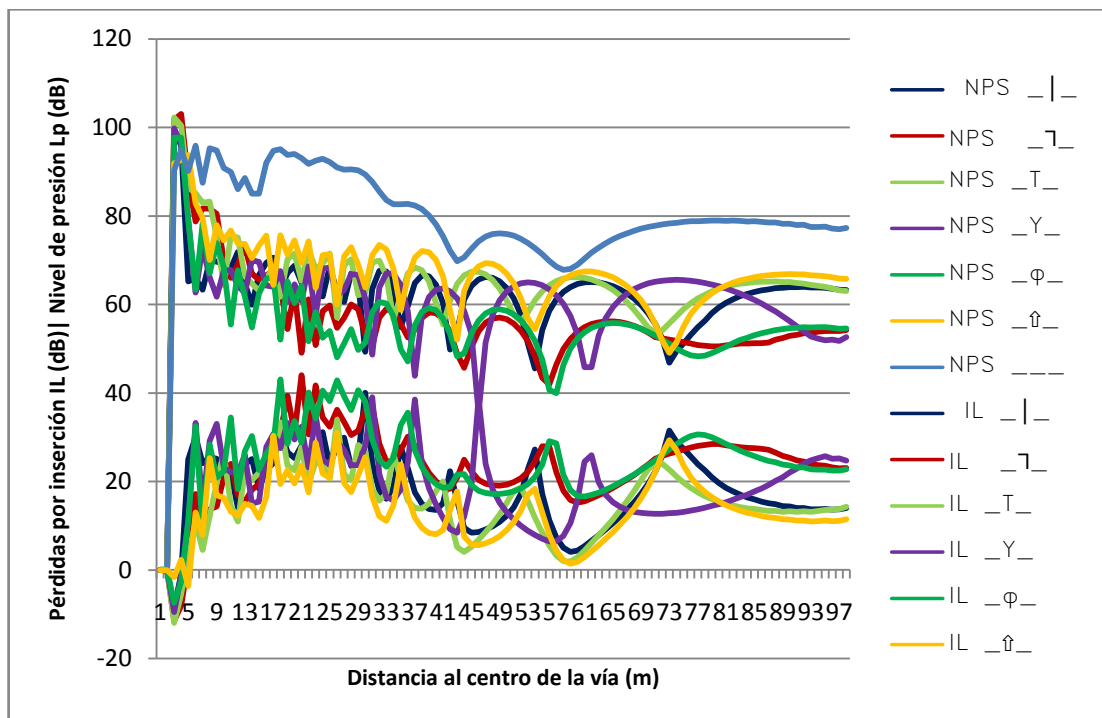


Gráfico 46. Frecuencia 2000 Hz. Altura 6,0 m. Separación 2 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 3 m.

Se observa un mejor comportamiento de las pantallas para altas frecuencias y distancia de separación pantalla tren de 2 metros, especialmente en la zona más próxima a la pantalla con aislamiento promedio de 22 dB. Los valores asintóticos se encuentran entre 11 y 25 dB siendo las más efectivas las pantallas en L invertida, Y y con cumbre circular. Es posible que tanta diferencia entre unas pantallas y otras se deba a que en las de mayor aislamiento no se hayan alcanzado los valores asintóticos.

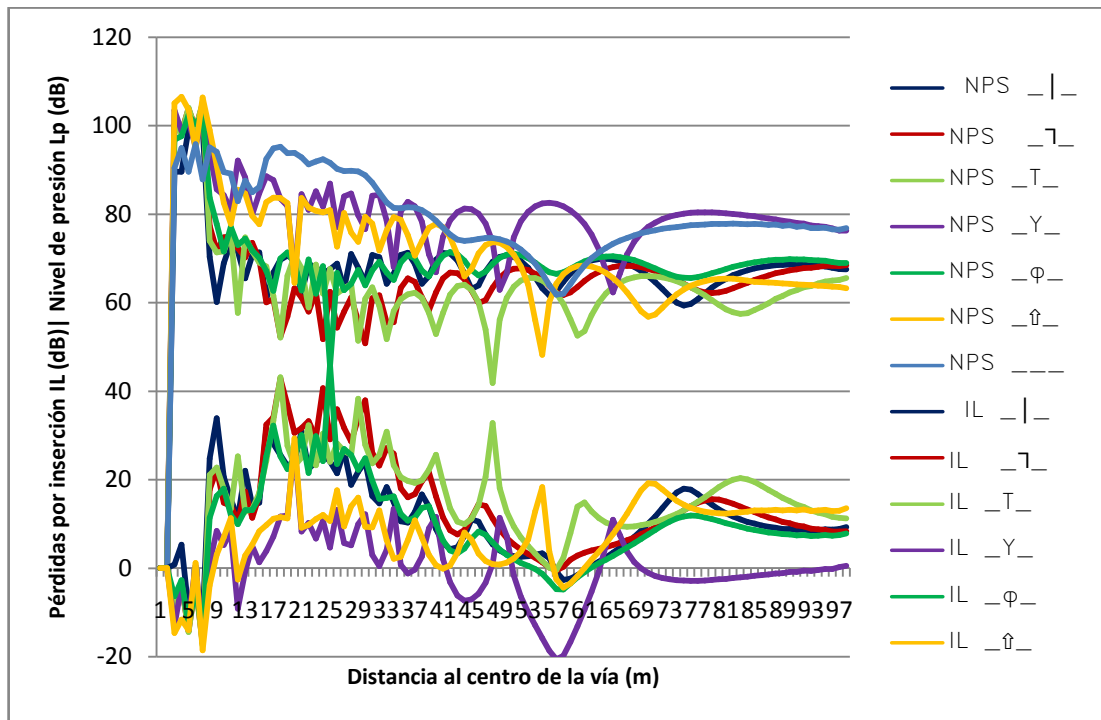


Gráfico 47. Frecuencia 2000 Hz. Altura 6,0 m. Separación 5 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 3 m.

Para distancia de 5 metros, la disminución del aislamiento comienza a producirse ya, con valores asintóticos similares para todas las pantallas entre 8 y 13 dB, excepto para las de forma Y que presentan un valor cercano a 0 dB. Las que presentan un mejor comportamiento son las pantallas con cumbrera triangular seguidas de las de T y L invertida.

Para mayores distancias de la pantalla, en este caso se ha estudiado hasta 10 metros, se observan unos valores de pérdidas por inserción similares a los de separación de 5 metros. La pantalla menos efectiva sigue siendo la pantalla en Y, y las más efectivas las de L invertida y T.

De todo lo expuesto anteriormente se puede deducir que influye la distancia tren – pantalla en el aislamiento obtenido. Por lo tanto es previsible que exista un valor de esta distancia para el cual el aislamiento será máximo. De los gráficos estudiados no es posible obtener una conclusión sobre la ubicación de este máximo, aunque sí que

se deduce que será diferente dependiendo del tipo de pantalla. Por ello, posteriormente se realizará un estudio diferente para tratar de encontrarlo.

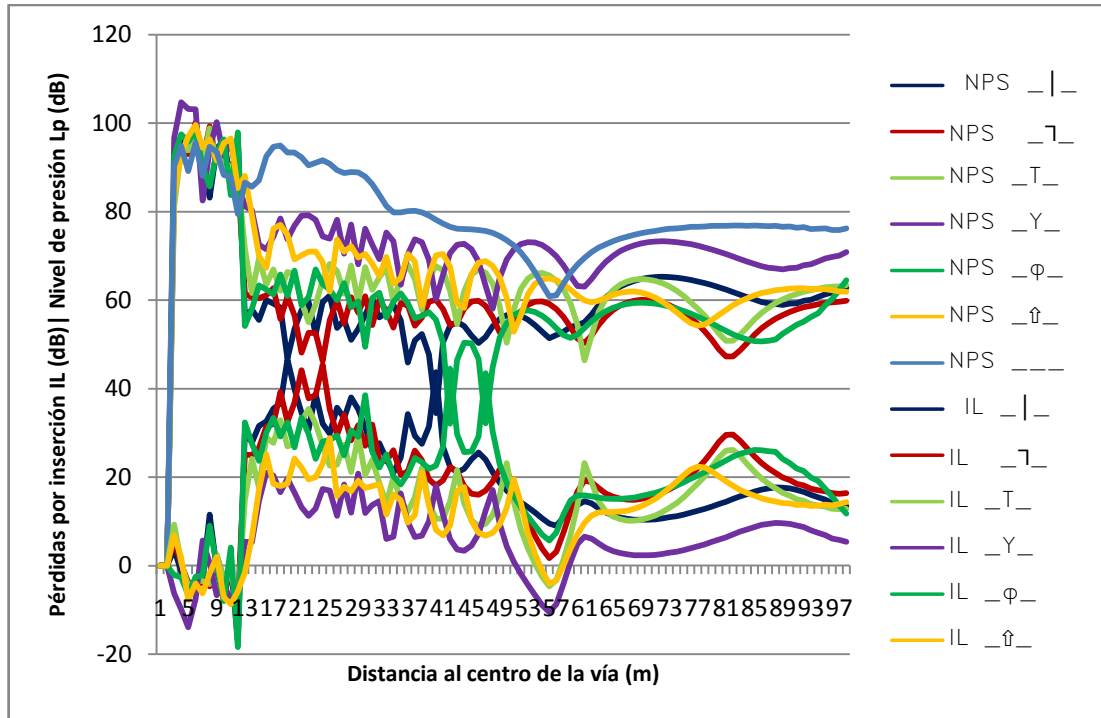


Gráfico 48. Frecuencia 2000 Hz. Altura 6,0 m. Separación 10 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 3 m.

Todo ello se ha comprobado observando los mismos gráficos para suelos blandos, en los que también se ha comprobado que se cumple la conclusión de que el comportamiento de las pantallas es mejor para suelos duros que para blandos. A continuación se ofrecen los resultados para bajas frecuencias y suelos blandos, y no se ofrecen los de altas frecuencias por no abundar en información.

Para la separación de 2 metros, el aislamiento es ligeramente inferior al caso de suelo duro, pero en este caso, solamente en 3 dB para los valores asintóticos. El mismo comportamiento se observa para la separación de 5 metros. El aislamiento es inferior que para suelos duros en unos 5 dB, y además se conserva el tipo de pantalla como más efectiva independientemente del suelo. Para esta distancia la tipo L invertida y T. El funcionamiento de las pantallas es mejor para distancia de 5 metros que para 2 metros.



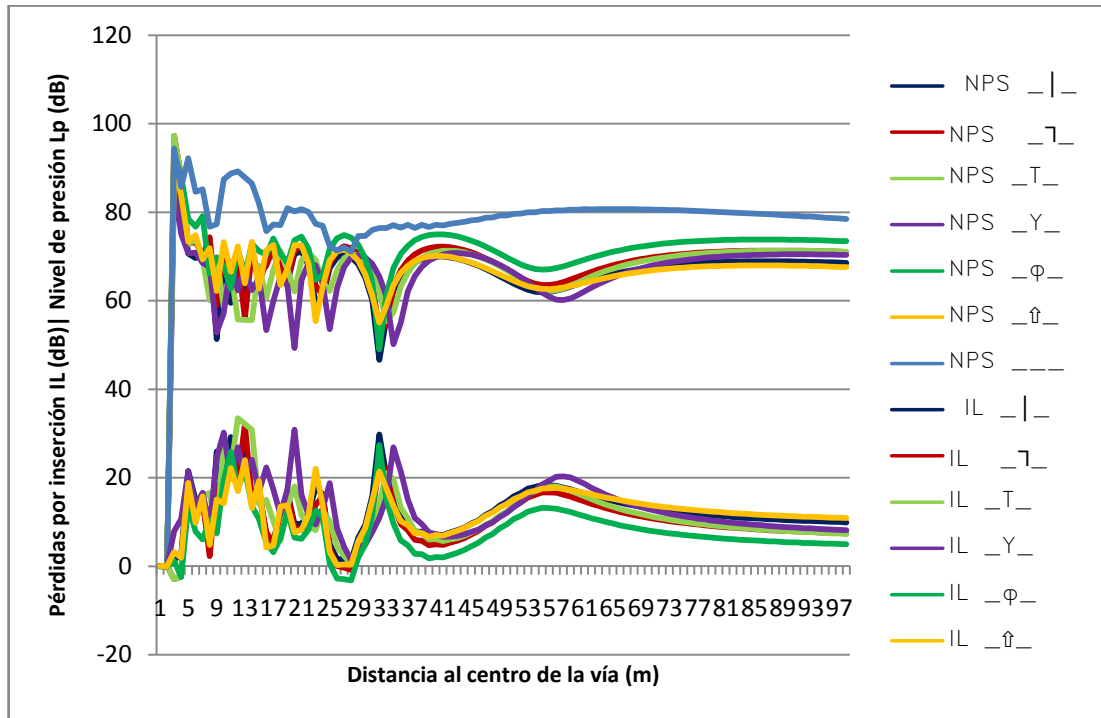


Gráfico 49. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 2 m. Suelo blando  $\sigma = 200 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 3 m.

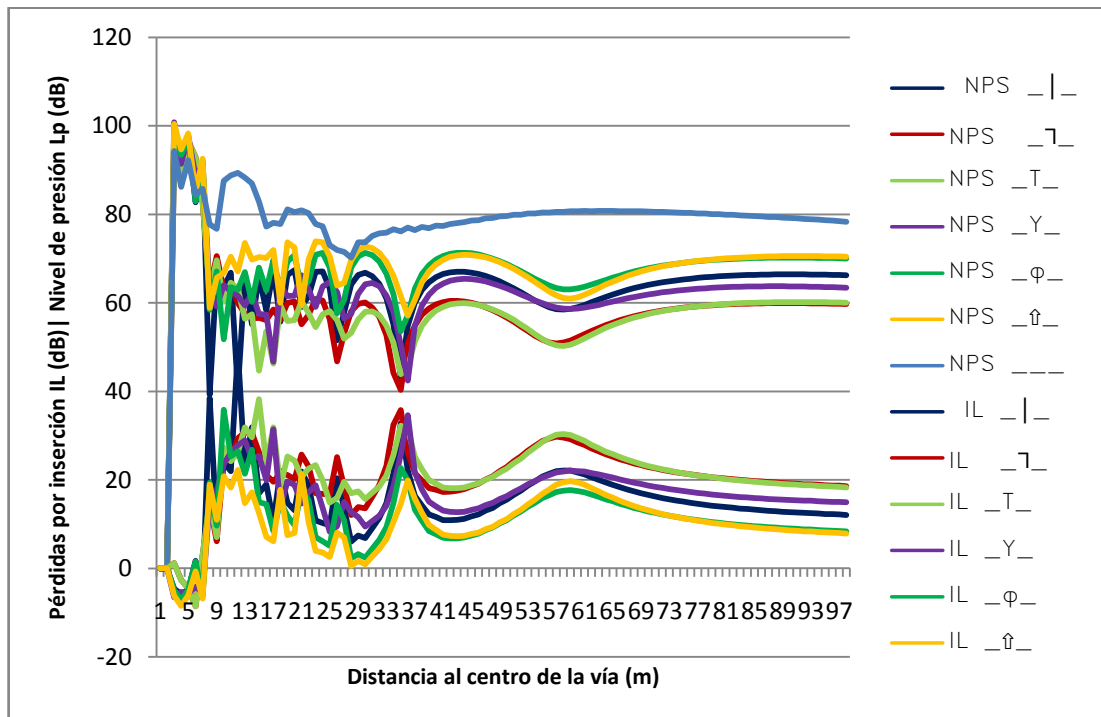


Gráfico 50. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 5 m. Suelo blando  $\sigma = 200 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 3 m.

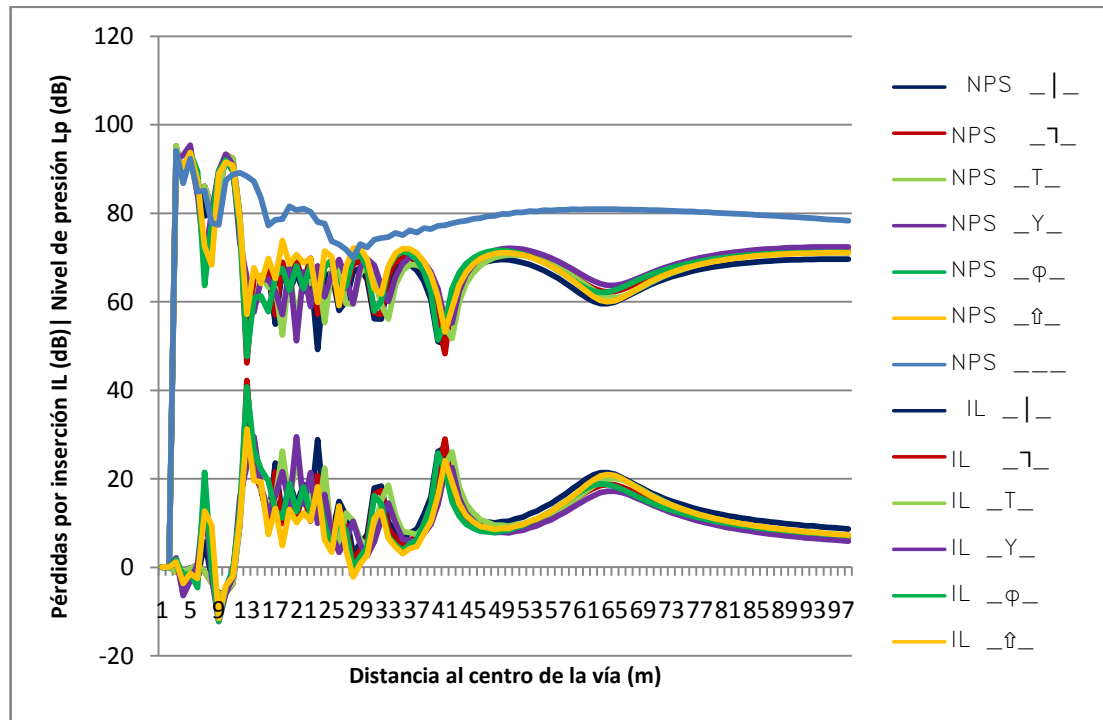


Gráfico 51. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación 10 m. Suelo blando  $\sigma = 200 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 3 m.

Por último se comprueba que la efectividad de la pantalla disminuye al aumentar la distancia a 10 metros de separación entre pantalla y tren. También se observa peor aislamiento respecto a suelo duro, en unos 8 dB.

Se ha considerado conveniente realizar una simulación del comportamiento de la pantalla en función de la distancia, variando entre 2 y 15 metros, en un solo punto, para dos tipos diferentes de pantalla. Para ello ha sido necesario realizar decenas de simulaciones, pero los gráficos obtenidos son fundamentales para comprobar la existencia de un valor máximo del aislamiento y si la diferencia de su valor respecto al obtenido por otras configuraciones es relevante. Se han elegido las pantallas lisas y en L invertida. En primer lugar se aportan los resultados obtenidos para frecuencia de 600 Hz y para una altura del receptor de 1,5 metros. Se ofrece el gráfico para una distancia al tren de 70 metros, aunque se ha comprobado que el comportamiento es similar para otras distancias, con pequeñas diferencias.

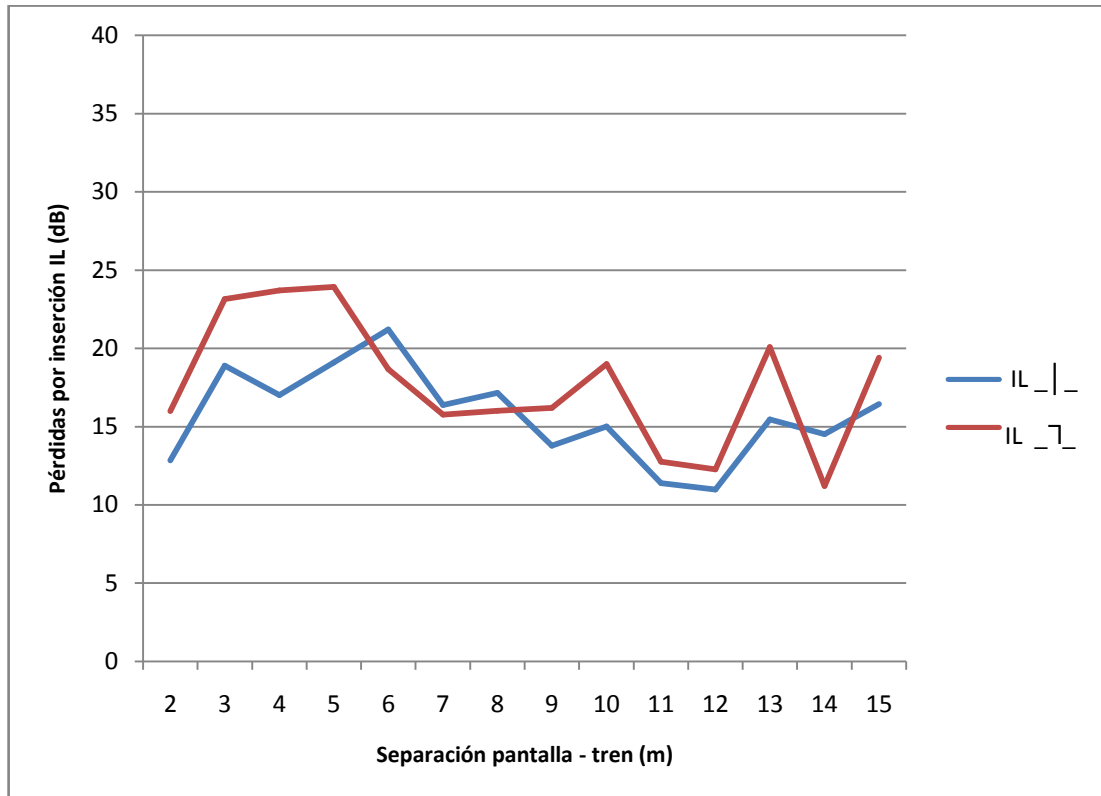


Gráfico 52. Frecuencia 600 Hz. Altura 6,0 m. Separación variable m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1,5 m. Distancia receptor tren 70 m.

Se observa que los resultados son similares para las dos pantallas, con un máximo para una separación de la pantalla entre 4 y 6 metros. El máximo no es muy marcado. A partir de los 6 metros comienza a descender su efectividad, para estabilizarse alrededor de los 10 metros, con las oscilaciones normales que tiene el método. Se observa que en general es más efectiva la pantalla en L invertida que la pantalla lisa.

En el estudio de altas frecuencias se comprueba también la existencia de un máximo, en este caso en la zona comprendida entre 4 y 7 metros, y es quizá menos marcado que el de bajas frecuencias, ya que la efectividad disminuye menos pronunciadamente.

Se puede concluir por lo tanto que la separación tren – pantalla tiene influencia en los resultados de aislamiento, aunque no es tan significativo como otros parámetros. Al conocer la existencia de este máximo es aconsejable la simulación de varias

colocaciones de las pantallas, ya que en caso de tener libertad de ubicación, sin incremento de coste, se pueden conseguir incrementos en los resultados obtenidos para una misma pantalla.

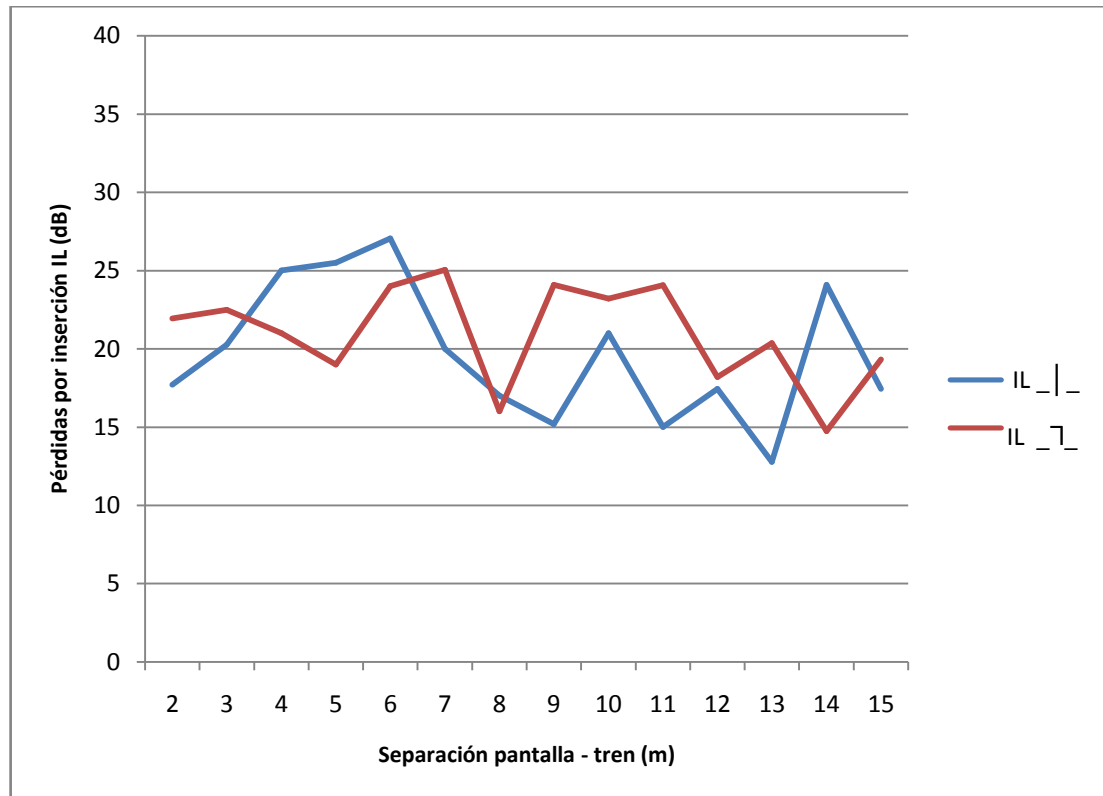


Gráfico 53. Frecuencia 2000 Hz. Altura 6,0 m. Separación variable m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1,5 m. Distancia receptor tren 70 m.

### 5.5. Influencia del espesor del material absorbente en las pantallas.

Es usual utilizar materiales absorbentes en las pantallas acústicas para obtener mejores resultados. Estos materiales son de diversos tipos como lanas minerales, y se están realizando estudios para la utilización de materiales reciclados o reutilizados como granzas de goma de neumáticos (Pfretzschner et al. 1996). En su estudio se indica que la variable más importante en el proceso de absorción es la resistencia específica al flujo de aire y que ésta depende de la densidad volúmica combinada y el tamaño de los poros resultantes. Para valores análogos de la densidad la resistencia aumenta al disminuir el tamaño del poro.

En la simulación que se ha realizado en esta Tesis se ha considerado como material absorbente la lana mineral, que dependiendo de fabricantes presenta diferentes resistividades al flujo, habiéndose elegido para esta Tesis  $20 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . En las pantallas se ha supuesto la colocación de material absorbente en la cara expuesta al tren y en la parte superior de la pantalla o cumbre por completo y dejando sin absorbente la parte de la pantalla en la parte de la zona de sombra y en la zona inferior de la cumbre en dicha zona.

Dado el elevado coste que presenta el material absorbente resulta necesario conocer el espesor óptimo de material que se debe colocar. Este valor dependerá del tipo de material y su resistividad al flujo, por lo que los resultados no resultan totalmente extrapolables y se debe analizar cada caso en particular, pero para la lana mineral elegida se ha realizado la simulación con tres tipos de pantallas y con espesores entre 0 y 10 centímetros con intervalos de 1 centímetro y para un espesor de 20 centímetros para observar si se estabilizan los resultados para espesores grandes. Esto ha requerido el cálculo de decenas de simulaciones, que se aportan a continuación. En el eje de abscisas se representa el espesor de absorbente en cm.

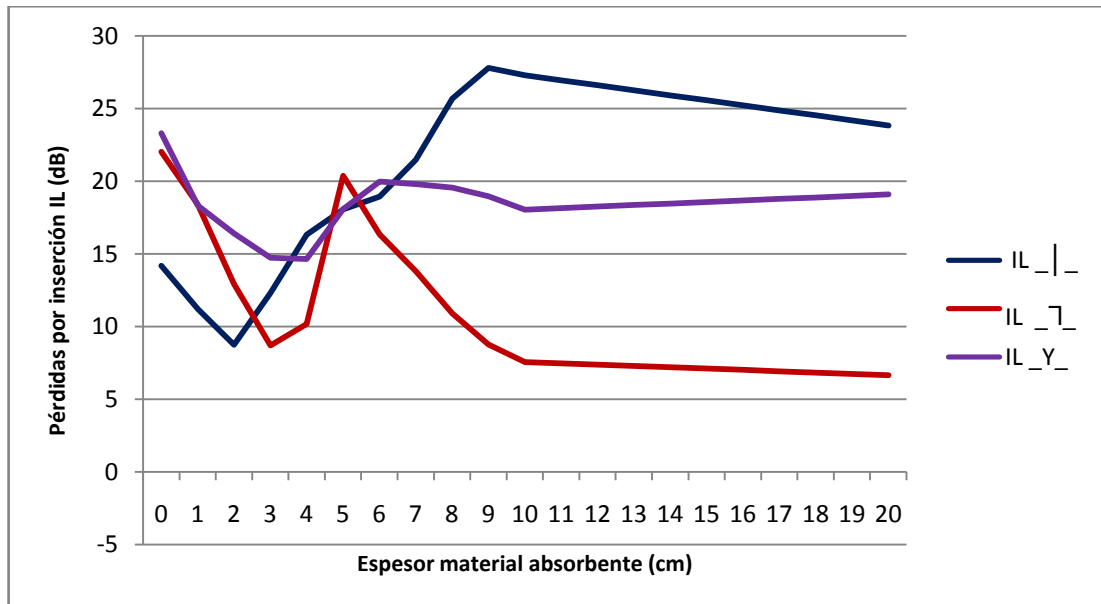


Gráfico 54. Frecuencia 600 Hz. Altura 5,0 m. Separación 5 m. Suelo duro  $\sigma = 30000 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1 m. Distancia receptor tren 90 m.

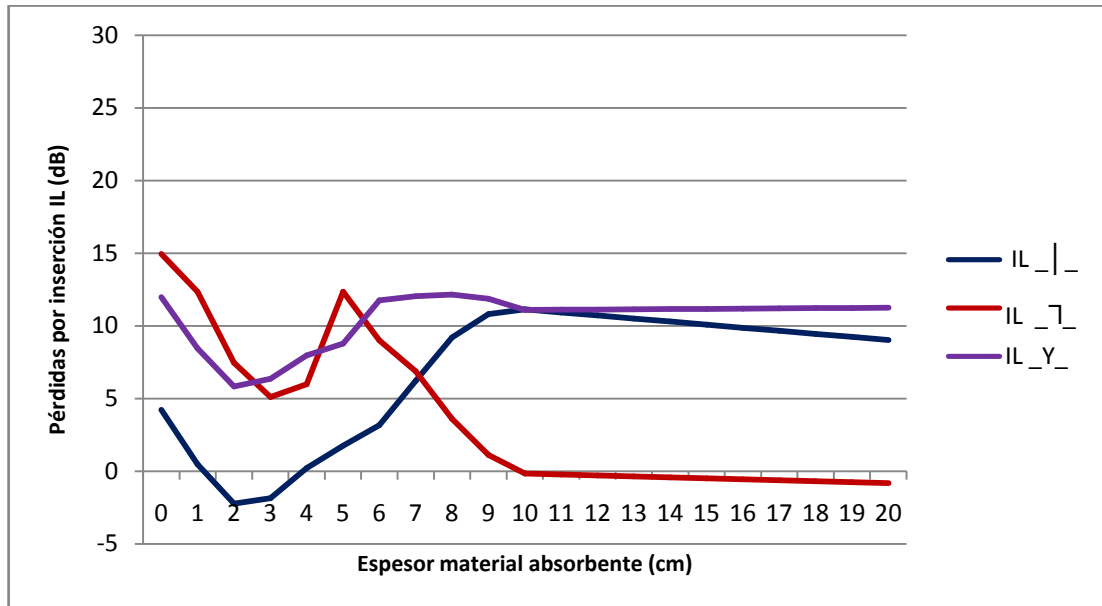


Gráfico 55. Frecuencia 600 Hz. Altura 5,0 m. Separación 5 m. Suelo blando  $\sigma = 200$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1 m. Distancia receptor tren 90 m.

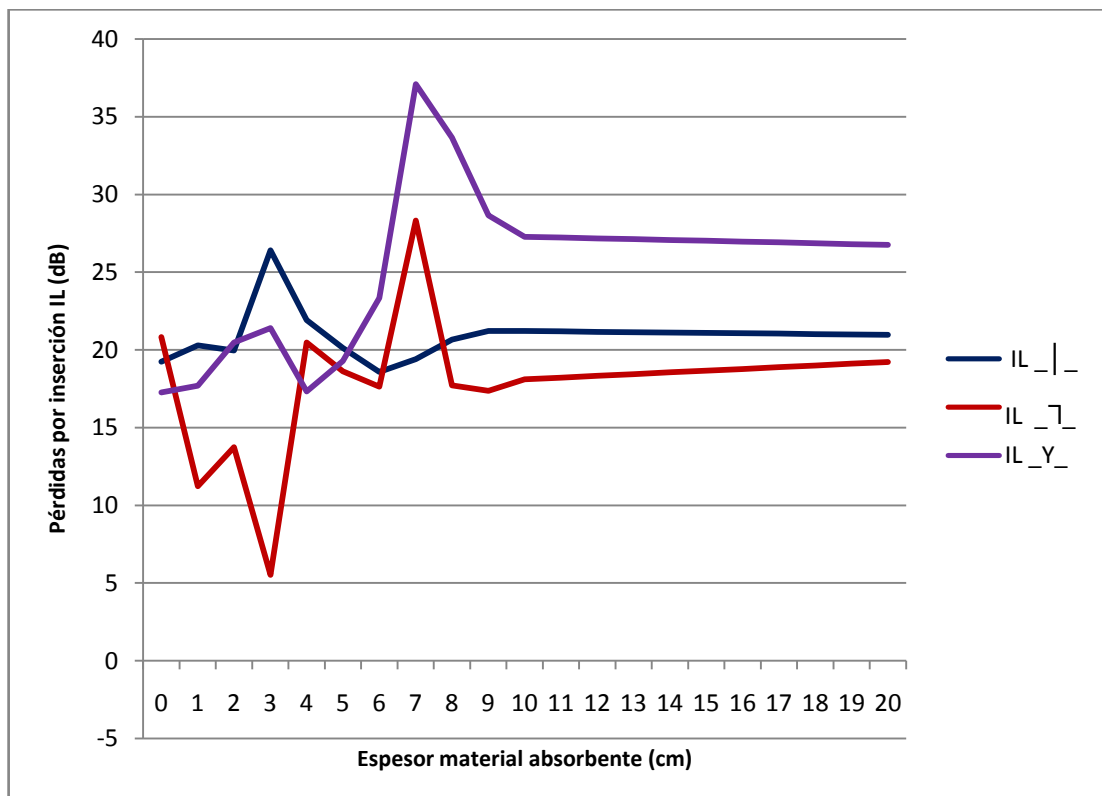


Gráfico 56. Frecuencia 2000 Hz. Altura 5,0 m. Separación 5 m. Suelo duro  $\sigma = 30000$   $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ . Altura receptor 1 m. Distancia receptor tren 90 m.

Del análisis de los gráficos se desprende un comportamiento diferente del material absorbente en frecuencias bajas que en frecuencias altas. En frecuencias bajas se observa que para los dos tipos de suelo, aunque con valores diferentes, no resulta muy efectivo. Para pequeños espesores de material absorbente, se produce una disminución del aislamiento de la pantalla, para comenzar a mejorar a partir de 4 ó 5 cm de espesor. El material absorbente resulta especialmente efectivo para pantallas lisas, en las que se consigue un máximo en torno a los 10 cm de espesor. Por el contrario resultaría cuestionable su uso en pantallas en Y, y contraproducente en pantallas en L invertida. Este hecho puede deberse a que los fenómenos de reflexión doble y difracción, que se producen en la pantalla lisa, quedan anulados por la presencia del material absorbente, mientras que en las pantallas con cumbrera es ésta la que actúa y protege, teniendo poca influencia por tanto el material absorbente.

Por el contrario, en las pantallas con cumbrera se debe cuidar el espesor del absorbente, y para la configuración estudiada, la colocación de excesivo material absorbente, puede conllevar la anulación de fenómenos de difracción e interferencia que colaboran en el aislamiento global de la pantalla.

Para las frecuencias altas en cambio es aconsejable la colocación de material absorbente, consiguiéndose un máximo en el aislamiento para las pantallas en L invertida e Y para 7 centímetros de espesor, y para la pantalla lisa de 3 centímetros de espesor.

Se puede concluir que es necesario realizar un estudio particularizado para cada material absorbente y para cada configuración de pantalla y suelo, que permita obtener el valor óptimo de espesor de absorbente. Es necesario estudiar los espesores a utilizar comparando los efectos producidos para cada frecuencia y también se debe tener en cuenta el espectro de frecuencias, siendo el procedimiento a seguir utilizar el aislamiento mejor para las frecuencias predominantes, porque aunque se perjudique otra frecuencia quizá no sea relevante dentro del espectro total.

## **6. CONCLUSIONES.**

En esta Tesis se ha considerado de capital importancia hacer un recorrido teórico por la física del sonido que permita comprender desde la base el fenómeno en estudio y una vez conseguido este objetivo, la forma de mitigarlo. Para ello en el *Capítulo 2* se analizan en un primer momento las ecuaciones que rigen la ecuación de onda con especial hincapié en las ondas esféricas y en las ondas cilíndricas. Las primeras reflejan el comportamiento de la propagación del sonido para fuentes sonoras de tipo puntual, y las segundas para fuentes lineales que pueden ser estudiadas en el plano dada su independencia de la coordenada  $z$ .

También se estudian en este capítulo los fenómenos de propagación como la reflexión, transmisión, refracción y difracción. De todos ellos el más importante es el de la difracción. Por supuesto, a través de la pantalla se produce transmisión de sonido, que dependiendo de la intensidad del sonido y del material de la pantalla, es transmitido a través de ella de forma atenuada, aunque con atenuación diferente para las distintas frecuencias. El fenómeno de la refracción se produce por el cambio de material del medio de transmisión de la onda, desde el aire hasta el material de la pantalla. También aparece la reflexión de la onda, siendo función del material de la pantalla y de las frecuencias estudiadas y actuando de manera decisiva el posible material absorbente situado en la superficie de la pantalla. La reflexión que en un primer momento podría tener únicamente importancia en el semiespacio emisor, puede jugar un papel importante si se producen reflexiones múltiples con la carrocería del tren y que pueden provocar que las reflexiones superen la altura de la pantalla, creando de esta manera un efecto amplificador.

Pero es la difracción el fenómeno más importante en la propagación del sonido producido por un tren en presencia de pantallas acústicas. El método de Huygens considera cada punto de un frente de onda como un foco puntual de ondas. Pasado un cierto tiempo el nuevo frente de ondas será la superficie correspondiente a la envolvente de todas las pequeñas ondas esféricas elementales emitidas por estas



fuentes puntuales. Por lo tanto, cuando una onda en su propagación encuentra un obstáculo, el cual tiene un orificio o un borde, como es el caso de las pantallas, dependiendo de la frecuencia estudiada, que define la amplitud de la onda, se produce la difracción de la onda, simulada como un nuevo frente de ondas situado en la abertura o borde, por lo que el sonido alcanza puntos situados en la zona de sombra.

El ruido en general, y el del ferrocarril en particular, no se compone de una única onda, sino de la suma de infinidad de ondas, con diferentes frecuencias e intensidades. Por lo que el estudio anterior de la onda de sonido no resulta práctico y se deben definir nuevos parámetros que midan el ruido. Los parámetros son múltiples, buscándose en este caso los que mejor se aproximen al problema del ruido del ferrocarril, como el nivel de presión sonora, el nivel de presión sonora continuo equivalente, etc., todos ellos medidos en dB incluso con diferente ponderación entre día y noche.

Se hace necesario encontrar un nuevo modelo de propagación del ruido que de una forma práctica permita el cálculo de la atenuación del nivel sonoro. Se aporta un modelo semiempírico, ya que parte de los factores intervinientes provienen de fórmulas analíticas mientras que otros se han obtenido empíricamente de ensayos y experimentos en campo y laboratorio. Este sistema ayuda de forma muy intuitiva a la comprensión del fenómeno estudiado, siendo algunos de los parámetros que entran en juego, la atenuación por divergencia geométrica, diferente para fuentes puntuales o cilíndricas, la absorción del aire, la debida al suelo, edificios, vegetación, etc.

También se aporta el cálculo de las pérdidas por inserción de pantallas acústicas mediante métodos semiempíricos y geométricos, en los que se ofrecen los resultados para varias configuraciones, pero que en la mayoría de las ocasiones tienen tanta rigidez en la geometría de las pantallas para las que son válidos que no son estrictamente aplicables al problema estudiado, aunque ante la ausencia de otras herramientas, como la que se presenta en la presente Tesis, han sido y siguen siendo de gran ayuda en el cálculo de pantallas.

Pero resulta necesario para realizar un correcto planteamiento del problema, conocer a fondo las características intrínsecas del ruido producido por el ferrocarril que lo hacen completamente distinto de otras fuentes de ruido y en concreto del ruido aerodinámico que se produce en el ferrocarril de Alta Velocidad cuando se superan los 300 km/h. Por ello en el *Capítulo 3* se hace un completo estudio del ruido producido por el ferrocarril.

Las fuentes del ruido ferroviario predominantes cuando circula a velocidades inferiores a los 200 km/h son las producidas principalmente por la rodadura, la propulsión y el equipamiento auxiliar y han sido estudiadas con anterioridad y son muy conocidas. Pero cuando el tren circula a velocidades cercanas o superiores a los 300 km/h son las fuentes de ruido aerodinámico las predominantes, superando en intensidad a las tradicionales. Son varias las fuentes de ruido aerodinámico que se encuentran en un tren circulando a Alta Velocidad:

- Los bogies.
- El pantógrafo, su hueco en el techo y otras instalaciones montadas sobre el techo.
- La cabeza del tren.
- Los huecos entre coches.
- Las rejillas de ventilación.
- Protuberancias como manillas y escaleras en las puertas.
- Cavidades resonadoras.
- La propia capa turbulenta que rodea la superficie del tren, la cual tiene baja potencia pero está distribuida en una gran área.

De todas ellas, las fuentes localizadas encima del tren son particularmente las más importantes cuando están presentes pantallas acústicas, como una típica pantalla de 2 metros de altura, que protege de los ruidos de la parte baja, incluyendo el ruido de rodadura de las ruedas con el carril, pero deja expuestas las fuentes superiores. Se ha

comprobado en casos reales cómo la efectividad de una pantalla bien diseñada para trenes convencionales y con valor muy bueno de pérdidas por inserción en torno a 14 dB, disminuía su aislamiento hasta 3 dB para trenes de Alta Velocidad, por lo que el estudio de este fenómeno es fundamental y es el objeto de esta Tesis.

Las fuentes aerodinámicas que aparecen en un tren de Alta Velocidad son fundamentalmente de tipo lineal, ya que aparecen en toda la longitud del tren, salvo algunas fuentes puntuales como los pantógrafos, que en el modelo realizado se han considerado incluidos entre todas las fuentes de ruido aerodinámico que se encuentran en el techo del tren. Asimismo las fuentes de ruido aerodinámico son de tipo monopolo, dipolo y cuadripolo, pero se demuestra que para el estudio que se va a realizar es suficiente con considerarlas como de tipo monopolo, lo cual simplifica el modelo.

Actuar sobre el origen de las fuentes de ruido tanto de rodadura como aerodinámico en el propio tren es una buena práctica, pero un buen diseño de las pantallas se revela fundamental.

Como herramienta de cálculo en la Tesis se ha utilizado el Método de Elementos de Contorno, el cual se desarrolla en el *Anexo A*. En él se explica el Método de Elementos de Contorno y su aplicación al problema acústico en general y de pantallas acústicas en particular. La decisión de elegir el MEC frente a los métodos de dominio se debe a las ventajas que presenta en el análisis del problema acústico, como son:

- Trabaja sólo sobre el contorno  $S$  del dominio de cálculo  $\Omega$ . Es mucho más sencillo definir el contorno que definir el dominio completo. En particular, el MEC requiere únicamente la discretización del contorno, lo cual trae consigo una reducción de la dimensionalidad del problema con respecto al MEF o al MDF.
- Puede tratar mucho más fácilmente problemas que involucren dominios infinitos.

- Se obtiene el mismo grado de precisión en las dos variables duales del problema (p.ej. desplazamientos y tensiones, potenciales y flujos, etc.).

En la Tesis se desarrolla el caso de fuentes lineales por lo que el problema se reduce al plano. Se explica la formulación para elementos de tipo puntual, lineal, cuadrático y cúbico.

Para la computación de las ecuaciones del Método de Elementos de Contorno se ha desarrollado un programa en Visual Basic que permite calcular diferentes casos, ya sean de tipo teórico para la validación del modelo o de tipo real con presencia de tren, con una o varias fuentes, diferentes tipos de suelos, presencia de pantallas con diferentes cubreras o sin ellas, con material absorbente o lisas, con terraplenes de tierra, o ausencia de pantallas. También se permite el estudio del caso del ruido producido en viaductos con pantallas y presencia de edificios, aunque no se han analizado en esta Tesis.

En el *Capítulo 4* se realiza la evaluación del modelo y del programa desarrollados. La validación del método se produce por tres vías. En un primer paso por el análisis de una fuente aislada en medio homogéneo. La comparación de los resultados obtenidos del programa con el MEC, se comparan con los obtenidos por métodos analíticos que han sido desarrollados en el propio capítulo.

De los resultados obtenidos se extraen conclusiones acerca del tamaño de la fuente, la cual se considera apropiada con un tamaño de fuente de 0,10 metros de radio. Para tamaños de fuente un poco mayores se observa que disminuye la precisión del método, que aunque es de pequeña importancia, hace decantarse por el tamaño mencionado.

Se ha analizado si la presión sonora a la que emite la fuente condiciona la precisión, pero se ha comprobado que para los rangos usuales del ruido producido por el ferrocarril es independiente del nivel de emisión.

Para decidir el tamaño de los elementos empleados se han realizado varias simulaciones, comprobando que depende de la frecuencia, y obteniéndose para elementos constantes un tamaño aconsejable de  $\lambda/3$ . No obstante se obtienen resultados bastante ajustados con tamaños superiores, que si bien para bajas frecuencias no resulta necesario aumentarlo, en determinados problemas muy complejos, si que podría ser justificado al estudiar altas frecuencias, por el elevado tiempo de computación, alcanzándose resultados precisos para tamaños de  $\lambda/1,6$ . Por lo tanto, para los casos estudiados en esta Tesis, el tamaño máximo elegido será  $\lambda/3$ , por lo que para la frecuencia de 600 Hz, sería suficiente con 19 cm, pero se ha tomado 10 cm, y para 2000 Hz sería necesario 5,7 cm, y se ha tomado 5 cm. La diferencia de tamaño en los elementos provoca que el tiempo de computación aumente considerablemente, multiplicándose por 10 para las altas frecuencias frente a las bajas frecuencias, en el equipo informático utilizado. Para las fuentes, se ha tomado en ambos casos un tamaño de elemento de 2 cm.

Para la validación del método, se ha considerado muy interesante la comparación con el método semiempírico de cálculo, expuesto en el *Capítulo 2*. Esto permite comprobar en ausencia de medidas de campo para el problema estudiado, comprobar no sólo de forma teórica la bondad del método, sino también con modelos provenientes de experiencias previas para desarrollar el método semiempírico. De estas comparaciones se concluye que el MEC presenta una gran precisión en ausencia de pantalla para todas las frecuencias pero especialmente para las frecuencias más altas. Se observan oscilaciones de las gráficas respecto al valor del modelo semiempírico en la zona más cercana a la fuente, siendo los valores aportados por el MEC en estos casos en general inferiores a los reales. Estas oscilaciones se minimizan hasta casi desaparecer si se realiza el estudio en ancho de banda. Dichas divergencias son debidas al estudio en monofrecuencia ya que el método semiempírico no puede ofrecer tanta precisión.

También se ha analizado la influencia de la altura de la fuente en la precisión, encontrándose que a mayor altura se obtiene mayor precisión. También es mayor la precisión para el caso de suelos duros que para suelos blandos, por lo que se puede

concluir que aumenta la precisión del MEC, con la frecuencia, la altura de la fuente y la dureza del suelo.

Posteriormente se valida el MEC colocando una pantalla acústica mediante métodos analíticos como en el primer caso y se observa que la precisión alcanzada es muy buena, con divergencias en torno a los 5 dB, dependiendo de las zonas.

Tras el análisis de todos los casos estudiados, en el caso 1 para una fuente aislada en medio homogéneo, en el caso 2 para una fuente con diferentes tipos de suelos, y en el caso 3 para una fuente con diferentes tipos de suelos y pantalla lisa, en los que se ha contrastado el Método de Elementos de Contorno, con métodos analíticos y semiempíricos, comparando la influencia de la variación de diferentes parámetros, como intensidad de emisión, altura de la fuente, altura del receptor, resistividad del suelo, frecuencias, etc., se concluye que la precisión alcanzada por el modelo del Método de Elementos de Contorno es muy buena y permite el estudio de otras configuraciones de pantallas y fuentes de emisión, teniendo en cuenta la existencia de un error que en la mayoría de los casos no será significativo, pero que para determinadas aplicaciones debería ser tenido en cuenta.

En el *Capítulo 5* se aportan los resultados ofrecidos por el MEC para el análisis del comportamiento de las pantallas acústicas frente al ruido aerodinámico de los trenes de Alta Velocidad. Para ello se ha estudiado la configuración del problema de modo que los resultados sean cercanos a problemas reales. Los elementos básicos que conforman el problema han sido:

- Suelo liso, estudiando diferentes resistividades, desde suelos blandos a suelos duros.
- Una pantalla acústica, la cual podrá ser lisa sin cumbreira o estar dotada de cumbreira, analizándose varios tipos, y estar cubierta o no de material absorbente.

- Tren de Alta Velocidad que provoca el ruido de rodadura y aerodinámico, con dimensiones usuales. Se ha simulado la vía, contemplando la capa de balasto, la de subbalasto y parte de la capa de forma sobre el terreno natural.
- Fuentes sonoras. Se han contemplado dos tipos de ruido diferentes, uno de rodadura producido por las ruedas, los carriles, bogies, etc. y otro producido por las fuentes de ruido aerodinámico, pantógrafo, bogies, discontinuidades y la propia capa turbulenta. Se han dispuesto dos fuentes sonoras, una simulando los ruidos de rodadura y parte de los aerodinámicos, que está situada a una cota similar a la de las ruedas, y la otra exclusivamente parte de los aerodinámicos, situada encima del tren.

En dicho apartado se explica el proceso para la elección del tipo de fuente, su ubicación, tipo y potencia. Se realiza el estudio para bajas y altas frecuencias, eligiendo las frecuencias de 600 Hz y 2000 Hz como las más representativas de ambos rangos.

En cuanto a las pantallas acústicas se han contemplado varios parámetros y sus combinaciones. En cuanto a la forma de la pantalla se han estudiado pantallas lisas, en L invertida o  $\Gamma$  con longitud de brazo hacia el tren, en T, en Y, con cumbrera semicircular y con cumbrera triangular. El modelo permite analizar pantallas de estas tipologías con dimensiones diferentes, incluso con taludes de tierra.

Se ha estudiado la influencia de la altura de la pantalla, parámetro fundamental, para lo que además de hacer estudios para alturas concretas se estudió el comportamiento de la pantalla con la variación de la altura de forma continua. También se ha estudiado la influencia de la separación pantalla tren, así como del espesor del material absorbente.

El estudio se ha realizado en monofrecuencia y aunque su precisión es muy alta, como se ha comprobado, el resultado final sobre el terreno que ofrecerá una pantalla determinada, será el obtenido para la suma de todas las frecuencias y será preciso realizar el estudio en ancho de banda. No obstante resulta muy acertado estudiar el

comportamiento de la pantalla individual para cada una de las frecuencias para conocer su comportamiento de forma más detallada, ya que en ancho de banda se ocultan aspectos del comportamiento de la pantalla que en ocasiones podrían ser relevantes o incluso fundamentales, como determinados ruidos de frecuencia discreta y tonales, que en el ferrocarril se encuentran por ejemplo en el chirrido de las ruedas y en muchas de las fuentes de ruido aerodinámico.

Para estudiar la influencia del tipo de suelo en la efectividad de las pantallas se han hecho simulaciones con suelo cubierto de hierba frente a suelos pavimentados. Se concluye que son más efectivas las pantallas colocadas en suelos duros frente a las de suelos blandos. Para los valores de pérdidas por inserción a distancias de la pantalla en las que se alcanza los valores asintóticos como los 80 metros, en el caso de bajas frecuencias, se observa que este mejor comportamiento, aunque varía en función de la pantalla, alcanza valores relativos comparados entre ambos en torno a los 15 dB, y para altas frecuencias en torno a los 10 dB. Para comprobar los valores absolutos de cada pantalla se pueden observar las gráficas del *Capítulo 5*.

El estudio de la influencia de la altura de la pantalla se ha hecho tras gran cantidad de simulaciones variando la altura de las pantallas de tal manera que la fuente que simula las fuentes de ruido aerodinámico sobre el techo del tren, quede por encima y por debajo del extremo superior de la pantalla. Se observa que cuando el extremo superior de la pantalla sobrepasa la posición de la fuente, los resultados obtenidos en pérdidas por inserción alcanzan valores en torno a los 20 dB variables en función de todos los parámetros comentados con anterioridad.

Pero si se estudia el comportamiento de las pantallas en función de la altura y partiendo de una altura superior en un metro a la posición de la fuente, cuando la pantalla comienza a disminuir su altura, los resultados no sufren una variación significativa hasta que la pantalla alcanza la altura de la fuente, momento en el que se produce una disminución de la acción de la pantalla en 10 dB. Este punto varía en función del tipo de pantalla, observándose que las pantallas con cumbreira ancha alcanzan ese punto de reducción con una altura entre 40 – 50 cm menor que las



pantallas lisas, dato que puede ayudar a la elección de una pantalla con cumbrera, porque aunque su coste es más elevado que el de las pantallas lisas, su altura puede ser menor, lo que otorga ventajas de fabricación y disminuye el impacto visual tanto a los usuarios que viajan en el tren, como a los colindantes a la vía.

Si se sigue disminuyendo la altura de la pantalla, se alcanza una reducción casi total de la efectividad cuando la fuente sobrepasa en 1 metro de altura el borde de la pantalla. Esta conclusión corrobora los problemas encontrados en implantaciones de pantallas en el terreno donde se detectaba que cuando los trenes circulaban por encima de los 300 km/h perdían gran parte de su efectividad. El ruido producido por el pantógrafo y el resto de elementos situados sobre el techo del tren puede provocar que si no se realiza un estudio adecuado de la geometría del tren, pantallas y terrenos, una inversión tan cara, como es la colocación de pantallas, y que siendo adecuada para trenes convencionales, pueda resultar totalmente inefectiva.

Se concluye que los métodos que se deben utilizar para trenes de Alta Velocidad deben ser distintos y para ello se deben usar programas, como el desarrollado en esta Tesis, u otros que admitan por ejemplo el análisis en tres dimensiones, porque el problema es diferente del clásico para trenes convencionales.

Otro aspecto estudiado es la influencia de la distancia de la pantalla al tren. Tras el análisis de varios casos se comprueba que existen diferencias para la efectividad de cada pantalla cuando la distancia varía. Se ha buscado si existe un punto máximo y se ha encontrado que este máximo se encuentra en distancias cercanas al tren, aunque el punto fijo varía en función de los parámetros analizados como tipo de pantalla, frecuencia, etc. Los máximos para bajas frecuencias se encuentran a distancias de 3 metros, y para altas frecuencias en torno a los 5 metros.

Se puede concluir por lo tanto que la separación tren – pantalla tiene influencia en los resultados de aislamiento, aunque no es tan significativo como otros parámetros. Al conocer la existencia de este máximo es aconsejable la simulación de varias ubicaciones de las pantallas, ya que en caso de tener libertad de posición, sin

aumento de coste, se pueden conseguir incrementos en los resultados obtenidos para una misma pantalla.

En cuanto al tipo de pantalla más efectivo, se observa que las pantallas con cumbrera son más efectivas que las pantallas lisas, y aunque no es posible establecer una norma definitiva sobre la tipología de pantalla más efectiva se pueden extraer algunas conclusiones. En general resultan más efectivas las pantallas en Y, T y L invertida. Las diferencias entre ellas no son muy grandes, generalmente en torno a 3 – 5 dB. Respecto al resto de pantallas, lisas, con cumbrera circular y triangular, sí que se observa que disminuye la efectividad. La presencia de cumbrera es fundamental, pero en las de cumbrera circular y triangular se suman dos factores, por un lado su menor tamaño, respecto a los brazos de las Y, L invertida y T, y por otro lado la orientación de la superficie de la cumbrera que no es tan efectiva con el mecanismo de la difracción como en las otras, al no lograrse de manera tan clara la doble difracción en las dos aristas.

Por ello, se concluye que una buena elección de la forma de la pantalla es fundamental. Las formas recomendadas tras el análisis de los resultados serían las Y, L invertida y T, siendo sus resultados similares, aunque unas presentan ventajas y desventajas frente a las otras. Por ejemplo las dos primeras presentan economía de material frente a la T, y por el contrario la T presenta simplicidad de fabricación respecto a la Y. Por otra parte la T y la Y presentan simetría que resulta más favorable para los esfuerzos que deben soportar. Estos condicionantes económicos son importantes en la toma de decisiones, pero se escapan del objeto de esta Tesis.

Se ha estudiado también el comportamiento de algunos tipos de pantallas, en concreto lisas, en L invertida y en Y, incluyendo material absorbente en su superficie expuesta al ruido y sobre la cumbrera. El material absorbente elegido ha sido la lana mineral de resistividad  $20 \text{ kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$ , por lo que los resultados obtenidos no se deben extrapolar sin estudios más detallados a otro tipo de materiales y configuraciones. Del análisis de los gráficos se desprende un comportamiento diferente en frecuencias bajas que en frecuencias altas en presencia de material absorbente. En frecuencias

bajas se observa que para los dos tipos de suelo, aunque con distintos valores, no resulta muy efectivo. Para espesores muy pequeños de material absorbente, se produce una disminución del aislamiento de la pantalla, para comenzar a mejorar a partir de 4 ó 5 cm de espesor. El material absorbente resulta especialmente efectivo para pantallas lisas, en las que se consigue un máximo en torno a los 10 cm de espesor. Por el contrario resultaría cuestionable su uso en pantallas en Y, y contraproducente en pantallas en L invertida. Este hecho se debe a que los fenómenos de reflexión doble y difracción, que se producen en la pantalla lisa, quedan anulados por la presencia del material absorbente, mientras que en las pantallas con cumbrera, es ésta la que actúa y protege, teniendo poca influencia por tanto el material absorbente.

Por el contrario, en las pantallas con cumbrera se debe cuidar el espesor del absorbente, y para la configuración estudiada, la colocación de excesivo material absorbente, no ofrece mayor aislamiento.

Para las frecuencias altas en cambio, puede ser aconsejable la colocación de material absorbente, consiguiéndose un máximo en el aislamiento para las pantallas en L invertida e Y para 7 centímetros de espesor, y para la pantalla lisa de 3 centímetros de espesor.

Se puede concluir que es necesario realizar un estudio particularizado para cada tipo de material absorbente y para cada configuración de pantalla, suelo y frecuencia, que permita obtener el valor óptimo de espesor de absorbente. Es necesario estudiar los espesores a utilizar comparando los efectos producidos para cada frecuencia y también se debe tener en cuenta el espectro de frecuencias, siendo el procedimiento a seguir, utilizar el aislamiento mejor para las frecuencias predominantes, porque aunque se perjudique otra frecuencia quizá no sea relevante dentro del espectro total.

## **7. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN Y TRABAJOS FUTUROS.**

Esta Tesis Doctoral es un paso más en el estudio de las pantallas acústicas para disminuir el ruido del ferrocarril, habiéndose centrado principalmente en el ruido aerodinámico. Tras los estudios realizados y las conclusiones obtenidas se observa que es posible y se debe continuar investigando sobre este tema, por lo que se proponen las siguientes líneas de investigación y trabajos a desarrollar en el futuro:

- Estudio de geometrías más complejas y habituales para vías normales de Alta Velocidad, que aunque el modelo desarrollado permite su estudio, no se han abordado en esta Tesis, como pueden ser:
  - Paso de la vía por viaductos o terraplenes. Se debe estudiar el comportamiento de los diferentes tipos de pantallas en función de la altura del viaducto. No se debe olvidar que entran en juego otras fuentes de ruido producido por la propia infraestructura que se deben valorar.
  - Paso de la vía por trincheras. Asimismo es interesante el estudio del ruido producido cuando el tren se acerca a la boca de un túnel. Se pueden obtener conclusiones sobre la colocación de pantallas que incrementen la altura de la trinchera, o conclusiones sobre la utilización de caballones de tierra en lugar de pantallas y su efectividad, logrando también una adecuada gestión de los materiales sobrantes de excavaciones.
  - Presencia de edificios. En general el ruido resulta molesto en las ciudades y en ellas existen edificios que pueden actuar como pantallas acústicas. En función de los resultados obtenidos se puede justificar un adecuado planeamiento urbano que sitúe en las zonas cercanas al ferrocarril edificios que no son perjudicados por el ruido como oficinas, talleres, etc., y protegidos por estos otros edificios. Del estudio se pueden obtener distancias mínimas, ruidos en función de la altura del observador y del tipo de cubrera, etc.

- Estudio del semiespacio emisor. La colocación de las pantallas, en especial las de determinadas cubreras, pueden producir incrementos significativos en el nivel acústico en el espacio situado entre el tren y la pantalla por las reflexiones producidas. El mismo problema, pero acentuado, se produce en el interior de túneles. De los resultados obtenidos se pueden extraer interesantes conclusiones para los fabricantes de material móvil, ya que los incrementos en el nivel acústico percibido por los viajeros puede resultar inaceptable para los estándares de calidad demandados actualmente.
- Estudio con modelación de fuentes de ruido aerodinámico más detallado. Ello puede desarrollarse en dos vías distintas:
  - Modelado de todas las fuentes de ruido aerodinámico por separado, pantógrafo, huecos entre coches o carrocerías, bogies, flujo turbulento, con análisis de su espectro, de donde se podrán obtener conclusiones acerca de la contribución de cada una de las fuentes y la mejora con la reducción del ruido producido por ellas. El modelo permite la colocación de minipantallas tanto sobre el techo del tren como en la zona de la vía.
  - Consideración de las fuentes no solo como monopolos, sino también como dipolos y cuadripolos, y diferenciando las fuentes de tipo puntual y lineal, acercándose de este modo todavía más a las características reales de cada fuente.
- Estudio de otras tipologías de pantallas y cubreras, investigando sobre distintas dimensiones. Se pueden obtener conclusiones sobre dimensiones óptimas de cada tipo de cubrera.
- Estudio de distintos materiales absorbentes y su aplicación a cada tipo de pantalla, obteniendo conclusiones acerca de espesores óptimos para cada tipo de pantalla y cubrera. También sería preciso el estudio de la colocación de materiales absorbentes en túneles y zonas de trinchera.
- Estudio del problema del ruido aerodinámico en banda ancha, comprobando si las conclusiones obtenidas para el estudio en monofrecuencia se ajustan fielmente o es preciso ajustarlas.

- Mejora del Modelo de Elementos de Contorno creado, permitiendo la creación de un modelo mixto con el Método de Elementos Finitos, para permitir modelar de una manera precisa la zona del bogie e incluso el interior del tren. Con los resultados obtenidos se podrán mejorar de forma extraordinaria los resultados en la zona del semiespacio emisor y en el interior del coche comentados anteriormente. También se pueden incorporar otros elementos como edificios en los que se necesite conocer el nivel acústico interiormente de una manera precisa.

## 8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

1. Abascal A.M., González J., Tarrero A. & Arenal M. (1999). *Estudio de la Impedancia Acústica del Suelo*. Tecniacústica 1999. Encuentro Ibérico de Acústica Ávila.
2. Abramowitz M. & Stegun I. (1970). *Handbook of Mathematical Functions*. 9<sup>th</sup> Printing ISBN 0 – 486 – 61272 – 4.
3. Alarcón Rovira G., Solé Bosquet J. & Sánchez Venegas A. (2005). *Metodologías de Predicción para Proyectos de Protección Acústica y Vibratoria en Nuevas Líneas de Ferrocarril*. Tecniacústica 2005. Encuentro Ibérico de Acústica – Terrassa.
4. Alegre Marrades D.M. & Clairbois, J.P. (1989). *Estudios de Evaluación del Impacto Acústico Debido a los Trenes de Alta Velocidad*. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 1989 Zaragoza.
5. Alegre Marrades D.M. & Pérez – López A. (1993a). *Normativa Europea para Barreras Antirruído en Carreteras. Características Acústicas*. Tecniacústica Valladolid.
6. Alegre Marrades D.M. & Pérez – López A. (1993b). *Normativa Europea para Barreras Antirruído en Carreteras. Características no Acústicas*. Tecniacústica Valladolid.
7. Alemán Flores M., Álvarez León L. & Sánchez Pérez J. (2008). *Apuntes y Problemas de la Asignatura Análisis Numérico*. Departamento de Informática y Sistemas. Universidad de Las Palmas.

8. Ambiente Consultores. (2001). *Elaboración de Propuesta de Normativa para la Regulación de la Contaminación Acústica Generada por Carreteras y Autopistas*. Comisión Nacional del Medio Ambiente.
9. Amini S., Chen K. & Harris P.J. (1990). *Iterative Solution of Boundary Element Equations for the Exterior Helmholtz Problem*. Transactions of the ASME: Journal of Vibration and Acoustics, V.112, P.257-62.
10. Arenaz Gombáu A., Espinel Valdivieso A.E. & Rodríguez Sánchez M.T. (2004). *Investigación de Nuevas Barreras Acústicas*. 4º Congreso Iberoamericano de Acústica. XXXV. Tecniacústica 2004 – Guimarães.
11. Argüelles Díaz, K.M. (2004). Tesis Doctoral. *Ruido Aerodinámico Tonal Radiado por un Ventilador Axial en Campo Lejano: Mecanismos de Generación y Propagación del Mismo*. ISBN: 978 – 84 – 690 – 9134 – 0.
12. Arias Fontalba M., Jiménez Zumaquero A. & Carmona Maqueda C. (2006). *Instalación de Pantallas Acústicas: Procedimiento a Seguir*. Tecniacústica 2006. XXXVII Congreso Nacional de Acústica. Encuentro Ibérico de Acústica. Gandía.
13. Arroyo Roldán F.J. (2009). *Apuntes de la Asignatura “Acústica Ambiental” Licenciatura en Ciencias Ambientales*. Universidad de Jaén.
14. Ayres F. Jr. (1989). *Cálculo Diferencial e Integral*. Schaum – Mac Graw – Hill. ISBN 84 – 85 – 240 – 21 – 9.
15. Ballesteros Tajadura R., Ramos Lorenzo C. & Parrondo Gayo J.L. (1996) *Modelización del Campo de Presión Sonora en la Proximidad de una Pantalla de Aislamiento Acústico*. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 1996.



16. Ballou G. (1991). *Handbook for Sound Engineers. Second Edition*. Editorial SAMS – MacMillan Computer Publishing. ISBN 0 – 672 – 22752 – 5.
17. Barreto A. F. (2004). *Barreiras Acústicas: a Escolha dos Materiais e Sua Instalação*. 4º Congreso Iberoamericano de Acústica. Tecniacústica 2004 – Guimarães.
18. Barti Domingo R. & Servera Planisi J. (1995). *Estudio Acústico de Barreras*. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 1995. La Coruña.
19. Beaumont J. (2002). *Problématique de l'Environnement dans les Transports Terrestres*. Fórum Acusticum 2002. Sevilla.
20. Beltrán F. (1999). *Ideas Generales sobre el Método de Elementos de Contorno*. ETS de Ingenieros Industriales de Madrid.
21. Beranek L. (1996). *Acoustics*. Editorial Acoustical Society of America. ISBN 0 – 88318 – 494 – X.
22. Bitencourt de Souza V. J. (2001). Tesis Doctoral. *Algoritmos de Integração Eficientes para o Método dos Elementos de Contorno Tridimensional*. Universidade de São Paulo.
23. Boletín Oficial del Estado. (2003). *Ley 37/2003 de 17 de Noviembre del Ruido*. BOE N° 276 18 de Noviembre de 2003
24. Boletín Oficial del Estado. (2005). *Real Decreto 1513/2005, de 16 de Diciembre, por el que se Desarrolla la Ley 37/2003, de 17 de Noviembre, del Ruido, en lo Referente a la Evaluación y Gestión del Ruido Ambiental*. BOE N° 301 17 de Diciembre de 2005

25. Boletín Oficial del Estado. (2007). *Real Decreto 1367/2007, de 19 de Octubre, por el que se Desarrolla la Ley 37/2003, de 17 de Noviembre, del Ruido, en lo Referente a Zonificación Acústica, Objetivos de Calidad y Emisiones Acústicas.* BOE N° 254 23 de Octubre de 2007
26. Bragança L., Freitas E. & Pinheiro D. (2006). *Eficácia de Barreiras Acústicas* Tecniacústica 2006. XXXVII Congreso Nacional de Acústica. Encuentro Ibérico de Acústica. Gandía.
27. Brebbia C.A. & Domínguez J. (1989). *Boundary Elements. An Introductory Course.* Editorial Mac Graw – Hill. ISBN 0 – 905451 – 76 – 7.
28. Brod K. (1984). *On The Uniqueness of Solution for All Wavenumbers in Acoustic Radiation.* The Journal of the Acoustical Society of America, v.76, n.4, p.1238-43.
29. Burton A.J.; Miller G.F. (1971). *The Application of Integral Equation Methods to the Numerical Solution of Some Exterior Boundary-Value Problems.* Proceedings of the Royal Society of London, Series A – Mathematical and Physical Sciences, V.323, P.201-10
30. Canale S., Ventura F. & Di Petre M. (1989). *Noise Barriers: First Introduction on Italian Highways.* 8º Symposium Fase' 89. Acústica Ambiental. Zaragoza.
31. Chandler-Wilde S. & Langdon S. (2007). *Boundary element methods for acoustics.* University of Reading Whiteknights Berkshire.
32. Ciskowski R.D. & Brebbia C.A. (1991). *Boundary Element Methods in Acoustics.* Computational Mechanics Publications, Southampton, Elsevier. ISBN: 1851666796

33. Clairbois J.P. (1990). *Noise Impact of Highways: Corrective Devices*. Jornadas técnicas de ruido ambiental en el medio urbano. Barcelona.
34. Clairbois J. P. (2001). *Dispositivos Reductores de Ruido: Física, Modelos, Validaciones. ¿Qué Conclusiones Podemos Sacar de Todo Ello?*. XXXII Congreso Nacional de Acústica – Tecniacústica 2001. Encuentro Ibérico de Acústica Logroño.
35. Colina C. de la, Martín M.A., Pfretzschner J. & Moreno A. (1994). *Caracterización Acústica en Modelos a Escala de Barreras Antirruído, Mediante Señales Transitorias*. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 1994. Valencia.
36. Colonius T., Lele S.K. & Moin P. (1997). *Sound generation in a mixing layer*. J. Fluid Mech. (1997). Vol. 330, pp. 375-409
37. Comisión de las Comunidades Europeas. (2008). *Medidas de Reducción del Ruido Ferroviario Aplicables a la Flota Existente. Comunicación de la Comisión al Parlamento Europeo y al Consejo*. COM (2008) 432 final. Bruselas 8.7.2008.
38. Comisión Europea. *Grupo de Trabajo de la Comisión Europea "Emisiones Sonoras del Ferrocarril". Resumen del Documento de Debate sobre las Estrategias y Prioridades Europeas para la Reducción del Ruido Ferroviario*.
39. Copley L.G. (1967). *Integral Equation Method for Radiation from Vibrating Bodies*. The Journal of the Acoustical Society of America, v.41, n.4, p.807-16.
40. Copley L.G. (1968). *Fundamental Results Concerning Representations in Acoustic Radiation*. The Journal of the Acoustical Society of America, v.44, n.1, p.28-32.

41. Crombie, D.H. & Hothersall, D.C. (1995). *The Performance of Multiple Noise Barriers*, J. Sound and Vibration. 176(4), 459 – 473.
42. Cunefare K.A., Koopman G. & Brod K. (1989). *A Boundary Element Method for Acoustic Radiation Valid for all Wavenumbers*. The Journal of the Acoustical Society of America, V.85, N.1, P.39-48
43. Delany M.E. & Bazley E.N. (1970). *Acoustical Properties of Fibrous Absorbent Materials*. Applied Acoustics, 3, 105 – 116.
44. Diario Oficial de las Comunidades Europeas. (2002). *Directiva 2002/49/CE del Parlamento Europeo y del Consejo de 25 de Junio de 2002 sobre Evaluación y Gestión del Ruido Ambiental*.
45. Domínguez J. (1977). Tesis Doctoral. *Tensiones y Deformaciones en las Proximidades de Anclajes Pasivos*. Universidad de Sevilla.
46. Domínguez J. (1993). *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications Southampton & Elsevier Applied Science, London. ISBN: 1853122580
47. Duhamel D. (1998). *Calcul de Murs Antibruit et Controle Actif du Son*. L'Université de Marne la Vallée.
48. Estellés H., Cervera F. & Rubio C. (1996). *Análisis de una Barrera Acústica Absorbente*. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 1996. Barcelona.
49. Everest F.A. (2001). *Master Handbook of Acoustics. Fourth Edition*. Editorial Mac Graw – Hill. ISBN 0 – 07 – 136097 – 2.

50. Faus L., Romero. J., Jiménez A., Marín A., Sanchís A. & Cerdá S. (2003). *Un Primer Estudio del Ruido en los Actuales Trenes de la Red Ferroviaria Española*. Revista de acústica, Vol. 34 nº 1 – 2.
51. García Díaz de Villegas, J.M., Rodríguez Bugarín, M. (1995). *Desvíos Ferroviarios*. Ingeniería Cántabra. INCAN. ISBN 84 – 605 – 4337 – 4.
52. García Díaz de Villegas, J.M. (1999). *Ferrocarriles. Apuntes de Clase*. Cátedra de Ferrocarriles. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad de Cantabria.
53. García Díaz de Villegas, J.M. (2000). *Explotación Técnica de Ferrocarriles*. Cátedra de Ferrocarriles. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad de Cantabria.
54. García Sanz B. & Garrido F.J. (2003). *La Contaminación Acústica en Nuestras Ciudades*. Colección Estudios Sociales Nº 12. Fundación La Caixa. D.L. B – 9791 – 2003.
55. García Vadillo E., Amezua E. & Hernández A. (1991). *Software para la Predicción de los Niveles Sonoros Debidos al Tráfico Ferroviario: Factores a Considerar*. Conferencia Internacional “Ruido en las Grandes Ciudades” Madrid.
56. Gil Alías D. (2005). Tesis Doctoral. *Aislamiento Acústico de Ruido Ferroviario Mediante Pantallas. Modelado por Elementos de Contorno*. ICAI. Universidad Pontificia Comillas de Madrid.
57. Gomes de Souza C. P. (2007). Tesis Doctoral. *Análise de Alta Precisão em Modelos Tridimensionais de Elementos de Contorno Utilizando Técnicas Avançadas de Integração Numérica*. Universidade de São Paulo.

58. González J., García I., Gallardo O., Tarrero A., Martín M.A., Quirós S., Machimbarrena M. & Lorenzana T. (2005). *Aplicación del Método MEC-Acoplamiento para Determinar la Influencia de Obstáculos en la Propagación del Sonido en Exteriores*. Tecniacústica 2005. Encuentro Ibérico de Acústica. Terrassa.
59. Graaf, W. (1989). *Noise Impact from High Speed Trains*. 8<sup>th</sup> Symposium Fase'89 on Environmental Acoustic. Zaragoza.
60. Greco M. (2000). Tesis Doctoral. *Análise do Problema Harmônico de Radiação e Difusão Acústica, Usando o Método dos Elementos de Contorno*. Universidade de São Paulo.
61. Gumerov N.A. & Duraiswami R. (2007). *Fast Multipole Accelerated Boundary Element Methods for the 3D Helmholtz Equation*. University of Maryland.
62. Hayashi Y. (1973). *The Dirichlet Problem for the Two-Dimensional Helmholtz Equation for an Open Boundary*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, V.44, P.489-530.
63. Harris C.M. (1995). *Manual de Medidas Acústicas y Control del Ruido*. Editorial Mcgraw-Hill. ISBN: 8448116194.
64. Hothersall D.C., Chandler-Wilde S.N. & Hajmirzae M.N. (1991) *Efficiency of Single Noise Barriers*. J. Sound and Vibration, 146(2), 303 – 322.
65. Hothersall D.C., Crombie D.H. & Chandler-Wilde S.N. (1991). *The Performance of T-Profile and Associated Noise Barriers*. Applied Acoustics, 32, 269 – 287.
66. Ikeda M. (2002). *Study of the Aerodynamic Noise Characteristics of Bluff Bodies as a Pantograph Member*. Fórum Acusticum, Sevilla. Septiembre, 2002

67. Jaswon M.A. (1963). *Integral Equation Methods in Potential Theory I*. Proceedings of the Royal Society of London, Series A – Mathematical and Physical Sciences, V.275, P.23-32.
68. Jaswon M.A & Symm G.T. (1977). *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*. Academic Press. ISBN: 0123810507
69. Keller J.B. (1961). *Geometrical Theory of Diffraction*. J. Opt. Soc. Am. Vol. 52(2) pp. 116-30,
70. Kinsler L.E., Frey A.R., Coppens A.B. & Sanders J.V. (2000). *Fundamentals of Acoustics*. Editorial John Wiley & Sons. ISBN 0 – 471 – 84789 – 5.
71. Kirkup S.M. (2007). *The Boundary Element Method in Acoustics. A development in Fortran*. ISBN 0 – 953 – 4031 – 06.
72. Kleinman R.E. & Roach G.F. (1974). *Boundary Integral Equations for the Threedimensional Helmholtz Equation*. SIAM Review, V.16, N.2, P.214-36.
73. Kogan Musso P. (2004). Tesis Doctoral. *Análisis de la Eficiencia de la Ponderación “A” para Evaluar Efectos del Ruido en el Ser Humano*. Universidad Austral de Chile.
74. Krylov V.V. (2001). *Noise and Vibration from High – Speed Trains*. Editorial Thomas Telford. ISBN 0 – 7277 – 2963 – 2.
75. Kurze U.J. (1974). *Noise Reduction by Barriers*. J. Acoust. Soc. Am. Vol. 55, pp.504-18.
76. Lighthill, M. J. (1952). *On Sound Generated Aerodynamically: I. General Theory*. Proc. R. Soc. Lond. A 211.

77. Lighthill, M. J. (1954). *On Sound Generated Aerodynamically: II. Turbulence as a Source of Sound*. Proc. R. Soc. Lond. A 222.
78. Linares Hurtado J. I. & Gil Alías D. (2000). *Evaluación de las Pérdidas por Inserción en Barreras Acústicas Rígidas Semiinfinitas Mediante el Método de los Elementos de Contorno*. II Congreso Iberoamericano de Acústica. XXXI Congreso Nacional de Acústica – Tecniacústica 2000. Madrid.
79. Linares Hurtado J. I. & Gil Alías D. (2001). *Consideración del Suelo en el Modelado de Barreras Acústicas Bidimensionales Mediante el Método de los Elementos de Contorno*. XXXII Congreso Nacional de Acústica – Tecniacústica 2001. Encuentro Ibérico de Acústica. Logroño.
80. Linares Hurtado J. I. & Gil Alías D. (2004). *Análisis del Comportamiento de Barreras Acústicas para Ruido Ferroviario en la Octava de 630 Hz Mediante Elementos de Contorno*. 4º Congreso Iberoamericano de Acústica. Tecniacústica 2004 – Guimarães.
81. Maekawa Z. (1968). *Noise Reduction by Screens*. Appl. Acoust. Vol.1, pp. 157-73.
82. Maekawa Z. (1990). *A Simple Estimation Method for Noise Reduction by Various Shaped Barriers*. Revista de Acústica. Vol.21, N.1 – 2.
83. Marín Sanchís A., Sanchís Sabater A. & Giménez Pérez A. (1995). *Estudio del Aislamiento Producidos por Pantallas de Diferentes Características* Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 1995. La Coruña.
84. Martens A., Wedemann J., Meunier N. & Leclere A. (2002). *High Speed Train Noise – Sound Source Localization at Fast Passing Trains*. Fórum Acusticum 2002. Sevilla.



85. Matas López R.M. & Pérez del Campo P. (2000). *El Ruido en las Líneas Ferroviarias*. Renfe. Gerencia de Medio Ambiente. Física y Sociedad nº 11.
86. Mechel F.P. (2002). *Formulas of Acoustics*. Ed. Springer; 1st edition. ISBN: 3540425489
87. Mena Zamorano D.E. (2006). Tesis Doctoral. *Estudio Teórico de Barreras Acústicas Basado en un Modelo Modal*. Universidad Austral de Chile.
88. Meyer, W.L.; Bell, W.A.; Zinn, B.T.; Stallybrass, M.P. (1978). *Boundary Integral Solutions of Three Dimensional Acoustic Radiation Problems*. Journal of Sound and Vibration, v.59, n.2, p.245-62.
89. Ministère de l'Environnement et du Cadre de Vie. (1980). *Guide du Bruit des Transports Terrestres : Prévion des Niveaux Sonores*. ISBN 2-11-083290-8
90. Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente. (1995). *Reducción del Ruido en el Entorno de las Carreteras*. Serie Monografías. Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente. Dirección General de Carreteras. Centro de Publicaciones. ISBN - 84 - 498 - 0173 - 7.
91. Mitzner K.M. (1967). *Numerical Solution for Transient Scattering From a Hard Surface of Arbitrary Shape - Retarded Potential Technique*. The Journal of the Acoustical Society of America, V.42, N.2, P.391-7.
92. Morgan P.A., Hothersall D.C. & Chandler-Wilde S.N. (1998). *Influence of Shape and Absorbing Surface. A Numerical Study of Railway Noise Barriers*. Journal of Sound and Vibration, Volume 217, Issue 3, 29 October 1998, Pages 405-417.

93. Möser M. (1999). *Eficacia de la Utilización de Cumbreras en las Barreras Acústicas*. XXX Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 99. Encuentro Ibérico de Acústica Ávila.
94. Moses P. (2007). *Numerical Solution of Helmholtz Equation by Boundary Elements Method*. Czech Technical University.
95. Murata K., Nagakura K., Kitagawa T. & Tanaka S. (2006). *Noise Reduction Effect of Noise Barrier for Shinkansen based on Y-Shaped Structure*. QR of RTRI, Vol 47, N° 3 Agosto 2006
96. Nagakura K. (2005). *Prediction and Mitigation of Noise from Shinkansen Tunnel Portals*. QR of RTRI, Vol. 46 N° 1 Febrero 2005
97. Ogawa T. & Nishida T. (2002). *Numerical Investigation of a Pressure Wave Generated by a High Speed Train Passing Through a Structure*. Fórum Acusticum, Sevilla. Septiembre, 2002
98. Okada T. & Hiroe M. (2002). *Improvement of the Prediction Model of Shinkansen Noise*. Japan Fórum Acusticum, Sevilla. Septiembre, 2002
99. Okada T. (2004). *A Study on Predicting Shinkansen Noise Levels Using the Sound Intensity Method*. JSME International Journal, Series C Vol. 47 N° 2 2004
100. Olmos Cancino E.D. (2002). Tesis Doctoral. *Evaluación de la Pérdida de Inserción de una Barrera Acústica Aplicada en un Proyecto Lineal*. Universidad Austral de Chile.
101. Páez Galián J. (1983). *La Construcción de Obras Protectoras contra el Ruido Procedente del Tráfico Rodado sobre Carreteras y Autopistas en Alemania*. Revista de Obras Públicas. N° 3.213 Mayo 1983. 359-367

102. Pavan L. (2008). Tesis Doctoral. *Análise Modal e Otimização Numérica de Sistemas Acoplados Vibroacústicos Tridimensionais*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
103. Perdomo F., Aznárez J. & Maeso O. (2002). *Aplicación del MEC en la Evaluación de Medidas para Reducir el Impacto Acústico en el Entorno de Carreteras*. Revista de acústica. Vol. 33, nº 1 – 2.
104. Perera Melero P. (1992). *Impacto Ambiental de la Alta Velocidad Ferroviaria. Perturbaciones Acústicas Producidas por el Transporte Ferroviario*. Monografías 14. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
105. Pérez López A. (2003). *Contaminación Acústica*. Revista Ambienta Abril 2003
106. Pfretzschner J. & Simón F. (1993). *Caracterización de Barreras Acústicas Mediante la Aplicación de un Baremo Global*. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 1993. Valladolid.
107. Pfretzschner J. & Martín M.A. (1993). *Experimentación sobre Modelos de Barreras Acústicas con Objeto de Comprobar la Idoneidad de Diferentes Algoritmos de Predicción*. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 1993 Valladolid.
108. Pfretzschner J., Colina C. de la, Martín M. A. & Moreno A. (1994). *Pérdidas por Inserción en Barreras Antirruído de Bajo Aislamiento Acústico*. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 1994. Valencia.
109. Pfretzschner J., Simón F., Moreno A. & De la Colina C. (1995). *Índice de Pérdidas por Inserción en Barreras con Reflexiones en el Terreno*. Jornadas Nacionales de Acústica.
110. Pfretzschner J., Simón F. & Burgos M.J. (1995). *¿Se Justifican las Pantallas Acústicas con Cumbre Circular?* Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 1995. La Coruña.

111. Pfretzschner J. & Simón F. (1996). *Aplicación de las Barreras Acústicas Provistas de una Cumbre Cilíndrica en el Apantallamiento del Tráfico Rodado*. Tecniacústica 1996. Barcelona.
112. Pfretzschner J., Simón F., Moreno A., Colina C. de la & Rodríguez R. (1996). *Pantallas Acústicas Absorbentes Realizadas con Granzas de Goma*. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 1996. Barcelona.
113. Pfretzschner J. & Simón F. (1997). *Barreras Acústicas y Ruido de Tráfico*. Revista de Acústica. Vol.28, N.3 – 4.
114. Pfretzschner J., Simón F., Colina C. de la. & Rodríguez R. (1998). *Características Absorbentes de Pantallas Acústicas: Mejora de los Índices de Absorción*. XXIX Jornadas Tecniacústica 1998, I Simposio Iberoamericano de Acústica Lisboa.
115. Pfretzschner J., Simón F., Rodríguez R. M<sup>a</sup>. & Moreno A. (2001). *Barreras Acústicas. Diseño y Realización de un Índice de Protección que Permite Definir las Características Extrínsecas, que Junto a los Correspondientes Intrínsecos, Permiten Calificar el Comportamiento de las Pantallas*. Revista de Acústica. Vol.32, N.1 – 2.
116. Piaszczyk C.M.; Klosner J.M. (1984). *Acoustic Radiation from Vibrating Surfaces at Characteristic Frequencies*. The Journal of the Acoustical Society of America, v.75, n.2, p. 363-75.
117. Pita Olalla E. (1995). *Las Pantallas Antirruído y sus Prestaciones*. Revista de Obras Públicas. N° 3.339 Enero 1995. 77-88
118. Poisson F., Letourneaux F., Loizeau T. & Vincent N. (2002). *Inside Noise of High Speed Train Coaches*. Fórum Acusticum, Sevilla. Septiembre.

119. Poisson F., Letourneaux F. & Robert G. (2002). *Experimental Characterisation of a New Aeroacoustic Source on High Speed Trains*. Fórum Acusticum, Sevilla. Septiembre
120. Pons Espi J. & Santiago Páez J. S. (1993). *Control de Ruido de Ferrocarril Mediante Apantallamiento Acústico. Un Caso Práctico*. Jornadas Nacionales de Acústica. Tecniacústica 1993. Valladolid.
121. Premat E., Defrance J., Priour M. & Aballea F. (2003). *Coupling BEM and GFPE for Complex Outdoor Sound Propagation*. Euronoise – Naples.
122. Rashed Y.F. (2001). *Boundary Elements Method. Tutorials*. Cairo University, Giza Egypt.
123. Rizzo F.J. (1967). *An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*. Quarterly of applied mathematics / American mathematical society, v.XXV, n.1, p.83-95.
124. Rodríguez Bugarín M., Novalés Ordax M. & Orro Arcay A. (2005). *Alta Velocidad y Territorio. Algunas Experiencias Internacionales*. Revista Ingeniería y Territorio, nº 70. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
125. Roger M. (1996). *Applied Aeroacoustics: Prediction Methods*. Von Karman Institute for Fluid Dynamics. Lecture Series.
126. Rosado Rodríguez C. (1974). *Acústica I*. Editorial Trillas.
127. Ruiz Fluvià J. (2004). Tesis Doctoral. *Desenvolupament de Mètodes de Predicció de Soroll i Anàlisi de l'Impacte Acústic Produït pel Trànsit Viari i el Ferrocarril en la Ciutat de Girona*. Universidad de Girona. ISBN: 84 – 689 – 2571 – 3
128. Russell D.A., Titlow J.P. & Bemmen Y.J. (1998). *Acoustic Monopoles, Dipoles, and Quadrupoles: An Experiment Revisited*. Kettering University, Michigan.

- 129.Salas R.A., Simón F. & Pfretzschner J. (1999). *Protección contra el Ruido de Tráfico: ¿Pantallas o Carreteras en Trinchera?*. Tecniacústica 1999. Encuentro Ibérico de Acústica Ávila.
- 130.Samarski A.A. (1986). *Introducción a los Métodos Numéricos*. Editorial Mir Moscú. ISBN 2910009902244
- 131.Sanchís Sabater A. (1993). Tesis Doctoral. *Contribución al Estudio de la Atenuación del Ruido por Interposición de Barreras Acústicas. Aproximación al Cálculo Mediante el BEM*. Universidad Politécnica de Valencia.
- 132.Sanchís Sabater A., Giménez Pérez A., Marín Sanchís A. & Solana Quirós P.E. (1996). *Modelo Físico – Matemático para el Estudio de Atenuación de Ruido por Interposición de Barreras*. Jornadas Nacionales de Acústica, Tecniacústica 1996.
- 133.Sanchís A., Giménez A., Marín A. & Solana P.E. (1997). *Aplicación del MEC para la Determinación de la Atenuación de Ruido Producido por Barreras*. Revista de Acústica, 28.
- 134.Sansegundo Sierra A. (2008). *Curso de Acústica en la Edificación*. Colegio Oficial de Arquitectos de Madrid.
- 135.Sanz Sá J.M. (1987). *El Ruido*. Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Centro de Publicaciones. ISBN – 84 – 7433 – 484 – 5.
- 136.Saura López F.J., Sánchez Román M.M. & Crespo del Río R. (2005). *Evaluación del Ruido en Infraestructuras Viarias. Cuaderno Aepo 6*. Editorial Aepo S.A. Ingenieros Consultores, ISBN 84 – 922462 – 5 – 1.
- 137.Schenck H.A. (1968). *Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems*. The Journal of the Acoustical Society of America, V.44 N.1, P.41-58.

138. Següés F. (2007). *Conceptos Básicos del Ruido Ambiental*. CEDEX. Ministerio de Medio Ambiente.
139. Segura R. (2002) *Impacto Ambiental de las Líneas de Alta Velocidad. Medidas Preventivas, Correctoras y Compensatorias*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Colección Señor nº 31 ISBN 843800220X
140. Seijo Miramontes M.R., García-Rebull Salgado F., Montoliú Trillo R., Seijo Casal J.M., Tarrío Tobar A. (1997). *Cálculo de Barreras para la Eliminación de Contaminación Acústica Originada por el Tráfico Rodado*. XXVIII Jornadas Nacionales de Acústica. Encuentro Ibérico de Acústica. Oviedo
141. Seybert, A.F., Soenarko, B., Rizzo, F.J. & Shippy, D.J. (1985). *An Advanced Computational Method for Radiation and Scattering of Acoustic Waves in Three Dimensions*. The Journal of the Acoustical Society of America, v.77 n.2 p.362-8.
142. Seznec R. (1980). *Diffraction of Sound around a Barrier: Use of the Boundary Elements Technique*. J. Sound and Vibration, 73, 195 – 209.
143. Shaw R.P. (1968). *Retarded Potential Approach to the Scattering of Elastic Pulses by Rigid Obstacles of Arbitrary Shape*. The Journal of the Acoustical Society of America, V.44, N.3, P.745-8.
144. Simón Hidalgo F. (1997). Tesis Doctoral. *Caracterización Acústica de pantallas antirruído mediante un índice global*. Universidad Complutense de Madrid.
145. Simón F. & Pfretzschner J. (1998). *Propiedades Físicas del Índice de Protección Acústica de Barreras Antirruído* XXIX Jornadas Tecniacústica 98, I Simposio Iberoamericano de Acústica Lisboa.
146. Simón F. & Pfretzschner J. (2000). *Índice Evaluador de la Capacidad de Protección de Pantallas Acústicas Antirruído*. II Congreso Iberoamericano de Acústica. XXXI Congreso Nacional de Acústica – Tecniacústica 2000. Madrid.

- 147.Sommerfeld A. (1896). *Mathematische Theorie der Diffraction*. Math. Ann. Vol. 47, pp. 317-74.
- 148.Sousa Costa E., Machado Borges E. N. & Matias Afonso M. (2008). *Método de Elementos de Contorno Aplicado a Radiação Acústica*. VI Congreso Iberoamericano de Acústica – FIA 2008 Buenos Aires.
- 149.Spiegel M.R. (1983). *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*. Tercera Edición. Prentice Hall Hispanoamericana. ISBN 968 – 880 – 053 – 8.
- 150.Spiegel M.R. (1991). *Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas*. Tercera Edición. Mac Graw – Hill. ISBN 970 – 10 – 2095 – 2.
- 151.Spyvak M. (1992). *Cálculo Infinitesimal*. Segunda Edición. Editorial Reverté. ISBN 84 – 291 – 5136 – 2.
- 152.Symm G.T. (1963). *Integral Equation Methods in Potential Theory II*. Proceedings of the Royal Society of London, Series A – Mathematical and Physical Sciences, V.275, P.33-46.
- 153.Tarrero Fernández A.I. (2002). Tesis Doctoral. *Propagación del Sonido en Bosques. Análisis Comparativo de las Medidas in Situ, en Laboratorio y de los Valores Predichos por un Modelo*. Universidad de Valladolid.
- 154.Tellado N., Eguiguren J.L. & Aspuru I. (2003). *Revisión del Método Holandés de Caracterización Acústica de Trenes para su Aplicación en la Directiva 2002/49/CE sobre Evaluación y Gestión del Ruido Ambiental*. XXXIV Congreso Nacional de Acústica. Encuentro Ibérico de Acústica Bilbao.
- 155.Thompson D. (2009). *Railway Noise and Vibration. Mechanisms, Modelling and Means of Control*. Editorial Elsevier. ISBN 978 – 0 – 08 – 045147 – 3.



156. Trigueros Rodrigo J. (1998). *Curso sobre el Ruido*. CEDEX.
157. Varios Autores. (2000). *Jornadas Informativas sobre Pantallas Anti – Ruido, Ponencias y Mesas Redondas*. ANIPAR Asociación Nacional de Industriales de Pantallas y Dispositivos Anti – Ruido.
158. Waterman P.C. (1969). *New Formulation of Acoustic Scattering*. The Journal of the Acoustical Society of America, V.45, N.6, P.1417-29.
159. Yoon W.S., Park J.M. & Eversman W. (1990). *Two- Dimensional Radiation and Scattering at Short Wave Length*. Journal of Vibration and Acoustics, V. 112.
160. Zill D. G. (1997). *Ecuaciones Diferenciales. Sexta Edición*. International Thomson Editores. ISBN 968 – 7529 – 21 – 0.
161. Ziomek L.J. (1995). *Fundamentals of Acoustic Field Theory and Space-Time Signal Processing*. Boca Raton: CRC Press.

## **ANEXOS.**

### **A EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.**

#### **A.1. Revisión Bibliográfica**

El Método de los Elementos de Contorno (MEC) surge en la segunda mitad del siglo XX simultáneamente al espectacular desarrollo de los ordenadores digitales. Sin embargo, el MEC es de desarrollo más reciente que otros métodos de cálculo, como el Método de Diferencias Finitas (MDF) y el Método de los Elementos Finitos (MEF). Entre los trabajos y autores que han marcado el desarrollo de la técnica del Método de Elementos de Contorno y su aplicación en Acústica se pueden destacar:

Jaswon M.A (1963) y Symm G.T. (1963) presentaron por primera vez una formulación teórica para la solución numérica de problemas potenciales basados en ecuaciones integrales de contorno. Su método se conoce como método indirecto.

La ampliación del estudio para problemas de elasticidad fue hecha por Rizzo F.J. (1967), responsable de la formulación directa del Método de los Elementos de Contorno (MEC), en la cual las variables tienen significado físico. La formulación directa es la que más se utiliza en la actualidad y también en esta Tesis.

Copley L.G. (1967) presentó una técnica numérica basada en la representación integral de la ecuación de Helmholtz para problemas armónicos de radiación acústica, en el dominio de la frecuencia. Esta técnica utiliza una relación acústica entre presión y velocidad de onda normal a la superficie. El método se conoció como HIEM (Helmholtz Integral Equation Method). Mitzner K.M. (1967) introdujo el método numérico llamado RPT (Retarded Potential Technique). Con base en la ecuación integral de potencial en el contorno, resolvió problemas de difusión de ondas acústicas incidentes en una superficie a lo largo del tiempo. Copley L.G. (1968) identificó por primera vez problemas de no unicidad y no respuesta en

soluciones numéricas de problemas armónicos de radiación acústica formulados a través de ecuaciones integrales, para determinadas frecuencias.

Para resolver este problema, Schenck H.A. (1968) propuso una técnica llamada de CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) que consiste en la utilización de la ecuación integral de Helmholtz en el contorno combinada con ecuaciones adicionales compatibles, formuladas a partir de la ecuación integral de Helmholtz interna para algunos puntos internos, externos al dominio infinito, localizados de forma conveniente.

Shaw R.P. (1968) utilizó la ecuación integral de contorno en el problema de la difusión de ondas elásticas en obstáculos rígidos. El RPT fue usado en el caso de ondas elásticas, con las ecuaciones formuladas en términos de tensión y deformación en lugar de presión y velocidad de onda. La diferencia entre la onda elástica y acústica está en el medio de propagación, elástico y fluido respectivamente.

Un método iterativo para resolver el problema de la difusión acústica, llamado de método de la matriz de transmisión, fue introducido por Waterman P.C. (1969). Burton A.J & Miller G.F. (1971) para resolver el problema de la no unicidad de respuesta apuntado por Copley, derivaron la ecuación integral según la dirección normal al contorno, utilizándose luego una combinación lineal entre la ecuación primitiva y su derivada. Esta combinación lineal multiplicada por una constante, genera una ecuación con solución única para todas las frecuencias, en el caso de problemas Neumann. El método, llamado CONDOR (Composite Outward Normal Derivative Overlap Relation), genera núcleos de integración hipersingulares.

Hayashi Y. (1973) desarrolló una solución para el problema de Dirichlet bidimensional descrito por la ecuación de Helmholtz en el caso de contornos abiertos. El trabajo de Burton & Miller fue extendido para el caso del problema de Dirichlet por Kleinman R.E. & Roach G.F. (1974), donde se estudiaron los operadores integrales y las autofunciones.

A partir de 1975, el MEC puede considerarse un procedimiento de cálculo establecido, al menos a nivel académico, y genera ya un flujo continuo de publicaciones. El primer libro introductorio sobre el mismo lo publican Jaswon M.A & Symm G.T. (1977). En España el MEC fue introducido en 1977, con la Tesis Doctoral de Domínguez J. (1977). Meyer W.L. et al. (1978) desarrollaron un procedimiento para el cálculo del campo acústico radiado en cuerpos tridimensionales a partir de la representación integral de la ecuación de Helmholtz. La técnica de solución del problema de la no unicidad de respuesta fue basada en el trabajo de Burton & Miller, siendo denominada HGF (Helmholtz Gradient Formulation). Piaszyk C.M & Klosner J.M. (1984) desarrollaron una técnica basada en el MEC para resolver problemas de no existencia y no unicidad de respuesta en el caso de la radiación acústica. Se utilizó una función de impedancia en la superficie que sirve de base para el cálculo del campo de presión acústica próximo al contorno. Como el sistema de ecuaciones resultante pasa a tener más ecuaciones que incógnitas es utilizado el procedimiento de los mínimos cuadrados para retornar el sistema a su orden original.

Brod K. (1984) formuló una técnica numérica válida para todos los números de ondas en casos de problemas de radiación acústica. El problema de la no unicidad fue resuelto por la expansión de la función de Green para la ecuación de Helmholtz en una serie de funciones ortogonales, obteniendo un conjunto infinito de ecuaciones integrales de contorno. Estas ecuaciones poseen solución única para todos los números de ondas y sus soluciones pueden ser usadas para representar soluciones en el dominio infinito, en la forma de series algebraicas.

Seybert A.F. et al. (1985) presentaron una formulación computacional para implementar la representación integral de la ecuación de Helmholtz para problemas de radiación y difusión acústica asociados con cuerpos tridimensionales en el dominio de la frecuencia.

Otro método de elementos de contorno para resolver problemas de radiación acústica en dominios infinitos, llamado CHI (Coupled Helmholtz Integrals), fue propuesto

por Cunefare K.A. et al. (1989). Este método es válido para cualquier número de ondas y el problema de la no unicidad es resuelto por la técnica de combinación lineal de la ecuación de Helmholtz con su derivada en relación a la normal, propuesta por Burton & Miller. Utilizando la misma técnica para resolver la no unicidad, Amini et al. (1990) presentaron un método basado en el MEC para la determinación del campo acústico que envuelve estructuras finitas sumidas en medio fluido homogéneo e infinito. El sistema lineal obtenido en este método es resuelto de forma iterativa.

## **A.2. Ideas básicas**

El MEF o el MDF pueden clasificarse como métodos numéricos de dominio. En esta clase de técnicas el dominio de definición del problema, o dominio de cálculo, se divide en subdominios, celdas o elementos. Luego, la aproximación numérica a la solución del problema de campo se construye a partir de funciones que satisfacen, por su definición, las condiciones de contorno del problema de modo parcial o total. Otra posibilidad para construir la aproximación numérica es utilizar funciones que satisfagan las ecuaciones del problema en el dominio, aunque no cumplan de entrada las condiciones de contorno. Este tipo de técnicas se conocen, por contraposición a las anteriores, como métodos de contorno.

El MEC es un método de contorno. El término "elementos de contorno" fue acuñado para indicar que el contorno del dominio de cálculo se divide en una serie de elementos sobre los cuales las funciones de aproximación pueden variar de determinada manera, del mismo modo que sucede en el MEF dentro de los elementos en que se divide el dominio.

Los métodos de contorno tienen algunas ventajas importantes sobre los métodos de dominio:

- Trabajan sólo sobre el contorno  $S$  del dominio de cálculo  $\Omega$ . Es mucho más sencillo definir el contorno que definir el dominio completo. En particular, el MEC requiere únicamente la discretización del contorno, lo cual trae consigo

una reducción de la dimensionalidad del problema con respecto al MEF o al MDF.

- Pueden tratar mucho más fácilmente problemas que involucren dominios infinitos.
- Se obtiene el mismo grado de precisión en las dos variables duales del problema (p.ej. desplazamientos y tensiones, potenciales y flujos, etc.).

Por otro lado, hay que decir que los métodos de contorno trabajan con los valores de las funciones incógnita en el contorno. Entonces, si se desean calcular valores en puntos internos del dominio, es preciso establecer un algoritmo complementario que, en general, es relativamente costoso.

Los problemas acústicos se modelan por las ecuaciones ya desarrolladas en la parte de esta Tesis dedicada a la física del sonido. La ecuación de propagación de una onda acústica expresada en términos de presión acústica es:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

La ecuación de ondas expresada en función del potencial acústico  $\vec{u} = \nabla\Phi$  es

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Otras relaciones útiles que se han definido anteriormente son:

$$u = \frac{p}{\rho_0 \cdot c}$$

$$s = \frac{p}{\rho_0 \cdot c^2}$$

$$\Phi = -\frac{p}{j \cdot \omega \cdot \rho_0}$$

La impedancia acústica se define como la relación entre la presión acústica y la velocidad asociada a la partícula en el medio

$$z = \frac{p}{u}$$

Para ondas planas es  $z = \rho \cdot c$  que aunque es en este caso real, en general será una magnitud compleja, siendo la parte real la resistencia acústica específica y la

imaginaria la reactancia acústica específica, del medio en particular en el que la reactancia es considerada.

### A.3. Ecuación armónica de ondas (Ecuación de Helmholtz)

Las ecuaciones de ondas anteriores, tanto en presiones como en potencial de velocidad están expresadas en el dominio del tiempo, son ecuaciones transitorias de propagación de ondas acústicas. El objetivo de esta Tesis es trabajar con problemas en el dominio de la frecuencia; por lo tanto, es necesario obtener una ecuación que atienda a ese requisito.

En Kinsler L.E., et al. (2000), se considera que las ondas son producidas por vibraciones periódicas en el tiempo, armónicas, con respuesta también periódica por parte del dominio de propagación, el fluido que en este caso es el aire, se puede escribir la presión acústica en la forma de una función con comportamiento de serie.

$$p(u, t) = p(u) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t}$$

Donde  $\omega$  representa la frecuencia angular de la vibración y de la respuesta, ambas con comportamiento armónico;  $i$  es la representación de la parte imaginaria de un número complejo. Sustituyendo en las ecuaciones de propagación de ondas se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2(p \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t}) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(p \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t})}{\partial t^2} \\ e^{-i \cdot \omega \cdot t} \cdot \nabla^2 p &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial(p \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} \cdot -i \cdot \omega)}{\partial t} \\ e^{-i \cdot \omega \cdot t} \cdot \nabla^2 p &= \frac{1}{c^2} p \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} \cdot (-i \cdot \omega)^2 \\ \nabla^2 p &= -\frac{\omega^2}{c^2} \cdot p \\ \nabla^2 p + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot p &= 0 \\ \nabla^2 p + k^2 \cdot p &= 0 \end{aligned}$$

Que es la ecuación diferencial de Helmholtz, expresa en términos de presión acústica. La constante  $k = \omega/c$  se denomina número de ondas; cuándo  $\omega$  está

expresado en radianes,  $k$  indica el número de ondas comprendidas en una distancia de  $2\pi$  unidades.

Análogamente, a partir de la ecuación con el potencial de velocidad la ecuación de Helmholtz puede ser expresada en términos de potencial de velocidad de onda.

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \cdot \Phi = 0$$

Que es la ecuación diferencial de Helmholtz homogénea, expresada en términos de potencial de velocidad de onda acústica.

En el caso de la existencia de fuentes de energía acústica, la ecuación cambia, denominándose ecuación diferencial de Helmholtz no homogénea que se obtiene a partir de considerar distintos tipos de fuentes.

- Si se introduce masa con un ratio por unidad de volumen  $G(\vec{r}, t)$ , el cual puede ser generado por la superficie que rodea a una explosión, o un altavoz en un recinto cerrado, la ecuación lineal de continuidad se convierte en

$$\rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \cdot \vec{u}) = G(\vec{r}, t)$$

- Si existen fuerzas de cuerpo presentes en el fluido de valor por unidad de volumen  $\vec{F}(\vec{r}, t)$ , se pueden incluir en la ecuación de Euler, quedando la ecuación lineal de movimiento como

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla p = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

Ejemplos de esta clase de fuerza son las producidas por una fuente que se mueve a través del fluido sin cambio en el volumen, como una esfera vibrante de volumen constante. Si estas dos modificaciones se combinan con la ecuación lineal de estado se obtiene una ecuación de onda no homogénea.

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\partial G}{\partial t} + \nabla \vec{F}$$



- Un tercer tipo de fuentes de sonido fue descrito por Lighthill (1952). Su resultado incluía los efectos del cortante y viscosidad. Se encuentran en zonas de turbulencia. Su desarrollo se escapa del alcance de esta Tesis, aunque a continuación se incluye el resultado, teniendo en cuenta el término convectivo de la aceleración  $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ .

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 (\rho \cdot u_i \cdot u_j)}{\partial x_i \cdot \partial x_j}$$

Se ha utilizado notación tensorial donde  $i$  y  $j$  toman los valores 1, 2 y 3 para representar  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

La fórmula de la ecuación de onda no homogénea completa queda como sigue

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \frac{\partial G}{\partial t} + \nabla \vec{F} - \frac{\partial^2 (\rho \cdot u_i \cdot u_j)}{\partial x_i \cdot \partial x_j}$$

Se pueden incluir los efectos de la gravedad añadiendo el término  $\nabla \cdot (\rho_0 \cdot \vec{g} \cdot s)$  en el lado izquierdo de la ecuación y las variaciones de la velocidad del sonido, considerando  $c$  como función de la posición. Las fuentes del lado de la derecha de la ecuación se pueden relacionar como fuentes de tipo monopolo, dipolo y cuadripolo.

Para efectos prácticos, los términos relacionados con las fuentes, se pueden agrupar en un término  $D$  y considerarse constantes en el espacio y con comportamiento armónico en el tiempo. Estas fuentes se pueden denominar núcleos de presión acústica y considerar como cargas unitarias.

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = D(\vec{r}, t) = D(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega \cdot t}$$

Con lo que se puede obtener la ecuación diferencial de Helmholtz no homogénea

$$\nabla^2 p + k^2 \cdot p = D$$

Análogamente, a partir de la ecuación con el potencial de velocidad la ecuación de Helmholtz puede ser expresada en términos de potencial de velocidad de onda.

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \cdot \Phi = D$$

Que es la ecuación diferencial de Helmholtz no homogénea, expresada en términos de potencial de velocidad de onda acústica.

#### A.4. Ecuación integral de contorno

En Gil Alías (2005), Brebbia C.A. & Domínguez J. (1989), y Kirkup (2007), así como en el resto de la bibliografía utilizada para redactar este Anexo se desarrolla de manera detallada el método de los Elementos de Contorno. Para el desarrollo de la ecuación integral de contorno se debe definir el concepto de flujo, representado por  $q$ . El flujo en el problema armónico analizado por el MEC se define como la velocidad normal a una superficie

$$q = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = v_n$$

Por lo tanto, la condición de rigidez acústica, en la propagación de ondas a través de la sección, es de  $q = 0$ .

Los dominios pueden ser finitos, siendo el vector normal orientado hacia el exterior del dominio o infinito, siendo el vector normal dirigido hacia el interior. Al resolver la ecuación diferencial de Helmholtz homogénea en los dos tipos de dominio, se pueden encontrar cuatro condiciones de contorno:

- Condición de tipo Dirichlet o presión conocida ( $p = \bar{p}$ ).

En función de potencial de velocidad sería

$$\bar{\Phi} = \frac{i \cdot \bar{p}}{\rho_0 \cdot \omega}$$

- Condición de tipo Neumann o velocidad conocida ( $q = \bar{q}$ ). Este tipo de condiciones se encuentra en superficies rígidas y en superficies vibrantes que actúan como fuentes. En función de potencial de velocidad sería

$$\bar{q} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = v_n$$

- Condición de tipo Robin o impedancia conocida que puede ser vista como una condición mixta entre las anteriores ( $a \cdot \Phi + b \cdot q = c$ ) siendo  $a$ ,  $b$  y  $c$  funciones conocidas. La impedancia mide la relación entre la presión incidente y la velocidad normal del fluido.

$$\bar{z} = \frac{-\rho_0 \cdot i \cdot \omega \cdot \Phi}{q} \Rightarrow \rho_0 \cdot i \cdot \omega \cdot \Phi + \bar{z} \cdot q = 0$$

- Condición de radiación de Sommerfeld. En el caso de que el dominio de estudio sea abierto o infinito, como es el caso de estudio al aire libre, se considera una superficie exterior “infinita” que limita el problema. En esta superficie, la condición de contorno denominada de Sommerfeld para el potencial es

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r \cdot (q + i \cdot k \cdot \Phi)) = 0$$

Lo que significa que en el infinito la impedancia acústica coincide con la del medio. Y por lo tanto  $p = \rho_0 \cdot c \cdot v_n \Leftrightarrow -i \cdot \omega \cdot \rho_0 \cdot \Phi = \rho_0 \cdot c \cdot q$

Esta condición en el MEC queda cumplida por la propia formulación.

Si se relaciona la ecuación diferencial de Helmholtz no homogénea con una función de error  $\varepsilon_\Phi$ .

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \cdot \Phi - D \cong \varepsilon_\Phi$$

Para eliminar este error se utiliza una función ponderadora  $\Phi^*$ , se calcula el error ponderado en el dominio a través de un procedimiento de residuos ponderados:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi + k^2 \cdot \Phi - D) \cdot \Phi^* \cdot d\Omega = 0$$

Para continuar con el desarrollo es preciso recordar el teorema de Green:

$$\int_{\Omega} (\Phi^* \cdot \nabla^2 \Phi - \Phi \cdot \nabla^2 \Phi^*) \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} (\Phi^* \cdot \nabla \Phi - \Phi \cdot \nabla \Phi^*) \cdot \eta \cdot d\Gamma$$

Y el teorema de la divergencia

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \eta \cdot d\Gamma$$

Del teorema de Green se deduce lo siguiente

$$\nabla \cdot (\Phi^* \cdot \nabla \Phi) = \nabla \Phi^* \cdot \nabla \Phi + \Phi^* \cdot \nabla^2 \Phi$$

Que sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot (\Phi^* \cdot \nabla \Phi) - \nabla \Phi^* \cdot \nabla \Phi + k^2 \cdot \Phi \cdot \Phi^* - D \cdot \Phi^*) \cdot d\Omega = 0$$

Aplicando el teorema de la divergencia

$$\int_{\Gamma} (\Phi^* \cdot \nabla \Phi) \cdot \eta \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} (-\nabla \Phi^* \cdot \nabla \Phi + k^2 \cdot \Phi \cdot \Phi^* - D \cdot \Phi^*) \cdot d\Omega = 0$$

El primer término se puede simplificar sabiendo que

$$\nabla \Phi \cdot \eta = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} \cdot \eta_i \right) \cdot \eta_i = \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} \cdot \eta_i \cdot \delta_{ii} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} \cdot \eta_i = \nabla \Phi$$

Por lo que la ecuación queda

$$\int_{\Gamma} (\Phi^* \cdot \nabla \Phi) \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} (-\nabla \Phi^* \cdot \nabla \Phi + k^2 \cdot \Phi \cdot \Phi^* - D \cdot \Phi^*) \cdot d\Omega = 0$$

En el proceso de simplificación de la ecuación es necesario un nuevo paso, que consiste en aplicar la regla de la cadena a la definición de flujo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} \cdot \eta_i = \nabla \Phi$$

Que sustituyendo

$$\int_{\Gamma} \left( \Phi^* \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} (-\nabla \Phi^* \cdot \nabla \Phi + k^2 \cdot \Phi \cdot \Phi^* - D \cdot \Phi^*) \cdot d\Omega = 0$$

Aplicando otra vez el teorema de Green pero ahora sobre el segundo término:

$$\int_{\Gamma} \left( \Phi^* \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} -(\nabla(\Phi \nabla \Phi^*) - \Phi \nabla^2 \Phi^*) d\Omega + \int_{\Omega} (k^2 \cdot \Phi \cdot \Phi^* - D \cdot \Phi^*) d\Omega = 0$$

Aplicando de nuevo el teorema de la divergencia

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (\Phi \cdot \nabla \Phi^*) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left( \Phi \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial \eta} \right) d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma} \left( \Phi^* \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} \left( \Phi \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial \eta} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} (\Phi \cdot \nabla^2 \Phi^* + k^2 \cdot \Phi \cdot \Phi^* - D \cdot \Phi^*) d\Omega = 0$$

$$\int_{\Gamma} \left( \Phi^* \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} \left( \Phi \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial \eta} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi^* + k^2 \cdot \Phi^*) \cdot \Phi d\Omega - \int_{\Omega} D \cdot \Phi^* d\Omega = 0$$

## A.5. Solución fundamental

Como se ha comentado anteriormente la ecuación diferencial de Helmholtz homogénea, que describe el campo acústico en un dominio  $\Omega$  y limitada por el contorno  $\Gamma$ , expresada en términos de presión acústica es

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) + k^2 \cdot \Phi(\vec{x}) = 0$$

La solución fundamental,  $\Phi^*$ , satisface la ecuación de Helmholtz y representa el campo generado por una carga unitaria concentrada actuando en el punto  $\vec{x}$ . El efecto de esta carga se propaga desde  $\vec{x}$ , hasta el infinito sin consideraciones por las condiciones de contorno. Por ello la solución puede ser escrita como

$$\nabla^2 \Phi^*(\vec{y}) + k^2 \cdot \Phi^*(\vec{y}) + \delta(\vec{y} - \vec{x}) = 0$$

Donde  $\delta(\vec{y} - \vec{x})$  representa la función *delta de Dirac*, la cual tiende al infinito en el punto de colocación  $\vec{x}$ , y es igual a cero en cualquier otro punto  $\vec{y}$ . La integral de  $\delta(\vec{y} - \vec{x})$  sin embargo es igual a la unidad. La integral de la función delta de Dirac multiplicada por cualquier otra función es igual al valor más próximo al de la fuente. Todas estas propiedades escritas de forma algebraica serían:

$$\delta(\vec{y} - \vec{x}) = \begin{cases} \infty & \text{en } S = P \\ 0 & \text{en } S \neq P \end{cases} \Rightarrow \int_{\Omega} \delta(\vec{y} - \vec{x}) \cdot d\Omega = 1$$

$$\int_{\Omega} \delta(\vec{y} - \vec{x}) \cdot \Phi(\vec{y}) d\Omega = \Phi(\vec{x})$$

La solución a la ecuación  $\nabla^2 \Phi^*(\vec{y}) + k^2 \cdot \Phi^*(\vec{y}) + \delta(\vec{y} - \vec{x}) = 0$  puede encontrarse en Ciskowski R.D. & Brebbia C.A. (1991), Brebbia C.A. & Domínguez J. (1989) y en Kinsler L.E., et al. (2000), así como en el resto de la bibliografía. Para el caso en dos dimensiones, es decir ondas cilíndricas, y con una variación temporal del tipo  $e^{i \cdot \omega \cdot t}$  es:

$$\Phi^*(r) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k \cdot r) = -\frac{i}{4} \cdot (J_0(kr) - Y_0(kr) \cdot i)$$

$$q^*(r) = \frac{\partial \Phi^*(r)}{\partial \eta} = \frac{i \cdot k}{4} H_1^{(2)}(k \cdot r) \cdot \frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{i \cdot k}{4} \cdot (J_1(kr) - Y_1(kr) \cdot i) \cdot \frac{\partial r}{\partial \eta}$$

Del libro de Abramowitz M. & Stegun I. (1970)

$$H_v^{(1)}(z \cdot e^{\pi \cdot i}) = -e^{-v \cdot \pi \cdot i} \cdot H_v^{(2)}(z) \Rightarrow H_0^{(1)}(-z) = -H_0^{(2)}(z)$$

$$H_v^{(1)}(\bar{z}) = \overline{H_v^{(2)}(z)}$$

$$H_0^{(2)'}(z) = -H_1^{(2)}(z)$$

$$H_1^{(2)'}(z) = H_0^{(2)}(z) - \frac{1}{z} \cdot H_1^{(2)}(z)$$

Donde  $r = |\vec{y} - \vec{x}|$ ,  $J_0$  es la función de Bessel de primera clase y orden cero,  $Y_0$  es la función de Bessel de segunda clase y orden cero,  $H_0^{(2)}$  es la función de Hankel de segunda clase y orden cero, y  $H_1^{(2)}$  es la función de Hankel de segunda clase y orden uno.

Dicha solución, supone que a grandes distancias de la fuente se produzca un decaimiento en la amplitud de la presión del tipo  $r^{-1/2}$ , lo que equivale a una caída de 3 dB cada vez que se duplica la distancia a la fuente. Cuando la distancia tiende al infinito tiene un comportamiento asintótico, lo que corrobora que cumple la condición de Sommerfeld.

Si se multiplica la ecuación de Helmholtz por el potencial fundamental,

$$(\nabla^2 \Phi^* + k^2 \cdot \Phi^*) \cdot \Phi = -\delta(\vec{y} - \vec{x}) \cdot \Phi(\vec{y})$$

Integrando en el dominio

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi^* + k^2 \cdot \Phi^*) \cdot \Phi \cdot d\Omega = \int_{\Omega} -\delta(\vec{y} - \vec{x}) \cdot \Phi(\vec{y}) \cdot d\Omega$$

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi^* + k^2 \cdot \Phi^*) \cdot \Phi \cdot d\Omega = -\Phi(\vec{x})$$

Por lo que la ecuación integral de contorno del punto anterior, sin contemplar el término  $D$ , se puede transformar en:

$$\int_{\Gamma} \left( \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} \left( \Phi \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial \eta} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi^* + k^2 \cdot \Phi^*) \cdot \Phi \cdot d\Omega = 0$$

$$\int_{\Gamma} \left( \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} \left( \Phi \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial \eta} \right) d\Gamma - \Phi(\vec{x}) = 0$$

Obteniéndose la ecuación de Postproceso, una vez discretizada a partir del MEC:

$$\Phi(\vec{x}) + \int_{\Gamma} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi(\vec{y})) d\Gamma = \int_{\Gamma} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q(\vec{y})) \cdot d\Gamma$$

Se obtienen así los datos que están dentro del dominio, pero para analizar que sucede en los puntos del contorno, por razones computacionales es preferible analizar que sucede cuando el punto pertenece al contorno. Una forma usual de analizarlo es considerar que alrededor del punto de dominio analizado se aumenta el dominio un hemisferio de radio  $\varepsilon$ , en el caso de tres dimensiones o una semicircunferencia en el caso de dos dimensiones, tendiendo  $\varepsilon$  a cero.

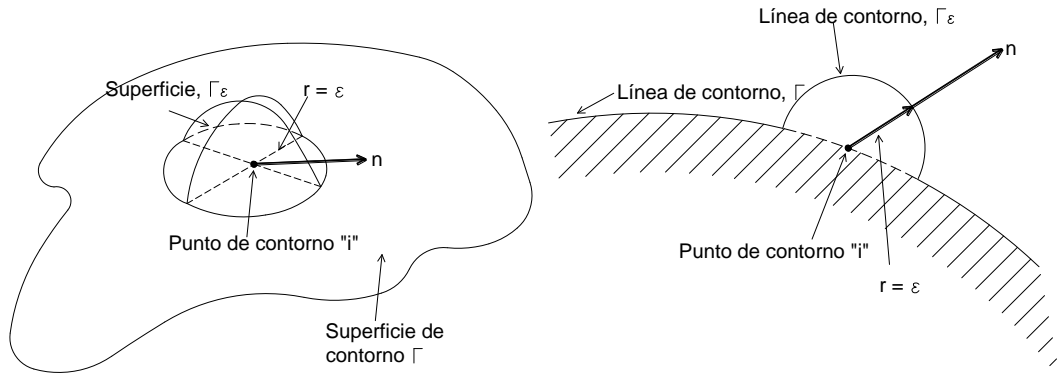


Figura 57. Análisis de un punto perteneciente al contorno en el caso de 3D y 2 D. Se tiene analizando la ecuación por separado en cada uno de los contornos.

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q(\vec{y})) \cdot d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi(\vec{y})) d\Gamma \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q(\vec{y})) \cdot d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi(\vec{y})) d\Gamma \end{aligned}$$

Desarrollando para el caso en dos dimensiones, que es el que se analiza en esta Tesis aunque se actuaría de igual manera para tres dimensiones, con la solución para  $\Phi^*$  encontrada anteriormente, (ver anexo de las funciones de Bessel), se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q(\vec{y})) \cdot d\Gamma &= -\frac{i}{4} q(\vec{x}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (H_0^2(k \cdot \varepsilon) \pi \cdot \varepsilon) = \\ &= -\frac{i}{4} q(\vec{x}) \cdot \pi \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 1 - i \frac{2}{\pi} \ln(k \cdot \varepsilon) \cdot \varepsilon \right) = -\frac{q(\vec{x})}{2} \cdot \pi \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \cdot \ln(k \cdot \varepsilon)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi(\vec{y})) d\Gamma &= \frac{i \cdot k}{4} \Phi(\vec{x}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (H_1^2(k \cdot \varepsilon) \pi \cdot \varepsilon) = \\ &= \frac{i \cdot k}{4} \Phi(\vec{x}) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{k \cdot \varepsilon}{2} + i \cdot \frac{2}{\pi \cdot k \cdot \varepsilon} \right) \pi \cdot \varepsilon = -\frac{\Phi(\vec{x})}{2} \end{aligned}$$

Por lo que ya se tiene la ecuación de proceso, que para dotarla de un carácter más general, se introduce un término  $c(\vec{x})$  siguiendo a Brebbia C.A. & Domínguez J. (1989).

$$c(\vec{x})\Phi(\vec{x}) + \int_{\Gamma} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi(\vec{y})) d\Gamma = \int_{\Gamma} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q(\vec{y})) \cdot d\Gamma$$

Siendo

$c(\vec{x}) = 0$  para puntos externos al dominio.

$c(\vec{x}) = \frac{\theta_i}{2 \cdot \pi}$  para puntos en el contorno, siendo  $\theta_i$  el ángulo interior de la superficie en radianes. Su valor se obtiene tomando una circunferencia y haciendo tender a cero el radio, tomando  $c(\vec{x})$  el valor de 1/2 para superficies rectas, 1/4 para ángulos rectos cerrados hacia el dominio y 3/4 hacia el exterior.

$c(\vec{x}) = 1$  para puntos internos del dominio.

## A.6. Representación matricial del MEC

La expresión anterior debe ser discretizada para formar el sistema de ecuaciones en el cual serán encontrados los valores del contorno. Se asume por simplicidad que el contorno se divide en N elementos como los de la figura siguiente.

En los elementos constantes el nodo se encuentra en el centro del elemento, en los lineales dos elementos, uno en cada extremo del elemento y en los cuadráticos tres elementos, uno en el centro y los otros dos en los extremos.



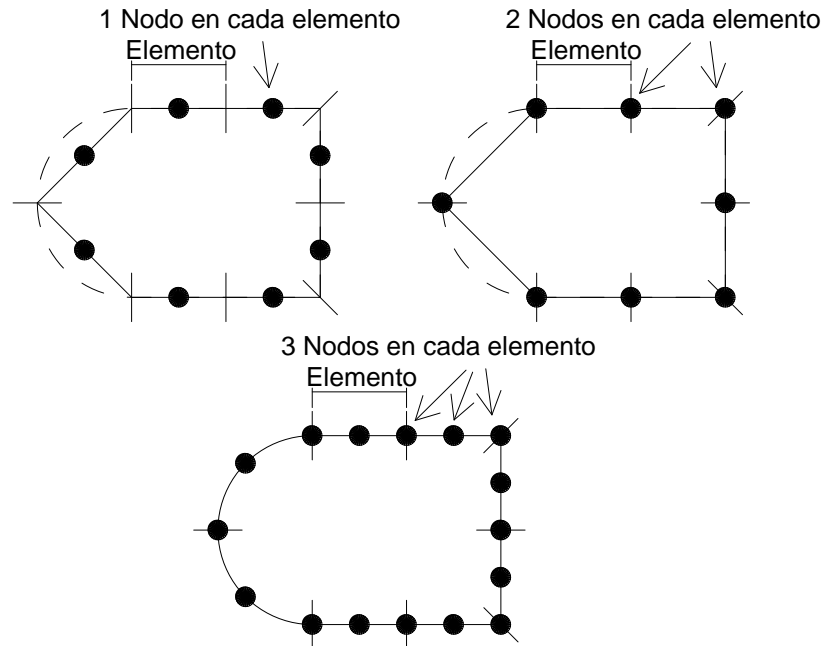


Figura 58. Elementos constantes, lineales y cuadráticos, con sus nodos.

- Elementos constantes

En este tipo de elementos solo existe un nodo en el centro del elemento por lo que los valores del campo y del flujo se consideran constantes en todo el elemento.

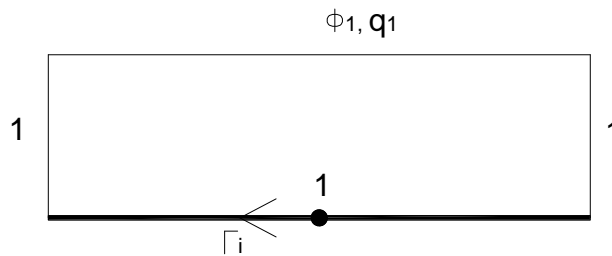


Figura 59. Distribución de potencial en elemento constante.

La ecuación de proceso con este tipo de elementos siempre toma el valor  $c(\vec{x})$  igual a  $1/2$ , quedando discretizada:

$$\frac{1}{2} \Phi^i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi^j(\vec{y})) \cdot d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q^j(\vec{y})) \cdot d\Gamma_j$$

Siendo  $i$  un punto perteneciente al contorno. Pero como el potencial y el flujo son constantes en cada elemento se pueden extraer de las integrales

$$\frac{1}{2}\Phi^i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^N \Phi^j(\vec{y}) \cdot \int_{\Gamma_j} q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N q^j(\vec{y}) \cdot \int_{\Gamma_j} \Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j$$

Por lo que aparecen dos tipos de integrales

$$\int_{\Gamma_j} q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j \quad \text{y} \quad \int_{\Gamma_j} \Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j$$

Estas integrales relacionan el nodo  $i$  donde la solución fundamental actúa sobre el nodo  $j$ . Por ello en ocasiones se denominan coeficientes de influencia. Dándoles nombre a cada una de ellas

$$\hat{H}^{ij} = \int_{\Gamma_j} q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j$$

$$G^{ij} = \int_{\Gamma_j} \Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j$$

$$\frac{1}{2}\Phi^i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} \cdot \Phi^j(\vec{y}) = \sum_{j=1}^N G^{ij} \cdot q^j(\vec{y})$$

Para facilidad de uso, se define

$$H^{ij} = \begin{cases} \hat{H}^{ij} & \text{si } i \neq j \\ \hat{H}^{ij} + c(\vec{x}) = \hat{H}^{ij} + \frac{1}{2} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Por lo que

$$\sum_{j=1}^N H^{ij} \cdot \Phi^j(\vec{y}) = \sum_{j=1}^N G^{ij} \cdot q^j(\vec{y})$$

Por lo tanto la posición  $i$  varía de 1 a  $N$ , por lo que la solución fundamental se aplica en cada nodo sucesivamente, obteniéndose un sistema de ecuaciones al aplicarlo a cada punto del contorno cada vez.

La ecuación anterior se puede expresar de forma matricial como

$$\mathbf{H} \cdot \Phi = \mathbf{G} \cdot \mathbf{q}$$

Siendo  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{G}$  matrices de orden  $N \times N$  y  $\Phi$  y  $\mathbf{q}$  vectores de orden  $N$ .

En las Tesis de Gil Alías (2005) y Sanchís (1993) y en Sanchís et al. (1996) se desarrolla un método que consigue implementar además de las condiciones de contorno tipo Dirichlet o potencial conocido y tipo Neumann o flujo conocido, la condición tipo Robin o impedancia conocida, lo cual tiene una importancia capital para estudiar problemas reales de acústica. También se sigue un método similar en (Perdomo et al. 2002)

Gil Alías calcula la impedancia siguiendo el método de Delany – Bazley, para lo que es necesario conocer la resistividad de flujo, el espesor de la capa con esa resistividad, y los datos de estudio del problema como la frecuencia, la velocidad de propagación en el medio así como su densidad y la frecuencia para la que se realiza la simulación.

$$\frac{z_{\infty}}{z_0} = \left( 1 + 9.08 \cdot \left( \frac{f}{\sigma} \right)^{-0.75} \right) - i \cdot 11.9 \cdot \left( \frac{f}{\sigma} \right)^{-0.73}$$

Donde  $z_{\infty}$  es la impedancia acústica específica a la frecuencia  $f$  en Hertzios de una capa de espesor infinito de material que presenta una resistividad de flujo  $\sigma$  en  $\text{kN} \cdot \text{s}/\text{m}^4$  y que limita con una capa rígida. La impedancia acústica del aire es  $z_0 = \rho_0 \cdot c_0$ .

Pero en el caso de que la capa tenga un espesor  $L$  finito antes de alcanzar la capa rígida, la impedancia se transforma en

$$z = z_{\infty} \cdot \coth(k \cdot L)$$

$$\frac{k}{k_0} = 10.3 \cdot \left( \frac{f}{\sigma} \right)^{-0.59} + i \cdot \left( 1 + 10.8 \cdot \left( \frac{f}{\sigma} \right)^{-0.7} \right)$$

Donde  $k_0$  es el número de onda en el aire.

En la tabla siguiente se aportan ejemplos de resistividad para diferentes tipos de suelo.

Tipo de suelo	$\sigma$ en $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}^4$
Nieve recién caída. Espesor 10 cm	10 – 30
Hojarasca	20 – 80
Hierba	150 – 300
Cuneta sucia, pequeñas rocas de hasta 10 cm	300 – 800
Sedimentos arenosos compactados	800 – 2500
Lascas de caliza de 1 a 2.5 cm de espesor	1500 – 4000
Tierra compacta	4000 – 8000
Grava fina compactada	5000 – 20000
Asfalto	30000

Tabla 16. Valores de la resistividad para diferentes tipos de suelo.

El sistema empleado para introducir esta condición ha sido a través de las condiciones tipo Neumann utilizando la relación entre el potencial acústico, la impedancia y el flujo.

$$\Phi = \frac{z \cdot i}{\rho_0 \cdot \omega} \cdot q$$

Por lo tanto se tendrán  $N_1$  valores conocidos de  $\overline{\Phi^j}$  en los contornos  $\Gamma_1$ ,  $N_2$  valores conocidos  $\overline{q^j}$  en los contornos  $\Gamma_2$  y  $N_3$  valores conocidos de impedancia  $\overline{z^j}$  en los contornos  $\Gamma_3$  siendo  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ , por lo que solo habrá  $N$  incógnitas.

Por lo tanto en la ecuación  $\mathbf{H} \cdot \Phi = \mathbf{G} \cdot \mathbf{q}$  se tiene:

$$\Phi = [\Phi^j] = \begin{bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \vdots \\ \overline{\Phi^j} \\ \vdots \\ \frac{z \cdot i}{\rho_0 \cdot \omega} \cdot q^k \\ \vdots \\ \Phi^n \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = [q^j] = \begin{bmatrix} \overline{q^1} \\ \overline{q^2} \\ \vdots \\ q^j \\ \vdots \\ q^k \\ \vdots \\ \overline{q^n} \end{bmatrix}$$

Donde los valores  $\overline{q^2}$  son valores conocidos y los valores  $q^j$  son valores desconocidos. Como se puede comprobar para cada elemento hay un valor conocido y el otro desconocido, dependiendo de si se trata de condición Dirichlet o Neumann, o los dos desconocidos, pero relacionados si se trata de condición Robin.

El sistema matricial sería:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1j} & \dots & H_{1k} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2j} & \dots & H_{2k} & \dots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nj} & \dots & H_{nk} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \vdots \\ \Phi^j \\ \vdots \\ \frac{z \cdot i}{\rho_0 \cdot \omega} \cdot q^k \\ \vdots \\ \Phi^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1j} & \dots & G_{1k} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2j} & \dots & G_{2k} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nj} & \dots & G_{nk} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{q^1} \\ \overline{q^2} \\ \vdots \\ q^j \\ \vdots \\ q^k \\ \vdots \\ \overline{q^n} \end{bmatrix}$$

Pasando los valores conocidos a un lado de la igualdad y los desconocidos al otro se tiene

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & -G_{1j} & \dots & \frac{z \cdot i}{\rho_0 \cdot \omega} \cdot H_{1k} - G_{1k} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & -G_{2j} & \dots & \frac{z \cdot i}{\rho_0 \cdot \omega} \cdot H_{2k} - G_{2k} & \dots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & -G_{nj} & \dots & \frac{z \cdot i}{\rho_0 \cdot \omega} \cdot H_{nk} - G_{nk} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \vdots \\ q^j \\ \vdots \\ q^k \\ \vdots \\ \Phi^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & -H_{1j} & \dots & (0)_{1k} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & -H_{2j} & \dots & (0)_{2k} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & -H_{nj} & \dots & (0)_{nk} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{q^1} \\ \overline{q^2} \\ \vdots \\ \overline{\Phi^j} \\ \vdots \\ (0)^k \\ \vdots \\ \overline{q^n} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se tiene una matriz en el lado izquierdo con todos los valores conocidos, un vector de incógnitas y al lado derecho se pueden multiplicar la matriz por el vector ya que son las dos conocidas quedando

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F}$$

Al resolver la ecuación se obtienen todos los valores del contorno, lo que se conoce como fase de proceso. A partir de ellos se pueden calcular todos los puntos internos del dominio con la fase de postproceso.

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\Gamma} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q(\vec{y})) \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi(\vec{y})) \cdot d\Gamma$$

Discretizándola de modo similar a la ecuación de proceso

$$\Phi^i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^N \Phi^j(\vec{y}) \cdot \int_{\Gamma_j} q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N q^j(\vec{y}) \cdot \int_{\Gamma_j} \Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j$$

Que utilizando la nomenclatura anterior

$$\Phi^i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} \cdot \Phi^j(\vec{y}) = \sum_{j=1}^N G^{ij} \cdot q^j(\vec{y})$$

En donde es necesario calcular todos los coeficientes  $\hat{H}^{ij}$  y  $G^{ij}$  para todos los puntos del dominio. Para el cálculo de los coeficientes de las matrices de influencia es preciso evaluar las integrales que las componen. Cuando  $i \neq j$  se emplean métodos numéricos de cuadratura de Gauss, o bien reglas de Simpson. Sin embargo, cuando  $i = j$  las integrales son singulares, siendo posible evaluarlas de forma analítica.

- Elementos lineales

A partir de la ecuación de proceso, y manteniendo el valor  $c(\vec{x}) = \frac{\theta_1}{2 \cdot \pi}$  como se ha definido anteriormente

$$c(\vec{x})\Phi(\vec{x}) + \int_{\Gamma} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi(\vec{y})) \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q(\vec{y})) \cdot d\Gamma$$

que discretizando

$$c(\vec{x}) \cdot \Phi^i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi^j(\vec{y})) \cdot d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q^j(\vec{y})) \cdot d\Gamma_j$$

En las que no se pueden extraer los valores de manera tan sencilla como para los elementos constantes, ya que varían linealmente a lo largo del elemento.

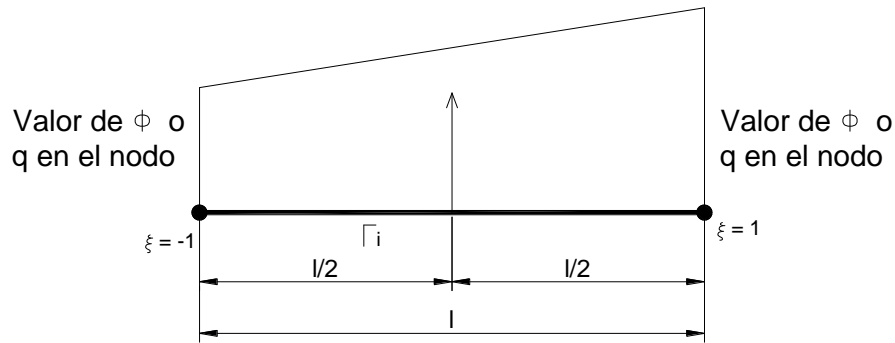


Figura 60. Distribución del potencial a lo largo del elemento.

Las funciones de interpolación  $u$  y  $v$  varían entre 0 y 1 a lo largo del elemento y  $\xi$  entre  $-1$  y  $1$ , pudiéndose definir el potencial y el flujo del elemento en función de estas funciones.

$$\Phi(\xi) = u(\xi) \cdot \Phi^1 + v(\xi) \cdot \Phi^2 = [u \quad v] \begin{bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{bmatrix}$$

$$q(\xi) = u(\xi) \cdot q^1 + v(\xi) \cdot q^2 = [u \quad v] \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix}$$

Siendo las funciones de interpolación

$$u(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$v(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

El cálculo de las integrales es el siguiente:

$$\int_{\Gamma_j} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi^j(\vec{y})) \cdot d\Gamma_j = \int_{\Gamma_j} q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot [u \quad v] \cdot d\Gamma_j \cdot \begin{bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{bmatrix} = [h_1^{ij} \quad h_2^{ij}] \cdot \begin{bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{bmatrix}$$

Donde  $h_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} u \cdot q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j$  y  $h_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} v \cdot q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j$

Y de la misma manera

$$\int_{\Gamma_j} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q^j(\vec{y})) \cdot d\Gamma_j = \int_{\Gamma_j} \Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot [u \quad v] \cdot d\Gamma_j \cdot \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix} = [g_1^{ij} \quad g_2^{ij}] \cdot \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix}$$

Donde  $g_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} u \cdot \Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j$  y  $g_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} v \cdot \Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j$

En un dominio discretizado es usual que el contorno que lo rodea tenga esquinas en las que aunque el potencial sea el mismo puede variar el flujo. Para evitar este problema el flujo debe ser separado en un vector de  $2N$  valores. Se pueden encontrar 4 posibles casos en una esquina:

1. Valores conocidos son el flujo anterior y posterior a la esquina. Valor desconocido el potencial.
2. Valores conocidos son el flujo anterior a la esquina y el potencial. Valor desconocido el flujo posterior a la esquina.
3. Valores conocidos son el flujo posterior a la esquina y el potencial. Valor desconocido el flujo anterior a la esquina.
4. Valores conocidos son el potencial. Valores desconocidos el flujo anterior y posterior a la esquina.

En tres de los casos solo hay una incógnita por nudo, por lo que conduciría a un sistema de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas, pero en uno de los casos aparecen más incógnitas por lo que se recurre al método de los *elementos discontinuos* para su resolución.

El método consiste en extrapolar los valores conocidos en la esquina hacia el interior de los elementos que confluyen a ella, creando de esta manera un nodo más.

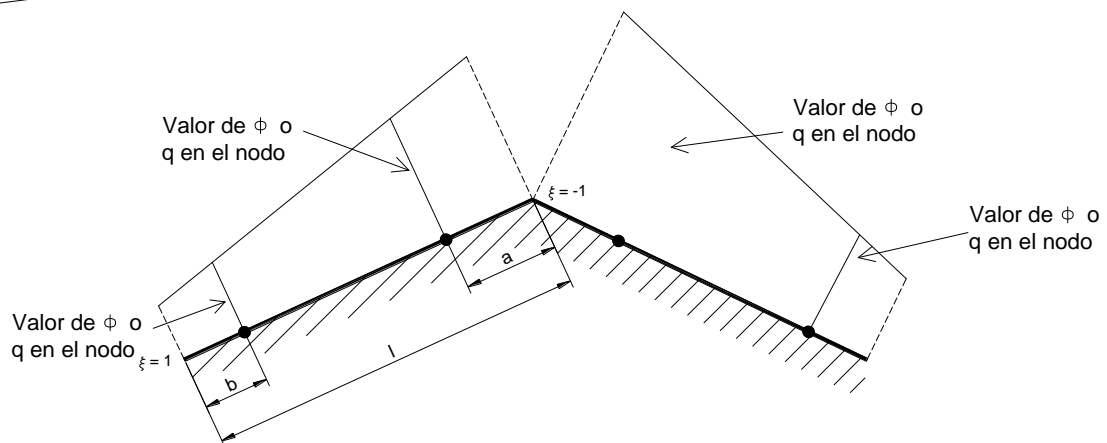


Figura 61. Elementos discontinuos.



Como se observa los nodos han sido desplazados a y b en cada nodo respectivamente. A partir de las ecuaciones originales se obtienen las nuevas

$$\Phi(\xi) = u(\xi) \cdot \Phi^1 + v(\xi) \cdot \Phi^2 = [u \quad v] \begin{bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi^a \\ \Phi^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\xi_a) & v(\xi_a) \\ u(\xi_b) & v(\xi_b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{bmatrix}$$

Donde  $\xi_a = \left(\frac{2a}{l}\right) - 1$  y  $\xi_b = 1 - \left(\frac{2b}{l}\right)$  son las coordenadas para los puntos nodales quedando la ecuación como

$$\Phi(\xi) = [u \quad v] \cdot \mathbf{Q} \cdot \begin{bmatrix} \Phi^a \\ \Phi^b \end{bmatrix}$$

Donde

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{l-a-b} \cdot \begin{bmatrix} l-b & -a \\ -b & l-a \end{bmatrix}$$

La misma relación puede ser escrita para el flujo

$$q(\xi) = [u \quad v] \cdot \mathbf{Q} \cdot \begin{bmatrix} q^a \\ q^b \end{bmatrix}$$

Tras la discretización la ecuación para cada nodo "i" queda

$$c(\vec{x}) \cdot \Phi^i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi^j(\vec{y})) \cdot d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q^j(\vec{y})) \cdot d\Gamma_j$$

Las integrales sobre los elementos discontinuos se resuelven

$$\int_{\Gamma_j} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi^j(\vec{y})) \cdot d\Gamma_j = \int_{\Gamma_j} [u \quad v] \cdot \mathbf{Q} \cdot q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j \cdot \begin{bmatrix} \Phi^a \\ \Phi^b \end{bmatrix} = [h_a^{ij} \quad h_b^{ij}] \cdot \begin{bmatrix} q^a \\ q^b \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Gamma_j} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q^j(\vec{y})) \cdot d\Gamma_j = \int_{\Gamma_j} [u \quad v] \cdot \mathbf{Q} \cdot \Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j \cdot \begin{bmatrix} q^a \\ q^b \end{bmatrix} = [g_a^{ij} \quad g_b^{ij}] \cdot \begin{bmatrix} q^a \\ q^b \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se puede usar la mismas ecuaciones que anteriormente se han descrito pero el número de nodos será igual al número de elementos más uno adicional por cada elemento discontinuo. El coeficiente  $c(\vec{x})$  es igual a 0.5 en los nodos de los elementos discontinuos.

Para el cálculo de los coeficientes de las matrices de influencia es preciso evaluar las integrales que las componen. Al igual que en el caso de elementos constantes, para

los dos casos, elementos lineales y elementos discontinuos, cuando  $i \neq j$  se emplean métodos numéricos de cuadratura de Gauss, o bien reglas de Simpson. Sin embargo, cuando  $i = j$  las integrales son singulares, siendo posible evaluarlas de forma analítica.

- Elementos cuadráticos

Cuando se utilizan geometrías complicadas es usual utilizar elementos curvilíneos  
 El potencial y el flujo vendrán expresados por

$$\Phi(\xi) = u(\xi) \cdot \Phi^1 + v(\xi) \cdot \Phi^2 + w(\xi) \cdot \Phi^3 = [u \quad v \quad w] \begin{bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \end{bmatrix}$$

$$q(\xi) = u(\xi) \cdot q^1 + v(\xi) \cdot q^2 + w(\xi) \cdot q^3 = [u \quad v \quad w] \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix}$$

Siendo las funciones de interpolación

$$u(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (\xi - 1)$$

$$v(\xi) = (1 - \xi) \cdot (1 + \xi)$$

$$w(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (1 + \xi)$$

Las cuales son curvas de segundo grado alcanzando el valor máximo en el nodo 1 cuando  $\xi = -1$ , en el nodo 2 cuando  $\xi = 0$  y en el nodo 3 cuando  $\xi = +1$ .

El cálculo de las integrales a lo largo de cada elemento “j” es similar a los anteriores, pero ahora hay tres nodos desconocidos en la integración y se requiere el uso del Jacobiano:

$$\int_{\Gamma_j} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi^j(\vec{y})) \cdot d\Gamma_j = \int_{\Gamma_j} q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot [u \quad v \quad w] \cdot d\Gamma_j \cdot \begin{bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \end{bmatrix}$$

$$= [h_1^{ij} \quad h_2^{ij} \quad h_3^{ij}] \cdot \begin{bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \end{bmatrix}$$

Donde

$$h_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} u \cdot q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j \quad h_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} v \cdot q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j \quad h_3^{ij} = \int_{\Gamma_j} w \cdot q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j$$

Y de la misma manera

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} \left( \Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q^j(\vec{y}) \right) \cdot d\Gamma_j &= \int_{\Gamma_j} \Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot [u \quad v \quad w] \cdot d\Gamma_j \cdot \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} \\ &= [g_1^{ij} \quad g_2^{ij} \quad g_3^{ij}] \cdot \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde

$$g_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} u \cdot \Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j \quad g_2^{ij} = \int_{\Gamma_j} v \cdot \Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j \quad g_3^{ij} = \int_{\Gamma_j} w \cdot \Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j$$

La evaluación de estos términos requiere el uso del Jacobiano y como las funciones  $u$ ,  $v$  y  $w$  están expresada en función de  $\xi$ , pero las integrales están en función de  $\Gamma$  se debe realizar una transformación simple.

$$d\Gamma = \left( \sqrt{\left( \frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{d\xi} \right)^2} \right) \cdot d\xi = |G| \cdot d\xi$$

Donde  $|G|$  es el Jacobiano. A partir de esto se puede escribir, por ejemplo para  $h_1^{ij}$  y de la misma forma para el resto:

$$h_1^{ij} = \int_{\Gamma_j} u \cdot q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\Gamma_j = \int_{\text{Nodo 1}}^{\text{Nodo 2}} u \cdot q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot |G| \cdot d\xi$$

Para el cálculo del Jacobiano se necesita saber la variación de las coordenadas  $x$  e  $y$  en función de  $\xi$ . Para ello se utilizan los elementos isoparamétricos como en los elementos finitos, que son

$$\begin{aligned} x &= u \cdot x^1 + v \cdot x^2 + w \cdot x^3 \\ y &= u \cdot y^1 + v \cdot y^2 + w \cdot y^3 \end{aligned}$$

Donde el superíndice indica el número de nodo.

- Elementos cúbicos

Los elementos cúbicos son utilizados muy raras veces en la práctica, solo para casos de mucha precisión o especiales, en los que se necesita saber la variación a lo largo

del elemento, pero se indican para completar el estudio. Cada elemento posee cuatro nodos. El potencial y el flujo vendrán expresados

$$\Phi(\xi) = u(\xi) \cdot \Phi^1 + v(\xi) \cdot \Phi^2 + w(\xi) \cdot \Phi^3 + \varpi(\xi) \cdot \Phi^4 = [u \quad v \quad w \quad \varpi] \begin{bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \\ \Phi^4 \end{bmatrix}$$

$$q(\xi) = u(\xi) \cdot q^1 + v(\xi) \cdot q^2 + w(\xi) \cdot q^3 + \varpi(\xi) \cdot q^4 = [u \quad v \quad w \quad \varpi] \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \\ q^4 \end{bmatrix}$$

Y de la misma forma

$$x = u \cdot x^1 + v \cdot x^2 + w \cdot x^3 + \varpi \cdot x^4$$

$$y = u \cdot y^1 + v \cdot y^2 + w \cdot y^3 + \varpi \cdot y^4$$

Siendo las funciones de interpolación

$$u(\xi) = \frac{1}{16} \cdot (1 - \xi) \cdot (-10 + 9(\xi^2 + 1))$$

$$v(\xi) = \frac{1}{16} \cdot (1 + \xi) \cdot (-10 + 9(\xi^2 + 1))$$

$$w(\xi) = \frac{9}{16} \cdot (1 - \xi^2) \cdot (1 - 3 \cdot \xi)$$

$$\varpi(\xi) = \frac{9}{16} \cdot (1 - \xi^2) \cdot (1 + 3 \cdot \xi)$$

Las cuales son curvas de tercer grado alcanzando el valor máximo en el nodo 1 cuando  $\xi = -1$ , en el nodo 2 cuando  $\xi = -1/3$  y en el nodo 3 cuando  $\xi = +1/3$  y en el nodo 4 cuando  $\xi = +1$ .

Otra posibilidad con los elementos cúbicos es conocer la variación del potencial o del flujo en función de la función de estudio y su derivada a lo largo del elemento con solo los dos nodos extremos (ahora 1 y 2). Las funciones serían

$$\Phi(\xi) = u(\xi) \cdot \Phi^1 + v(\xi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Gamma}\right)^1 + w(\xi) \cdot \Phi^2 + \varpi(\xi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Gamma}\right)^2$$

$$q(\xi) = u(\xi) \cdot q^1 + v(\xi) \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial \Gamma}\right)^1 + w(\xi) \cdot q^2 + \varpi(\xi) \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial \Gamma}\right)^2$$

Siendo las funciones de interpolación

$$u(\xi) = \frac{1}{4} \cdot (\xi - 1)^2 \cdot (\xi + 2)$$

$$v(\xi) = -\frac{1}{4} \cdot l \cdot (\xi - 1)^2 \cdot (\xi + 1)$$

$$w(\xi) = \frac{1}{4} \cdot (\xi + 1)^2 \cdot (\xi - 2)$$

$$\varpi(\xi) = -\frac{1}{4} \cdot l \cdot (\xi + 1)^2 \cdot (\xi - 1)$$

Donde  $l$  es la longitud del elemento

### A.7. Dominios abiertos

En el caso de estudiar en dominios abiertos las ecuaciones de proceso y postproceso se modifican ligeramente. Para su cálculo se suponen dos contornos uno cerrado e interior, que se considera como un hueco en el dominio y otro infinito que rodea al dominio y al otro contorno.

En el contorno interior se imponen condiciones de contorno y sobre el exterior se considera la condición de radiación de Sommerfeld. En la figura siguiente se observa el sentido del vector normal y sentido de giro para el contorno interior y exterior.

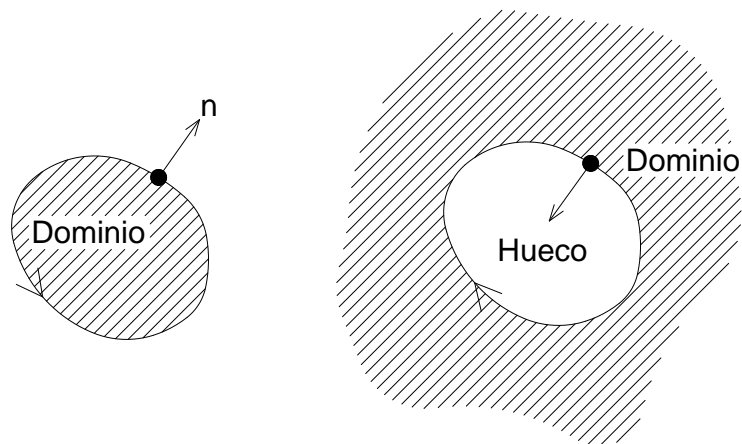


Figura 62. Sentido del vector normal y sentido de giro en un dominio infinito y un hueco.

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{x}) + \int_{\Gamma} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi(\vec{y})) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\infty}} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi(\vec{y})) d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q(\vec{y})) \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_{\infty}} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q(\vec{y})) \cdot d\Gamma\end{aligned}$$

Como se ha indicado, la condición fundamental cumple la condición de Sommerfeld en el infinito, por lo que las dos integrales sobre el contorno infinito se convierten en:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{\infty}} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q(\vec{y})) \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_{\infty}} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi(\vec{y})) d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_{\infty}} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot (q(\vec{y}) + i \cdot k \cdot \Phi^*(\vec{y}))) \cdot d\Gamma = 0\end{aligned}$$

Con lo que la ecuación de postproceso se convierte en:

$$\Phi(\vec{x}) + \int_{\Gamma} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi(\vec{y})) d\Gamma = \int_{\Gamma} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q(\vec{y})) \cdot d\Gamma$$

Como se observa en la figura se dispone el vector normal dirigido hacia el dominio por lo que se cambian los signos de las integrales.

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\Gamma} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi(\vec{y})) d\Gamma - \int_{\Gamma} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q(\vec{y})) \cdot d\Gamma$$

Actuando de la misma manera para la ecuación de proceso

$$c(\vec{x})\Phi(\vec{x}) = \int_{\Gamma} (q^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \Phi(\vec{y})) d\Gamma - \int_{\Gamma} (\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) \cdot q(\vec{y})) \cdot d\Gamma$$

## A.8. Técnicas de integración

### A.8.1. Integración numérica

En los puntos anteriores se han generado ecuaciones integrales en las que es necesario integrar los términos  $\hat{H}_{ij}$  y  $G_{ij}$  para lo que se utiliza la técnica numérica de Gauss. Para ello se parte de la fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot dx \cong \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot f(x_i)$$

En dicha fórmula se consigue convertir la integración de una función entre  $-1$  y  $1$ , en un sumatorio de valores de la función en puntos concretos obtenidos de los polinomios de Legendre con sus respectivos pesos. En el libro de Abramowitz M. & Stegun I. (1970) aparecen las fórmulas exactas y las tablas para el cálculo de los valores de los pesos y puntos de cálculo en función del número elegido de puntos para el cálculo. También se aporta el error obtenido en función del número de puntos. En el anexo se aportan parte de estas tablas. Pero en el caso tratado en esta Tesis el rango de integración es el tamaño del elemento por lo que la fórmula se convierte en

$$\int_a^b f(y) \cdot dy \cong \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot f(y_i)$$

$$y_i = \frac{b-a}{2} \cdot x_i + \frac{b+a}{2}$$

Existen en la misma publicación tablas que permiten el cálculo de integrales para funciones más complejas, que contengan logaritmos, exponenciales o raíces.

En el caso de elementos lineales o de mayor orden, si el punto de colocación está muy cercano al elemento de integración, considerando cercano estar situado a una distancia a alguno de los extremos del elemento inferior a la longitud del elemento, se puede dividir en varios subelementos, para conseguir mayor precisión. Los subelementos suelen ser de longitud igual a la mitad de la distancia del punto de colocación al elemento, con el último elemento constante. Se deberá extrapolar los valores de los nodos iniciales a los nuevos nodos.

Tras calcular términos  $\hat{H}_{ij}$  y  $G_{ij}$  para todos los subelementos, se sumarán para introducirlos en las ecuaciones como el valor del elemento original.

### A.8.2. Punto de colocación en el contorno

Cuando se calculan las integrales sobre un elemento de contorno que contiene el punto de colocación las integrales son singulares. Cuando los elementos de contorno son lineales, el término  $\hat{H}_{ij}$  es igual a cero, pues en cualquier punto del elemento, el vector  $r = |\vec{y} - \vec{x}|$ , es perpendicular a la recta normal, y en el cálculo de  $\hat{H}_{ij}$  entra en juego  $\partial r / \partial \eta = 0$ .

Por lo tanto solo existe singularidad en el cálculo de  $G_{ij}$  en el que entran en juego las funciones de Bessel de segunda clase  $Y_0$  pero a distancia  $r = 0$ , por lo que el valor de  $Y_0(0) = -\infty$ .

Para resolver este problema se utiliza un esquema de integración numérica logarítmica. Se multiplica y divide el elemento  $G_{ij}$  por  $\ln(\xi)$  por lo que es posible realizar la integración numérica directamente desde cero hasta un extremo del elemento, dividiendo el elemento en dos intervalos.

Se desarrolla a continuación el caso de elementos constantes. El resto de casos se basa en el mismo concepto y se operaría como ya se ha explicado anteriormente:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \frac{1}{4} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (i \cdot J_0(k \cdot r) - Y_0(k \cdot r)) d\Gamma \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{L}{2} \cdot \int_{-1}^1 \left( i \cdot J_0 \left( k \cdot \frac{L}{2} \cdot \xi \right) \right) d\xi - \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} (Y_0(k \cdot r)) dr \end{aligned}$$

Para la primera de las integrales se utiliza la técnica de integración numérica de Gauss convencional.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{L}{2} \cdot \int_{-1}^1 \left( i \cdot J_0 \left( k \cdot \frac{L}{2} \cdot \xi \right) \right) d\xi = \frac{L}{8} \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot J_0 \left( k \cdot \frac{L}{2} \cdot \xi_i \right) \cdot w_i$$

Para el cálculo de la segunda se utiliza la técnica de integración numérica logarítmica

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} (Y_0(k \cdot r)) dr &= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left( Y_0 \left( k \cdot \frac{L}{2} \cdot \xi \right) \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{\ln \xi}{\ln \xi} \right) d\xi \\ &= -\frac{L}{4} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{Y_0 \left( k \cdot \frac{L}{2} \cdot \xi_{il} \right)}{\ln \xi_{il}} \cdot w_{il} \end{aligned}$$



En el que se recuerda que los puntos de integración y pesos son diferentes que en el sistema convencional.

### **A.8.3. Aplicación del CHIEF**

Cuando la técnica de integración con punto de colocación en el contorno es utilizada para analizar dominios infinitos, la ecuación integral de contorno presenta un problema de no unicidad de respuesta. Pero en la realidad, cada número de ondas  $k$  presenta respuesta única en potencial y flujo, por lo que se trata de un problema matemático, generado por el tipo de formulación integral de contorno utilizada. El error numérico ocurre cuando las frecuencias de vibración del dominio infinito se aproximan a las frecuencias naturales del dominio finito, con el contorno común a los dos dominios. Se debe recordar que la frecuencia es directamente proporcional al número de ondas.

Los resultados de las integraciones singulares en problemas de dominio infinito, pueden generar no unicidad o mal condicionamiento de respuesta en potencial y flujo. Para resolver este problema, se utiliza la técnica CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) propuesta por Schenk, que consiste en añadir la ecuación para puntos exteriores al dominio varias veces, formando un sistema sobredeterminado que se resuelve por el método de los mínimos cuadrados, usado para ajustar curvas a partir de puntos dados, de forma que se minimice el error. Por lo tanto, el sistema es escrito con más ecuaciones que incógnitas. Matricialmente, son añadidas nuevas líneas de coeficientes en las matrices es  $[H]$  y  $[G]$ .

El sistema en forma matricial normalmente está formado por  $N$  ecuaciones y  $N$  incógnitas.

$$[H]_{N \times N} \cdot [p]_N = [G]_{N \times N} \cdot [q]_N$$

Si se disponen  $nch$  puntos adicionales, se tendrán  $M = N + nch$  ecuaciones y  $N$  incógnitas, y las matrices ampliadas se llamarán  $[Hc]$  y  $[Gc]$ .

$$[Hc]_{M \times N} \cdot [p]_N = [Gc]_{M \times N} \cdot [q]_N$$

Para volver al número de ecuaciones anterior se debe multiplicar el sistema por la matriz  $[\text{Hc}]^T$ .

$$[\text{Hc}]^T_{N \times M} \cdot [\text{Hc}]_{M \times N} \cdot [p]_N = [\text{Hc}]^T_{N \times M} \cdot [\text{Gc}]_{M \times N} \cdot [q]_N$$

El sistema se puede reescribir con dos nuevas matrices  $[\text{Hn}]$  y  $[\text{Gn}]$ .

$$[\text{Hn}]_{N \times N} \cdot [p]_N = [\text{Gn}]_{N \times N} \cdot [q]_N$$

Llegando al sistema final de ecuaciones modificado

$$[\text{A}]_{N \times N} \cdot [\text{X}]_N = [\text{F}]_N$$

### **A.9. Programación del Método de Elementos de Contorno**

Para la computación de las ecuaciones del Método de Elementos de Contorno desarrolladas en los apartados anteriores, se ha seguido la línea desarrollada en el libro “Boundary Elements. An Introductory Course” de Brebbia C.A. & Domínguez J. (1989). En él se desarrolla en Fortran el código de cálculo para la ecuación de Laplace, por lo que se debe transformar ligeramente para calcular la ecuación de Helmholtz, pero en síntesis es prácticamente igual. También se han consultado las modificaciones realizadas en la Tesis de Gil Alías para implementar la condición de contorno de Robin. Ha sido preciso utilizar formulación para análisis numérico, integración, cálculo matricial, resolución de sistemas de ecuaciones, para lo que se han consultado referencias como Abramowitz M. & Stegun I. (1970), Alemán Flores M. et al. (2008).

El lenguaje de programación elegido para esta Tesis ha sido Visual Basic 2005, que aunque a priori presenta dificultades en el tratamiento de los números complejos, una vez solventadas por medio de “Clases de Visual Basic”, se convierte en una potente y moderna herramienta de programación.

Brebbia y Domínguez desarrollan tres programas dependiendo del tipo de Elemento POCONBE, Código para Problemas de Potencial para Elementos de Contorno Constantes, POLINBE para Elementos Lineales y POQUABE para Elementos Cuadráticos.

El programa desarrollado en esta Tesis tiene la misma estructura que ellos. Aunque no se incluye aquí la programación completa, se aporta el diagrama de flujo seguido para la programación.

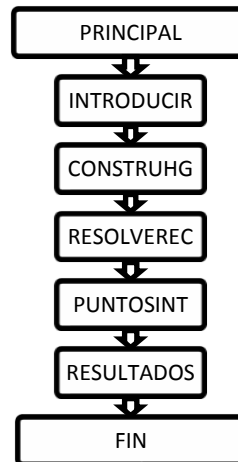


Figura 63. Diagrama de flujo seguido en la programación.

- En el módulo PRINCIPAL del programa se definen las variables públicas que se utilizarán en los procedimientos y funciones, y se llaman a las funciones y procedimientos asignándoles valores a los parámetros que entran en ellos.
- En el procedimiento INTRODUCIR se introducen los datos de geometría del problema, número de elementos y tamaño, sus características acústicas, características del medio, en este caso el aire y la frecuencia de estudio.
- En el procedimiento CONSTRUHG se calculan los coeficiente de las matrices H y G, y se reordenan para formar la matriz A y el vector F.
- En el procedimiento RESOLVEREC se resuelve el sistema de ecuaciones con la factorización LU
- En el procedimiento PUNTOSINT se calcula el valor de potencial y flujo en los puntos internos.
- En el procedimiento RESULTADOS se imprimen los resultados en un fichero que permita su tratamiento para gráficos.

## B NÚMEROS COMPLEJOS.

Los cálculos de las ecuaciones de la acústica son más sencillos si se realizan con números complejos. Las relaciones utilizadas en la Tesis se recogen a continuación.

Siendo  $x$  e  $y$  números reales, definiendo  $i = \sqrt{-1}$  y utilizando los desarrollos en serie, se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \operatorname{cos}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene la identidad de Euler

$$e^{i\theta} = \operatorname{cos}\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Y combinándolas

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2 \cdot i} \end{aligned}$$

Los números complejos se pueden representar de forma binómica y polar:

$$\mathbf{z} = x + i \cdot y = r \cdot e^{i\theta}$$

De donde se define la parte real de  $\mathbf{z} = x = r \cdot \operatorname{cos}\theta$  y la parte imaginaria de  $\mathbf{z} = y = r \cdot \operatorname{sen}\theta$ .

Los parámetros de la representación polar son el módulo y el argumento:

$$\begin{aligned} r = |\mathbf{z}| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan(y/x) \end{aligned}$$

El conjugado de un número complejo se define como aquel que difiere del original en el signo de su parte imaginaria

$$\mathbf{z} = x + i \cdot y \Leftrightarrow \bar{\mathbf{z}} = x - i \cdot y = r \cdot e^{-i\theta}$$

En la Tesis también se utilizan funciones hiperbólicas con la siguiente definición:

$$\sinh (z) = (e^z - e^{-z})/2$$

$$\cosh (z) = (e^z + e^{-z})/2$$

$$\tanh (z) = \sinh (z)/\cosh (z)$$

$$\coth (z) = 1/\tanh (z)$$

$$\frac{d\sinh (z)}{dz} = \cosh (z)$$

$$\frac{d\cosh (z)}{dz} = \sinh (z)$$

$$\sin (iy) = i \cdot \sinh(y)$$

$$\cos (iy) = \cosh(y)$$

$$\sin^2 (z) + \cos^2 (z) = 1$$

$$\cosh^2 (z) - \sinh^2 (z) = 1$$

Más relaciones entre ellas se pueden consultar en la bibliografía.

## C FUNCIONES DE BESSEL.

En el libro Abramowitz M. & Stegun I. (1970) se puede obtener toda la información referente a las funciones de Bessel. En este Anexo se ofrecen parte de sus propiedades.

Las soluciones a la ecuación, donde  $z$  es un número complejo,  $\nu$  es un número real y  $n$  es un número entero:

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) \cdot w = 0$$

son las llamadas funciones de Bessel de primera clase  $J_{\pm\nu}(z)$ , o de segunda clase  $Y_{\nu}(z)$ , también llamada función de Weber, y de tercera clase  $H_{\nu}^{(1)}(z)$ ,  $H_{\nu}^{(2)}(z)$  también llamadas funciones de Hankel. Existen relaciones entre ellas, destacando entre las más útiles las siguientes:

$$Y_{\nu}(z) = \frac{J_{\nu}(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}$$

siendo reemplazado el término de la derecha por su límite si  $\nu$  es un entero o cero. Las funciones de Hankel se relacionan con las anteriores mediante la siguiente relación:

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = J_{\nu}(z) + i \cdot Y_{\nu}(z)$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = J_{\nu}(z) - i \cdot Y_{\nu}(z)$$

Otras relaciones que se deducen son:

$$J_{-n}(z) = (-1)^n \cdot J_n(z)$$

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n \cdot Y_n(z)$$

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{\nu\pi i} H_{\nu}^{(1)}(z)$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\nu\pi i} H_{\nu}^{(2)}(z)$$

Para valores de  $x$  pequeños, tales que  $0 \leq x \leq 3$   $J_0(x)$  se puede obtener con:

$$J_0(x) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot x^2\right)^1}{1!^2} + \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot x^2\right)^2}{2!^2} - \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot x^2\right)^3}{3!^2} \dots$$

Cuyo desarrollo polinómico en varios términos para utilizarlo en el programa y error acumulado son:

$$J_0(x) = 1 - 2.2499997 \cdot (x/3)^2 + 1.2656208 \cdot (x/3)^4 - 0.3163866 \cdot (x/3)^6 \\ + 0.0444479 \cdot (x/3)^8 - 0.0039444 \cdot (x/3)^{10} \\ + 0.0002100 \cdot (x/3)^{12} + \epsilon \quad |\epsilon| < 5 \cdot 10^{-8}$$

$Y_0(x)$ , con  $0 \leq x \leq 3$  y con la constante de Euler,  $\gamma = 0.57721\dots$ :

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left( \ln \left( \frac{1}{2} \cdot x \right) + \gamma \right) \cdot J_0(x) + \frac{2}{\pi} \\ \cdot \left( \frac{\left( \frac{1}{4} \cdot x^2 \right)^1}{1!^2} - \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\left( \frac{1}{4} \cdot x^2 \right)^2}{2!^2} + \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\left( \frac{1}{4} \cdot x^2 \right)^3}{3!^2} - \dots \right)$$

Cuyo desarrollo polinómico en varios términos y error acumulado son:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \ln \left( \frac{1}{2} \cdot x \right) \cdot J_0(x) + 0.36746691 + 0.60559366 \cdot (x/3)^2 \\ - 0.74350384 \cdot (x/3)^4 + 0.25300117 \cdot (x/3)^6 - 0.04261214 \\ \cdot (x/3)^8 + 0.00427916 \cdot (x/3)^{10} - 0.00024846 \cdot (x/3)^{12} \\ + \epsilon \quad |\epsilon| < 1.4 \cdot 10^{-8}$$

Para valores de  $x$  grandes,  $3 \leq x \leq \infty$ :

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cdot \left( \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cdot \left( \text{sen} \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$H_0^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cdot e^{-i \cdot \left( x - \frac{\pi}{4} \right)}$$

El desarrollo polinómico que se utiliza en el programa así como el error acumulado es:

$$J_0(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot f_0 \cdot \cos \theta_0$$

$$Y_0(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot f_0 \cdot \text{sen} \theta_0$$

Donde

$$f_0 = 0.79788456 - 0.00000077 \cdot \left(\frac{3}{x}\right) - 0.00552740 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^2 - 0.00009512 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^3 \\ + 0.00137237 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^4 - 0.00072805 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^5 + 0.00014476 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^6 \\ + \epsilon \quad |\epsilon| < 1.6 \cdot 10^{-8}$$

$$\theta_0 = x - 0.78539816 - 0.04166397 \cdot \left(\frac{3}{x}\right) - 0.00003954 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^2 + 0.00262573 \\ \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^3 - 0.00054125 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^4 - 0.00029333 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^5 + 0.00013558 \\ \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^6 + \epsilon \quad |\epsilon| < 7 \cdot 10^{-8}$$

A continuación se muestra un gráfico que recoge valores de algunas de las funciones de Bessel.

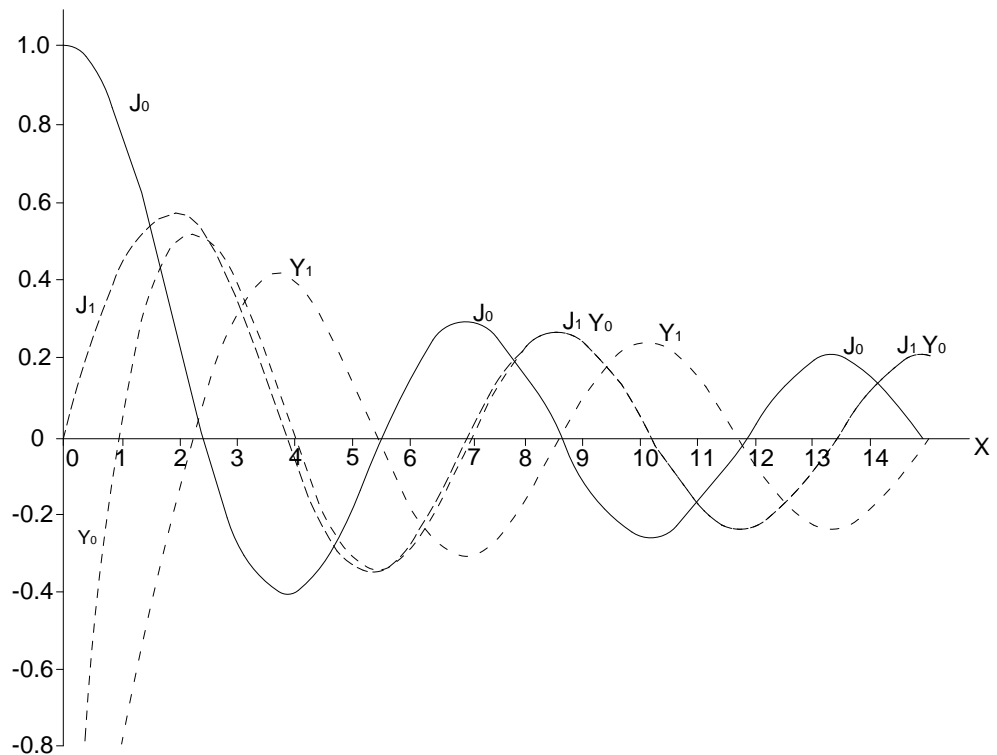


Figura 64. Valores de algunas funciones de Bessel.



## D INTEGRACIÓN MEDIANTE LA TÉCNICA NUMÉRICA DE GAUSS.

Se pueden calcular integrales mediante la técnica numérica de Gauss. Para ello se parte de la fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot f(x_i) + R_n$$

En dicha fórmula se consigue convertir la integración de una función entre  $-1$  y  $1$ , en un sumatorio de valores de la función en puntos concretos obtenidos de los polinomios de Legendre  $P_n(x)$ ,  $P_n(1) = 1$ , con sus respectivos pesos.

Abscisas:  $x_i$  es la  $i$  – ésima raíz del  $P_n(x)$

Pesos:  $w_i = 2/(1 - x_i^2) (P'_n(x_i))^2$

El error acumulado es:

$$R_n = \frac{2^{2 \cdot n + 1} (n!)^4}{(2 \cdot n + 1) ((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi) \quad (-1 < \xi < 1)$$

La fórmula se adapta a cualquier otro rango de integración convirtiéndola en:

$$\int_a^b f(y) \cdot dy = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot f(y_i) + R_n$$

$$y_i = \frac{b-a}{2} \cdot x_i + \frac{b+a}{2}$$

Siendo en este caso el error acumulado

$$R_n = \frac{(b-a)^{2 \cdot n + 1} (n!)^4}{(2 \cdot n + 1) ((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi) \quad (-1 < \xi < 1)$$

En el libro de Abramowitz M. & Stegun I. (1970) se pueden obtener tablas con las abscisas y pesos para hasta 96 abscisas. A continuación se ofrecen parte de estas tablas, las cuales han sido usadas en la Tesis para el cálculo numérico de integrales.

$+x_i / -x_i$	$w_i$
	$n = 2$
0.577350269189626	1.0000000000000000
	$n = 3$
0.0000000000000000	0.8888888888888888

0.774596669241483	0.5555555555555556
$+x_i / -x_i$	$w_i$
$n = 4$	
0.339981043584856	0.652145154862546
0.861136311594053	0.347854845137454
$n = 5$	
0.0000000000000000	0.5688888888888889
0.538469310105683	0.478628670499366
0.906179845938664	0.236926885056189

En el caso de que exista una singularidad logarítmica, las fórmulas y tablas se transforman en:

$$\int_0^1 f(x) \cdot \ln(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot f(x_i) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} K_n$$

$n$	$x_i$	$-w_i$	$K_n$
2	0.112009	0.718539	0.00285
	0.602277	0.281461	
$n$	$x_i$	$-w_i$	$K_n$
3	0.063891	0.513405	0.00017
	0.368997	0.391980	
	0.766880	0.094615	
$n$	$x_i$	$-w_i$	$K_n$
4	0.041448	0.383464	0.00001
	0.245275	0.386875	
	0.556165	0.190435	
	0.848982	0.039225	

## E FACTORIZACIÓN LU.

Para resolver los sistemas de ecuaciones que se generan en los cálculos de la Tesis se ha utilizado el método de la Factorización LU.

En el momento de resolver un sistema de ecuaciones lineales de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas  $A \cdot X = B$ , se puede recurrir a diferentes métodos. Uno de los más utilizados es el método de eliminación de Gauss el cual consiste en convertir la matriz  $A$ , en una matriz de forma escalonada.

Si  $U$  es una matriz triangular superior cuyos elementos diagonales son diferentes de cero, entonces el sistema lineal  $U \cdot X = B$  puede ser resuelto sin tener que transformar la matriz  $U$  a la forma escalonada. El sistema de ecuaciones estaría dado por:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Y la solución se obtiene por el siguiente algoritmo

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - u_{n-1n}x_n}{u_{n-1n-1}}$$

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{k=n}^{j-1} u_{jk}x_k}{u_{jj}} \quad \text{con } j = n, n-1, \dots, 2, 1$$

De forma parecida, si  $L$  es una matriz triangular inferior cuyos elementos diagonales son diferentes de cero, entonces el sistema lineal  $L \cdot X = B$  puede ser resuelto de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Y la solución se obtiene por el siguiente algoritmo

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}}$$

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}x_k}{l_{jj}} \quad \text{con } j = 2, \dots, n$$

Suponiendo que una matriz  $A_{nn}$  puede ser escrita como el producto de una matriz triangular inferior  $L$  y una matriz triangular superior  $U$ , esto es,  $A = L \cdot U$ , se dice que  $A$  tiene una factorización  $L \cdot U$ . Esta factorización permite resolver el sistema lineal  $A \cdot X = B$ . Sustituyendo  $L \cdot U$  por  $A$ , se obtiene

$$(L \cdot U) \cdot X = B$$

$$L \cdot (U \cdot X) = B$$

Haciendo  $U \cdot X = Z$  se tiene que

$$L \cdot Z = B$$

Como  $L$  es una matriz triangular inferior, podemos resolver para  $Z$  utilizando los algoritmos anteriores. Seguidamente, como  $U$  es una matriz triangular superior, se resuelve  $U \cdot X = Z$  como se ha indicado.

Para deducir un algoritmo que permita la factorización  $L \cdot U$  de  $A$  se parte de la fórmula para la multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^n l_{is}u_{sj} = \sum_{s=1}^{\min(i,j)} l_{is}u_{sj}$$

en donde se ha usado el hecho de que  $l_{is} = 0$  para  $s > i$  y  $u_{sj} = 0$  para  $s > j$ .

En este proceso, cada paso determina una nueva fila de  $U$  y una nueva columna de  $L$ . En el paso  $k$ , se puede suponer que ya se calcularon las filas  $1, 2, \dots, k-1$  de  $U$ , al igual que las columnas  $1, 2, \dots, k-1$  de  $L$ . Haciendo  $i = j = k$  en la ecuación anterior se obtiene

$$a_{kk} = l_{kk}u_{kk} + \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk}$$

Si se especifica un valor para  $l_{kk}$  (o para  $u_{kk}$ ), a partir de la ecuación anterior es posible determinar un valor para el otro término. Conocidas  $u_{kk}$  y  $l_{kk}$  y a partir de la ecuación previa podemos escribir las expresiones para la  $k$ -ésima fila ( $i = k$ ) y para la  $k$ -ésima columna ( $j = k$ ), respectivamente:

$$a_{kj} = l_{kk}u_{kj} + \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sj} \quad (k + 1 \leq j \leq n)$$

$$a_{ik} = l_{ik}u_{kk} + \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}u_{sk} \quad (k + 1 \leq i \leq n)$$

Es decir, las ecuaciones anteriores se pueden emplear para encontrar los elementos  $u_{kj}$  y  $l_{ik}$ . Una vez conocidas los coeficientes de las matrices  $L$  y  $U$  ya es posible resolver el sistema de ecuaciones con lo desarrollado anteriormente.