



**Departamento de Mecánica de Medios
Continuos y Teoría de Estructuras**

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos,
Canales y Puertos

Universidad Politécnica de Madrid

**Simulación del flujo sanguíneo
y su interacción con la pared
arterial mediante modelos de
elementos finitos**

Tesis Doctoral

Francisco José Calvo Plaza

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Licenciado en Economía

Director: Felipe Gabaldón Castillo
Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Madrid, Septiembre 2006

Simulación del flujo sanguíneo y su interacción con la pared arterial mediante modelos de elementos finitos

Tesis Doctoral
Universidad Politécnica de Madrid

Madrid, Septiembre 2006

La composición del texto ha sido realizada con L^AT_EX
y aplicaciones GNU/Linux

Francisco José Calvo Plaza
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Licenciado en Economía

Director: Felipe Gabaldón Castillo
Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Universidad Politécnica de Madrid
Profesor Aranguren s/n
Madrid 28040

Teléfono: (+34) 91 336 5232
Fax: (+34) 91 336 5358
Correo electrónico: fran@mecanica.upm.es
Página web: <http://w3.mecanica.upm.es/~fran>

Dedicado a mis padres y abuelos

*A pesar de todo esto...
nuestra estrella polar sigue
siendo irracional.*

Resumen

La biomecánica aplica las leyes de la mecánica a los seres vivos y en particular la hemodinámica estudia el movimiento de la sangre en el sistema cardiovascular. Una parte de las principales arterias son elásticas e interactúan con el flujo sanguíneo, por lo que es más realista tratar de forma acoplada ambos fenómenos.

En esta tesis se desarrolla un modelo de fluido newtoniano incompresible que simula la sangre y un modelo de sólido hiperelástico incompresible para la pared arterial, obteniéndose los parámetros constitutivos de este último con datos experimentales. Las ecuaciones se resuelven numéricamente mediante el método de los elementos finitos con un tratamiento específico de la condición de incompresibilidad.

La interacción fluido-sólido se plantea con un método particionado con acoplamiento fuerte en el que se utiliza la formulación ALE para tener en cuenta el movimiento de los contornos del fluido.

El modelo de interacción se aplica a arterias coronarias con geometría real cuyas mallas de hexaedros se generan automáticamente a partir de la directriz y diámetros de las arterias. Para simular la condición de contorno absorbente en el extremo final se desarrolla un modelo unidimensional de interacción, el cual se acopla al modelo tridimensional en dicho extremo. El modelo final propuesto tiene por tanto doble acoplamiento.

Palabras clave: hemodinámica, interacción fluido-estructura, modelos acoplados, fluido newtoniano, hiperelasticidad, método de los elementos finitos, generación de mallas.

Abstract

The objective of biomechanics is to apply the laws of mechanics to living beings. In particular haemodynamics study the blood motion in the cardiovascular system. A group of the principal arteries are elastic and interact with the blood flow, so it's more realistic to consider both phenomena in a coupled way.

In this work an incompressible newtonian fluid model is developed to simulate the blood and an incompressible hyperelastic solid model for the arterial wall. The constitutive parameters of the solid are obtained from experimental data. The equations are solved numerically by using the finite element method with a special treatment of the incompressibility condition.

Fluid-solid interaction is set through a partitioned method with strong coupling where the ALE formulation is used to take into account the movement of the fluid boundaries.

The interaction model is applied to coronary arteries with real geometry whose meshes are generated automatically from the longitudinal profile and diameters of the arteries. In order to simulate absorbent boundary conditions at the outlet a one-dimensional interaction model is developed. This 1D model is coupled to the three-dimensional model at the outlet, so the final model consists in the interaction of two coupled systems.

Keywords: haemodynamics, fluid-structure interaction, coupled models, newtonian fluid, hyperelasticity, finite element method, mesh generation.

Agradecimientos

Me gustaría empezar mostrando mi gratitud a Felipe Gabaldón Castillo, tanto en calidad de ser mi director de tesis como en su calidad humana, por su continua ayuda, consejos, paciencia y correcciones.

Agradezco también a todo el Grupo de Mecánica Computacional. A José María Goicolea por el ofrecimiento de los recursos del grupo, a Juan José Arribas por su continua ayuda informática, a Juan Carlos García por sus discusiones científicas, a Ignacio Romero por su ayuda en los primeros momentos y a Yolanda Cabrero por su labor administrativa.

Aunque ellos ya lo saben, pero me gustaría mencionar al grupo de doctorandos, empezando por Luis Lacoma por su ayuda en el día a día, a Claudio García por sus ensayos experimentales, a Javier Rodríguez por su entusiasmo y ánimo, a Damon Afkari y Roberto Ortega por su colaboración, a Álvaro Rídruejo, Carola Sanhuesa y Miguel Martín por su apoyo, así como a Francisco Riquelme, Manuela Pousada y Beatriz Sanz como compañeros del grupo. Y a Elsa García de la Universidad de Zaragoza por haberme dado una de las mallas.

Asimismo también quiero dar las gracias al profesor Carlos Corona por sus explicaciones matemáticas, y mencionar a mis amigos Rodrigo Vela, Manuel Francisco, Julio Escribano, David Ríos y Javier Jiménez.

Finalmente, quiero mencionar especialmente a mi hermana María Isabel Calvo Plaza por su ayuda en lo relacionado con la medicina y a mis padres Francisco Calvo González-Calero e Isabel Plaza Jiménez, que me han apoyado en todo momento para la realización de este trabajo.

Índice general

Resumen	V
Abstract	VII
Agradecimientos	IX
Índice de figuras	XV
Índice de cuadros	XXI
Lista de símbolos	XXIII
1. Introducción y Objetivos	1
1.1. Objetivos	1
1.2. Contenido del trabajo	1
1.3. Introducción y motivación	3
1.3.1. La ciencia biomecánica	3
1.3.2. La hemodinámica	4
1.3.3. Aplicaciones clínicas	14
2. Modelos matemáticos del flujo sanguíneo	17
2.1. Descripción de las propiedades de la sangre	17
2.2. Ecuaciones del modelo	19
2.2.1. Hipótesis realizadas	20
2.2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes. Formulación fuerte del problema	23
2.2.3. Ecuaciones de Navier-Stokes. Formulación débil del problema	25
2.3. Solución numérica de las ecuaciones mediante el MEF	25
2.3.1. Ecuaciones de elementos finitos	26
2.3.2. Tecnología de elementos	30
2.3.3. Implementación computacional	35
2.4. Ejemplos de validación	35
2.4.1. Flujo confinado en una cavidad	36
2.4.2. Flujo sobre un escalón inverso	44

2.4.3.	Flujo de Womersley	47
2.4.4.	Flujo rodeando un cilindro. Torbellinos de Von Karman	51
3.	Modelos matemáticos de la pared arterial	57
3.1.	Descripción de la pared arterial	57
3.2.	Formulación de la mecánica de medios continuos	60
3.2.1.	Cinemática	60
3.2.2.	Tensiones	61
3.2.3.	El tensor de elasticidad	61
3.3.	Modelos hiperelásticos para tejidos biológicos blandos	63
3.3.1.	Hiperelasticidad isotropa	65
3.3.2.	Comentarios sobre hiperelasticidad anisótropa	68
3.3.3.	Formulación de elementos finitos	69
3.4.	Datos experimentales y calibración de los modelos	70
3.4.1.	Descripción técnica de los ensayos	71
3.4.2.	Curvas teóricas de los modelos	74
3.4.3.	Resultados experimentales y ajuste de los modelos	76
3.5.	Ejemplos de validación	81
3.5.1.	Cilindro sometido a presión interna	82
3.5.2.	Globo sometido a presión interna	87
4.	Modelos de interacción fluido-estructura	91
4.1.	Formulación ALE del fluido	92
4.1.1.	Fundamentos de la formulación	92
4.1.2.	Ecuaciones del fluido en contornos móviles	95
4.1.3.	Implementación computacional	96
4.1.4.	Validación de la formulación ALE	98
4.2.	Formulación del problema de interacción	102
4.3.	Clasificación de los métodos de interacción	106
4.3.1.	Métodos monolíticos	107
4.3.2.	Métodos particionados	108
4.4.	Método de interacción propuesto	114
4.4.1.	Método de aceleración de Aitken	115
4.4.2.	Programa inter3D	117
4.5.	Validación del método de interacción	118
4.5.1.	Transmisión de un pulso de presión en un cilindro	118
4.5.2.	Velocidad oscilante en una cavidad con una pared flexible	126
5.	Modelos de interacción sangre-pared arterial	141
5.1.	Modelo unidimensional	141
5.1.1.	Discretización en el tiempo. Diferencias finitas	145
5.1.2.	Discretización en el espacio. Elementos finitos	145
5.1.3.	Condiciones de contorno y condiciones de compatibilidad	147

5.1.4.	Ejemplo: transmisión de un pulso sinusoidal en el modelo 1D	149
5.2.	Sobre las condiciones de contorno fisiológicas	154
5.2.1.	Condiciones de contorno del fluido	154
5.2.2.	Condiciones de contorno de la pared arterial	157
5.3.	Acoplamiento de los modelos 3D y 1D. Programa interbio . . .	158
5.4.	Ejemplo de validación. Cilindro 3D acoplado a un modelo 1D .	159
6.	Aplicaciones a geometrías realistas	167
6.1.	Pre-proceso y Post-proceso	167
6.1.1.	Obtención de la geometría real y la malla	168
6.1.2.	Programa post-bio para el post-proceso	169
6.2.	La arteria coronaria izquierda	170
6.2.1.	Arteria coronaria anterior descendente sana	173
6.2.2.	Arteria coronaria anterior descendente dañada	180
6.2.3.	Bifurcación en la arteria anterior descendente y la arteria circunfleja	185
7.	Conclusiones y líneas futuras de investigación	195
7.1.	Resumen del trabajo realizado	195
7.2.	Conclusiones	196
7.3.	Aportaciones	198
7.4.	Líneas futuras de investigación	199
A.	Formulación débil de las ecuaciones de Navier-Stokes	201
B.	Aspectos de la implementación computacional	207
C.	Cálculo de las trayectorias y líneas de corriente	211
D.	Mallador 2D con cuadriláteros y 3D con hexaedros	217
E.	Cálculo del perfil parabólico 3D de velocidades	225
	Bibliografía	231
	Índice alfabético	239

Índice de figuras

1.1.	<i>Sistema cardiovascular. Circulación sistémica y pulmonar.</i>	5
1.2.	<i>Interacción del sistema cardiovascular y el sistema nervioso.</i>	7
1.3.	<i>Teoría de Windkessel. Flujos bombeado, almacenado y regulado.</i>	8
1.4.	<i>Teoría de Windkessel. Suavizado del flujo sanguíneo.</i>	9
1.5.	<i>Formación y crecimiento de la aterosclerosis.</i>	15
1.6.	<i>Cronología de la formación de la placa de ateroma.</i>	16
2.1.	<i>Datos experimentales y ajuste del modelo de Carreau-Yasuda.</i>	20
2.2.	<i>Representación esquemática de la formulación fuerte del problema de contorno en fluidos.</i>	24
2.3.	<i>Elemento de referencia $Q1/P0$.</i>	31
2.4.	<i>Coficiente ζ en función del número de Reynolds. Escala logarítmica.</i>	34
2.5.	<i>Geometría del área de confinamiento de la cavidad.</i>	37
2.6.	<i>Velocidad horizontal y perfil en la sección A. $Re = 400$.</i>	38
2.7.	<i>Velocidad vertical y perfil en la sección B. $Re = 400$.</i>	38
2.8.	<i>Representación cualitativa de las curvas isobaras. $Re = 400$.</i>	39
2.9.	<i>Trayectoria de las partículas en régimen transitorio (izquierda) y líneas de corriente en estado estacionario (derecha). $Re = 400$.</i>	40
2.10.	<i>Velocidad vertical con el elemento sin estabilizar. $Re = 10000$.</i>	41
2.11.	<i>Velocidad horizontal y perfil en la sección A. $Re = 10000$.</i>	41
2.12.	<i>Velocidad vertical y perfil en la sección B. $Re = 10000$.</i>	42
2.13.	<i>Trayectoria de las partículas en régimen transitorio (izquierda) y líneas de corriente en estado estacionario (derecha). $Re = 10000$.</i>	42
2.14.	<i>Distintas linealizaciones del término ST en el caso de flujo confinado en una cavidad. $Re = 400$.</i>	43
2.15.	<i>Geometría del problema del escalón inverso.</i>	44
2.16.	<i>Contornos de velocidad horizontal. $Re = 389$.</i>	45
2.17.	<i>Contornos de velocidad vertical. $Re = 389$.</i>	45
2.18.	<i>Comparación del perfil de velocidades en las secciones A y B. $Re = 389$.</i>	46
2.19.	<i>Líneas de corriente y perfiles de velocidad horizontal. $Re = 389$.</i>	47
2.20.	<i>Geometría del flujo de Womersley.</i>	48

2.21. Malla del cilindro para el flujo de Womersley.	49
2.22. <i>Perfiles de velocidad en el flujo de Womersley. La línea azul continua es la solución analítica y los puntos rojos el resultado numérico.</i>	51
2.23. <i>Geometría del flujo rodeando un cilindro.</i>	51
2.24. <i>Malla de cuadriláteros obtenida con el mallador del presente trabajo.</i>	52
2.25. <i>Evolución de las líneas de corriente. $Re = 100$.</i>	55
2.26. <i>Líneas de corriente y contornos de velocidad horizontal a lo largo de un período. $Re = 100$.</i>	56
3.1. <i>Estructura de la pared arterial.</i>	57
3.2. <i>Comportamiento de las fibras elásticas y de colágeno por separado y en combinación.</i>	59
3.3. <i>Cinemática del sólido continuo.</i>	60
3.4. <i>Tensiones y tensores de tensión en las configuraciones de referencia y deformada.</i>	62
3.5. <i>Probetas tomadas de la arteria aorta en tres orientaciones diferentes.</i>	71
3.6. <i>Sujeción de la probeta de arteria en la máquina de ensayos.</i>	71
3.7. <i>Circuito para calentar el suero fisiológico.</i>	72
3.8. <i>Dimensiones iniciales y dimensiones actuales de la probeta.</i>	73
3.9. <i>Dispositivo con luz láser para medir el ancho actual de la probeta.</i>	73
3.10. <i>Instante de rotura de la arteria.</i>	74
3.11. <i>Esquema del ensayo de tracción con la hipótesis de incompresibilidad.</i>	74
3.12. <i>Curvas tensión-alargamiento obtenidas en los ensayos para la aorta sana.</i>	76
3.13. <i>Curvas tensión-alargamiento obtenidas en los ensayos para la aorta dañada con estenosis.</i>	77
3.14. <i>Ajuste de los modelos de Ogden y neohookeano en la aorta sana.</i>	81
3.15. <i>Ajuste de los modelos de Ogden y neohookeano en la aorta dañada con estenosis.</i>	81
3.16. <i>Esquema del modelo del cilindro con simetría axial.</i>	82
3.17. <i>Cilindro sometido a presión interna con material de Ogden. Tensión circunferencial y análisis de sensibilidad de dicha tensión respecto el módulo volumétrico κ.</i>	84
3.18. <i>Cilindro sometido a presión interna con material de Ogden. Presión.</i>	85
3.19. <i>Cilindro sometido a presión interna con material neohookeano. Tensión circunferencial.</i>	86
3.20. <i>Cilindro sometido a presión interna con material neohookeano. Presión.</i>	86

3.21. <i>A la izquierda, esquema del globo seccionado por un plano meridiano. A la derecha, malla de hexaedros de un octante de globo.</i>	87
3.22. <i>Globo sometido a presión interna con material de Ogden. Tensión circunferencial.</i>	89
3.23. <i>Globo sometido a presión interna con material de Ogden. Presión.</i>	89
3.24. <i>Globo sometido a presión interna con material neohookeano. Tensión circunferencial.</i>	90
3.25. <i>Globo sometido a presión interna con material neohookeano. Presión.</i>	90
4.1. <i>Idea de la formulación ALE para un fluido con contornos móviles.</i>	93
4.2. <i>Correspondencias entre los dominios lagrangiano, euleriano y ALE.</i>	94
4.3. <i>Esquema del tubo con movimiento impuesto.</i>	98
4.4. <i>Malla deformada verticalmente con movimiento impuesto. Se representa con menos elementos por claridad.</i>	99
4.5. <i>Tubo con movimiento impuesto. Líneas de corriente y perfiles de velocidad horizontal.</i>	101
4.6. <i>Tubo con movimiento impuesto. Representación de las curvas isobaras.</i>	102
4.7. <i>Operadores abstractos para formular el problema de interacción. Obsérvese que actúan secuencial y circularmente.</i>	105
4.8. <i>Esquema para representar los métodos particionados.</i>	109
4.9. <i>Acoplamiento débil. Esquemas de resolución. A la izquierda solución en paralelo y a la derecha solución en serie.</i>	109
4.10. <i>Acoplamiento fuerte con el método de Block-Jacobi. Se puede utilizar cálculo en paralelo.</i>	111
4.11. <i>Acoplamiento fuerte con el método de Block-Gauss-Seidel. Se ha de resolver en serie.</i>	112
4.12. <i>Ilustración del método de Aitken para una variable escalar.</i> . .	115
4.13. <i>Esquema del cilindro y del pulso de presión.</i>	120
4.14. <i>Transmisión de un pulso de presión. Malla del fluido (en azul) y del sólido (en marrón).</i>	121
4.15. <i>Pulso de presión. Número de iteraciones para converger. Comparación entre el método de Aitken y otros métodos con ω constante.</i>	122
4.16. <i>Líneas de corriente y contornos de presión de 0 a 12 ms. La deformación en los contornos de presión ha sido aumentada por 10.</i>	124
4.17. <i>Curvas con los desplazamientos de la pared a distintas distancias axiales.</i>	125

4.18. Caudal en diferentes secciones del tubo.	127
4.19. Esquema de la cavidad tridimensional.	128
4.20. Un único elemento en la abertura equivale a imponer el caudal.	129
4.21. Varios elementos en la abertura para que los caudales de entrada y salida puedan ser diferentes.	130
4.22. Número de iteraciones para converger. Método de Aitken y métodos con el parámetro de relajación constante. Caso 2D.	131
4.23. Desplazamiento de 3 puntos de la pared inferior. Caso 2D.	131
4.24. Volúmenes entrante y saliente y cambio de volumen en la cavidad. Caso 2D.	132
4.25. Líneas de corriente (izquierda) y curvas isobaras (derecha) durante el régimen transitorio.	134
4.26. Líneas de corriente (izquierda) y curvas isobaras (derecha) a lo largo de un período.	136
4.27. Número de iteraciones para converger con el método de Aitken. Caso 3D.	137
4.28. Desplazamiento de varios puntos representativos de la pared inferior. Caso 3D.	138
4.29. Volumen de fluido entrante y saliente y cambio de volumen en la cavidad. Caso 3D.	138
4.30. Líneas de corriente en $t = 32.5$ en dos perspectivas.	139
4.31. Líneas de corriente en $t = 35$ en dos perspectivas.	139
5.1. Red de vasos sanguíneos susceptible de ser incluida en un modelo unidimensional.	142
5.2. Modelo unidimensional para resolver monolíticamente.	142
5.3. Funciones de forma lineales para discretizar el espacio.	146
5.4. Pulso sinusoidal en el modelo 1D.	150
5.5. Curvas de presión en distintos puntos del tubo.	151
5.6. Curvas de caudal en distintos puntos del tubo.	152
5.7. Curva con el valor teórico de λ_1 y el valor medio.	153
5.8. Modelo de arteria acoplado con el resto del sistema cardiovascular.	155
5.9. Modelo de arteria desacoplada.	155
5.10. Condiciones de contorno de la pared coaccionando el extremo inicial y dejando libre el final.	158
5.11. Interfaz Ω_1 de los modelos 3D y 1D donde la presión es la incógnita.	158
5.12. Modelo 3D acoplado con un modelo 1D.	159
5.13. Número de iteraciones entre los modelos 3D y 1D utilizando el método de Aitken para la interacción entre ambos.	161
5.14. Número total de iteraciones utilizando el método de Aitken para la interacción entre los modelos 3D de fluido y sólido.	162

5.15. Contornos de presión de $t = 12$ a 17 ms. La deformación ha sido aumentada por 10.	164
5.16. Presión en distintos puntos del modelo 1D.	164
5.17. Desplazamiento en distintas distancias axiales del modelo 3D.	165
5.18. Caudal en distintas distancias axiales en los modelos 3D (hasta $z = 5$ cm) y 1D (a partir de $z = 5$ cm).	165
6.1. A la izquierda una angiografía y a la derecha una imagen IVUS.	168
6.2. Cálculo de la tensión tangencial sobre la pared arterial.	169
6.3. Ubicación de la arteria coronaria izquierda en el corazón.	171
6.4. Pulso de presión impuesto en la arteria.	171
6.5. Caudal en la arteria coronaria izquierda en un ciclo cardíaco.	172
6.6. Interacción en LAD sana. Malla del fluido (en azul) y del sólido (en marrón).	174
6.7. Número de iteraciones en el cálculo de la LAD sana.	175
6.8. Diámetro medio de la sección final de la LAD sana.	176
6.9. Contornos de presión (dyn/cm^2) en la LAD sana para material neoohookeano. La deformación ha sido aumentada por 5.	177
6.10. Presión en el modelo 1D acoplado a la LAD sana.	177
6.11. Tensión tangencial (dyn/cm^2) sobre la pared de la LAD sana.	178
6.12. Tensión tangencial máxima durante un ciclo cardíaco en la LAD sana.	179
6.13. Líneas de corriente en el instante de caudal máximo en la LAD sana.	179
6.14. Líneas de corriente en el instante de caudal casi nulo en la LAD sana.	179
6.15. Interacción en la LAD dañada. Malla del fluido (en azul) y del sólido (en marrón).	180
6.16. Número de iteraciones en el cálculo de la LAD dañada.	181
6.17. Diámetro medio de la sección final de la LAD dañada.	182
6.18. Contornos de presión en la LAD dañada para material de Ogden. La deformación ha sido aumentada por 5.	183
6.19. Presión en el modelo 1D acoplado a la LAD dañada.	183
6.20. Tensión tangencial (dyn/cm^2) sobre la pared de la LAD dañada.	184
6.21. Tensión tangencial máxima durante un ciclo cardíaco en la LAD dañada.	185
6.22. Líneas de corriente en el instante de caudal máximo en la LAD dañada.	185
6.23. Líneas de corriente en el instante de caudal casi nulo en la LAD dañada.	185
6.24. Interacción en la bifurcación. Malla del fluido (en azul) y del sólido (en marrón).	186
6.25. Número de iteraciones en el cálculo de la bifurcación.	187
6.26. Diámetro medio de la sección final de la LAD en la bifurcación.	188

6.27. <i>Diámetro medio de la sección final de la LCX en la bifurcación.</i>	188
6.28. <i>Contornos de presión en la bifurcación para material de Ogden. La deformación ha sido aumentada por 5.</i>	190
6.29. <i>Presión en el modelo 1D acoplado a la LAD en la bifurcación.</i>	191
6.30. <i>Presión en el modelo 1D acoplado a la LCX en la bifurcación.</i>	191
6.31. <i>Distribución de presiones en la LAD y en la LCX en dos secciones transversales.</i>	192
6.32. <i>Tensión tangencial (dyn/cm^2) sobre la pared de la bifurcación.</i>	193
6.33. <i>Tensión tangencial máxima durante un ciclo cardíaco en la bifurcación.</i>	194
6.34. <i>Líneas de corriente en el instante de caudal máximo en la bifurcación.</i>	194
6.35. <i>Líneas de corriente en el instante de caudal casi nulo en la bifurcación.</i>	194
C.1. <i>Cálculo de líneas de corriente. No convergencia (izquierda) y convergencia (derecha).</i>	212
C.2. <i>Interpolación espacial (izquierda) y temporal (derecha).</i>	213
D.1. <i>Obtención de un nodo P por intersección de dos cúbicas.</i>	218
D.2. <i>Mallado de la región en 7×6 elementos.</i>	220
D.3. <i>Directriz cúbica 3D. Puntos y tangentes.</i>	221
D.4. <i>Colocación de la sección transversal sobre la directriz.</i>	223
D.5. <i>Malla de hexaedros de una arteria sana hecha con el presente mallador.</i>	223
D.6. <i>Malla de hexaedros de una bifurcación hecha con el presente mallador.</i>	224
E.1. <i>Paraboloide de referencia.</i>	226
E.2. <i>Superficie Γ_p particionada en triángulos.</i>	228
E.3. <i>Parábola que aproxima el perfil de velocidades.</i>	229
E.4. <i>Ejemplo del perfil de velocidades calculado en una sección no circular.</i>	229

Índice de cuadros

1.1. Características del sistema vascular.	6
2.1. Componentes de la sangre ($5 \cdot 10^6$ partículas/mm ³).	18
2.2. Estimación del gradiente de velocidad asumiendo flujo parabólico.	22
2.3. Nombre y descripción de los elementos implementados.	36
2.4. Coordenadas del centro de los vórtices en la cavidad. $Re = 400$	40
2.5. Coordenadas del centro de los vórtices en la cavidad. $Re = 10000$	42
2.6. Coordenadas del centro del vórtice en el escalón inverso respecto los ejes de la figura 2.15. $Re = 389$	47
2.7. Frecuencias y parámetros de Womersley.	49
2.8. Parámetros de Womersley para el sistema vascular.	51
3.1. Grado de anisotropía y constantes del tensor de elasticidad.	69
3.2. Método Marquardt-Levenberg multipaso para ajustar el modelo de Ogden.	80
3.3. Parámetros del modelo de Ogden para ambas arterias.	82
3.4. Parámetro del modelo neohookeano para ambas arterias.	82
4.1. Clasificación de los métodos de interacción.	107
4.2. Esquema iterativo del método del punto fijo.	113
4.3. Sucesión para resolver el problema de interacción con la técnica del parámetro de relajación.	113
4.4. Algoritmo de interacción entre los modelos 3D fluido-pared arterial.	119
4.5. Tiempo para el que el desplazamiento es máximo en distintos puntos del cilindro.	126
5.1. Tiempo para el que la presión es máxima en diferentes puntos.	152
5.2. Algoritmo de interacción entre modelos 3D y 1D.	160
6.1. Módulo de elasticidad E (en kPa) para ambas arterias.	173
6.2. Número medio de iteraciones en LAD sana.	174
6.3. Número medio de iteraciones en la LAD dañada.	181
6.4. Número medio de iteraciones en la bifurcación.	187

B.1. <i>Algoritmo para el cálculo de las derivadas segundas.</i>	209
C.1. <i>Algoritmo para el cálculo de trayectorias y líneas de corriente.</i>	214

Lista de símbolos

α	Parámetro de Womersley en el capítulo 2. Coeficiente del perfil de velocidades en el capítulo 5
$\hat{\mathbf{d}}$	Desplazamiento de la malla del fluido
$\hat{\mathbf{u}}$	Velocidad de la malla del fluido
$\nabla \cdot$	Operador divergencia espacial
∇	Operador gradiente espacial
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensiones de Cauchy
$\boldsymbol{\sigma}_p$	Parte del tensor de tensiones de Cauchy debido a la incompresibilidad
$\boldsymbol{\sigma}_\mu$	Parte del tensor de tensiones de Cauchy debido a la viscosidad
\mathbf{a}	Aceleración del sólido
\mathbf{C}	Tensor de Cauchy-Green por la derecha
\mathbf{c}	Velocidad convectiva
\mathbf{D}	Tensor gradiente simétrico de la velocidad
\mathbf{d}	Desplazamiento del sólido
\mathbf{d}_Γ	Desplazamiento de la malla del fluido en la interfaz fluido-sólido
\mathbf{E}	Tensor de deformación de Green
\mathbf{F}	Tensor de deformación
\mathbf{f}_Γ	Fuerzas en la interfaz fluido-sólido
\mathbf{P}	Primer tensor de Piola-Kirchhoff
\mathbf{S}	Segundo tensor de Piola-Kirchhoff

\mathbf{u}	Velocidad del fluido
\mathbf{v}	Velocidad del sólido
\mathbf{I}	Tensor identidad
$\dot{\mathbf{u}}$	Aceleración del fluido
$\dot{\gamma}$	Velocidad del gradiente de deformación
γ	Gradiente de deformación
κ	Módulo volumétrico
λ	Factor de penalización
λ_1, λ_2	Autovalores (y velocidad de onda) en el modelo 1D
λ_a	Alargamientos principales ($a = 1, 2, 3$) en el sólido
\mathbb{C}	Tensor de elasticidad material
\mathcal{D}	Operador que asigna a un escalar un campo vectorial
\mathcal{F}	Operador que resuelve las ecuaciones del fluido en formulación ALE
\mathcal{I}	Operador unidad que asigna a un vector el mismo vector
\mathcal{M}	Operador que mueve los nodos interiores de la malla del fluido
\mathcal{R}	Residuo del problema de interacción
\mathcal{S}	Operador que resuelve las ecuaciones del sólido
μ	Viscosidad dinámica del fluido
μ_p, α_p	Parámetros del material de Ogden ($p = 1, 2, 3$ en este trabajo)
ν	Módulo de Poisson
ω	Parámetro de relajación en los modelos de interacción. Frecuencia angular en el capítulo 2
ϕ	Diámetro
ψ	Ley constitutiva que relaciona la presión con el área en el modelo 1D
ρ_f	Densidad del fluido
ρ_s	Densidad del sólido

τ_{supg}	Coficiente de estabilización en el método SUPG
A	Área de la sección transversal
c_1	Parámetro del material neohookeano. Variable relacionada con la velocidad de onda en el modelo 1D
E	Módulo de elasticidad
J	Determinante del tensor de deformación
K_r	Parámetro de fricción en el modelo 1D
P	Presión en el modelo 1D
p	Presión del fluido
Q	Caudal
Re	Número de Reynolds
W	Función de densidad de energía interna
W_1, W_2	Variables características en el modelo 1D
W_{vol}	Parte volumétrica de la función de densidad de energía interna
ϵ	Tensor de deformación infinitesimal

Capítulo 1

Introducción y Objetivos

1.1. Objetivos

El propósito principal de esta tesis doctoral es hacer un modelo tridimensional de interacción del flujo sanguíneo con la pared arterial y aplicarlo a geometrías realistas.

Dicho modelo tiene en cuenta características constitutivas realistas tanto del fluido sangre como del material biológico de la pared arterial, este último justificado con ensayos experimentales.

Además, el modelo es local, representando una parte del sistema arterial, obteniendo información sobre los campos de velocidades y tensiones en tres dimensiones.

Como se comentará en la sección 1.3.2 solamente la arteria aorta y las arterias principales de mayor diámetro (por ejemplo las carótidas y las ilíacas) son elásticas, luego la aplicación del modelo es para este conjunto de arterias.

Siendo este el objetivo, el trabajo se plantea en dos componentes: una componente científica, al tratar de hacer un modelo realista del flujo sanguíneo, y una componente numérica, al utilizar técnicas numéricas para resolver los modelos matemáticos.

1.2. Contenido del trabajo

La tesis se organiza de la siguiente manera:

En este primer capítulo se hace una introducción a la biomecánica y se muestra una de las aplicaciones más importantes de las simulaciones en este campo.

Los capítulos 2 y 3 se dedican a desarrollar modelos constitutivos para biomecánica.

En el capítulo 2 se pretende desarrollar, implementar y validar la formulación para el movimiento del fluido sangre, ya que en las librerías del código de elementos finitos utilizado FEAP no había ningún elemento para el

fluido. Primero se describe la sangre desde el punto de vista de los fluidos y se desarrollan las ecuaciones de su movimiento como fluido newtoniano e incompresible, que son las ecuaciones de Navier-Stokes. A continuación se comentan y resuelven dos problemas numéricos: la oscilación de las presiones en el elemento $Q1/P0$, para la que se propone el método de penalización, y la inestabilidad de las velocidades debido al término convectivo, para lo cual se añade el término *SUPG* en la formulación. Las ecuaciones se resuelven por el Método de los Elementos Finitos (de aquí en adelante MEF). Para la validación, se emplean los problemas clásicos *flujo confinado en una cavidad* y *flujo sobre un escalón inverso*, el flujo de *Womersley* y el problema de un flujo rodeando un cilindro, donde se desarrollan los torbellinos de *Von Karman*.

El capítulo 3 tiene por objetivo validar las ecuaciones de movimiento de la pared arterial y calibrar los parámetros de dos modelos hiperelásticos isótropos mediante curvas de ensayos experimentales que nos han sido proporcionadas. Se describe la pared como sólido y se desarrolla la formulación de los materiales hiperelásticos. Dentro de éstos, se particulariza para los modelos isótropos de Ogden y neohookeano, mientras que los modelos anisótropos se comentan sucintamente. Los modelos utilizados ya están implementados en el código FEAP y la validación se lleva a cabo con dos ejemplos con solución analítica: un cilindro y una esfera sometidos a presión interna, tanto con material de Ogden como con material neohookeano, en los cuales se utilizan los parámetros realistas obtenidos de los ensayos.

En los capítulos 4 y 5 se desarrollan y analizan los modelos de interacción.

En el capítulo 4 se hace un estudio general de los métodos de interacción, así como una clasificación de éstos. A continuación se explica detalladamente la formulación ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*) para un fluido cuyo contorno es móvil. Dicha formulación es implementada en FEAP. Se valida la formulación ALE con un ejemplo donde se impone un movimiento sinusoidal predefinido a un tramo de tubo. Posteriormente se explica más profundamente el método implícito de Block-Gauss-Seidel, que es el que se ha empleado, y se detalla el algoritmo del programa que se ha diseñado para implementarlo, al que se ha llamado *inter3D*. La validación del método de interacción se hace con dos ejemplos: en el primero, una onda de presión se transmite en un tubo flexible; el segundo es el flujo confinado en una cavidad tanto en dos como en tres dimensiones y con la pared inferior flexible.

El capítulo 5 se concentra en las particularidades de la interacción flujo sanguíneo-pared arterial. Se plantea un modelo simplificado unidimensional pero con esquema de solución monolítico para la interacción, se programa como un código separado y se valida con un ejemplo en el que se transmite una semionda de presión. Se estudia el problema de las condiciones de contorno tanto para el fluido como para la pared arterial, y se propone una forma de imponer dichas condiciones en el extremo final de un modelo tridimensional de arteria mediante el acoplamiento con el modelo unidimensional anterior. A este programa de interacción entre los modelos 3D-1D se le lla-

ma *interbio*, el cual se valida con un ejemplo en el que la onda de presión del modelo tridimensional abandona el dominio al llegar al extremo final. La forma de resolver este modelo de acoplamiento 3D-1D es una de las aportaciones originales de la tesis, ya que se consigue la convergencia en muy pocas iteraciones.

En el capítulo 6 se muestran ejemplos de geometrías realistas. Se explica el *software* desarrollado para el *pre-proceso*, con el que se generan automáticamente tramos de arterias con o sin bifurcaciones y para el *post-proceso*, con el que se obtienen animaciones de las trayectorias de las partículas, líneas de corriente y la tensión tangencial sobre la pared como cosas destacadas. Se analiza el flujo en la arteria coronaria izquierda. Las geometrías disponibles son de la bifurcación de ésta en la arteria descendente y la circunfleja así como de la arteria descendente a la altura de su llegada al surco interauricular. Para esta última se analiza un caso en el que la arteria está sana y otro con una placa de ateroma con un grado importante de desarrollo. Para estos modelos se impone un pulso de presión para observar la propagación de éste. Para obtener los valores de la tensión tangencial durante un ciclo cardíaco completo y líneas de corriente se impone un caudal fisiológico a la entrada. La simulación de la transmisión de un pulso de presión con condiciones de contorno absorbentes en geometrías realistas es también una aportación de la tesis.

Finalmente, se expone un pequeño resumen, las conclusiones, aportaciones y se proponen algunas líneas de investigación en este campo.

1.3. Introducción y motivación

1.3.1. La ciencia biomecánica

La presente tesis doctoral está dentro del campo de la biomecánica ¹. El objetivo de esta rama de la ciencia es utilizar el conocimiento de las leyes mecánicas y herramientas matemáticas para elaborar modelos realistas del comportamiento de estructuras biológicas. Por ejemplo: el desarrollo de estructuras óseas o fibras musculares, el estudio del flujo sanguíneo, el flujo pulmonar, o el análisis de los distintos órganos de un ser vivo (corazón, pulmones, etc...).

Una primera característica de la biomecánica es que es una ciencia multidisciplinar (*biología + mecánica*). En nuestro caso la colaboración entre ambas disciplinas consiste en que la biología aporte tanto el estudio de los fenómenos vitales como la vertiente experimental y la mecánica la vertiente teórica y los modelos matemáticos y métodos de solución.

La experimentación biológica es necesaria por dos motivos: aportar valores

¹Según la definición de la Real Academia de la Lengua Española: Ciencia que estudia la aplicación de las leyes de la mecánica a las estructuras y los órganos de los seres vivos.

realistas a los parámetros con significado físico de los modelos teóricos y calibrar el resto de los parámetros de dichos modelos.

Los modelos matemáticos de la mecánica permiten hacer simulaciones y a partir de éstas se pueden hacer predicciones sobre el estado futuro del elemento que estamos estudiando.

Los primeros estudios de biomecánica en el sentido científico se atribuyen a Aristóteles (384-322 a.C.), en su obra *De Motu Animalium* (Sobre el movimiento de los animales). Después de la época de la Grecia clásica, no fue hasta el Renacimiento cuando diversos autores retomaron este campo con estudios experimentales y teorías cualitativas. Hoy en día, gracias a la potencia de cálculo de los computadores, una de las líneas más interesantes de la biomecánica es la elaboración de modelos matemáticos más complejos a la vez que más realistas, resolviendo dichos modelos numéricamente por medios computacionales.

1.3.2. La hemodinámica

La hemodinámica es la rama de la biomecánica que tiene por objetivo estudiar el flujo sanguíneo. Este estudio no se focaliza únicamente en el movimiento de la sangre, como obtener los campos de velocidad y presión, sino también en las fuerzas que genera dicho flujo en los elementos sobre los que interactúa, como los vasos sanguíneos o el corazón.

Descripción del sistema cardiovascular

El sistema cardiovascular está formado por el corazón y los vasos sanguíneos. La función de éste es dar un suministro continuo de nutrientes y oxígeno a todos los órganos y tejidos del cuerpo. El cómo conseguir un flujo continuo se explicará en el apartado siguiente.

Hay dos tipos de circulación, que se corresponden con dos trayectorias distintas a través de dos sistemas de vasos independientes (ver figura 1.1):

- a) La *circulación sistémica*, que es la que parte del corazón (del ventrículo izquierdo) con sangre limpia con oxígeno, y a través de arterias, arteriolas y capilares llega a todos los tejidos para realizar el suministro. Después regresa por las venas hasta el corazón, entrando en éste por la aurícula derecha.
- b) La *circulación pulmonar*, que se encarga de eliminar los gases de desecho, como el dióxido de carbono, y tomar nuevo oxígeno. Parte del ventrículo derecho del corazón, y lleva la sangre empobrecida de oxígeno a los pulmones, donde se realiza el intercambio de gases. Posteriormente la sangre, ya enriquecida con oxígeno, vuelve al corazón entrando por la aurícula izquierda.

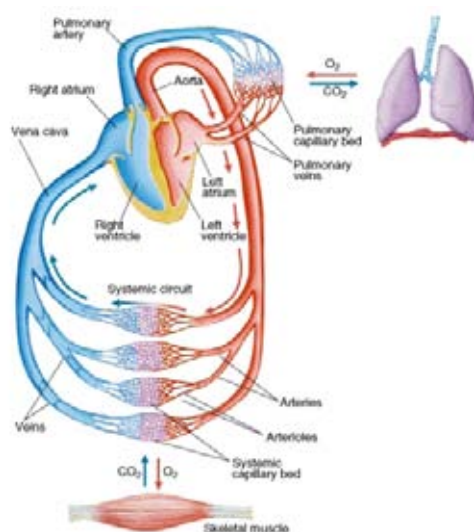


Figura 1.1: *Sistema cardiovascular. Circulación sistémica y pulmonar.*

La trayectoria de la circulación sistémica es mucho más larga y está mucho más ramificada que la pulmonar. Por ello, las presiones necesarias para cada una de ellas son diferentes, siendo mayores en la sistémica. En condiciones normales, la presión sistólica puede ser de unos 120 mm Hg.

Observación. *En este trabajo, cuando se hable de valor normal de algún parámetro fisiológico nos referiremos al valor medio de una población, ya que las particularidades de cada persona hace que ésta tenga unos valores normales propios.*

En el cuadro 1.1 se muestra el número y las características principales de los vasos (MAZUMDAR [1992]), donde destaca el elevado número de capilares. Teniendo en cuenta esto, ya se adelanta que no es viable hacer un modelo integral del sistema completo teniendo en cuenta cada uno de los vasos al detalle.

El caudal en condiciones normales puede ser de unos 5 l/min, aunque en situaciones de máximo esfuerzo puede llegar a los 35 l/min. La velocidad de la sangre es máxima en la arteria aorta (sobre los 48 cm/s, también en condiciones normales), y va disminuyendo en los vasos posteriores a pesar del menor diámetro de éstos. Esto es debido a que el número de ramificaciones hace que el caudal que le corresponde a cada vaso decrezca más rápidamente que el área de dicho vaso.

Observación. *El valor del caudal en reposo de 5000 ml/min se ha calculado suponiendo 72 latidos/min y un volumen bombeado en cada latido de 70 ml. Esto es, $72 \cdot 70 \approx 5000 \text{ ml/min} = 5 \text{ l/min}$.*

Vaso	Número	Diámetro (cm)	Área (cm ²)	Espesor de la pared (cm)	Velocidad* (cm/s)
Aorta	1	2.5	4.5	0.2	48
Arterias	159	0.4	20	0.1	45
Arteriolas	$5.7 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^{-3}$	400	$2 \cdot 10^{-3}$	5
Capilares	$1.6 \cdot 10^{10}$	$8 \cdot 10^{-4}$	4500	$1 \cdot 10^{-4}$	0.1
Vénulas	$1.3 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^{-3}$	4000	$2 \cdot 10^{-4}$	0.2
Venas	200	0.5	40	0.05	10
Vena cava	1	3	18	0.15	38

* *Valores medios*

Cuadro 1.1: *Características del sistema vascular.*

A la hora de describir el sistema vascular es importante resaltar que el número de capilares abiertos no es siempre el mismo. Hay que tener en cuenta que la demanda de sangre de un músculo o un órgano depende del esfuerzo que esté desarrollando y por tanto de la energía que tenga que aportar. Por tanto, cuando un órgano está en situación de trabajo elevado muchos de los capilares que en situación normal estaban cerrados ahora se abren para que circule también sangre por ellos (FARRERAS Y ROZMAN [1995]). Esto hace que, de forma rigurosa, no sea correcto hablar de una única red de vasos sanguíneos por la que circula la sangre, sino de una red de vasos asociada a cada situación de actividad.

Ahora bien, este fenómeno afecta solamente a los capilares, y como los capilares se modelizan normalmente en su comportamiento global conjunto y no se repara en las particularidades de cada uno singularmente, la estrategia para hacer el modelo del sistema cardiovascular no se ve afectada.

Observación. *Este fenómeno de utilizar un número variable de capilares según la necesidad es una forma inteligente del cuerpo humano de poder incrementar el caudal sin tener que elevar demasiado la presión. Al aumentar el número de capilares funcionales aumenta el área total de éstos, por lo que disminuye la resistencia y aumenta el caudal para un mismo gradiente de presión.*

La estructura de la pared de la aorta y arterias con un diámetro mayor es distinta a la de los vasos posteriores, esto es, arterias de pequeño diámetro y arteriolas. En la aorta y arterias principales la capa elástica es mayor y la capa formada por fibras musculares es menor, proporcionando unas características elásticas importantes. En cambio, en las arterias menores y arteriolas, la capa con las fibras musculares es mayor y la capa elástica menor, siendo por lo tanto más rígidas (FARRERAS Y ROZMAN [1995]). De aquí se concluye que los modelos de interacción flujo sanguíneo-pared arterial han de diseñarse exclusivamente para la arteria aorta y unas cuantas decenas de las arterias

principales. Para el resto de los vasos, los modelos de interacción desarrollados en esta tesis no serían realistas.

El que la pared de las arterias más pequeñas y arteriolas no tengan una naturaleza eminentemente elástica no quiere decir que no se deformen. Las fibras musculares responden a estímulos nerviosos, contrayéndose y así disminuyendo la luz del vaso. Posteriormente se relajan de nuevo y la luz recupera su forma original. Este mecanismo es necesario para regular el caudal y presión en el sistema cardiovascular. Lo interesante de este fenómeno es que ahora la pared arterial interacciona con el sistema nervioso en vez de interaccionar con el flujo sanguíneo. En la figura 1.2 se muestra un esquema de cómo interaccionan las distintas partes del sistema cardiovascular entre sí y con el sistema nervioso. En dicha figura se observa que el corazón también interacciona con el sistema nervioso. Esta interacción se produce a través de las fibras musculares en sus paredes, las cuales reciben los impulsos nerviosos.

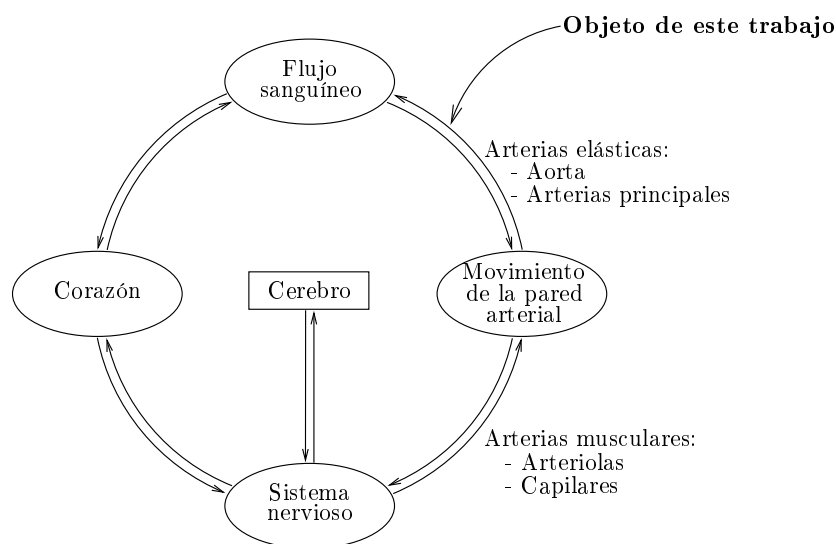


Figura 1.2: *Interacción del sistema cardiovascular y el sistema nervioso.*

Teorías sobre hemodinámica

En el siglo XVIII se establecieron dos corrientes teóricas distintas que intentaban dar una explicación al movimiento de la sangre (MILNOR [1989]).

La primera de ellas, llamada *teoría de Windkessel*², tiene en cuenta la elasticidad de las arterias. Según esta teoría, el corazón impulsa un volumen de sangre durante la sístole, pero parte de ese volumen se queda almacenado en las arterias debido a que la presión produce una extensión radial en éstas.

²Windkessel significa «cámara de compresión» en alemán.

Esto es, las arterias, al ser flexibles se deforman aumentando el diámetro. Posteriormente, durante la diástole el corazón no bombea sangre, luego en principio se cortarían el flujo sanguíneo. Pero lo que sucede es que la sangre antes almacenada en las arterias es ahora impulsada por éstas. Las arterias se contraen, empleando la energía elástica almacenada durante la sístole en impulsar la sangre, favoreciendo así la continuidad del flujo.

Veamos el siguiente ejemplo: supongamos una persona en condiciones normales, con un ritmo cardíaco de 72 latidos/minuto y un caudal de 5000 ml/min. Por simplificar, se supone que durante la sístole el caudal bombeado tiene forma sinusoidal y que durante la diástole no se bombea ningún caudal.

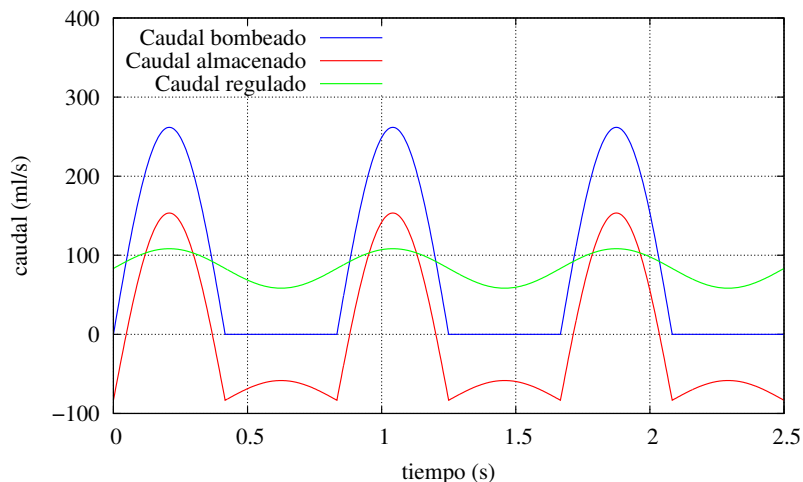


Figura 1.3: *Teoría de Windkessel. Flujos bombeado, almacenado y regulado.*

Si las arterias fueran rígidas, el resultado sería un flujo discontinuo e intermitente, como se muestra en la curva azul de la figura 1.3 (*caudal bombeado*). Ahora bien, si se supone que las arterias son flexibles, como ocurre en realidad, éstas se agrandan durante el incremento de presión de la sístole, almacenando parte del caudal. Después, en la diástole, ese caudal almacenado es liberado, reflejándose en valores negativos de la curva roja (*caudal almacenado*) de la misma figura.

Finalmente, la curva verde (*caudal regulado*) es el resultado de este mecanismo, donde se ve que el flujo es continuo y bastante uniforme.

En la figura 1.4 se muestra el volumen total de cada uno de los flujos anteriores, esto es, dichos flujos integrados en el tiempo. Se puede apreciar cómo el flujo almacenado (curva roja) suaviza la curva original de bombeo del corazón (curva azul) dando como resultado el flujo regulado (curva verde).

En definitiva la elasticidad de las arterias actúa como un regulador del flujo. De hecho, dicha elasticidad es la que origina el objeto de esta tesis, al tener que determinarse el movimiento de las paredes arteriales conjuntamente con el movimiento del fluido sangre, ya que ambos interactúan entre sí.

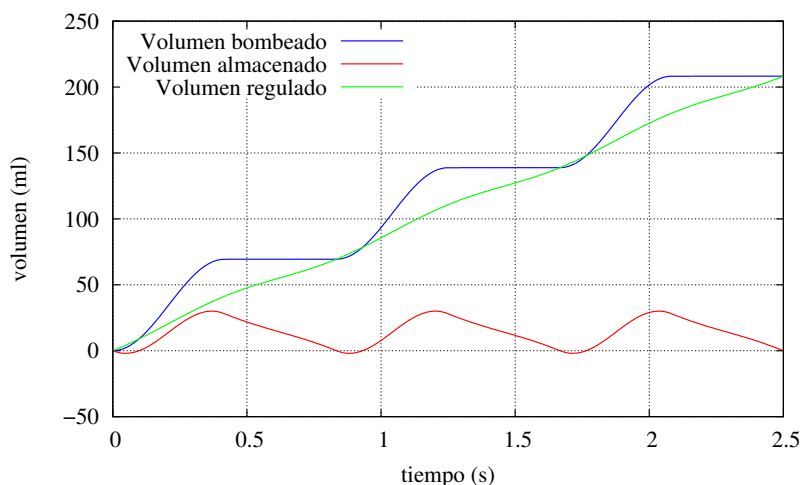


Figura 1.4: *Teoría de Windkessel. Suavizado del flujo sanguíneo.*

La segunda de las teorías hace hincapié en los mecanismos que facilitan el movimiento del flujo longitudinalmente así como la transmisión de la presión, ya que la anterior teoría asume que la velocidad de transmisión es infinita. En cambio, esta segunda línea expone que la velocidad de transmisión de la onda de presión es finita, así como también es finita la velocidad del flujo. Este planteamiento es más realista, siendo el camino a seguir si se quiere hacer un modelo más afinado del flujo sanguíneo, teniendo en cuenta las diferentes propiedades mecánicas de los vasos.

En realidad, la teoría de Windkessel es una simplificación adecuada para obtener un modelo global sencillo del sistema cardiovascular. Pero si se buscan resultados más detallados y locales, es más apropiada la segunda teoría.

Modelos matemáticos en hemodinámica

La irrupción de la aplicación de las matemáticas para representar fenómenos físicos también llegó a la hemodinámica. Ello supuso un cambio de perspectiva, pasando de descripciones y explicaciones cualitativas del sistema cardiovascular (como la teoría de *Windkessel*) a una cuantificación del comportamiento de éste mediante ecuaciones matemáticas. A continuación se da una visión histórica de esta evolución, y posteriormente se detalla el estado actual, más enfocado en modelos computacionales específicos de interacción flujo sanguíneo-pared arterial.

Unas pinceladas históricas

- Siglo IV A.C. *Aristóteles* describió la comunicación del corazón con los vasos sanguíneos, aunque no identificó la circulación de la sangre.

- Siglo III A.C. *Praxágoras* distinguió las funciones de venas y arterias, observando que las arterias impulsaban sangre y las venas no.
- Finales del siglo II. El griego *Galeno* propuso que se propagaban los pulsos de presión originados en el corazón a través de la red arterial.
- Principios del siglo XVII. El inglés *William Harvey*, mediante unos estudios donde midió el caudal de sangre que pasa por las venas, concluyó que el flujo sanguíneo es unidireccional y la sangre recircula continuamente.
- Mediados del siglo XVII. *Malpighi* y *van Leeuwenhoek* descubrieron la existencia de capilares que unían venas con arterias, demostrando definitivamente que el sistema circulatorio es cerrado y el flujo unidireccional.
- Principios del siglo XVIII. *Stephen Hales* realizó las primeras medidas de la presión sanguínea en animales vivos, observando que era pulsátil. Inició el estudio de la hemodinámica, buscando explicación a las fuerzas que hacían que la presión se transmitiera a través de los vasos sanguíneos.
- Siglo XVIII. Se dilucidó que el sistema circulatorio tiene las propiedades de almacenar energía debido a la elasticidad de las paredes arteriales, y de disipar energía debido al comportamiento viscoso de la sangre (resistencia al avance).
- Siglo XIX. El francés *Poiseuille* estableció la Ley que lleva su nombre:

$$Q = K \frac{\Delta p \phi^4}{L}$$

donde Q es el caudal, K la constante que explica la resistencia, Δp la diferencia de presiones, ϕ el diámetro y L la longitud del tubo.

Además, dedujo la ley parabólica de la distribución de velocidades en la sección.

Moens determinó empíricamente la velocidad de transmisión de una onda de presión en un tubo elástico de pared delgada con fluido incompresible y no viscoso:

$$c = \sqrt{\frac{Eh}{\rho_f \phi}}$$

donde c es la velocidad de la onda, E el módulo de Young de la pared del tubo, h el espesor, ρ_f la densidad del fluido y ϕ el diámetro del tubo.

- Principios del siglo XX. Se establecen los modelos de *Windkessel*, donde la aorta se concibe como un tubo elástico con capacidad de almacenar fluido. Así, en el extremo del corazón el fluido es introducido de forma intermitente, mientras que en el otro extremo el fluido sale de una forma aproximadamente constante. El sistema circulatorio es concebido como un embalse elástico donde el corazón bombea sangre y desde el cual una red de conductos no elásticos salen para regar el cuerpo. La resistencia al flujo vendría dada por la Ley de Poiseuille. Se elaboran modelos matemáticos que simulen esta teoría.
- Siglo XX. *Womersley*, a mediados de los años 50, considerando solamente los términos lineales de la ecuación de Navier-Stokes y el tubo rígido, escribió una ecuación que predice el flujo sometido a una función sinusoidal de presión. Posteriormente, se resolvió para pared elástica y con nuevas condiciones para hacerlo más realista.

Estado del arte en modelos de interacción

El planteamiento y solución de modelos matemáticos del flujo sanguíneo donde se tenga en cuenta la interacción con la pared arterial flexible es muy reciente. Esto es debido a que los modelos, por muy simplificados que se quieran hacer, son lo suficientemente complejos para tener que usar métodos numéricos para resolverlos. *Leonhard Euler*, en 1775 ya planteó las ecuaciones con acoplamiento en un modelo unidimensional, aunque reconoció la enorme dificultad de resolverlas. Para representar el sistema cardiovascular en su totalidad hay principalmente dos estrategias: la primera es hacer un estudio global que represente el sistema completo, pero con modelos muy simplificados 0D/1D (cero/unidimensionales) de la mayor parte de éste. La segunda es inclinarse por un estudio local, con un modelo más completo 3D (tridimensional) de las arterias, pero en un tramo muy reducido del sistema.

A continuación se exponen las principales líneas de investigación actuales:

- a) Se están desarrollando modelos unidimensionales donde se resuelve monolíticamente el acoplamiento fluido-pared arterial (FORMAGGIA Y VENEZIANI [2003], PEIRÓ Y SHERWIN [2003a]). En este modelo se asume axilsimetría de todos los vasos y se utiliza para simular las arterias principales con sus ramificaciones, pudiendo llegar a construirse un modelo con todos los vasos sanguíneos elásticos. La parte no elástica del sistema se simula con un modelo 0D mediante una analogía eléctrica, donde el caudal se corresponde a la intensidad, la resistencia de los vasos a la resistencia eléctrica y la presión sanguínea al potencial eléctrico. La ventaja de esta estrategia es la posibilidad de hacer modelos que abarquen gran parte del sistema cardiovascular con un coste computacional bajo. El inconveniente es que los resultados solamente reflejan los valores medios de las variables en cada sección de un vaso; no se obtienen campos tridimensionales ni de tensiones ni de velocidad.

- b) Se han propuesto pocos modelos en régimen transitorio tridimensional. Algunos de estos trabajos de interés son PERKTOLD ET AL. [1991], PERKTOLD Y RAPPITSCH [1995] y STEINMAN ET AL. [1995], quienes investigaron el flujo pulsátil en modelos tridimensionales de bifurcaciones con geometría simplificada y sin tener en cuenta la interacción. La longitud de la arteria ha de ser pequeña, ya que al tener una malla tridimensional, rápidamente se alcanza un elevado número de grados de libertad.
- c) En los métodos de interacción, casi todos los métodos utilizados son particionados, bien de acoplamiento explícito o implícito. Tienen la ventaja de utilizar un *solver* para el fluido y otro *solver* diferente para el sólido (FELIPPA ET AL. [2001], MOK Y WALL [2001]) por lo que pueden usarse códigos ya existentes. La forma de converger en cada paso de tiempo es utilizar un algoritmo aplicando el teorema del punto fijo. En hemodinámica se ha demostrado que no funcionan bien los métodos explícitos, también llamados *staggered* o de acoplamiento débil (TALLEC Y MOURRO [2001]). Esto es debido a que las densidades de la sangre y la pared arterial son muy similares (el mayor componente en ambas es el agua) y el efecto de la *masa añadida* cobra mucha importancia (GERBEAU Y VIDRASCU [2003a]). Por ello se aplican métodos implícitos o de acoplamiento fuerte. Se aplican varias estrategias para esto, como las iteraciones de *Block-Jacobi*, las iteraciones de *Block-Gauss-Seidel*, ambas con un parámetro de relajación fijo (CODINA Y CERVERA [1996], NOBILE [2001]). También se ha mejorado el algoritmo del punto fijo acelerando la convergencia mediante la variación del parámetro de relajación en cada paso de tiempo o incluso variándolo en cada iteración dentro del mismo paso de tiempo. Estas mejoras consisten en la aplicación del *método del gradiente* y del *método de Aitken* (MOK Y WALL [2001], MOK ET AL. [2001]). El gran inconveniente de los métodos particionados con acoplamiento fuerte es que son computacionalmente muy caros, debido al gran número de iteraciones que hay que hacer dentro de cada paso de tiempo ya que el orden de convergencia, aunque con el método de Aitken sea supralineal, no llega a ser cuadrático.

Observación. *Respecto al código del fluido, en el contexto de esta tesis, debido a que los desplazamientos de la pared arterial son relativamente elevados no es posible utilizar un código estándar que resuelva las ecuaciones de Navier-Stokes, sino que se hace preciso implementar un nuevo código con la formulación ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) para resolver el fluido con contornos móviles.*

- d) Actualmente algunos autores están trabajando en métodos monolíticos (como alternativa a los métodos particionados) para resolver el problema

acoplado mediante la obtención de la matriz tangente exacta o aproximada³ del sistema de ecuaciones acoplado, esto es, un método tipo *Newton* o *cuasi-Newton* respectivamente. Este camino ofrece la ventaja de la rapidez de convergencia (que es cuadrática en el caso de un método *Newton*) porque reduce el número de iteraciones entre fluido y estructura en cada paso de tiempo, aparte de poder usar pasos de tiempo más elevados. Para ello hay que calcular la matriz tangente del problema acoplado, matriz que no es trivial de calcular porque no se dispone de la expresión explícita de las ecuaciones acopladas.

En MATTHIES Y STEINDORF [2003] y MATTHIES Y STEINDORF [2002] se propone una forma de calcular una matriz tangente aproximada mediante diferencias finitas. En GERBEAU Y VIDRASCU [2003a] se calcula una matriz tangente aproximada (método *cuasi-Newton*) mediante la linealización de las ecuaciones del fluido. Y recientemente se ha propuesto un *método de Newton* para calcular de forma exacta la matriz tangente (FERNÁNDEZ Y MOUBACHIR [2003]) obteniendo buenos resultados.

Todos estos métodos suponen la elaboración de nuevo código donde implementar dicha matriz tangente.

- e) Otra línea en desarrollo es la aplicación del método de *Lattice-Boltzmann*. Éste es adecuado para tratar geometrías complejas con contornos móviles y su implementación es paralelizable fácilmente. En KRAFCZYK ET AL. [1998] y KRAFCZYK ET AL. [2001] se aplica el método en hemodinámica resolviendo el problema de interacción en dos y tres dimensiones respectivamente.
- f) La mayoría de los modelos hasta ahora desarrollados son en geometrías regulares y con modelos constitutivos elementales para el comportamiento de la pared. El desarrollo de técnicas *IVUS* y de angiografías, así como el tratamiento informático de datos para obtener imágenes permite obtener geometrías reales como las utilizadas en esta tesis (SERÓN ET AL. [2001a]). Asimismo, para el comportamiento de la pared arterial se están utilizando modelos anisótropos, modelos viscoelásticos y modelos de daño con localización fuerte (HOLZAPFEL [2000]).

Los métodos de interacción a los que nos referimos aquí son de aplicación general para grandes deformaciones, como es el caso de las arterias elásticas. En el caso que los movimientos fueran pequeños existen métodos simplificados como la técnica de *transpiración* (FERNÁNDEZ [2001]) o la aproximación acústica (DONEA Y HUERTA [2003]).

³En este trabajo se hablará indistintamente de matriz tangente y operador tangente.

1.3.3. Aplicaciones clínicas

Los avances en mejorar los modelos de comportamiento del flujo sanguíneo y las simulaciones computacionales con mayor capacidad tienen su aplicación más inmediata en los entornos clínicos en tres terrenos principales:

- a) *Prevención* de enfermedades vasculares. En este caso, si una persona es sometida a revisión y se simula su flujo sanguíneo, podrán detectarse anomalías en éste y así poder actuar para corregirlas a tiempo. Por ejemplo, se puede calcular la tensión tangencial mediante simulación numérica, sobre todo en las zonas de gran curvatura o bifurcaciones de las arterias. Las partes que como resultado de la simulación tengan un bajo valor de la tensión tangencial sobre la pared o que tengan variaciones cíclicas importantes pueden ser propensas a la formación y desarrollo de la placa aterosclerótica (SHAABAN Y DUERINCKX [2000]).
- b) *Diagnóstico* de enfermedades vasculares. Mediante la simulación del flujo sanguíneo de un paciente se puede obtener información sobre éste y así poder descubrir las patologías relacionadas con sus variables mecánicas.
- c) *Intervención quirúrgica* en el sistema cardiovascular, como la introducción de catéteres para realizar angioplastias ⁴, la implantación de stents, de un *by-pass* o la extirpación de un aneurisma aórtico. Se han hecho estudios de cuál es el ángulo óptimo con el que un *by-pass* tiene que injertarse en la arteria. También es relevante el estudio mediante simulación numérica de la fístula B-T ⁵ (SZUMBARSKI Y MIZERSKI [2005]). En general, el hecho de conocer el comportamiento del flujo sanguíneo es de ayuda para la el diseño y la introducción de dispositivos en los vasos, ya que se conocería *a priori* a qué acciones mecánicas van a estar sometidos dichos dispositivos.

Aterosclerosis

Una patología de gran interés es la aterosclerosis . La aterosclerosis es un caso de arteriosclerosis ⁶ que consiste en la obstrucción parcial de la sección de un vaso sanguíneo debido a la acumulación en la íntima de sustancias generalmente de origen lipídico. A este depósito de lípidos se le llama placa de ateroma y dificulta el flujo sanguíneo a través de la sección arterial que ha desarrollado dicha placa. Es una enfermedad que tiende a localizarse geométricamente en los bordes exteriores de las bifurcaciones. La variable mecánica

⁴Desobstrucción quirúrgica de un vaso sanguíneo mediante un catéter.

⁵Es la implantación de un conducto que une la circulación sistémica con la pulmonar. Esta operación es parte de la intervención en recién nacidos cuando el ventrículo derecho está poco desarrollado y no puede encargarse de la circulación pulmonar. B-T hace referencia a los nombres Blalock-Taussig.

⁶Arteriosclerosis significa literalmente endurecimiento de las arterias.

correlacionada directamente con la propensión a acumularse sustancias es la *tensión tangencial* sobre la pared arterial. La tensión tangencial ⁷ es una fuerza que actúa sobre la superficie interior del vaso sanguíneo. Para mayor información sobre esta patología ver COTRAN ET AL. [1995].

Originalmente, hacia los años 70 aparecieron dos hipótesis contradictorias sobre la relación de la tensión tangencial y la aterosclerosis (MALEK ET AL. [1999]): la primera hipótesis defendía que un alto valor de la tensión tangencial provocaba daño al endotelio y la reacción a este daño daba lugar al crecimiento celular y formación de la placa. La segunda hipótesis, al contrario, proponía que era el bajo valor de la tensión tangencial el que hacía que los vasos disminuyeran su diámetro (como un mecanismo de respuesta) para subir el valor de la tensión. Esto se puede explicar con la Ley de Poiseuille:

$$\tau = \frac{4\mu Q}{\pi R^3} \quad (1.1)$$

donde τ es la tensión tangencial, μ la viscosidad, Q el caudal y R el radio del vaso. En esta segunda hipótesis y de acuerdo con la ley (1.1), si se disminuye el radio de la sección (por crecimiento de la placa por ejemplo), el valor de la tensión tangencial τ crece y deja de tener ese valor bajo.

En la figura 1.5, obtenida de COTRAN ET AL. [1995], se muestra el esquema de formación típico de una placa de ateroma, un proceso que comienza a edades muy tempranas y que se desarrolla durante el resto de la vida, aunque no de forma lineal, sino con épocas de gran velocidad de crecimiento intercaladas con otras donde se estabiliza. En la figura 1.6 se puede ver la cronología de la evolución de la placa.

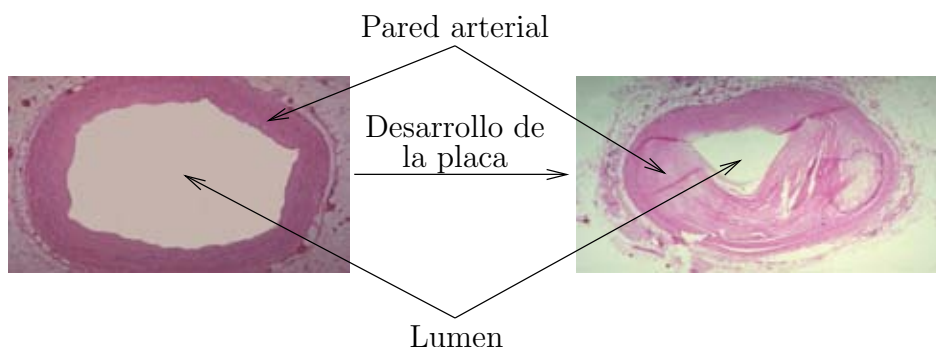


Figura 1.5: *Formación y crecimiento de la aterosclerosis.*

Con los experimentos hechos en las dos últimas décadas se ha venido a confirmar la segunda hipótesis, luego es el bajo valor de la tensión tangencial la que induce el mecanismo que provoca el estrechamiento de la sección. Este mecanismo está relacionado con la activación de reacciones químicas en las

⁷En ambientes clínicos esta tensión es llamada usualmente tensión de cizalladura.

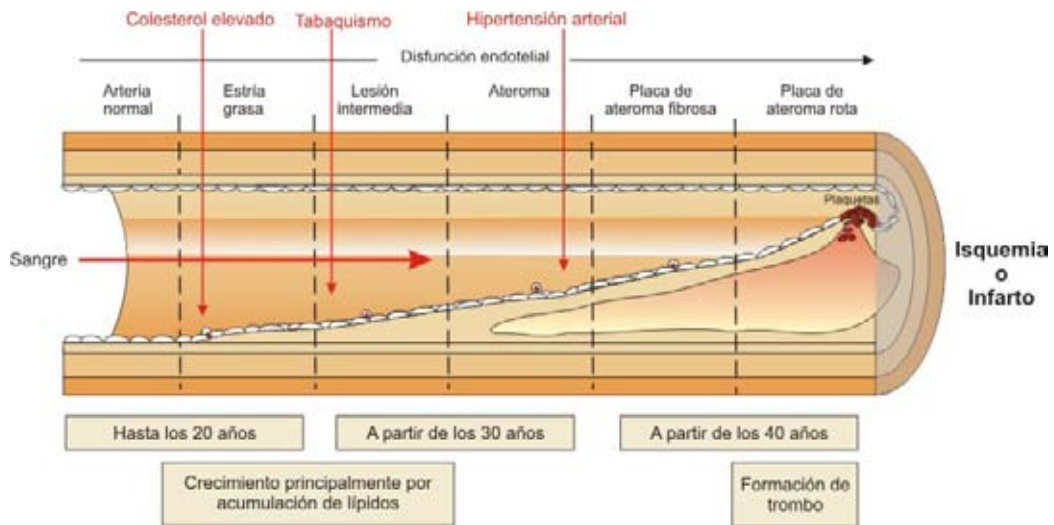


Figura 1.6: *Cronología de la formación de la placa de ateroma.*

células del endotelio, bien mediante el incremento de producción de sustancias que provocan la formación y crecimiento de la placa o bien mediante la disminución en la producción de sustancias que la evitan (MALEK ET AL. [1999]). No obstante, es un tema aún en investigación y se desconocen los mecanismos exactos.

Lo que sí pueden proporcionar las simulaciones computacionales es el valor de la tensión tangencial, y las zonas donde ésta es anormalmente baja. En este trabajo se mostrará en el capítulo 6 que precisamente las bifurcaciones son susceptibles de un valor neto bajo de la tensión tangencial, esto es, la tensión tangencial media en un ciclo cardíaco. De aquí la utilidad de estas simulaciones para predecir qué zonas son potencialmente peligrosas para la formación de la placa aterosclerótica y así poder intervenir a tiempo.

Otro resultado de interés clínico es la presión. Normalmente la presión clínica se asocia a los gradientes de presión en el sistema completo. Esto es, presión sistólica, diastólica, presión con que llega la sangre de nuevo al corazón, etc... El cálculo y explicación de esta presión global no es objeto de este trabajo. A lo que aquí se refiere es a las variaciones locales de presión. El interés de los valores locales de la presión tiene su interés en el siguiente hecho: la tensión circunferencial en la placa aterosclerótica está relacionada directamente con la presión. Si el valor de esta tensión es superior a cierto valor crítico, la placa aterosclerótica se vuelve inestable y se puede producir su ruptura (OHAYON ET AL. [2001]). El valor crítico es aproximadamente de 300 kPa (CHENG ET AL. [1993]).

Capítulo 2

Modelos matemáticos del flujo sanguíneo

En este capítulo se discuten las hipótesis sobre el comportamiento del flujo en las grandes arterias y se desarrolla la formulación de fluido newtoniano e incompresible en elementos finitos, la cual se implementa en el programa FEAP. Se utiliza el método de penalización y el método SUPG para resolver los problemas numéricos de la oscilación del campo de presiones y la inestabilidad de la velocidad respectivamente. Finalmente se muestran ejemplos numéricos tomados de la literatura para validar el elemento.

2.1. Descripción de las propiedades de la sangre

La sangre es un tejido líquido formado por células o elementos como glóbulos rojos, glóbulos blancos y plaquetas (45 % del volumen total, y una parte líquida llamada plasma de color ámbar constituida principalmente por agua (55 % del volumen total). Su temperatura normal es de 36,5 °C y es 5 veces más viscosa que el agua (BEST Y TAYLOR [1993]).

De esta composición se deducen dos cosas (FUNG [1997]):

1. Las partículas sólidas suspendidas en la sangre, al rozar entre ellas, van a ofrecer cierta resistencia al avance del flujo, disipándose energía. Este fenómeno es el origen de que la sangre tenga un comportamiento viscoso mayor que el agua.
2. La gran cantidad de agua, al ser ésta incompresible, da propiedades de incompresibilidad a la sangre.

Por tanto cualquier modelo constitutivo que se proponga a nivel macroscópico ha de reflejar como mínimo estas dos características: viscosidad e incompresibilidad.

Elementos celulares	Proporciones relativas
Glóbulos rojos	600
Glóbulos blancos	1
Plaquetas	30
Plasma	Proporción en peso
Agua	0.91
Proteínas	0.07
Solutos inorgánicos	0.01
Otras sustancias orgánicas	0.01

Cuadro 2.1: *Componentes de la sangre* ($5 \cdot 10^6$ partículas/mm³).

Los glóbulos rojos son capaces de deformarse y almacenar energía elástica, aunque cuando aquellos están desagregados, las fuerzas elásticas desarrolladas son muy inferiores a las viscosas.

Cuando el gradiente de la velocidad de deformación es bajo existe un fenómeno que afecta a los glóbulos rojos, que es la formación de agregados conocidos como *rouleaux*. Consiste en la unión de varios glóbulos rojos para formar un único cuerpo, y este agregado hace que aumente la viscosidad. Además, las fuerzas que se desarrollan para descomponer estos agregados también producen una deformación elástica importante en los glóbulos rojos así como un cambio de orientación, dando lugar a un almacenamiento de energía elástica en la microestructura de la sangre (PIETAL [2005]). En este caso sí que sería más apropiado proponer un modelo viscoelástico.

Observación. *También se ha observado que cuanto mayor es la cantidad de glóbulos rojos mayor es la viscosidad (MILNOR [1989]). La medida utilizada para medir la cantidad de glóbulos rojos se llama hematocrito, que representa la proporción en volumen de dichos glóbulos en la sangre.*

De momento, para mayor claridad y comprensión intuitiva suponemos flujo unidimensional en el que las variables son escalares, en vez de vectoriales y tensoriales como son realmente. El gradiente de deformación se denotará con γ y su derivada temporal, que es la velocidad del gradiente de deformación o el gradiente de velocidad con $\dot{\gamma}$.

Cuando el valor de $\dot{\gamma}$ es suficientemente alto (se acepta que para $\dot{\gamma} > 100s^{-1}$), los glóbulos rojos se alinean con el flujo y no hay formación de *rouleaux*, y en este caso la estructura formada da lugar a un fluido cuya viscosidad *ceteris paribus* no depende de $\dot{\gamma}$, siendo constante y por tanto se puede asumir comportamiento de fluido newtoniano (ver figura 2.1). Esto ocurre en las arterias principales, que son precisamente las arterias elásticas donde se produce el fenómeno de interacción. Esta consideración es importante cuando en el apartado siguiente se justifique el modelo constitutivo adoptado.

Observación. *La viscosidad del plasma aislado sí que es constante (sobre los 0,012 Poise) y no depende de $\dot{\gamma}$. Lo que principalmente hace variar la viscosidad de la sangre es el cómo se estructuren los glóbulos rojos, y eso depende del valor de $\dot{\gamma}$.*

En la literatura se pueden encontrar varios modelos no-newtonianos que reflejan esta propiedad de la sangre. Esto se puede hacer imponiendo al modelo las siguientes condiciones asintóticas:

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \mu(\dot{\gamma}) = \mu_0 \quad (2.1)$$

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} \mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty \quad (2.2)$$

acotando así el valor de la viscosidad μ para valores extremos del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ y tomando un valor no nulo en ellos. En esta línea, uno de los más utilizados es el modelo de *Carreau-Yasuda* (SEQUEIRA [2003]) que tiene la siguiente expresión:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)(1 + (\lambda\dot{\gamma})^a)^{\frac{n-1}{a}} \quad (2.3)$$

siendo λ , n y a constantes del material.

Utilizando datos experimentales sobre la viscosidad de la sangre ¹ se puede calibrar el modelo de Carreau-Yasuda, como se muestra en la figura 2.1. Los coeficientes de ajuste, obtenidos mediante el método de los mínimos cuadrados, son: $\lambda = 8.2$ s, $a = 0.64$ y $n = 0.213$, observando que la curva se adapta muy bien a los datos experimentales.

Existen otros modelos no-newtonianos como el modelo de *Cross*, el de *Carreau* o el de *Oldroyd-B generalizado* (ver SEQUEIRA [2003]) que también se ajustan a los valores asintóticos μ_0 y μ_∞ .

2.2. Ecuaciones del modelo

La siguiente etapa es pasar de los fenómenos al modelo, esto es, de lo experimental a la propuesta teórica. Dicho modelo se refiere a la ecuación constitutiva del fluido, concretamente en la expresión del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ que insertamos en la ecuación de la dinámica.

Observación. *Los símbolos en **negrita** hacen referencia a magnitudes tensoriales de primer (vectores) y segundo orden, como por ejemplo el vector velocidad \mathbf{u} y el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. Los escalares se escriben sin ningún formato especial, como la viscosidad μ .*

¹Experimentos realizados por el profesor Shu Chien. Los resultados están tabulados en la página web <http://www.mems.rice.edu/~dhruv/bloodrheo/chien.html>

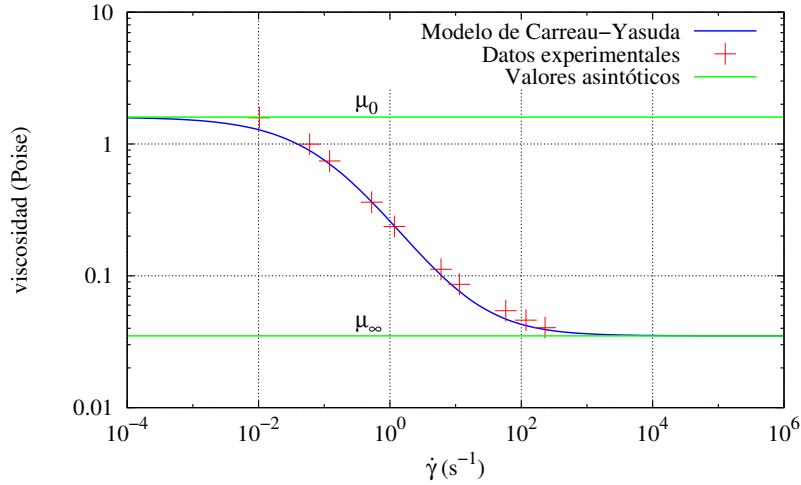


Figura 2.1: Datos experimentales y ajuste del modelo de Carreau-Yasuda.

2.2.1. Hipótesis realizadas

La expresión de las tensiones de un fluido se escribe:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_\mu \quad (2.4)$$

donde p es un campo escalar indeterminado, \mathbf{I} es el tensor identidad y $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ es la parte de las tensiones debida a las propiedades viscosas.

Para determinar $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ la primera discusión (en el contexto de la hemodinámica) al caracterizar el comportamiento del fluido sangre es si se consideran o no propiedades de memoria, esto es, comportamiento viscoelástico. La memoria de un fluido determina el número necesario de tensores para aproximar las tensiones. Además, la memoria nace de las propiedades elásticas de las partículas o de las moléculas cuando son deformadas. Atendiendo a este criterio se pueden distinguir entre (PERKTOLD [2002]):

- a) Fluidos de *primer orden*. Son fluidos que tienen pequeñas moléculas muy rígidas y no tienen memoria (comportamiento viscoso pero no viscoelástico). Las tensiones locales son determinadas únicamente por las deformaciones locales, excluyendo deformaciones que incorporen efectos de historia y derivadas temporales de deformaciones que contradigan el principio de localización de la velocidad de deformación (GONZÁLEZ Y STUART [1995]). En éstos el tensor $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ se relaciona únicamente con el tensor gradiente de velocidad:

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu = \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}) = 2\mu\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}) = 2\mu\mathbf{D} \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})$ es el tensor gradiente simétrico de la velocidad. Si se admite fluido de primer orden, la segunda discusión es ahora decidir

si se puede hacer la hipótesis de fluido newtoniano o no, dependiendo de si la viscosidad μ es constante o depende del gradiente de velocidad. Más exactamente esta clasificación es:

- a.1) Fluidos *newtonianos*: Son aquellos donde existe una relación lineal entre $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ y \mathbf{D} , relacionados por un tensor de cuarto orden. Físicamente significa que la viscosidad μ no se ve afectada por el valor del gradiente de velocidad, aunque puede depender de la temperatura y la presión.
- a.2) Fluidos *no-newtonianos*: Son todos los demás, esto es, en los que la relación entre $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ y \mathbf{D} no es lineal. En este caso, la viscosidad depende de la velocidad de deformación: $\mu = \mu(\dot{\gamma})$. El significado $\dot{\gamma}$ es intuitivo de ver en el caso de flujo unidimensional. Para un caso general, éste se define: $\dot{\gamma} = \sqrt{2\mathbf{D} : \mathbf{D}}$, relacionándose con el segundo invariante de \mathbf{D} .
- b) Fluidos de *segundo orden*. Son fluidos con memoria en los que se consideran las fuerzas elásticas internas. Para conseguir fluidos con memoria (fluidos viscoelásticos) hay que incluir términos con mayor orden de derivación. Se pueden expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu = \alpha_1 \mathbf{D} + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \mathbf{D}^2 \quad (2.6)$$

donde los parámetros α_i del fluido son constantes o funciones del tensor \mathbf{D} y \mathbf{A}_2 es el segundo tensor de deformación de *Rivlin-Ericksen* (DASHNER [2000]).

Observación. *La clasificación hecha no abarca todo el universo de fluidos. Básicamente consiste en distinguir entre fluidos viscosos y fluidos viscoelásticos, que es lo pertinente en el comportamiento de la sangre.*

Como se vio en el apartado 2.1, cuando la velocidad de deformación $\dot{\gamma}$ es baja la posible formación de *rouleaux* hace que varíe la viscosidad y además hace que se almacene energía elástica.

Como primera hipótesis se despreciarán los efectos elásticos, esto es, se considerará la sangre como fluido de primer orden. La justificación de esta hipótesis está en que los *rouleaux* sólo se forman en circunstancias especiales (FARRERAS Y ROZMAN [1995]). No obstante, hay personas en las que son más frecuentes y en estas personas no sería tan justificable despreciar los efectos elásticos.

Por otra parte, la variación de la viscosidad sugiere que no podemos asumir *a priori* comportamiento newtoniano. Para decidir qué modelo podemos adoptar, en el cuadro 2.2 se calculan los valores medios de $\dot{\gamma}$ en los diferentes vasos. También se da el número de Reynolds medio como información adicional.

Vaso	$\dot{\gamma}$	Reynolds
Aorta	155	3400
Arterias	900	500
Arteriolas	8000	0.7
Capilares	1000	0.002
Vénulas	800	0.01
Venas	160	140
Vena cava	100	3300

Cuadro 2.2: *Estimación del gradiente de velocidad asumiendo flujo parabólico.*

En dicho cuadro se ha considerado la hipótesis de distribución parabólica de velocidad, con lo que se tiene:

$$\dot{\gamma} = \frac{8\bar{u}}{\phi} \quad (2.7)$$

donde \bar{u} es la velocidad media y ϕ es el diámetro del vaso, cuyos valores están en el cuadro 1.1.

Entrando con los valores de $\dot{\gamma}$ del cuadro 2.2 en la curva de la figura 2.1 se obtiene que la viscosidad es constante (e igual al valor asintótico μ_∞), por lo que el fluido se puede considerar newtoniano.

Pero hay ciertos detalles que hacen que esta hipótesis tenga salvedades: el valor de $\dot{\gamma}$ es un valor medio, pero durante un ciclo cardíaco hay momentos donde este valor es muchísimo menor, llegando incluso a anularse en las arterias coronarias. Además, hay zonas, como en bifurcaciones de arterias donde este valor es sistemáticamente menor que el medio.

Observación. *En los vasos pequeños, donde se produce la llamada microcirculación, aunque el valor de $\dot{\gamma}$ es elevado, existen otros fenómenos, como el efecto Fahraeus-Lindqvist, que provoca la emigración de los eritrocitos al centro del vaso. Esto hace que la tendencia a formar rouleaux aumente, por ser mayor la fuerza de atracción entre las células que la de desmembración provocada por la tensión tangencial en la pared, ya que las células están más alejadas de ésta. Estos cambios estructurales son el origen de las no linealidades que provocan el comportamiento no newtoniano. Además, en los capilares, donde el diámetro de éstos es menor que el del eritrocito, incluso hay que replantearse la hipótesis de medio continuo.*

Otra característica de los fluidos (y de un medio continuo en general) es su capacidad de alterar su volumen ante un estado tensional, esto es, su compresibilidad. La magnitud física que refleja esta propiedad es la variación de la densidad con la presión. Si ésta no varía, el material se considera incompresible. El agua es el principal componente de la sangre, sea directamente en el plasma o indirectamente como parte de los glóbulos rojos, blancos, plaquetas,

etc... El módulo de compresión o volumétrico del agua es:

$$E_v = \frac{\Delta P}{\Delta \rho_f / \rho_f} = 2.15 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

donde P es la presión y ρ_f es la densidad.

Observación. *Para evitar la confusión se denotará con ρ_f la densidad del fluido y con ρ_s la densidad del sólido en todo el trabajo.*

Por tanto el agua se puede considerar prácticamente incompresible, trasladando directamente esta propiedad al comportamiento macroscópico de la sangre. Esto se traduce en que la ecuación de conservación de la masa quede:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.8)$$

En la circulación sanguínea se producen fenómenos termodinámicos donde intervienen variables como la temperatura, entropía y energía. No obstante, al asumir incompresibilidad dichas variables quedan desacopladas automáticamente². Adicionalmente, en la sangre se producen intercambios de gases y de sustancias con las células de los tejidos, añadiendo más complejidad. No obstante, en este trabajo no se van a considerar estos fenómenos.

Finalmente, la sangre está sometida en todo momento a la fuerza de la gravedad, siendo sus efectos sobre la circulación dependientes de la posición del cuerpo. Por ejemplo, si se está de pie la gravedad añade un gradiente de presión al ya provocado por el impulso cardíaco, pero si se está tumbado, los efectos de la gravedad son muy pequeños. Por lo tanto y en aras de simplificar, no se considerará dicha fuerza.

2.2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes. Formulación fuerte del problema

Partiendo de la ecuación de balance de la cantidad de movimiento:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho_f \dot{\mathbf{u}} \quad (2.9)$$

indicando con $\dot{\mathbf{u}}$ la derivada material de la velocidad, que en coordenadas eulerianas queda:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \quad (2.10)$$

Por otra parte, la hipótesis de fluido newtoniano da lugar a la siguiente ley constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.11)$$

²En general esto sucede para fluidos *barotrópicos*. En un fluido barotrópico la ecuación de estado es independiente de la temperatura (MALVERN [1969]). Un fluido incompresible es un caso particular de fluido barotrópico.

Introduciendo la expresión de $\boldsymbol{\sigma}$ dada por (2.11) en la ecuación de la dinámica (2.10) y operando queda:

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p - 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

que junto a la ecuación de incompresibilidad (2.8) dan lugar a las ecuaciones de Navier-Stokes.

Observación. En (2.12) se ha tenido en cuenta que como el tensor $p\mathbf{I}$ es esférico, resulta: $\nabla \cdot (p\mathbf{I}) = \nabla p$

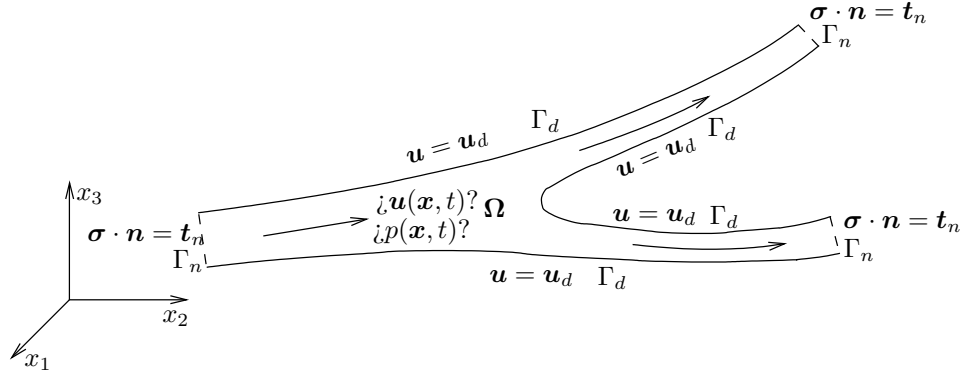


Figura 2.2: Representación esquemática de la formulación fuerte del problema de contorno en fluidos.

En cuanto las condiciones de contorno, pueden ser condiciones en velocidades impuestas, en tensiones impuestas, o bien una combinación de ambas.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{en } \Gamma_d \quad (\text{Condición de Dirichlet o esencial}) \quad (2.13a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_n \quad \text{en } \Gamma_n \quad (\text{Condición de Neumann o natural}) \quad (2.13b)$$

donde $\Gamma_d \cup \Gamma_n = \Gamma$, $\Gamma_d \cap \Gamma_n = \emptyset$ y \mathbf{n} es el vector normal a la superficie Γ_n .

La formulación fuerte del problema se plantea en los siguientes términos: Sea el dominio fluido $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Dados $\mathbf{u}_d(t)$, $\mathbf{t}_n(t)$ y $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, encontrar un campo vectorial $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ y un campo escalar $p(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p - 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D} &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_d(t) && \text{en } \Gamma_d \times (0, T) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}_n(t) && \text{en } \Gamma_n \times (0, T) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) && \text{en } \Omega, t = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Existen formulaciones alternativas para las ecuaciones de Navier-Stokes, dependiendo de cómo expresemos matemáticamente el término convectivo y el viscoso. Aquí se ha elegido la forma *advectiva* para el término convectivo, ya que es la forma más simple para hacer cálculos. Y para el término viscoso se ha elegido la forma *divergencia de la tensión*, que es la más general y la más común en el método de los elementos finitos. Para ver las demás alternativas así como sus ventajas e inconvenientes consultar por ejemplo GRESHO [2001].

Observación. *En el planteamiento del problema (2.14) se han puesto tanto condiciones de Dirichlet como de Neumann. Si como caso particular $\Gamma_d = \Gamma$ y $\Gamma_n = \emptyset$, entonces, al ser el fluido incompresible, habría que poner como condición adicional de contorno (HUGHES [2000]):*

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (2.15)$$

que refleja sencillamente que el flujo que entra ha de ser igual al que sale para que la masa de líquido en el dominio sea constante. Además, en este caso, no hay ninguna condición de contorno para la presión, quedando dicho campo determinado salvo una constante arbitraria.

2.2.3. Ecuaciones de Navier-Stokes. Formulación débil del problema

Los cálculos para pasar de la formulación fuerte expuesta en (2.14) a la formulación débil se desarrollan en el apéndice A. El problema queda así planteado: *Sea el dominio $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Encontrar un campo vectorial $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d$ en Γ_d y un campo escalar $p(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ y $\forall q \in \mathcal{Q}$ se cumpla:*

$$\int_{\Omega} (-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q \, d\Omega = \int_{\Gamma_n} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_n \quad (2.16)$$

donde el significado de los espacios funcionales \mathcal{V} y \mathcal{Q} se han definido en el apéndice A.

2.3. Solución numérica de las ecuaciones mediante el MEF

Las ecuaciones de Navier-Stokes son no lineales, en derivadas parciales y no se han resuelto analíticamente salvo en casos muy particulares. De hecho

hay cuestiones abiertas, como la demostración de la condición de consistencia, esto es, si una pequeña variación de las condiciones iniciales origina una pequeña variación en el resultado ³.

La solución de estas ecuaciones mediante métodos numéricos se llama *Dinámica de Fluidos Computacional*.

Tradicionalmente el método empleado era el de *diferencias finitas*, pero uno de los principales inconvenientes es que para geometrías curvas se complica la expresión de las derivadas direccionales. Otros métodos que se aplican actualmente son el *método de volúmenes finitos* y el *método de partículas*, siendo este último un método donde no se requiere una malla. Para una valoración de estos métodos en cuanto ventajas e inconvenientes respecto al MEF ver CALVO [2003].

2.3.1. Ecuaciones de elementos finitos

La característica principal y diferenciadora del MEF frente a otros métodos numéricos son las funciones que se eligen para aproximar la solución exacta del modelo matemático (ODEN Y CAREY [1984]). Es decir, dentro de los espacios funcionales \mathcal{U} , \mathcal{P} , \mathcal{V} , y \mathcal{Q} definidos en el apéndice A nos vamos a restringir a subespacios de dimensión finita que se denominan *espacios de las funciones de forma*.

a) Aproximación del campo de velocidades:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{A=1}^{n_u} N_u^A(\mathbf{x}) \mathbf{u}_A \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}^h \subset \mathcal{U} \quad (2.17b)$$

siendo $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ la función que aproxima el campo incógnita de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, \mathcal{U}^h el espacio funcional restringido de dimensión finita, n_u el número total de nodos de velocidad, N_u las funciones de forma para las velocidades y \mathbf{u}_A el vector velocidad incógnita en cada nodo.

b) Aproximación del campo de presión:

$$p(\mathbf{x}) \approx p^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} N_p^I(\mathbf{x}) p_I \quad (2.18a)$$

$$p^h(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^h \subset \mathcal{P} \quad (2.18b)$$

siendo $p^h(\mathbf{x})$ la función que aproxima el campo incógnita de presión $p(x)$, \mathcal{P}^h el espacio funcional restringido de dimensión finita, n_p el número total

³Desde Mayo del año 2000 el Instituto Clay de Matemáticas ofrece un premio de 1,000,000 \$ al que resuelva esta cuestión.

de nodos de presión, N_p las funciones de forma para la presión y p_I el escalar presión incógnita en cada nodo.

c) Aproximación de las funciones de peso de las velocidades:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{v}^h(\mathbf{x}) = \sum_{B=1}^{n_u} N_u^B(\mathbf{x}) \delta \mathbf{v}_B \quad (2.19a)$$

$$\mathbf{v}^h(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V} \quad (2.19b)$$

donde $\delta \mathbf{v}_B$ son las velocidades virtuales arbitrarias en cada nodo y \mathcal{V}^h el espacio funcional restringido, igualmente de dimensión finita.

d) Aproximación de las funciones de peso de la presión:

$$q(\mathbf{x}) \approx q^h(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^{n_p} N_p^J(\mathbf{x}) \delta q_J \quad (2.20a)$$

$$q^h(\mathbf{x}) \in \mathcal{Q}^h \subset \mathcal{Q} \quad (2.20b)$$

donde δq_J son las presiones virtuales arbitrarias en cada nodo y \mathcal{Q}^h el espacio funcional restringido, también de dimensión finita.

En este caso se han tomado las mismas funciones de forma para aproximar la solución y para las funciones de peso. Esta elección es la que da origen al método de *Bubnov-Galerkin* (ZIENKIEWICZ Y TAYLOR [2000b]). Por otra parte, este método da lugar a campos de velocidad inestables para ciertas condiciones, por lo que es necesario aplicar técnicas de estabilización que se discutirán más adelante.

Las funciones de aproximación (con el superíndice h) han de sustituirse en la ecuación (2.16) y obtendríamos las ecuaciones algebraicas que permiten obtener la solución aproximada. Como la expresión (2.16) ha de cumplirse para cualquier velocidad y presión virtual, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones no lineal.

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_A + \mathbf{N}(\mathbf{u}_A) \mathbf{u}_A + \mathbf{K} \mathbf{u}_A + \mathbf{Q}^T \mathbf{p}_I = \mathbf{F} \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{u}_A = \mathbf{0} \quad (2.21b)$$

donde las matrices se han ensamblado con la contribución de cada elemento (ZIENKIEWICZ Y TAYLOR [2000b]). El vector \mathbf{u}_A contiene la velocidad incógnita en cada nodo de velocidad y el vector \mathbf{p}_I la presión en cada nodo de presión.

Observación. *Hay que recordar que los nodos de velocidad no tienen por qué coincidir con los nodos de presión. De hecho, en el elemento utilizado en este trabajo no coinciden.*

Las integrales que vienen a continuación se extienden sobre el dominio del elemento Ω_e , así que los términos integrales representan la colaboración del elemento e a las matrices globales.

Dichas matrices globales se obtienen a partir de las matrices elementales aplicando el operador de ensamblaje estándar $\mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}}$ (ZIENKIEWICZ Y TAYLOR [2000b]). En lo que sigue n_{dim} es el número de dimensiones del problema (2 ó 3) y \mathbf{I} la matriz identidad.

La matriz de masas \mathbf{M} es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{m}^e \quad \text{donde} \quad \mathbf{m}^e = \begin{bmatrix} m^{11} \mathbf{I}_{n_{dim}} & \dots & m^{1n_u} \mathbf{I}_{n_{dim}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m^{n_u 1} \mathbf{I}_{n_{dim}} & \dots & m^{n_u n_u} \mathbf{I}_{n_{dim}} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

obteniéndose los coeficientes $m^{\alpha\beta}$ de la siguiente forma:

$$m^{\alpha\beta} = \rho_f \int_{\Omega_e} N_u^\alpha N_u^\beta d\Omega_e \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n_u) \quad (2.23)$$

La matriz de convección \mathbf{N} es:

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}_A) = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{n}^e(\mathbf{u}_A) \quad \text{con} \quad \mathbf{n}^e = \begin{bmatrix} n(\mathbf{u}_A)^{11} \mathbf{I}_{n_{dim}} & \dots & n(\mathbf{u}_A)^{1n_u} \mathbf{I}_{n_{dim}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n(\mathbf{u}_A)^{n_u 1} \mathbf{I}_{n_{dim}} & \dots & n(\mathbf{u}_A)^{n_u n_u} \mathbf{I}_{n_{dim}} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

donde los coeficientes $n(\mathbf{u}_A)^{\alpha\beta}$ son:

$$n(\mathbf{u}_A)^{\alpha\beta} = \rho_f \int_{\Omega_e} N_u^\alpha \mathbf{u}^h \cdot \nabla N_u^\beta d\Omega_e \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n_u) \quad (2.25)$$

La matriz de viscosidad \mathbf{K} es:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{k}^e \quad \text{donde} \quad \mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k^{11} \mathbf{I}_{n_{dim}} + \boldsymbol{\kappa}^{11} & \dots & k^{1n_u} \mathbf{I}_{n_{dim}} + \boldsymbol{\kappa}^{1n_u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k^{n_u 1} \mathbf{I}_{n_{dim}} + \boldsymbol{\kappa}^{n_u 1} & \dots & k^{n_u n_u} \mathbf{I}_{n_{dim}} + \boldsymbol{\kappa}^{n_u n_u} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

con los coeficientes $k^{\alpha\beta}$ obtenidos como sigue:

$$k^{\alpha\beta} = \mu \int_{\Omega_e} \nabla N_u^\alpha \cdot \nabla N_u^\beta d\Omega_e \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n_u) \quad (2.27)$$

Y las matrices $\boldsymbol{\kappa}^{\alpha\beta}$ son:

$$\boldsymbol{\kappa}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \kappa_{11}^{\alpha\beta} & \dots & \kappa_{1n_{dim}}^{\alpha\beta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_{n_{dim}1}^{\alpha\beta} & \dots & \kappa_{n_{dim}n_{dim}}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

siendo los elementos $\kappa_{rs}^{\alpha\beta}$:

$$\kappa_{rs}^{\alpha\beta} = \mu \int_{\Omega_e} N_{u,s}^\alpha \cdot N_{u,r}^\beta d\Omega_e \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n_u) \quad (r, s = 1, \dots, n_{dim}) \quad (2.29)$$

La matriz de la presión e incompresibilidad \mathbf{Q} queda:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{q}^e \quad \text{donde} \quad \mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varrho}^{11^T} & \dots & \boldsymbol{\varrho}^{1n_u^T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\varrho}^{n_p 1^T} & \dots & \boldsymbol{\varrho}^{n_p n_u^T} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

donde los vectores $\boldsymbol{\varrho}^{\gamma\beta^T}$ son:

$$\boldsymbol{\varrho}^{\gamma\beta^T} = [\varrho_1^{\gamma\beta}, \dots, \varrho_{n_{dim}}^{\gamma\beta}] \quad (2.31)$$

siendo los elementos $\varrho_r^{\gamma\beta}$:

$$\varrho_r^{\gamma\beta} = - \int_{\Omega_e} N_p^\gamma N_{u,r}^\beta d\Omega_e \quad (\gamma = 1, \dots, n_p) \quad (\beta = 1, \dots, n_u) \quad (r = 1, \dots, n_{dim}) \quad (2.32)$$

Finalmente, el vector de fuerzas \mathbf{F} se obtiene así:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{f}^e \quad \text{donde} \quad \mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \zeta^1 \\ \vdots \\ \zeta^{n_u} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Los vectores ζ^{α^T} son:

$$\zeta^{\alpha^T} = [\zeta_1^\alpha, \dots, \zeta_{n_{dim}}^\alpha] \quad (2.34)$$

siendo los elementos ζ_r^α :

$$\zeta_r^\alpha = \int_{\Gamma_n} N_p^\alpha t_r d\Gamma_n \quad (\alpha = 1, \dots, n_p) \quad (r = 1, \dots, n_{dim}) \quad (2.35)$$

donde t_r es la tensión impuesta en la dirección r . El dominio Γ_n se refiere al contorno del fluido con condiciones naturales, luego ni los elementos interiores ni los exteriores con condiciones de Dirichlet cuentan.

Observación. En la notación utilizada en todas las expresiones anteriores se ha seguido el siguiente criterio: N_u son las funciones de forma para el campo de velocidades (2.17), N_p las funciones de forma para el campo de

presiones (2.18) y $N_{u,r}$ la derivada de esa función según la componente r ($r = 1, \dots, n_{dim}$).

Las ecuaciones obtenidas (2.21) son no lineales debido al término convectivo $\mathbf{N}(\mathbf{u}_A)\mathbf{u}_A$ y se han resuelto iterativamente linealizándolas y utilizando el método de *Newton-Raphson*.

2.3.2. Tecnología de elementos

En las ecuaciones (2.21) a resolver hay tanto incógnitas de velocidad \mathbf{u}_A como incógnitas de tensión \mathbf{p}_I , teniendo por tanto una formulación mixta del problema.

A la hora de elegir el tipo de elemento, caben hacer dos consideraciones:

1. Número de nodos totales del elemento. Cuanto mayor es el número de nodos por elemento, mayor cantidad de grados de libertad tiene el problema, y por consiguiente mayor es el coste computacional. Por otra parte la solución obtenida generalmente es más precisa.
2. Relación entre nodos de velocidad y nodos de presión. Si se elige un elemento con demasiados nodos de presión con relación a los nodos de velocidad, se puede producir el fenómeno llamado de *bloqueo*. La causa del bloqueo es el excesivo número de ecuaciones de restricción, que viene dado por el número de filas de la matriz Q en (2.21b). Por otra parte, un número excesivamente bajo de nodos de presión en relación a los nodos de velocidad da lugar a que los movimientos de la malla no verifiquen la restricción de incompresibilidad.

Aquí se ha tomado el elemento $Q1/P0$, que significa que la velocidad se aproxima con un polinomio de orden 1 completo, mientras que la presión con un polinomio de orden 0, esto es, una constante. Esto quiere decir que si la solución real en velocidades fuera un polinomio de primer grado, la aproximación numérica sería exacta (HUGHES [2000]). Con más detalle:

- a) Para el campo de velocidades, en el caso 3D se utilizan 8 nodos (uno en cada vértice del hexaedro), y las funciones de forma son polinomios trilineales incompletos. En el caso 2D los cuatro nodos en los vértices da lugar a funciones de forma bilineales incompletas.
- b) Para el campo de presiones solamente se utiliza un nodo en el centro del hexaedro y el cuadrilátero, siendo la función de forma un polinomio de grado 0 (constante) tanto en 2D como en 3D.

La mayor ventaja de este elemento es su reducido número de grados de libertad así como la posibilidad de realizar una condensación estática con el nodo interno de presión, aunque tiene el inconveniente de no cumplirse la condición *inf-sup*.

heurística de hacernos una idea *a priori* si puede haber problemas de bloqueo. Se define el cociente r (constraint ratio) como: $r = \frac{n_{eq}}{n_c}$ siendo n_{eq} el número total de ecuaciones de las velocidades después de imponer las condiciones de contorno (número de filas de la matriz \mathbf{K} en (2.21a) y n_c el número de ecuaciones de restricción (número de filas de la matriz \mathbf{Q} en (2.21b)). Según esta idea, si $r \leq 1$ se produce bloqueo, siendo el número óptimo $r = 2$ (HUGHES [2000]). El elemento utilizado aquí, a pesar de no cumplir la condición *LBB*, tiene un ratio óptimo $r = 2$ y se ha comprobado que no se bloquea.

Observación. *La condición LBB es una condición suficiente, por lo que puede haber elementos que no la cumplan y sin embargo no bloquearse, como es nuestro caso.*

Oscilación del campo de presiones. Método de penalización

El utilizar un sólo nodo de presión en cada elemento puede originar oscilaciones espurias del campo de presión. Para eliminar dichas oscilaciones las tensiones son suavizadas en el post-proceso de los resultados. Asimismo se ha utilizado el *método de penalización*, que consiste en hacer una pequeña modificación en las ecuaciones de restricción (2.21b) para hacer desaparecer la submatriz nula en la matriz de rigidez global, esto es, que aparezcan términos de presión en las ecuaciones de restricción. Con esto se consigue que la presión se pueda despejar a nivel de elemento.

Así la ecuación original de la divergencia (2.8) se transforma en ⁴:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{p}{\lambda} = 0} \quad (2.37)$$

siendo λ un número arbitrario. Cuanto mayor sea λ , más exacta se pondrá la condición de incompresibilidad.

En el sistema de ecuaciones (2.21) este nuevo término da lugar a la aparición de una nueva submatriz \mathbf{G} :

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_A + \mathbf{N}(\mathbf{u}_A)\mathbf{u}_A + \mathbf{K}\mathbf{u}_A + \mathbf{Q}^T \mathbf{p}_I = \mathbf{F} \quad (2.38a)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{u}_A + \mathbf{G}\mathbf{p}_I = \mathbf{0} \quad (2.38b)$$

La matriz \mathbf{G} sería la siguiente:

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} \mathbf{g}^e \quad \text{donde} \quad \mathbf{g}^e = \begin{bmatrix} g^{11} & \dots & g^{1n_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n_p 1} & \dots & g^{n_p n_p} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

donde los términos $g^{\alpha\beta}$ se calculan como:

⁴El origen de esta formulación para tratar la incompresibilidad se puede ver en HERRMANN [1965].

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_e} N_p^\alpha N_p^\beta d\Omega_e \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n_p) \quad (2.40)$$

El problema de la inestabilidad de las velocidades

El problema de la oscilación de las velocidades es un problema numérico que se presenta en general en las ecuaciones de *advección-difusión*, que a diferencia de la incompresibilidad, no refleja ninguna característica física del fluido. El problema consiste en que en la solución aparece un campo de velocidades no suave que oscila en torno a la solución exacta.

No obstante, para números de Reynolds bajos el problema de la oscilación no tiene importancia, sino que es para números de Reynolds elevados cuando toma relevancia. Si se observa el cuadro 2.2, donde se dan los números de Reynolds para condiciones fisiológicas normales, en la arteria aorta el número de Reynolds es bastante elevado y sí habría que usar la estabilización (todo esto suponiendo que no es viable disminuir el tamaño de los elementos de la malla). Y si tenemos condiciones fisiológicas de esfuerzo, al aumentar el caudal sanguíneo aumenta proporcionalmente el número de Reynolds, por lo que la estabilización se hace más necesaria.

Observación. *Conviene aclarar que estas oscilaciones en el campo de velocidades no están relacionadas con la turbulencia. La turbulencia aparece con números altos de Reynolds (el valor crítico depende de la geometría particular) y se debe a una fenomenología física. Es decir, es un fenómeno físico real que hace que el flujo deje de ser laminar y se produzcan campos de velocidades locales en forma de torbellinos. En cambio, el problema de oscilación en las velocidades al que aquí nos referimos es un problema numérico.*

Para evitar esta oscilación en las velocidades una posibilidad es hacer la malla más fina, pero procediendo así se incrementaría demasiado el coste computacional. De ahí la introducción de un método de estabilización.

En cuanto a métodos para estabilizar, hay varias alternativas, como el de mínimos cuadrados de Galerkin (GLS) (MULDER [1997], FRANCA ET AL. [1993], DONEA Y HUERTA [2003]), el de funciones burbuja (RUSSO [1996]), métodos de multiescala (HUGHES [1995]), etc... Aquí se adopta el *método SUPG* que se describe a continuación.

Método SUPG

El método SUPG (Streamline Upwind/Petrov-Galerkin) consiste en añadir una difusión numérica artificial a la ecuación de advección-difusión. Dicha difusión se añade únicamente en la dirección del flujo. El término de estabilización es (BROOKS Y HUGHES [1982]):

$$ST = \sum_e \int_{\Omega_e} \tau_{supg}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{R} d\Omega_e \quad (2.41)$$

donde la integral se hace en cada elemento y después se suma la contribución de cada elemento, \mathbf{R} es el residuo de la ecuación en forma fuerte:

$$\mathbf{R} = \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p - 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D} \quad (2.42)$$

y τ_{supg} es un coeficiente que gradúa la importancia del término ST . Éste se define como (BROOKS Y HUGHES [1982]):

$$\tau_{supg} = \frac{h}{2\|\mathbf{u}\|} \zeta(Re) \quad (2.43)$$

siendo h el tamaño del elemento en la dirección del flujo (HEINRICH Y PEPPER [1999]), $\|\mathbf{u}\|$ el módulo de la velocidad en el centro del elemento (definido como el punto al que se transforma el centro del elemento de referencia) y ζ un coeficiente que se define como (MULDER [1997]):

$$\zeta = \frac{Re}{1 + Re} \quad (2.44)$$

que indica la mayor influencia del término de estabilización cuanto mayor es el número de Reynolds (figura 2.4):

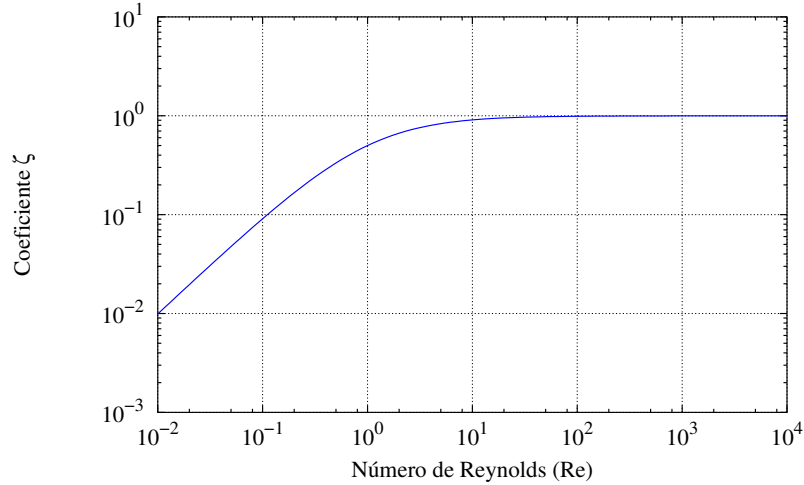


Figura 2.4: Coeficiente ζ en función del número de Reynolds. Escala logarítmica.

Ecuaciones finales

Introduciendo la corrección de la incompresibilidad y el término de estabilización en la forma débil (2.16), la ecuación estabilizada quedaría:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \left(\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{p}{\lambda} \right) q \, d\Omega + \sum_e \int_{\Omega_e} \tau_{supg} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{R} \, d\Omega_e = \int_{\Gamma_n} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_n
\end{aligned} \tag{2.45}$$

donde se ve que la diferencia con la ecuación (2.16) son los términos $\frac{p}{\lambda}$ y ST .

Las ecuaciones discretizadas por el MEF quedarían finalmente:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_A + \mathbf{N}(\mathbf{u}_A)\mathbf{u}_A + \mathbf{K}\mathbf{u}_A + \mathbf{ST}(\mathbf{u}_A)\mathbf{u}_A + \mathbf{Q}^T \mathbf{p}_I = \mathbf{F} \tag{2.46a}$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{u}_A + \mathbf{G}\mathbf{p}_I = \mathbf{0} \tag{2.46b}$$

siendo la expresión $\mathbf{ST}(\mathbf{u}_A)\mathbf{u}_A$ los sumandos añadidos por la estabilización. Se ha escrito de tal forma para resaltar la no linealidad de estos sumandos.

2.3.3. Implementación computacional

Las ecuaciones finales (2.46) se han implementado en un código de elementos finitos llamado FEAP (TAYLOR [2000a]). Concretamente, lo que se ha hecho es añadir una subrutina con un nuevo elemento (elemento de fluido), al cual se llama desde el código principal del programa.

En el apéndice B se comentan algunas particularidades de la implementación y en el ejemplo numérico del apartado 2.4.1 se muestra un análisis de cómo afecta la linealización del término ST para construir la matriz tangente en cuanto al número de iteraciones necesario.

Se ha implementado el elemento de tal forma que sea válido para 2D, 3D y flujo axilsimétrico, tanto para estado estacionario como para estado transitorio. Asimismo, se ha hecho versión para el flujo de Stokes, esto es, cuando el término convectivo $\rho_f \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ se puede despreciar.

En el cuadro 2.3 se muestran todos los elementos implementados, todos ellos pudiendo funcionar en régimen estacionario o transitorio. También se incluyen aquí los elementos en formulación ALE, aunque estos elementos se utilizarán en el capítulo 4.

2.4. Ejemplos de validación

Para la verificación de las prestaciones computacionales de los elementos programados se han realizado varios ejemplos de validación. A continuación se muestran cuatro de ellos en los que se ha incluido el flujo de Womersley, que se ha elegido por ser un caso de régimen transitorio con solución analítica y por ser un caso donde hay que imponer presiones como condición de contorno.

Elemento	Nombre	Características
1	st2w	Stokes 2D
2	st3w	Stokes 3D
3	axwo	Stokes en flujo axilsimétrico
4	din2	Navier-Stokes 2D
5	din3	Navier-Stokes 3D
6	axni	Navier-Stokes en flujo axils.
7	sui2	Navier-Stokes 2D con estabilización SUPG
8	sui3	Navier-Stokes 3D con estab. SUPG
9	axsu	Navier-Stokes en flujo axils. con estab. SUPG
10	nsa2	Navier-Stokes 2D con formulación ALE
11	nsa3	Navier-Stokes 3D con form. ALE
12	axal	Navier-Stokes en flujo axils. con form. ALE
13	sua2	Navier-Stokes 2D con form. ALE y estab. SUPG
14	sua3	Navier-Stokes 3D con form. ALE y estab. SUPG
15	axau	Navier-Stokes axils. con form. ALE y estab. SUPG

Cuadro 2.3: Nombre y descripción de los elementos implementados.

Así este ejemplo nos permite conocer si se ha implementado correctamente la presión en el elemento.

El vector velocidad se denota con \mathbf{u} , y sus componentes se denotan con u la velocidad horizontal y v la velocidad vertical. En estos cuatro ejemplos no se explicitan las unidades, pudiendo tomarse cualquier sistema consistente.

Las trayectorias y líneas de corriente que se muestran se han calculado mediante integración implícita del campo de velocidades, detallándose el procedimiento en el apéndice C.

Observación. *La trayectoria de una partícula es la curva que realmente describe dicha partícula teniendo en cuenta que el campo de velocidades cambia en cada instante de tiempo. Por otra parte, las líneas de corriente son las curvas tangentes al campo de velocidades en un instante determinado. En estado estacionario las trayectorias y las líneas de corriente coinciden.*

2.4.1. Flujo confinado en una cavidad

Este problema es ya un clásico de la mecánica de fluidos (GHIA ET AL. [1982], MULDER [1997], ARMERO [1993]). Consiste en un dominio cuadrado donde no entra ni sale fluido, sino que únicamente existe circulación interior mediante la imposición de una velocidad tangencial en la parte superior (figura 2.5).

Descripción del problema:

- a) Imposición de una velocidad uniforme de valor unidad ($u = 1$) en el borde

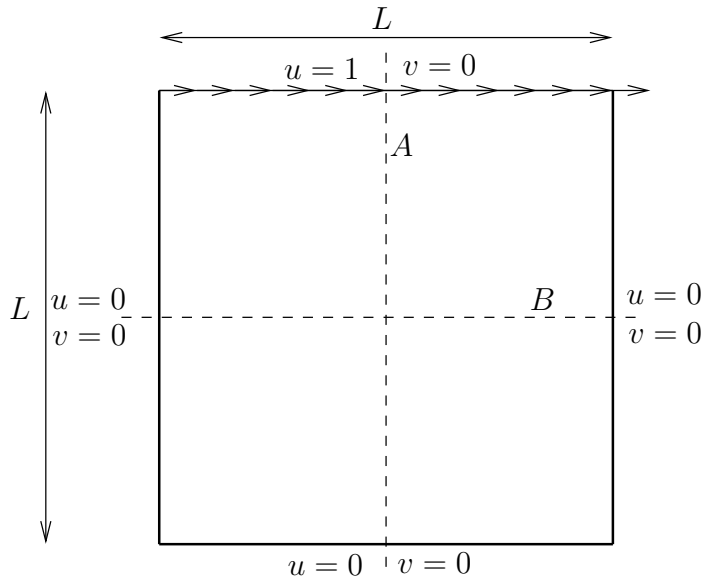


Figura 2.5: Geometría del área de confinamiento de la cavidad.

superior de la cavidad.

- b) Condición de no deslizamiento en las paredes laterales e inferior, lo cual equivale a anular la velocidad ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) en el resto del contorno.
- c) Se toma $L = 1$. La densidad del fluido es $\rho_f = 1$ y la viscosidad μ se modula para conseguir el número de Reynolds que queramos. Con los parámetros anteriores, resulta sencillamente $Re = \mu^{-1}$.
- d) Los resultados que se muestran es cuando se alcanza la situación estacionaria salvo en el dibujo con las trayectorias de algunas partículas (figura 2.9, izquierda).

Los resultados con los que se van a validar nuestros resultados se han tomado de GHIA ET AL. [1982]. En dicho artículo se resuelven las ecuaciones de fluido en régimen estacionario para diversos números de Reynolds (incluidos $Re = 400$ y $Re = 10000$) mediante diferencias finitas y técnicas *multi-malla*, mostrando los resultados numéricos tabulados a lo largo de las secciones A y B, con lo que se facilita la comparación. También muestra las líneas de corriente, con lo que se pueden comparar al menos cualitativamente con las obtenidas aquí.

Cabe comentar que en este problema la formación de vórtices secundarios, terciarios, etc... va incrementándose conforme aumenta el número de Reynolds, pero los vórtices más pequeños no se pueden captar si la malla no es lo suficientemente fina. De ahí que cuanto mayor es Re , más fina ha de ser la malla (al menos en las dos esquinas inferiores y en la superior izquierda).

Caso de Reynolds = 400

Para este número de Reynolds se ha utilizado una malla uniforme de 100x100 elementos, observando que es suficientemente fina para captar los vórtices primarios y secundarios formados en ambos lados de la parte inferior.

En la figura 2.6 se muestran los contornos de velocidad horizontal así como el perfil de dicha velocidad en la sección *A*, que pasa por el centro geométrico. Este perfil concuerda muy bien con el obtenido en GHIA ET AL. [1982]. Análogamente, en la figura 2.7 se muestran los contornos de velocidad vertical y el perfil de esta velocidad en la sección *B*, que también pasa por el centro geométrico. También se observa una buena correspondencia con los resultados de la literatura.

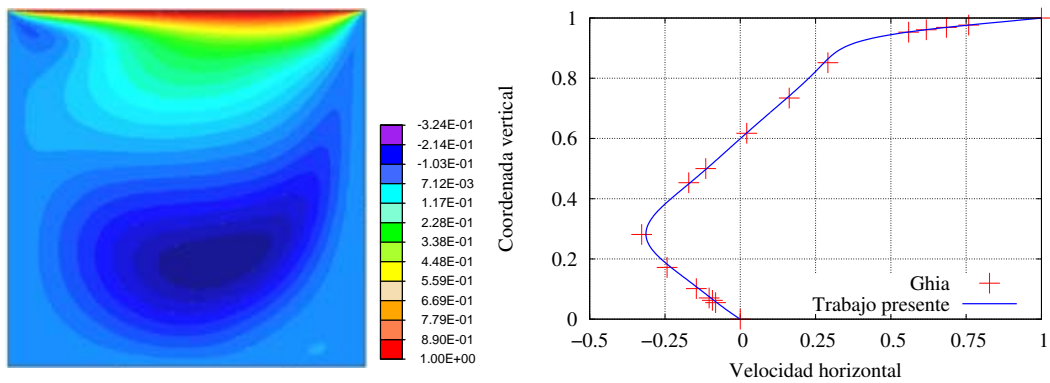


Figura 2.6: *Velocidad horizontal y perfil en la sección A. Re = 400.*

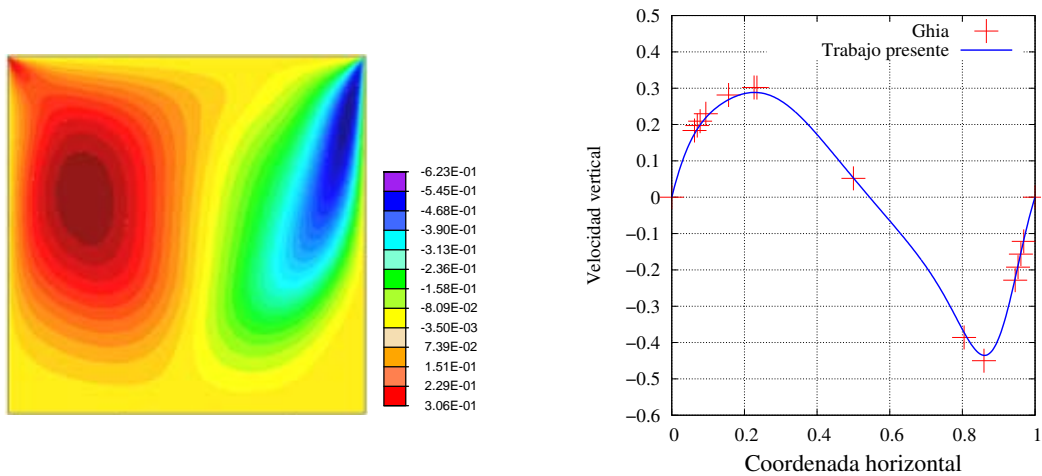


Figura 2.7: *Velocidad vertical y perfil en la sección B. Re = 400.*

La figura 2.8 muestra las curvas isobaras. Como se están utilizando elementos con un nodo de presión se ha realizado una proyección de la presión del elemento a la presión en los nodos dentro del mismo programa de elementos finitos *FEAP*. Esta interpolación consiste en hacer una media ponderada

de la presión de cada elemento que contiene al nodo. La ponderación es el área del elemento.

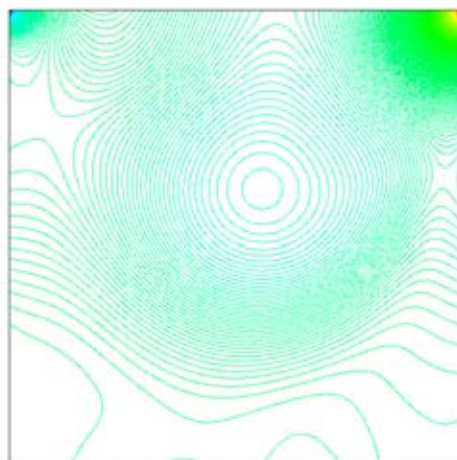


Figura 2.8: Representación cualitativa de las curvas isobaras. $Re = 400$.

Observación. En la figura 2.8 únicamente se muestran las curvas isobaras de forma cualitativa y no su valor, ya que la presión y las tensiones en las esquinas superiores dependen de cuán fina ha sido la discretización. Esto es únicamente un efecto local y para una distancia suficientemente lejana las presiones no dependen de la discretización. La razón es que en el problema se impone velocidad en los nodos de la línea superior, pero en los nodos siguientes de los laterales se restringe dicha velocidad. Por tanto, cuanto más fina sea la malla, mayores serán los gradientes de velocidad en los laterales de la parte superior y por tanto las tensiones y la presión. No obstante, las líneas rojas indican altas presiones y las azules bajas presiones. Esta consideración también se aplicará al caso de la siguiente sección, y en general, a todos los casos donde directa o indirectamente se imponga un gradiente de velocidad que depende de la discretización hecha.

En la figura 2.9, a la izquierda se muestra la trayectoria real de unas partículas materiales situadas en el instante inicial en los puntos del dominio $(0.05, 0.05)$, $(0.2, 0.2)$, $(0.5, 0.5)$, $(0.9, 0.95)$ y $(0.9, 0.05)$, los cuales se han señalado con un pequeño círculo. En la parte derecha de dicha figura se observan las líneas de corriente cuando se alcanza el estado estacionario. La trayectoria de las partículas en la parte inferior derecha e izquierda son desde el principio prácticamente las mismas que en el estado estacionario, debido a que la velocidad de esos vórtices es muy pequeña.

Obsérvese que los vórtices primarios son grandes y se ven perfectamente,

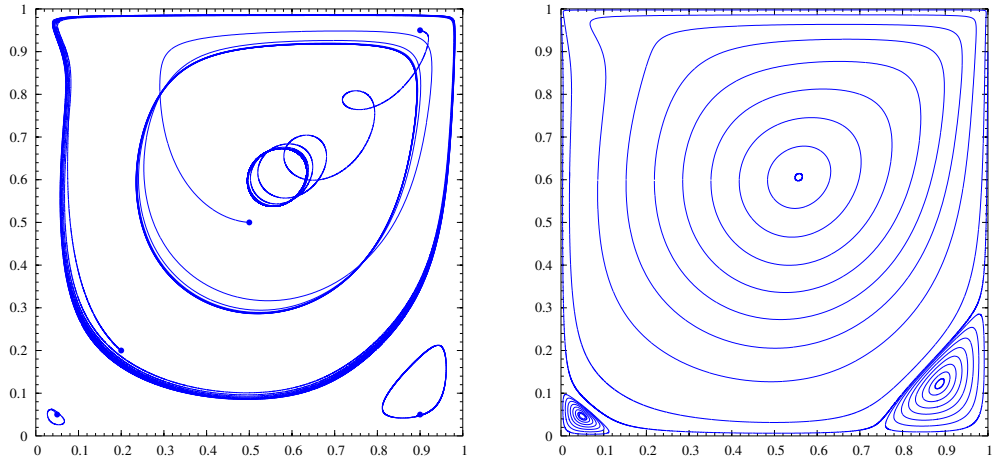


Figura 2.9: *Trayectoria de las partículas en régimen transitorio (izquierda) y líneas de corriente en estado estacionario (derecha). $Re = 400$.*

pero los secundarios son demasiado pequeños y apenas se aprecian. Comparamos también la localización del centro de los vórtices con la obtenida en GHIA ET AL. [1982] dando las coordenadas cartesianas de éstos.

Vórtice	Ghia	Trabajo presente
Principal	0.5547, 0.6055	0.5565, 0.6062
Primario inferior izquierda	0.0508, 0.0469	0.05, 0.046
Primario inferior derecha	0.8906, 0.125	0.886, 0.122

Cuadro 2.4: *Coordenadas del centro de los vórtices en la cavidad. $Re = 400$.*

Caso de Reynolds = 10000

Para comprobar el efecto de la estabilización se ha repetido el caso con $Re = 10000$. La malla utilizada es de 300x300 elementos. Dicha malla no es uniforme, sino que en las esquinas inferiores se han utilizado elementos de menor tamaño que en el centro y parte superior. En la figura 2.10 se muestran los contornos de velocidad vertical del elemento no estabilizado, donde se aprecia en la parte superior la oscilación espuria de ésta.

A continuación se muestran los resultados del elemento estabilizado. En la figura 2.11 se observan los contornos de la velocidad horizontal, así como el perfil de dicha velocidad en la sección A, donde se producen unos gradientes mucho más acusados que en el caso anterior con $Re = 400$. La figura 2.12 muestra la velocidad vertical, la cual se puede comparar con la figura 2.10. La estabilización ha eliminado las oscilaciones espurias. Nuevamente en el perfil de velocidad se observan mayores gradientes de velocidad. En cuanto a la comparación con GHIA ET AL. [1982] se observa que los perfiles son algo más amplios que en nuestro trabajo.

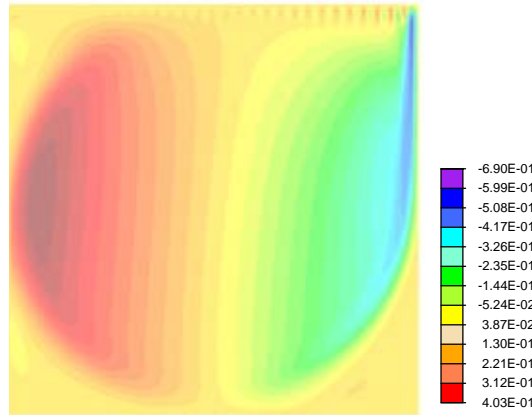


Figura 2.10: *Velocidad vertical con el elemento sin estabilizar. $Re = 10000$.*

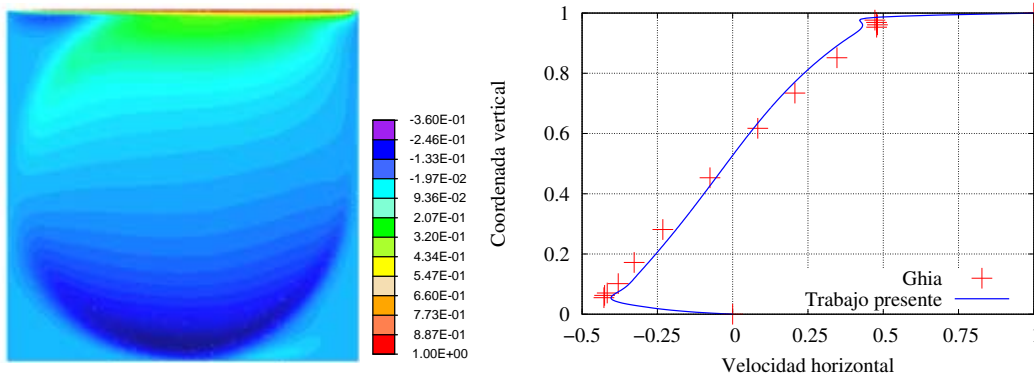


Figura 2.11: *Velocidad horizontal y perfil en la sección A. $Re = 10000$.*

En la figura 2.13 se muestran las trayectorias y líneas de corriente. A la izquierda están las trayectorias desde el instante inicial en los mismos puntos que en el caso anterior, donde se pueden observar las diferencias respecto a la figura 2.9. Se ha dibujado una de las líneas en rojo para mayor claridad. A la derecha se observan las líneas de corriente al final cuando se alcanza el estado estacionario. El vórtice primario de la parte inferior derecha ahora tiene un transitorio mayor que en el caso anterior. También ha aparecido un vórtice primario en la esquina superior izquierda que en el caso anterior no existía. Además, el vórtice secundario en la esquina inferior derecha se ha desarrollado mucho más y es claramente visible, no ocurriendo lo mismo con el secundario de la esquina inferior izquierda, que sigue siendo muy pequeño.

Las líneas de corriente también se han comparado con MULDER [1997], observando buena concordancia.

En el cuadro 2.5 se compara el centro de los vórtices principales.

Se observa una desviación mayor en los dos vórtices de la parte inferior derecha, posiblemente por tener localmente nuestra malla en esa zona un

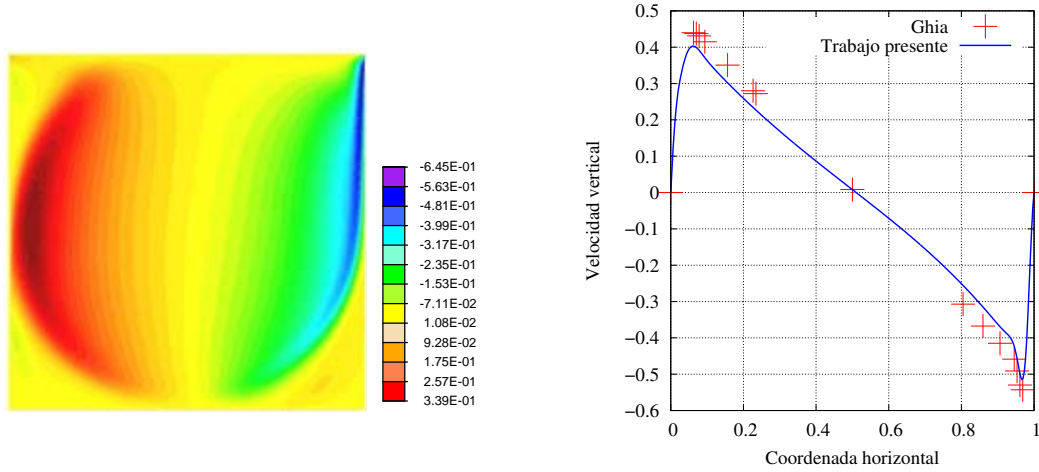


Figura 2.12: *Velocidad vertical y perfil en la sección B. $Re = 10000$.*

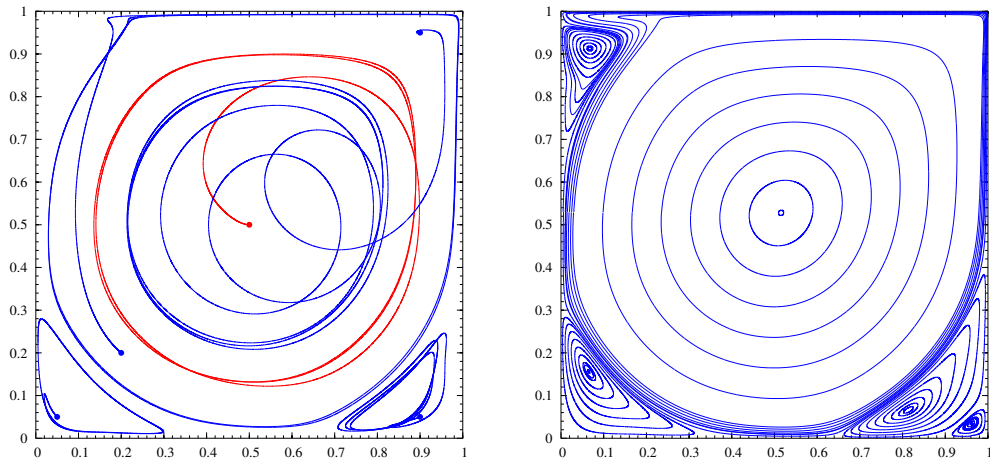


Figura 2.13: *Trayectoria de las partículas en régimen transitorio (izquierda) y líneas de corriente en estado estacionario (derecha). $Re = 10000$.*

Vórtice	Ghia	Trabajo presente
Principal	0.5117, 0.5333	0.515, 0.528
Primario superior izquierda	0.0703, 0.9141	0.067, 0.913
Primario inferior izquierda	0.0586, 0.1641	0.065, 0.155
Primario inferior derecha	0.7656, 0.0586	0.814, 0.066
Secundario inferior derecha	0.9336, 0.0625	0.96, 0.034

Cuadro 2.5: *Coordenadas del centro de los vórtices en la cavidad. $Re = 10000$.*

tamaño de elemento mayor que en GHIA ET AL. [1982], ya que para números de Reynolds elevados la captura de los vórtices es muy sensible a la finura de la discretización utilizada.

A continuación y dentro de este mismo ejemplo se muestra un experi-

mento numérico para estudiar cómo afecta la linealización del término ST en la velocidad de convergencia. Como ya se comentó en el apartado 2.3.2 el término de estabilización ST es no lineal, por lo que hay que linealizarlo en cada iteración para calcular la matriz tangente de las ecuaciones. Hay varias posibilidades para hacer esto, desde calcular su expresión exacta hasta no incorporar su aportación a la matriz tangente total. El problema está en que calcular la expresión exacta origina un coste computacional relativamente elevado, aunque reduce el número de iteraciones hasta la convergencia. Por ello, lo ideal sería llegar a una solución de compromiso.

Para ello se han hecho pruebas de cuántas iteraciones se necesitan en cada paso de tiempo dependiendo de cómo se linealice el término ST . Se muestra aquí el caso de $Re = 400$ con tres experimentos computacionales (ver figura 2.14). En el primero de ellos se linealiza de forma exacta el término ST (curva azul). En el segundo se linealiza parcialmente: concretamente, en la expresión (2.41) el residuo R se deja como constante y se linealiza el término $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}$ (curva roja). En el tercero se construye la matriz tangente sin incluir la aportación de dicho término (curva verde).

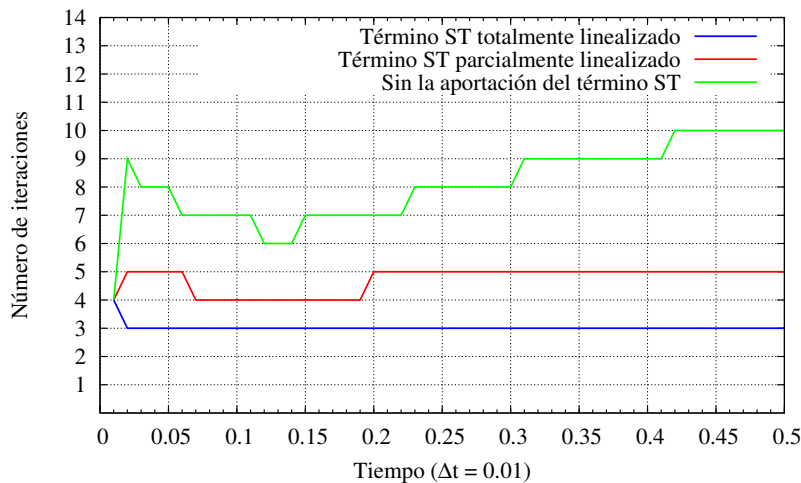


Figura 2.14: *Distintas linealizaciones del término ST en el caso de flujo confinado en una cavidad. $Re = 400$.*

Se observa que construir la matriz tangente sin la aportación del término ST no es rentable respecto al tiempo de cálculo, ya que aumenta demasiado el número de iteraciones. En cambio, con una linealización parcial el número de iteraciones adicionales es mucho más bajo, poco más que la linealización exacta, por lo que sí que compensa linealizar parcialmente el término de estabilización. Por tanto, en la implementación se ha seguido esta estrategia, esto es, linealizar parcialmente, ya que el hacerlo de forma exacta aumenta el coste computacional (implementación y tiempo de CPU) más que la compensación por el número de iteraciones que nos ahorramos.

Observación. Para poder comparar de forma correcta hay que tener en cuenta no sólo el número de iteraciones sino también el tiempo en hacer cada iteración. Por ello, para problemas con decenas de miles de grados de libertad sí compensa linealizar totalmente el término ST , ya que el tiempo en resolver el sistema de ecuaciones de cada iteración es muy elevado.

2.4.2. Flujo sobre un escalón inverso

El segundo ejemplo es también un clásico en la mecánica de fluidos. Consiste en la imposición de una velocidad uniforme a la entrada de un tubo, dejando libre el extremo de salida. La particularidad es el escalón en el tubo que hace que se produzca una separación de flujo y se formen torbellinos, rompiéndose así el flujo laminar. Estos remolinos son más extensos cuanto mayor sea el número de Reynolds.

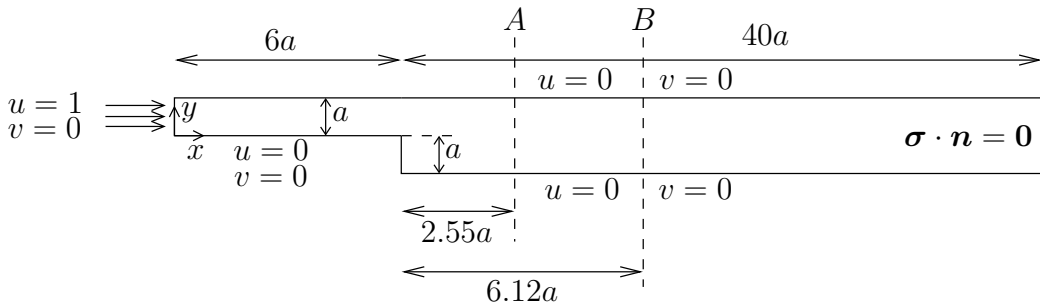


Figura 2.15: Geometría del problema del escalón inverso.

Descripción del problema:

- Imposición de una velocidad uniforme de valor unidad ($u = 1$) en el extremo inicial.
- Condición de no deslizamiento en la pared del tubo, lo cual equivale a anular la velocidad ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) en el resto del contorno.
- Se toma $a = 1$. La densidad del fluido es $\rho_f = 1$ y la viscosidad se adapta para conseguir un número de Reynolds $Re = 389$ y así poder comparar con los resultados experimentales de ARMALY ET AL. [1983]. De ahí resulta $\mu = 5.14 \cdot 10^{-3}$.
- Se ha utilizado una malla densa (16 elementos en la dirección vertical en la zona del escalón) con el fin de captar adecuadamente la zona de recirculación, sobre todo a efectos de poder calcular con precisión las líneas de corriente.

- e) Los resultados se muestran en estado estacionario salvo las líneas de corriente y perfiles en distintos instantes del transitorio (figura 2.19).

Es importante señalar que el número de Reynolds para este problema se ha definido como en ARMALY ET AL. [1983], esto es:

$$Re = \frac{2a\rho_f u}{\mu} \tag{2.47}$$

donde $2a$ es el diámetro hidráulico para este problema ⁵. Se ha elegido el ejemplo con $Re = 389$ porque en ARMALY ET AL. [1983] los resultados experimentales coinciden bien con los teóricos (cuanto menor es Re mejor coinciden).

En el citado artículo se muestran los resultados experimentales en estado estacionario. Concretamente se registra el perfil de velocidad en varias secciones, incluidas las marcadas con A y B en la figura 2.15, que son las que compararemos.

En las figuras 2.16 y 2.17 se muestran los contornos de velocidad horizontal y vertical respectivamente.



Figura 2.16: *Contornos de velocidad horizontal. $Re = 389$.*



Figura 2.17: *Contornos de velocidad vertical. $Re = 389$.*

En la figura 2.18 se comparan los resultados experimentales de ARMALY ET AL. [1983] con los obtenidos aquí en las dos secciones A y B (ver figura 2.15). La correspondencia es bastante buena. Cabe comentar que para este número de Reynolds la estabilización no es necesaria, ya que se ha comprobado que los resultados son prácticamente indistinguibles utilizando la estabilización o sin ella.

⁵El diámetro hidráulico es la relación entre el cuádruple del área de la sección y el perímetro mojado.

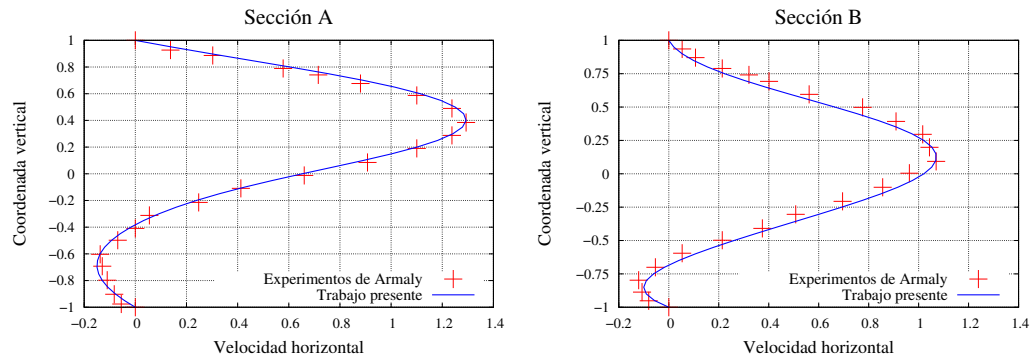
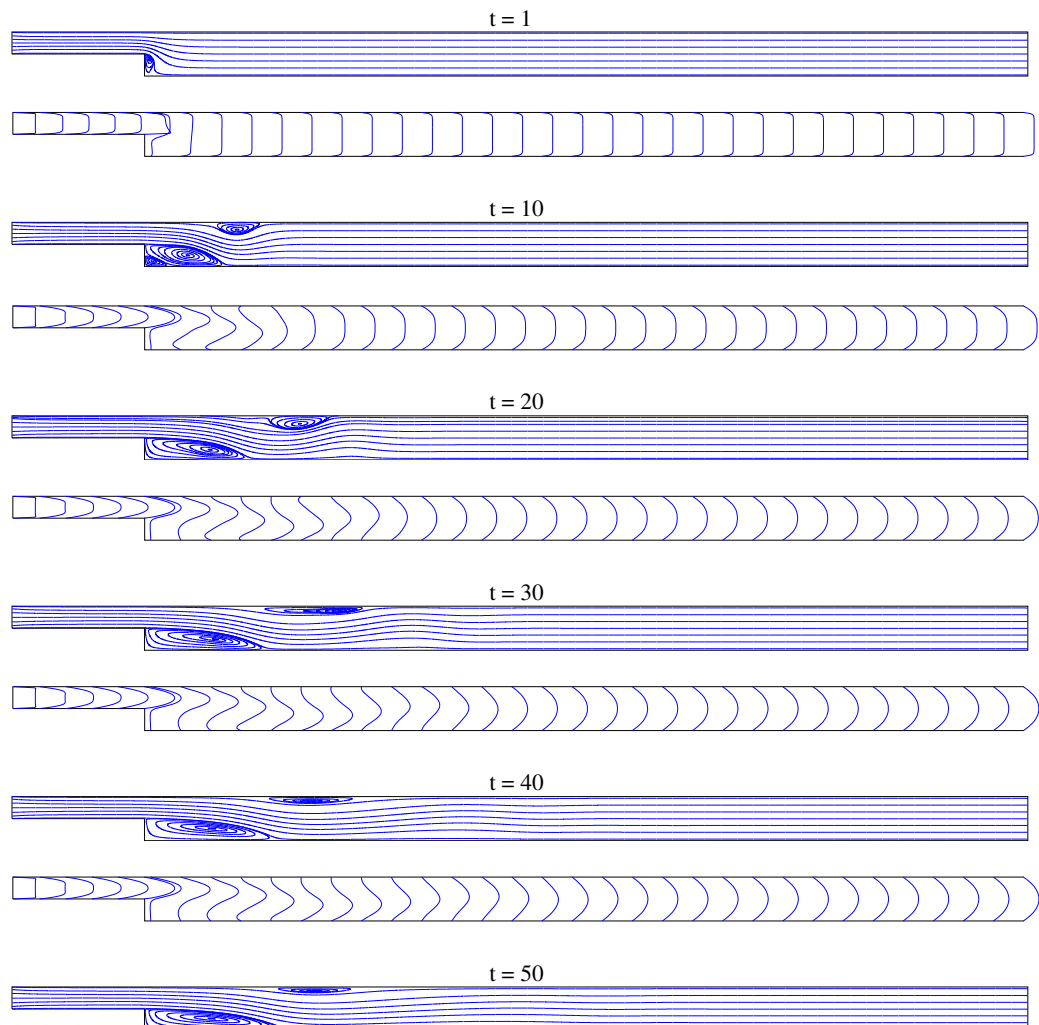


Figura 2.18: Comparación del perfil de velocidades en las secciones A y B. $Re = 389$.

Para observar el régimen transitorio se han obtenido las líneas de corriente en distintos instantes de tiempo (recordar que cuando se alcanza el régimen estacionario éstas corresponden a las trayectorias reales). También se muestran los perfiles de velocidad horizontal en distintas secciones.



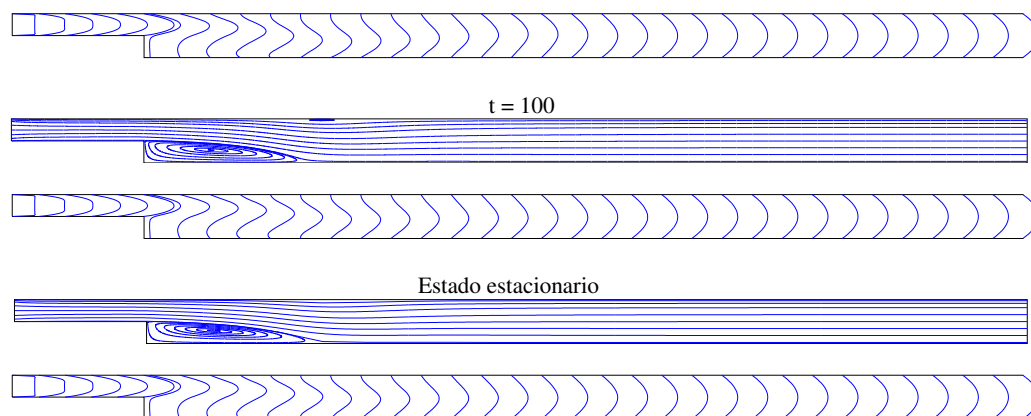


Figura 2.19: Líneas de corriente y perfiles de velocidad horizontal. $Re = 389$.

Vórtice	Trabajo presente
Primario inferior	9.0555, -0.4135

Cuadro 2.6: Coordenadas del centro del vórtice en el escalón inverso respecto los ejes de la figura 2.15. $Re = 389$.

2.4.3. Flujo de Womersley

El flujo de Womersley es un caso con solución analítica para fluido de Stokes. En hemodinámica no se puede hablar de un flujo de Womersley puro, porque en primer lugar, el caudal no retrocede. Pero sí es cierto que el flujo sanguíneo es pulsátil y en esto es similar al de Womersley.

En todo momento el régimen es transitorio, aunque podemos hablar que se alcanza una solución *periódica*. Es un problema axilsimétrico, pero la simulación se ha hecho en el cilindro completo para validar el elemento en tres dimensiones.

Un interés adicional de este ejemplo es comprobar el funcionamiento de la presión, ya que en el elemento utilizado la presión es un grado de libertad interno que se condensa y sin embargo la comparación de los resultados obtenidos con los analíticos es correcta. De todas maneras, lo que realmente se hace es imponer una tensión normal, pero en un fluido en movimiento las tensiones normales son prácticamente iguales a la presión, y en un fluido en reposo coinciden.

Descripción del problema:

- a) A la entrada se impone una presión uniforme de variación sinusoidal $P = P_0 \cos(\omega t)$, con los valores $P_0 = 10$. La frecuencia ω se deja como variable para modular los distintos casos. A la salida se impone presión nula.

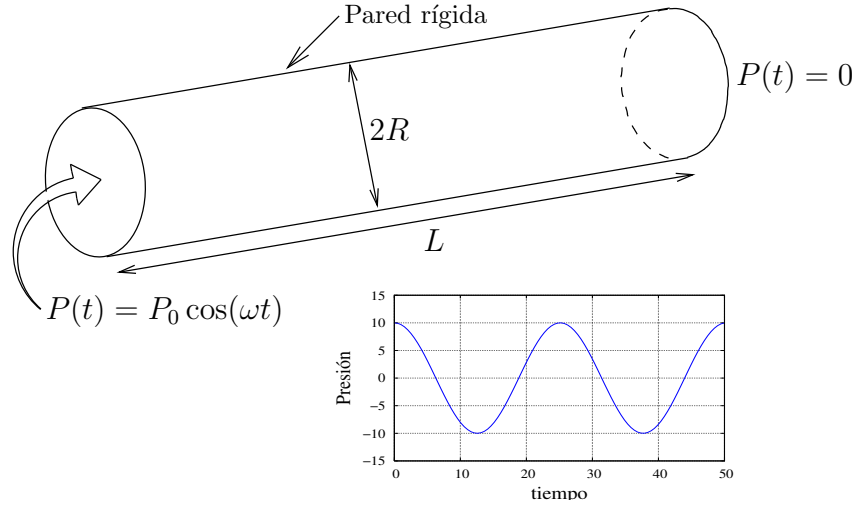


Figura 2.20: Geometría del flujo de Womersley.

- b) Las características geométricas son $L = 10$ y $R = 1$.
 c) La densidad es $\rho_f = 1.05$ y la viscosidad $\mu = 0.04$.

Con los datos anteriores, el gradiente de presiones impuesto en la dirección axial es:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{0 - P_0 \cos(\omega t)}{L} = \frac{0 - 10 \cos(\omega t)}{10} = -\cos(\omega t) \quad (2.48)$$

La forma del perfil de velocidades depende del parámetro de Womersley, que es adimensional, y denotándolo con α se define como:

$$\alpha = R \sqrt{\frac{\rho_f \omega}{\mu}} \quad (2.49)$$

La solución del flujo de Womersley nos proporciona la ley de velocidades y el caudal en el tiempo. Para la velocidad dicha ley es (MAZUMDAR [1992]):

$$u(r, t) = \text{Re} \left\{ -\frac{i P_0}{\rho_f \omega} \left(1 - \frac{J_0(i^{3/2} \alpha r / R)}{J_0(i^{3/2} \alpha)} \right) e^{i \omega t} \right\} \quad (2.50)$$

donde J_0 es la función de Bessel ⁶ de argumento complejo de orden 0, $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria, r es la coordenada radial y Re significa que se toma la parte real del número complejo resultante. Esta solución analítica se ha programado para obtener los valores de la velocidad y así compararlos con la solución computacional de nuestro elemento. Para calcular la función de Bessel J_0 en este trabajo se ha utilizado la siguiente expresión:

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{4} z^2\right)^k}{(k!)^2} \quad (2.51)$$

⁶Para una descripción exhaustiva de las funciones de Bessel ver DE CASTRO Y PASTOR [1958].

donde z es un número complejo. Respecto al sumatorio, utilizando unas cuantas decenas de términos se obtiene prácticamente el valor exacto.

Se han desarrollado 4 casos, cuyas frecuencias y correspondientes parámetros de Womersley están en el cuadro 2.7.

Frecuencia ω	Parámetro de Womersley α
0.4	3.24
0.7	4.29
1.2	5.61
1.8	6.87

Cuadro 2.7: Frecuencias y parámetros de Womersley.

La malla utilizada para la simulación numérica se muestra en la figura 2.21, la cual tiene 1936 nodos y 1620 elementos.

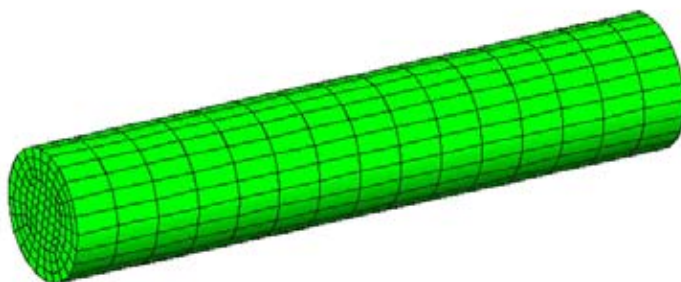


Figura 2.21: Malla del cilindro para el flujo de Womersley.

Los resultados se muestran en la figura 2.22, mostrándose la solución a lo largo de un diámetro genérico. Las curvas azules representan el valor de la expresión analítica de la velocidad y en cruces rojas se muestran los resultados del cálculo numérico, concretamente el valor de la velocidad en cada nodo a lo largo de un diámetro. Cada curva representa el perfil en un instante del tiempo.

Los resultados numéricos representan la situación de régimen permanente, una vez finalizado el transitorio. Se observa una concordancia perfecta entre la solución analítica y la numérica.

En el cuadro 2.8 se da una estimación del parámetro de Womersley α para los distintos vasos sanguíneos, lo cual puede darnos una idea de cómo evoluciona el perfil de velocidades en el flujo sanguíneo comparando con la figura 2.22. Los valores se han calculado suponiendo la densidad $\rho_f = 1.05 \text{ g/cm}^3$, la viscosidad $\mu = 0.04 \text{ Poise}$, y una frecuencia cardíaca de 72 latidos por minuto con la que se obtiene $\omega = 7.54 \text{ rad/s}$.

Se observa que la arteria aorta y la vena cava tienen un valor de α que observando la figura 2.22 hacen pensar en un flujo bastante plano. En cambio, en los vasos más pequeños el perfil sería más parabólico. No obstante, en los

capilares la hipótesis de medio continuo para la sangre empieza a alejarse demasiado de la realidad, así que este análisis hay que tomarlo con cautela.

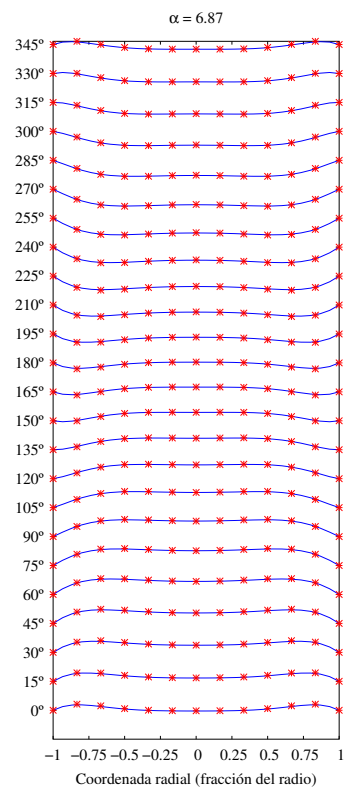
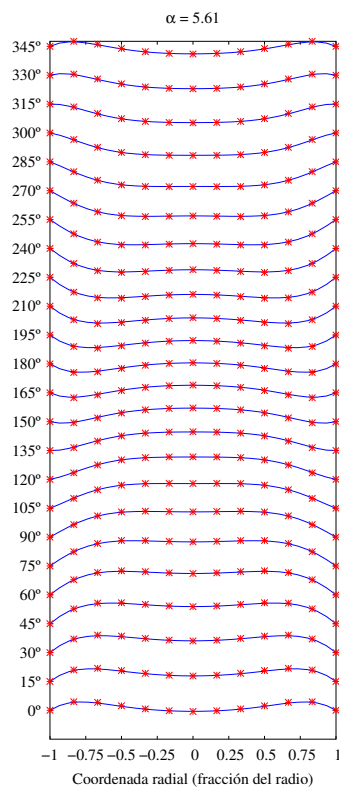
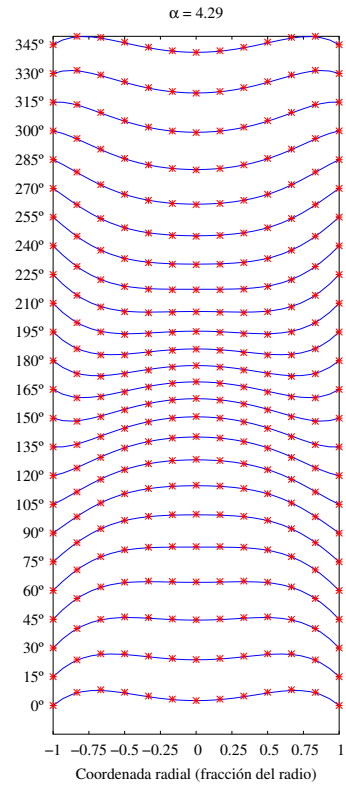
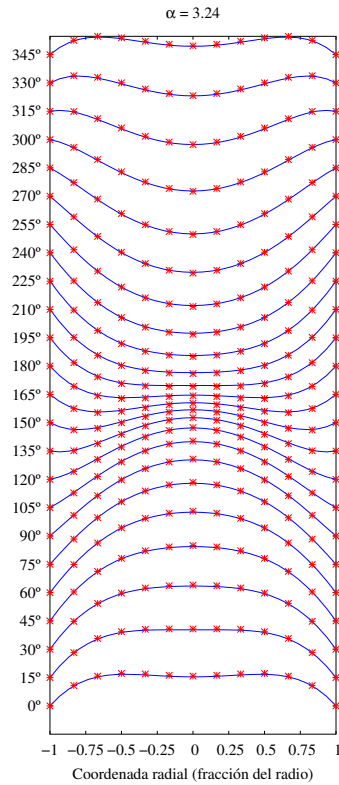


Figura 2.22: *Perfiles de velocidad en el flujo de Womersley. La línea azul continua es la solución analítica y los puntos rojos el resultado numérico.*

Vaso	Diámetro (cm)	Parámetro de Womersley α
Aorta	2.5	18
Arterias	0.4	3
Arteriolas	$5 \cdot 10^{-3}$	0.035
Capilares	$8 \cdot 10^{-4}$	0.006
Vénulas	$2 \cdot 10^{-3}$	0.015
Venas	0.5	4
Vena cava	3	21

Cuadro 2.8: *Parámetros de Womersley para el sistema vascular.*

2.4.4. Flujo rodeando un cilindro. Torbellinos de Von Karman

Este problema es de naturaleza transitoria, aunque al contrario del caso anterior, no se desprecia el término convectivo. Además no se dispone de solución analítica y nuestros resultados se comparan con los resultados de ARMERO [1993].

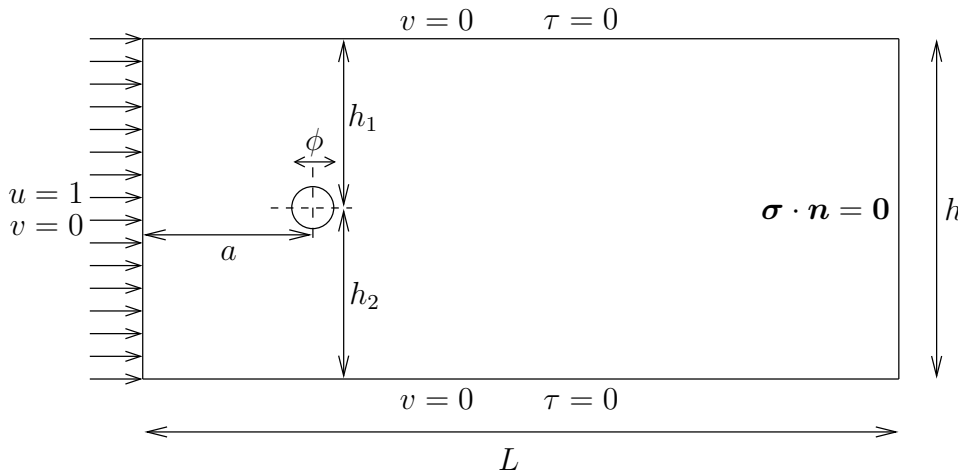


Figura 2.23: *Geometría del flujo rodeando un cilindro.*

Descripción del problema:

- a) A la entrada se impone un flujo uniforme de velocidad $u = 1$.
- b) En los bordes inferior y superior se restringe la velocidad vertical para confinar el flujo en el dominio. En la dirección horizontal de estos bordes

se impone condición de contorno natural nula, esto es, tensión tangencial nula. En el borde de salida también se imponen condiciones naturales, esto es, tensión nula.

- c) Las características geométricas son $L = 20$, $h = 9.09$ y $\phi = 1$. Para situar el cilindro dentro del rectángulo se ha tomado $a = 4.5$, $h_1 = 4.5$ y $h_2 = 4.59$. La pequeña diferencia entre h_1 y h_2 tiene como objetivo romper la simetría del problema y forzar la formación de los torbellinos.
- d) La densidad es $\rho_f = 1$ y la viscosidad $\mu = 0.01$.
- e) El paso de tiempo para el cálculo es $\Delta t = 0.1$ y la simulación se ha hecho hasta $t_{final} = 150$.

El número de Reynolds para este problema se define como:

$$Re = \frac{\rho_f \phi u_\infty}{\mu}$$

donde u_∞ es la velocidad en el infinito por el lado de la entrada (que en nuestro problema es $u_\infty = 1$), resultando para este ejemplo $Re = 100$. Está comprobado que para $Re < 40$ se forman dos vórtices simétricos y para $Re > 40$ esos dos vórtices se vuelven inestables formándose los torbellinos de Von Karman.

Para hacer la malla de cuadriláteros se ha utilizado el programa de mallado que se ha desarrollado en el marco de esta tesis. La metodología utilizada con dicho mallador se describe en el apéndice D. También se ha utilizado el mallado para añadir otra pequeña asimetría, siendo el número de elementos en la mitad superior ligeramente superior al número de elementos de la parte inferior (ver figura 2.24).

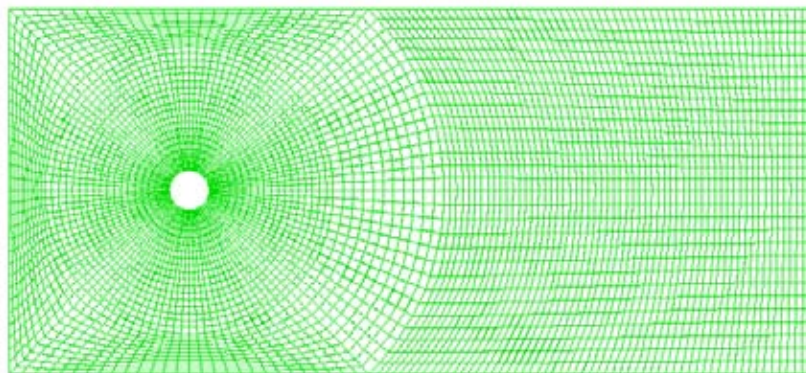


Figura 2.24: Malla de cuadriláteros obtenida con el mallador del presente trabajo.

La inestabilidad del flujo laminar comienza aproximadamente en $t = 20$. El parámetro característico de este problema es el número de Strouhal S , que

es adimensional y se define como:

$$S = \frac{\phi}{TU} \quad (2.52)$$

donde ϕ es el diámetro del obstáculo, T es el período entre dos vórtices consecutivos y U la velocidad que hemos señalado antes como u_∞ . En este caso se tiene $\phi = 1$ y $U = 1$. Para calcular el período se ha medido el tiempo en el que se forman 8 vórtices consecutivos una vez alcanzada la solución periódica, habiendo resultado de aproximadamente 47 unidades de tiempo. Entonces se tiene: $T = 47/8 = 5.875$. Por lo tanto, el número de Strouhal resultante del cálculo numérico S_{num} es:

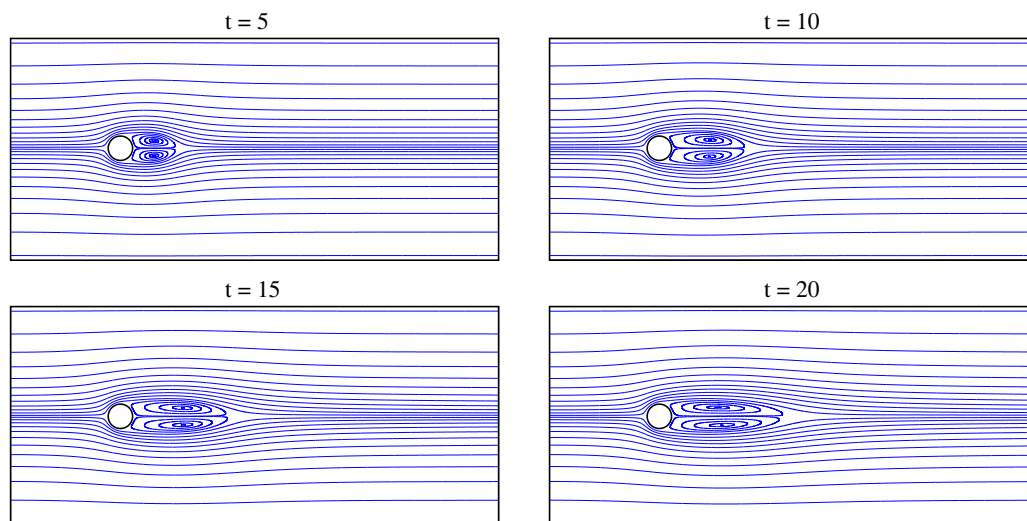
$$S_{\text{num}} = \frac{\phi}{TU} = \frac{1}{5.875 \cdot 1} = 0.17021 \quad (2.53)$$

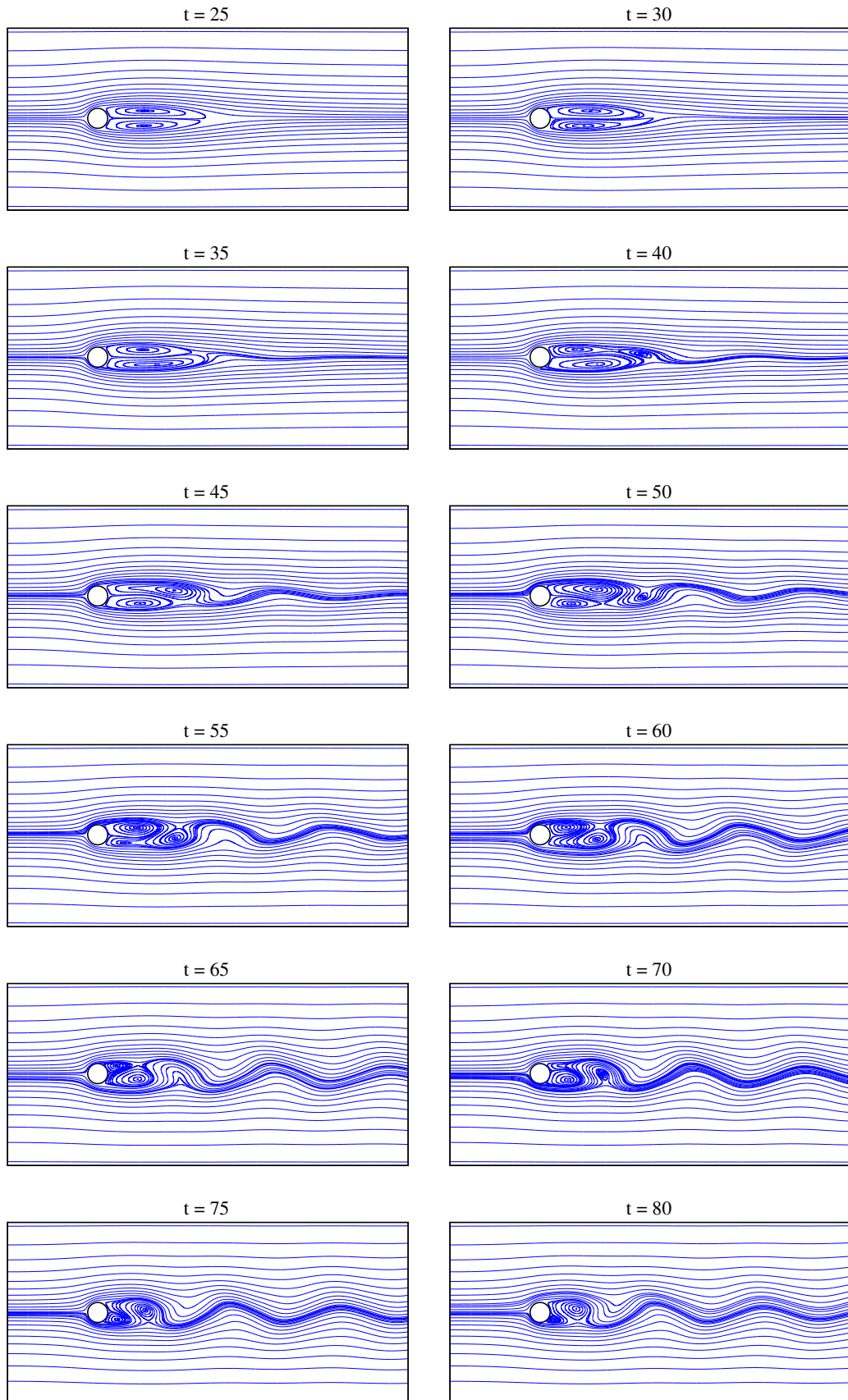
Por otra parte, en la literatura existen varios resultados experimentales para calcular el número de Strouhal. Por ejemplo, Strouhal (1878), Lord Rayleigh (1915) ó Roshko (1954) hicieron experimentos y dieron una fórmula para dicho numero. Utilicemos la de Roshko por ser la más reciente, que denotándolo con S_{ros} es:

$$S_{\text{ros}} = 0.212 \left(1 - \frac{21.2}{Re} \right) \quad (2.54)$$

Teniendo en cuenta que en nuestro caso $Re = 100$, obtenemos $S_{\text{ros}} = 0.16706$, con una desviación que no llega al 2% del valor obtenido con el experimento numérico S_{num} .

A continuación se muestran los resultados de las líneas de corriente para distintos instantes de tiempo. En la figura 2.25 se observa la evolución desde el principio hasta que se alcanza la solución periódica.





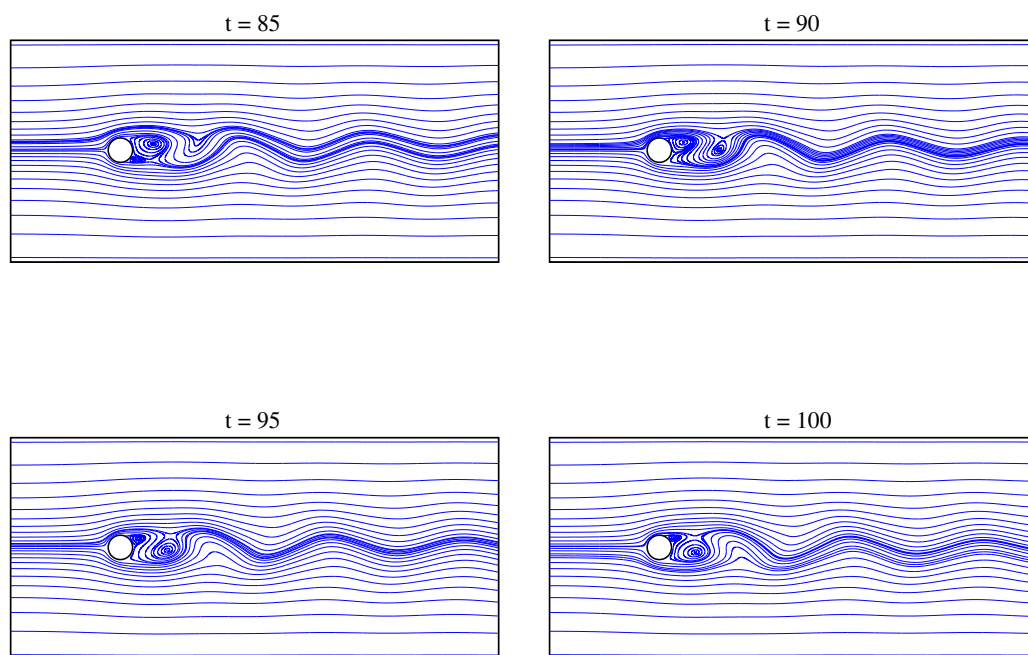
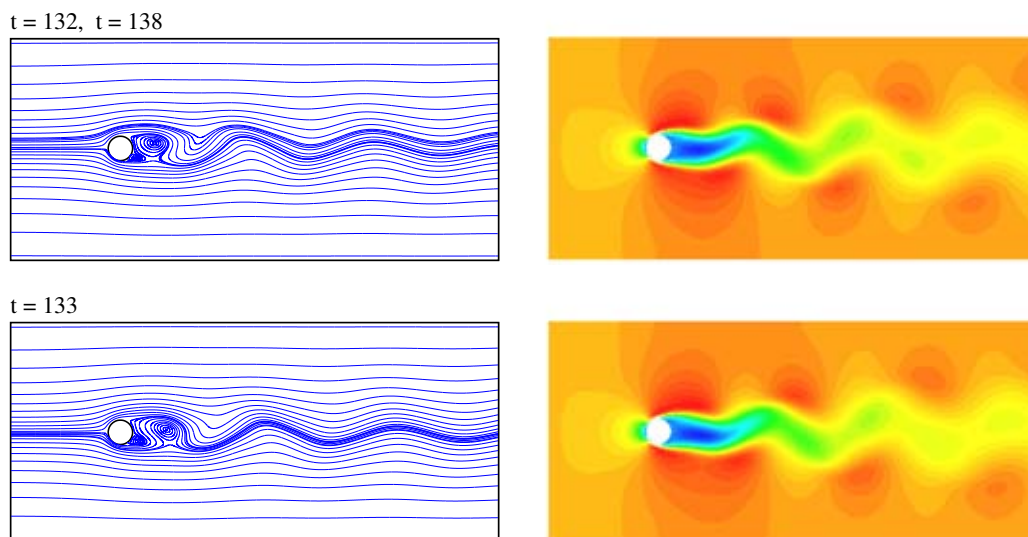


Figura 2.25: Evolución de las líneas de corriente. $Re = 100$.

En la figura 2.26 se observan los resultados cuando se han desarrollado completamente los torbellinos y la solución es periódica. A la izquierda están las líneas de corriente y a la derecha los contornos de velocidad horizontal. Se elige un período de 6 (que es aproximadamente el período real) que va desde $t = 132$ hasta $t = 138$. La periodicidad significa que en $t = 138$ se repite la situación de $t = 132$, lo cual se ha indicado en la figura. Se observa una buena concordancia con las líneas de corriente en ARMERO [1993].



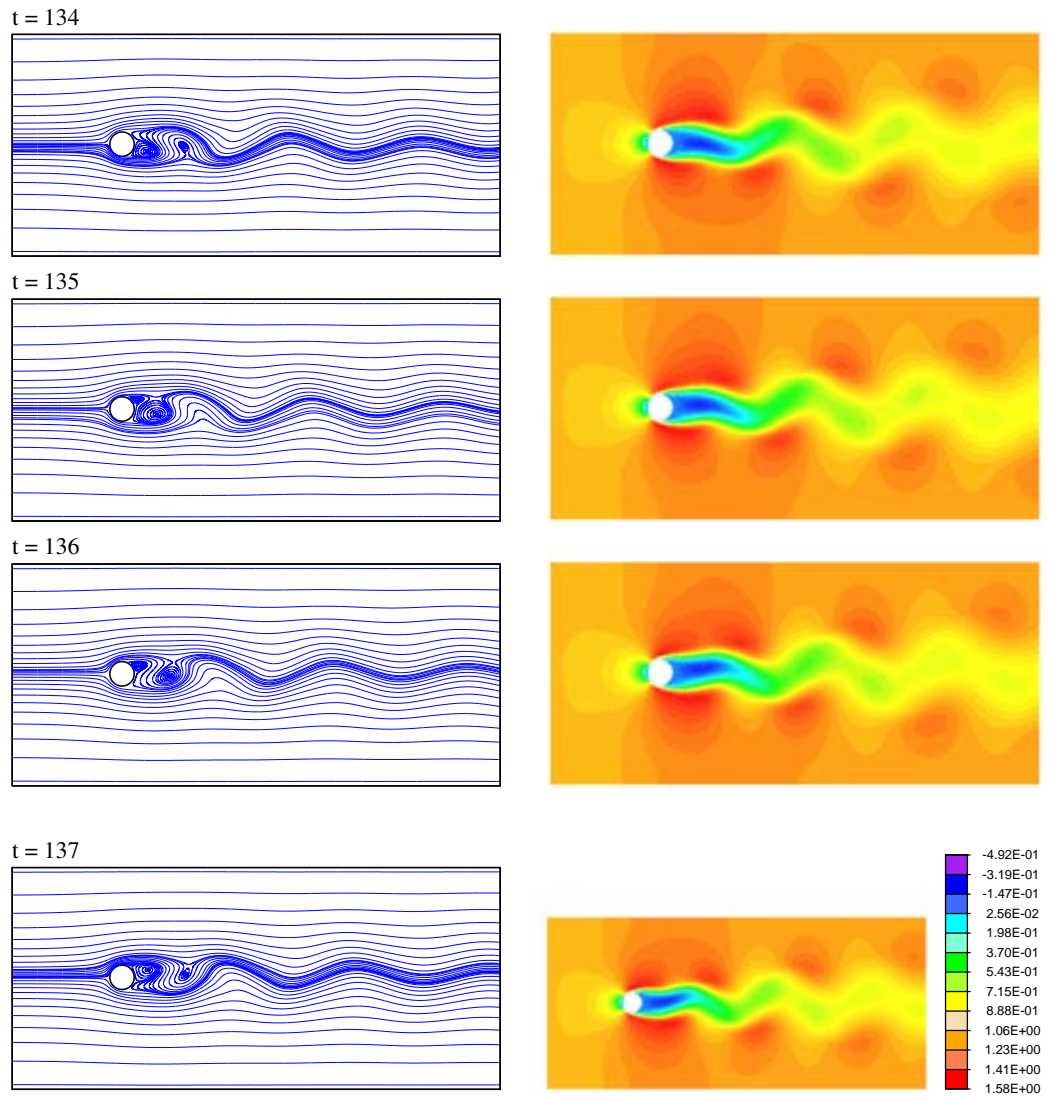


Figura 2.26: Líneas de corriente y contornos de velocidad horizontal a lo largo de un período. $Re = 100$.

Capítulo 3

Modelos matemáticos de la pared arterial

En este capítulo se plantea la formulación de la pared arterial bajo las hipótesis de sólido hiperelástico e isótropo. Se estudia el material de *Ogden* y el material *neohookeano*, utilizando datos experimentales de ensayos de tracción de la arteria aorta para ajustar los parámetros de dichos materiales. Finalmente se muestran dos ejemplos con solución analítica para comparar con el elemento utilizado (ya implementado en *FEAP*) y verificar que el material trabaja correctamente con los parámetros ajustados de los ensayos.

3.1. Descripción de la pared arterial

La pared arterial es un tejido biológico blando que está estructurado en tres capas sensiblemente diferenciadas: *íntima*, *media* y *adventicia*, estando éstas separadas por membranas elásticas (FAUCI ET AL. [1998]) (ver figura 3.1).

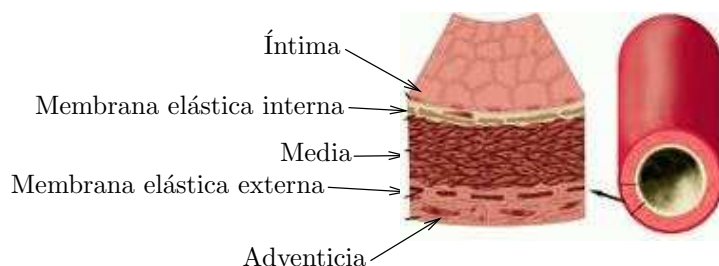


Figura 3.1: *Estructura de la pared arterial.*

Los tejidos biológicos son agrupaciones de células que realizan una función similar y de material extracelular como colágeno y elastina. Se pueden dividir en blandos y duros. Los tejidos blandos, también llamados conectivos, son los que unen, soportan y protegen otras estructuras y órganos de los seres vivos. Se caracterizan por su gran flexibilidad y bajas propiedades mecánicas.

Ejemplos de tejidos blandos son los vasos sanguíneos, cartílagos, músculos, nervios y ligamentos. En oposición a éstos están los tejidos biológicos duros o mineralizados, como los huesos y los dientes.

Las características de las 3 capas de la pared arterial son las siguientes:

- a) Íntima. Es la superficie interior y está formada por una capa de células endoteliales, que son las que están en contacto directo con el flujo sanguíneo y por tanto las que reciben la tensión tangencial de éste. Asimismo estas células se orientan en la dirección predominante del flujo. Una de las misiones de esta capa es mantener la sangre en estado líquido, fundamentalmente por medio de cofactores como la *antitrombina III*, que actúa como inhibidor de la actuación de la *trombina*.
- b) Media. Es la capa intermedia, la más gruesa de las tres y la que presenta mayor capacidad de soporte de la estructura. Está constituida por células musculares, fibras de colágeno, elastina y matriz de relleno. Dependiendo del tipo de arteria esta capa tendrá mayor o menor importancia. Por ejemplo, en las arterias próximas al corazón el grosor de esta capa es mayor debido a la mayor presión interna que ha de soportar la arteria.
- c) Adventicia. Es la capa externa y consiste principalmente en fibras de colágeno, sustancia intercelular, fibroblastos y elastina.

Para el tipo de arterias objeto de este trabajo la capa intermedia es la más relevante a la hora de obtener las características mecánicas. Las arterias de mayor diámetro se llaman también *arterias elásticas* porque la capa media, aparte de ser más gruesa, está compuesta en su mayoría por fibras elásticas. Esto hace que sean susceptibles de deformarse y puedan aumentar su diámetro para almacenar parte de la sangre, entrando en la línea de la teoría de Windkessel (consultar apartado 1.3.2).

En las arterias de menor diámetro y arteriolas la capa íntima es de menor espesor y además está formada mayormente por células musculares, lo cual no les confiere propiedades elásticas.

Las fibras elásticas tienen un comportamiento elástico no lineal, ya que plastifican a partir de un determinado nivel de deformación (BEST Y TAYLOR [1993]). En cambio, las fibras de colágeno empiezan a coger tensión a partir de un nivel más elevado de deformación, pero su rigidez es muchísimo mayor. La combinación de ambos grupos de fibras da lugar al comportamiento de la pared como se muestra en la figura 3.2.

Otra de las características de la pared arterial es la *anisotropía*. Existen direcciones preferentes influenciadas por la disposición de las fibras de colágeno. En las paredes arteriales se distinguen dos familias de fibras en direcciones distintas (FUNG [1993]).

Otros fenómenos presentes en el comportamiento de los tejidos biológicos son el *daño*, la *viscosidad*, la *remodelación*, y la influencia de la temperatura en las propiedades mecánicas.

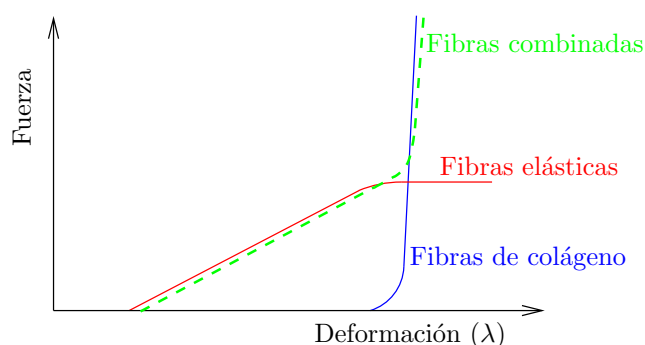


Figura 3.2: *Comportamiento de las fibras elásticas y de colágeno por separado y en combinación.*

En esta tesis únicamente interesan las arterias elásticas, luego nos centraremos en un modelo constitutivo para estas arterias particulares.

Según las características anteriormente citadas, los modelos constitutivos más apropiados para los tejidos blandos en general (y paredes arteriales en particular) serían:

- a) Modelos no lineales, dadas las grandes deformaciones que presentan. Por ejemplo, en una arteria como la aorta humana el alargamiento principal en condiciones normales puede ser $\lambda_1 \approx 1.2$. Una de las formulaciones de mayor difusión para este tipo de modelos es la del sólido *hiperelástico* (HUMPHREY [1995]).
- b) Modelos transversalmente isótropos, debido a la presencia de direcciones preferentes influenciadas por la disposición de las fibras de colágeno.
- c) Una de las hipótesis usualmente aceptada es la del comportamiento isocórico de los tejidos biológicos, debido a la presencia de agua en más de un 70 % (FAUCI ET AL. [1998]).
- d) Modelos que contemplen comportamientos adaptativos frente a acciones externas (RACHEV [2001]). Así, se denomina *remodelación* a la variación de las propiedades del material (remodelado estructural) y a la variación de la geometría por aumento de masa (remodelado másico), también llamado *crecimiento* (RODRÍGUEZ ET AL. [In press], RODRÍGUEZ ET AL. [2003]).
- e) Presencia de tensiones residuales. Las tensiones residuales provienen del hecho de que las paredes arteriales están pretensadas longitudinal y circunferencialmente. Este hecho se manifiesta por el ángulo de apertura cuando se corta longitudinalmente una arteria, reflejándose así la presencia de tensiones residuales en la dirección circunferencial (FUNG [1993]).

- f) Acoplamiento con las variables termodinámicas, principalmente con la temperatura. Se han hecho experimentos donde se ha comprobado que las propiedades mecánicas varían en función de la temperatura (ATIENZA ET AL. [2005]).

3.2. Formulación de la mecánica de medios continuos

Se muestran a continuación las principales expresiones de la mecánica de medios continuos que se usarán más adelante a efectos de reflejar la notación seguida. Bajo esta formulación queda implícita la asunción de todas las hipótesis de la mecánica de medios continuos. Una descripción detallada y más formal de estos conceptos se puede ver en TRUESDELL [1977], GURTIN [1981] o GONZÁLEZ Y STUART [1995].

3.2.1. Cinemática

Si denotamos con φ la función que lleva los puntos materiales X en la posición de referencia a la posición actual x se tiene que $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ (ver figura 3.3).

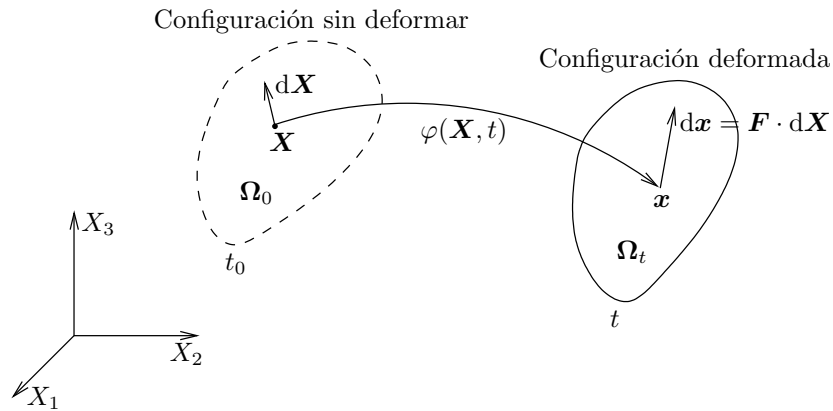


Figura 3.3: *Cinemática del sólido continuo.*

El tensor de deformaciones F es:

$$\mathbf{F} \equiv \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (3.1)$$

denotando con Grad el gradiente en la configuración de referencia.

Un resultado importante que se usará en las ecuaciones de los modelos isótropos es el teorema de descomposición polar del tensor de deformación. Dicho teorema demuestra que F se puede expresar de forma única como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (3.2)$$

siendo \mathbf{R} un tensor ortogonal (una rotación) y \mathbf{U} y \mathbf{V} son tensores simétricos definidos positivos, llamados tensor de alargamiento derecho y tensor de alargamiento izquierdo respectivamente (GURTIN [1981]).

Los autovalores de \mathbf{U} y \mathbf{V} son tres valores reales y se denotarán con λ_1 , λ_2 y λ_3 . Una consecuencia de la ortogonalidad de \mathbf{R} es:

$$J = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (3.3)$$

El tensor de *Cauchy-Green* por la derecha \mathbf{C} y el tensor de *Cauchy-Green* por la izquierda \mathbf{b} se definen tal que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (3.4)$$

Otras medidas de la deformación son las dadas por el *tensor de deformación de Green* \mathbf{E} y por el *tensor de Almansi* \mathbf{e} .

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (3.5)$$

Y el tensor de deformación infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}$ es:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{d} + \nabla^T \mathbf{d}) = \nabla^{\text{sim}} \mathbf{d} \quad (3.6)$$

donde \mathbf{d} es el vector de desplazamientos del sólido y el símbolo ∇^{sim} es el operador gradiente simétrico, el cual ya se utilizó en el capítulo anterior.

3.2.2. Tensiones

Denotamos con $\boldsymbol{\sigma}$ al tensor de tensiones de Cauchy. El primer tensor de *Piola-Kirchhoff* \mathbf{P} es (ver figura 3.4):

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (3.7)$$

El *tensor de Kirchhoff* $\boldsymbol{\tau}$ se define como $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$ y el segundo tensor de *Piola-Kirchhoff* \mathbf{S} es:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T} \quad (3.8)$$

Observación. El tensor \mathbf{S} se obtiene aplicando el operador *pull-back* al tensor de *Kirchhoff* (MARS DEN Y HUGHES [1983]).

3.2.3. El tensor de elasticidad

La linealización del tensor \mathbf{S} es necesaria para resolver problemas con materiales no lineales. De esta linealización surge el tensor de elasticidad en la descripción material \mathbb{C} , que es por definición ¹:

¹Para las demostraciones de las expresiones de este apartado ver por ejemplo HOLZAPFEL [2000].

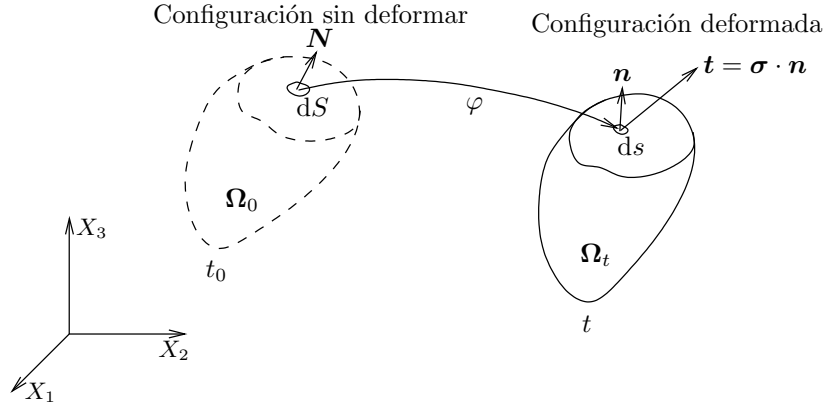


Figura 3.4: Tensiones y tensores de tensión en las configuraciones de referencia y deformada.

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{o en componentes} \quad \mathcal{C}_{ABCD} = 2 \frac{\partial S_{AB}}{\partial C_{CD}} \quad (3.9)$$

Utilizando el tensor de elasticidad se puede calcular el incremento de tensiones en función del incremento de deformaciones con una aproximación de primer orden:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbb{C} : \Delta \mathbf{E} \quad \text{siendo} \quad \Delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \nabla (\Delta \mathbf{d}) + (\mathbf{F}^T \nabla (\Delta \mathbf{d}))^T) \quad (3.10)$$

donde se ha utilizado la definición de \mathbf{E} dada en (3.5). Δ representa un incremento infinitesimal y ∇ , como es usual, el operador gradiente.

El tensor de elasticidad tiene unas propiedades llamadas *simetrías menores*, a saber:

$$\mathcal{C}_{ABCD} = \mathcal{C}_{BACD} = \mathcal{C}_{ABDC} \quad (3.11)$$

que se deducen de la simetría de los tensores \mathbf{C} y \mathbf{S} .

Análogamente se puede definir el tensor de elasticidad en la configuración deformada \mathbf{c} como el *push-forward* de \mathbb{C} dividido por J (MARS DEN Y HUGHES [1983]):

$$c_{abcd} = J^{-1} F_{aA} F_{bB} F_{cC} F_{dD} \mathcal{C}_{ABCD} \quad (3.12)$$

donde se ha utilizado el convenio de sumación de Einstein mediante el uso de índices repetidos mudos (las letras mayúsculas en este caso). El tensor \mathbf{c} también cumple las simetrías menores, esto es: $c_{abcd} = c_{bacd} = c_{abdc}$.

La fórmula equivalente a (3.10) pero en la descripción espacial es:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \Delta \mathbf{e} \quad \text{siendo} \quad \Delta \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{d} + \nabla^T \mathbf{d}) = \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.13)$$

3.3. Modelos hiperelásticos para tejidos biológicos blandos

Las arterias en las que se produce la interacción con el flujo sanguíneo son elásticas. Como se comentó en el apartado 1.3.2, solamente en las arterias de mayor diámetro es donde se produce el fenómeno de interacción, que precisamente es debido a que estas arterias tienen mayor contenido de fibras elásticas en la capa media.

También es deseable considerar la incompresibilidad, que a efectos del modelo matemático se reduce a una ecuación de restricción cinemática, como se mostrará posteriormente.

Los *materiales elásticos* se definen como aquéllos en los que hay una correspondencia biunívoca entre su estado de deformación y su estado tensional. El resto de los materiales se definen por exclusión como inelásticos.

Los *materiales hiperelásticos* son un subconjunto de los materiales elásticos. Un material es *hiperelástico* si su densidad de energía libre ² Ψ en la configuración de referencia Ω_0 es función exclusivamente del estado de deformación (HOLZAPFEL [2000]). Siendo así, se puede escribir $\Psi = \Psi(\mathbf{F})$ ó bien de acuerdo con (3.4) $\Psi = \Psi(\mathbf{C})$. En estas condiciones, dada la independencia de la energía a los procesos térmicos (hipótesis hecha anteriormente) y la imposibilidad del aumento de la entropía, el aumento de la energía libre $d\Psi$ es equivalente al aumento de la energía interna dE , y esta última es provocada por el trabajo realizado por las fuerzas internas dW . De aquí se tiene que el aumento de energía libre es igual al trabajo realizado de las fuerzas internas:

$$d\Psi = dW \quad (3.14)$$

Por lo tanto es equivalente utilizar la función de energía Ψ a utilizar la función que represente el trabajo acumulado de las fuerzas internas W , por lo que se utiliza esta última, que depende únicamente del estado de deformación del sólido $W = W(\mathbf{F})$ ó $W = W(\mathbf{C})$. Esta función W debe respetar ciertas condiciones, como la de *objetividad* y *convexidad*. La ecuación constitutiva de cada material se reduce entonces a buscar su función de densidad de energía W .

Los materiales hiperelásticos también se llaman *conservativos*, ya que tienen la propiedad de que en una trayectoria cerrada la disipación interna es nula, en oposición a los materiales disipativos (con comportamiento viscoso por ejemplo).

A continuación se exponen las expresiones de los tensores de tensiones y del tensor de elasticidad vistas en los apartados anteriores particularizadas para un material hiperelástico. Todas las expresiones se pondrán en términos de la función de densidad de energía W .

²La energía libre es $\Psi = E - TS$, donde E es la densidad de energía interna, T la temperatura y S la densidad de entropía, todas ellas variables de estado.

El primer tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} queda (HOLZAPFEL [2000]):

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (3.15)$$

y a partir de (3.15) y aplicando expresiones del apartado 3.2.2 se obtiene:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad \boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (3.16)$$

Observación. La derivada de la función de densidad de energía W respecto a un tensor se ha expresado en (3.15) utilizando una forma compacta de escribir, pero ha de entenderse que hay que derivar componente a componente. Por ejemplo $\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}$ significa en realidad $P_{aA} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial F_{aA}}$. Para ver todas las expresiones desarrolladas en subíndices consultar HOLZAPFEL [2000].

La expresión del tensor de elasticidad \mathbb{C} en el caso de material hiperelástico queda:

$$\mathbb{C} = 4 \frac{\partial^2 W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (3.17)$$

donde se ha aplicado (3.9) teniendo en cuenta la expresión para \mathbf{S} en (3.16).

Ahora el tensor de elasticidad tiene propiedades suplementarias a las simetrías menores (que son generales y ya expresadas en (3.11)). Concretamente se cumple que:

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^T \quad \text{ó en componentes} \quad \mathcal{C}_{ABCD} = \mathcal{C}_{CDAB} \quad (3.18)$$

y son llamadas *simetrías mayores*. Las simetrías menores junto con las mayores hacen que las 81 componentes iniciales de \mathbb{C} se reduzcan a 21 componentes independientes en cada estado de deformación.

Observación. La condición de simetría $\mathbb{C} = \mathbb{C}^T$ es una condición necesaria y suficiente para que un material sea hiperelástico. De hecho, se puede definir un material hiperelástico como aquel en el que se cumple $\mathbb{C} = \mathbb{C}^T$. Esto quiere decir que esta condición es equivalente a la existencia de la función de densidad de energía W . Además, las simetrías mayores hacen que cuando más tarde se discreticen las ecuaciones aplicando elementos finitos, la matriz de rigidez sea simétrica, con las consiguientes ventajas computacionales.

Una ventaja fundamental de utilizar la hipótesis de hiperelasticidad es que, como se está viendo, existe una formulación matemática muy desarrollada, así como varios modelos constitutivos propuestos y asentados ya en la literatura. Los inconvenientes de esta hipótesis es, en primer lugar, que por sí sola no permite reflejar fenómenos viscosos, así como el acoplamiento

con fenómenos termodinámicos debido a la disipación de energía en forma de calor.

No obstante, en este trabajo el objetivo fundamental es desarrollar métodos numéricos para la interacción. Y la utilización de modelos hiperelásticos aportan resultados más realistas que los modelos lineales.

3.3.1. Hiperelasticidad isótropa

Una división alternativa de los materiales es clasificarlos en *isótopos* y *anisótopos*. La isotropía se caracteriza por una igualdad en el comportamiento en cualquier dirección del espacio. En cambio, los sólidos anisótopos tienen al menos una dirección de comportamiento diferente. En lenguaje más formal, un material es isótropo cuando su respuesta material no cambia ante cualquier rotación en la configuración inicial.

En particular, su función de densidad de energía W es invariante frente a rotaciones, luego se puede escribir $W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{F} \cdot \mathbf{Q})$ para todo tensor ortogonal $\mathbf{Q} \in \text{SO}(3)$, siendo $\text{SO}(3)$ el grupo de los tensores ortogonales propios en 3 dimensiones. Se dice que el *grupo de simetrías* del material coincide con el de rotaciones (para una descripción detallada de las simetrías materiales, véase por ejemplo TRUESDELL [1977]).

La introducción de la hipótesis adicional de isotropía simplifica notablemente los modelos en el aspecto matemático aunque hace que no se puedan considerar las direcciones preferentes de orientación de las fibras en la pared arterial.

Una vez asumida la isotropía, la función de densidad de energía W se puede expresar en función de los invariantes del tensor \mathbf{C} , que los denotamos con (I_1, I_2, I_3) , o bien en función de los alargamientos principales $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de \mathbf{U} .

A continuación se explicitan las expresiones para el caso de los alargamientos principales, esto es, $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, que es lo que se ha utilizado en esta tesis.

Observación. *Las expresiones suelen salir más cortas y compactas si se escriben en función de los invariantes. La ventaja de utilizar como variables los alargamientos principales es que en los ensayos experimentales es lo que podemos medir directamente. En nuestro caso los parámetros de los modelos se van a ajustar con datos experimentales, luego utilizamos la formulación en alargamientos principales.*

Función de los alargamientos principales

Obtengamos la expresión de las tensiones. Se puede demostrar que para un material isótropo el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ tiene las mismas direcciones principales que el de alargamiento izquierdo \mathbf{V} , siendo expresable

de la forma (HOLZAPFEL [2000]):

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{a=1}^3 \sigma_a \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a, \text{ siendo } \sigma_a = J^{-1} \lambda_a \frac{\partial W}{\partial \lambda_a} \quad (3.19)$$

donde J es función de los alargamientos según la expresión (3.3). Análogamente, el segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} tiene las mismas direcciones principales que el de alargamiento derecho \mathbf{U} , quedando:

$$\mathbf{S} = \sum_{a=1}^3 S_a \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a, \text{ siendo } S_a = \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial W}{\partial \lambda_a} \quad (3.20)$$

Observación. *Los tensores de alargamiento \mathbf{U} y \mathbf{V} son magnitudes cinemáticas. Por tanto, lo que estamos haciendo es deducir propiedades de los tensores de tensiones a partir de magnitudes exclusivamente cinemáticas, sin introducir ninguna hipótesis adicional sobre la ecuación constitutiva particular del material. De ahí la importancia y utilidad de las expresiones (3.19) y (3.20).*

La expresión del tensor de elasticidad \mathbb{C} se puede obtener a partir del segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} con la siguiente expresión (ver HOLZAPFEL [2000] para una demostración):

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = & \sum_{a,b=1}^3 \frac{1}{\lambda_b} \frac{\partial S_a}{\partial \lambda_b} \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_b \otimes \mathbf{N}_b + \\ & \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^3 \frac{S_b - S_a}{\lambda_b^2 - \lambda_a^2} (\mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_b \otimes \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_b + \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_b \otimes \mathbf{N}_b \otimes \mathbf{N}_a) \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde es conveniente recordar que los autovalores de \mathbf{C} son los mismos que de \mathbf{U} ó \mathbf{V} , pero elevados al cuadrado. Esto es, si λ_a es autovalor de \mathbf{U} , entonces λ_a^2 es autovalor de \mathbf{C} .

A continuación se van a desarrollar los dos materiales que utilizamos para modelizar las arterias reales: el de Ogden y el neohookeano. Originalmente los modelos de Ogden y el neohookeano se utilizaron para materiales como las gomas, el caucho y polímeros en general, pero se ha comprobado que también recogen de una forma bastante razonable el comportamiento de tejidos biológicos blandos, y en particular las paredes de los vasos sanguíneos.

Material de Ogden

Un material de Ogden es un material hiperelástico isótropo cuya función de densidad de energía tiene la siguiente expresión (OGDEN [1972]):

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (3.22)$$

siendo N un número arbitrario, aunque se ha comprobado que con $N = 3$ es suficiente para un buen ajuste con datos experimentales, al menos en gomas. Los parámetros indeterminados μ_p representan el módulo cortante y α_p son constantes adimensionales, siendo $p = 1, 2, \dots, N$. Hay una relación adicional que deben cumplir los parámetros, llamada *condición de consistencia*, que viene de la comparación con la teoría lineal:

$$2G = \sum_{p=1}^N \mu_p \alpha_p \quad \text{siendo} \quad \mu_p \alpha_p > 0 \quad p = 1, 2, \dots, N \quad (3.23)$$

donde el parámetro G es el *módulo cortante* en la configuración de referencia obtenido a partir de la teoría lineal (HOLZAPFEL [2000]).

El modelo de Ogden ha resultado ajustarse de forma excelente a muchos datos experimentales, pero tiene el inconveniente de que el ajuste de la expresión (3.22) a los datos empíricos no es nada trivial debido a la no linealidad en los parámetros α_p . Normalmente los ajustes se hacen por mínimos cuadrados. En el apartado 3.4 se explica el método de ajuste desarrollado en esta tesis, el cual es una variante simplificada del algoritmo propuesto en TWIZELL Y OGDEN [1983]. Recientemente se ha comprobado que no se puede asegurar la unicidad de un conjunto óptimo de parámetros (OGDEN ET AL. [2004]).

Observación. *El modelo de Ogden es una expresión muy general, y otros modelos, como el neohookeano, el de Mooney-Rivlin o el de Varga se obtienen como casos particulares de éste, esto es, haciendo a priori alguna hipótesis adicional sobre los parámetros. De todas maneras la realidad ocurrió en sentido inverso: el primer modelo propuesto fue el neohookeano (RIVLIN [1948]). Después, en 1952 el modelo de Mooney-Rivlin generalizó el neohookeano. Luego apareció el modelo de Varga (VARGA [1966]) y finalmente el modelo de Ogden generalizó los anteriores (OGDEN [1972]).*

Material neohookeano incompresible

Un material neohookeano es un material hiperelástico isótropo cuya función de densidad de energía es:

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = c_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \quad (3.24)$$

donde c_1 es el único parámetro a ajustar.

El modelo neohookeano se puede obtener del de Ogden (3.22) haciendo $N = 1$, $\alpha_1 = 2$. Este modelo es muy fácil de ajustar por mínimos cuadrados, ya que (3.24) es lineal en el parámetro a ajustar. El inconveniente es que proporciona curvas que no se ajustan tan bien como el modelo de Ogden al comportamiento de la pared arterial, como se verá en el apartado 3.4.

3.3.2. Comentarios sobre hiperelasticidad anisótropa

Se puede asumir que los tejidos biológicos blandos se comportan de manera isótropa para pequeñas deformaciones y tensiones.

Pero cuando las tensiones son elevadas se producen cambios estructurales en la pared arterial, sobre todo debido al alineamiento de las fibras de colágeno en direcciones preferentes, que hacen que el material se comporte de manera diferente en la dirección de las fibras.

Materiales con una dirección preferente: Isotropía transversal

En ligamentos y tendones, por ejemplo, el material tiene una dirección preferente y se pueden utilizar modelos con isotropía transversal. En estos modelos, a la dirección preferente se le asocia un comportamiento diferente, y en el plano perpendicular a ésta el material se considera isótropo.

La isotropía transversal es la forma más simplificada de representar la anisotropía de un material. Físicamente consiste en una matriz de material isótropo en la que una dirección ha sido reforzada con fibras.

Ejemplos de modelos con esta característica son el de Weiss (WEISS [1996]) o el de Almeida o Cohen (ALMEIDA Y SPILKER [1998]).

Materiales con dos direcciones preferentes

En el caso de la pared arterial la situación es más compleja, ya que se observan dos direcciones preferentes de orientación, luego el modelo constitutivo debiera reflejar este fenómeno. Siguiendo con las arterias, éstas están formadas por:

- a) Una matriz de elastina, la cual sí se puede suponer con comportamiento isótropo.
- b) Dos familias de fibras de colágeno, las cuales están dispuestas en espirales simétricas.

Observación. *Las direcciones preferenciales no tienen porqué ser perpendiculares entre sí. En el caso particular de que lo sean se dice que el material es ortótropo.*

Un ejemplo de modelos de este tipo y aplicado a paredes arteriales puede verse en HOLZAPFEL Y GASSER [2000].

Consideraciones finales

Dependiendo del grado de anisotropía del material el tensor de elasticidad \mathbb{C} de un material hiperelástico (3.17) tendrá más o menos constantes independientes para cada estado de deformación, desde solamente 2 constantes para un material isótropo hasta 21 para un material completamente anisótropo. En el cuadro 3.1 se muestran las constantes necesarias para cada uno de los tipos de anisotropía vistos.

Grado de anisotropía	Constantes independientes en \mathbb{C}
Totalmente anisótropo	21
Dos familias de fibras	9
Isotropía transversal	5
Isótropo	2

Cuadro 3.1: *Grado de anisotropía y constantes del tensor de elasticidad.*

3.3.3. Formulación de elementos finitos

En el caso del sólido se han utilizado elementos ya implementados en el programa de elementos finitos **FEAP**, tanto para el material de Ogden como para el neohookeano. En dicho programa se realiza la formulación en grandes deformaciones. El tratamiento de la incompresibilidad se hace a través del principio variacional de *Simó-Taylor-Pister* (SIMÓ ET AL. [1985], SIMÓ Y TAYLOR [1991]), en el que existen tres campos incógnita: desplazamientos, presión y dilatación, dando lugar a una formulación mixta. No obstante, la presión y la dilatación son grados de libertad internos que se condensan a nivel de elemento. La función de energía se divide en una parte volumétrica y otra isocórica. La parte volumétrica utilizada en este trabajo tiene la expresión:

$$W_{\text{vol}}(J) = \kappa \mathcal{G}(J) \quad (3.25)$$

donde $\kappa > 0$ es el módulo volumétrico y se supone muy elevado ($\kappa = 10^7 - 10^9$ aquí) y a la función $\mathcal{G}(J)$ se le llama *función de penalización*. La función $\mathcal{G}(J)$ en nuestro caso incompresible es arbitraria, y un ejemplo puede ser $\mathcal{G}(J) = 0.5(J - 1)^2$.

Una vez discretizadas espacialmente las ecuaciones del continuo utilizando el MEF se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas cuya incógnita son los desplazamientos nodales \mathbf{d}^{n+1} . Para la integración temporal se utiliza la *regla trapezoidal* (NEWMARK [1959]) dando lugar a las siguientes expresiones:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}^{n+1} + \mathbf{K}(\mathbf{d}^{n+1})\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}^n + \frac{\Delta t^2}{4} \left(\ddot{\mathbf{d}}^n + \ddot{\mathbf{d}}^{n+1} \right) \quad (3.26b)$$

$$\dot{\mathbf{d}}^{n+1} = \dot{\mathbf{d}}^n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{d}}^n + \ddot{\mathbf{d}}^{n+1}) \quad (3.26c)$$

donde despejando la aceleración de (3.26b) y sustituyéndola en (3.26a) queda el sistema de ecuaciones con las incógnitas en desplazamientos. Para dicho sistema se calcula la matriz tangente y se hacen iteraciones según el método de *Newton-Raphson*.

3.4. Datos experimentales y calibración de los modelos

Con el fin de calibrar los parámetros de los modelos de Ogden y neo-hookeano se han utilizado resultados experimentales.

Estos experimentos han sido llevados a cabo en el laboratorio del departamento de Ciencia de los Materiales de la Universidad Politécnica de Madrid en colaboración con el Hospital Puerta de Hierro. Dicho hospital suministró arterias humanas reales obtenidas de pacientes a los que se les ha realizado la autopsia. Los experimentos se han realizado sobre una arteria aorta sana y otra dañada con esclerosis con un grado severo de estenosis. Consisten en un ensayo de tracción pura llevado hasta rotura.

Observación. *Esclerosis y estenosis son palabras de origen griego. Esclerosis significa endurecimiento y estenosis significa estrechamiento. La arteria dañada en el ensayo tenía el diagnóstico de esclerosis debido a un estrechamiento en el conducto, esto es, estenosis. Para las arterias con estenosis también se suele utilizar la palabra aterosclerosis, donde implícitamente se supone que la arteria ha endurecido debido a un estrechamiento de su sección por crecimiento de la pared, concretamente de la capa íntima. En lo que sigue utilizaremos la palabra estenosis para referirnos a esta arteria.*

El objetivo de estos ensayos es doble:

- a) Obtener datos sobre el alargamiento en dirección circunferencial y la tensión de Cauchy (tensión real) en esta dirección y observar la diferencia entre la arteria sana y la arteria patológica con estenosis.
- b) Comprobar si existe una diferencia sensible en el comportamiento dependiendo de la dirección en que se tome la probeta, esto es, si la anisotropía estructural de la pared arterial origina comportamientos direccionales muy diferentes.

Teniendo en cuenta estos dos objetivos se han tomado muestras en tres direcciones: una en dirección circunferencial, otra en dirección axial y otra a 45° (figura 3.5).

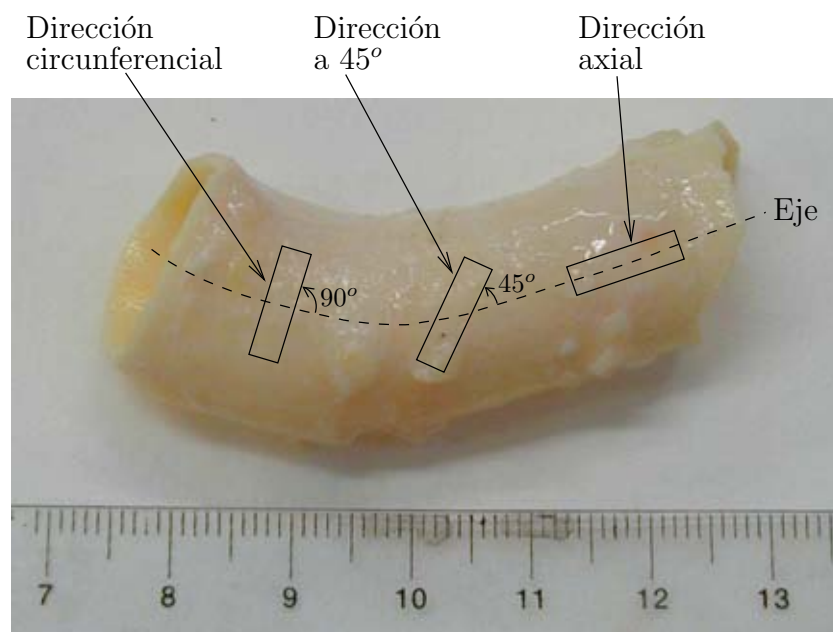


Figura 3.5: *Probetas tomadas de la arteria aorta en tres orientaciones diferentes.*

3.4.1. Descripción técnica de los ensayos

Las probetas de arteria se sujetan por las partes inferior y superior con placas metálicas tal como se ve en la figura 3.6. La parte inferior queda fija y la parte superior tiene desplazamientos controlados durante el ensayo.

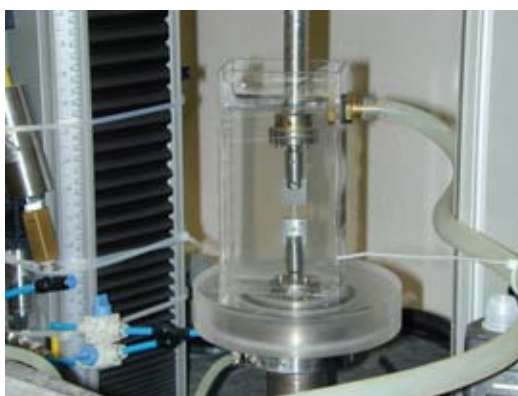


Figura 3.6: *Sujeción de la probeta de arteria en la máquina de ensayos.*

Durante el ensayo la probeta está sumergida en un líquido, que es suero fisiológico a temperatura de 37° . La temperatura se controla mediante la recirculación de ese líquido pasando por una cuba externa en la que se calienta para mantener dicha temperatura. En la figura 3.7, a la derecha se puede

observar el recipiente en el que se calienta el suero así como el conducto por el que circula el suero fisiológico.



Figura 3.7: *Circuito para calentar el suero fisiológico.*

En el ensayo la información obtenida directamente es el desplazamiento impuesto y la fuerza medida. Pero la información requerida para la ecuación constitutiva son el alargamiento principal y la tensión verdadera o de Cauchy. El alargamiento se obtiene de forma inmediata a partir del desplazamiento mediante:

$$\lambda = \frac{l}{l_0} = \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} \quad (3.27)$$

siendo l_0 la longitud inicial y Δl el desplazamiento impuesto por la máquina.

Ahora bien, obtener la tensión de Cauchy no es tan inmediato, ya que se necesita conocer el área actual de la sección de la probeta. Para ello se considera la hipótesis de incompresibilidad y el área se deduce con la condición de conservación del volumen, esto es:

$$l_0 A_0 = l A \longrightarrow A = \frac{l_0 A_0}{l} = \frac{A_0}{\lambda} \quad (3.28)$$

siendo $A_0 = b_0 t_0$ el área inicial de la sección y $A = b t$ el área actual. En la figura 3.8 se muestran estas magnitudes y las dimensiones de una probeta tipo.

La tensión de Cauchy σ queda ahora, teniendo en cuenta (3.28):

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0} \lambda \quad (3.29)$$

La hipótesis de incompresibilidad se puede comprobar haciendo medidas de b y t a lo largo del ensayo. Para ello se monta un dispositivo adicional que mediante haces de luz láser y la sombra proyectada puede medir estas dimensiones. En la figura 3.9 se muestra el aparato donde se aprecia la luz láser de color verde. En el ensayo este dispositivo se dispuso para medir el

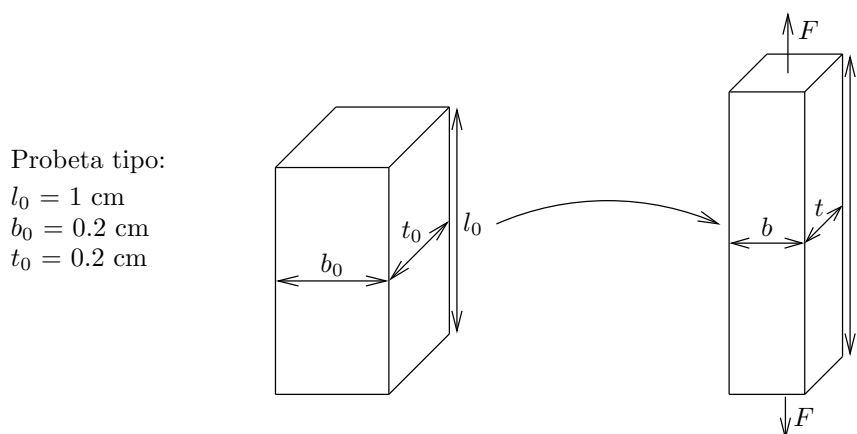


Figura 3.8: Dimensiones iniciales y dimensiones actuales de la probeta.

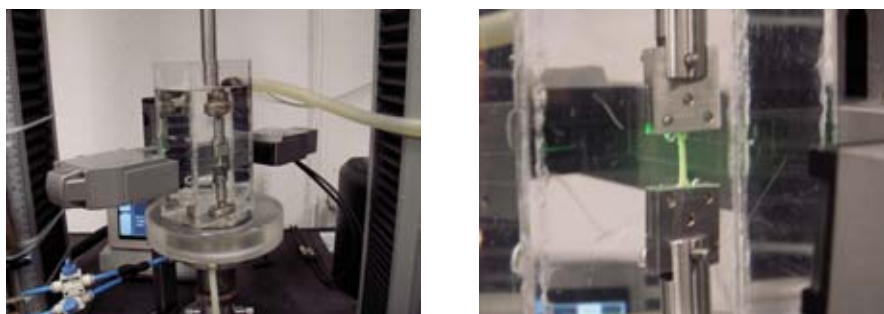


Figura 3.9: Dispositivo con luz láser para medir el ancho actual de la probeta.

espesor t de la probeta, ya que hacer medidas de ambas dimensiones b y t es técnicamente más complicado.

Las medidas realizadas no resultaron satisfactorias del todo, ya que las imperfecciones en los laterales y el desprendimiento de algunas pequeñas fibras al ir aumentando la tensión hacen que la sombra proyectada no refleje bien las medidas reales. A pesar de esto, en las medidas obtenidas al menos de un modo cualitativo sí que se observó una disminución continua del espesor t conforme aumentaba la longitud l , con lo que el volumen se mantendría constante.

Todos los ensayos se realizaron hasta la rotura de las fibras de la arteria. En la figura 3.10 se muestra ese instante y el tipo de rotura en la arteria.

Asimismo, antes de realizar el ensayo completo hasta rotura las probetas se sometieron a varios ciclos de carga y descarga para tratar de reproducir mejor las condiciones fisiológicas.



Figura 3.10: *Instante de rotura de la arteria.*

3.4.2. Curvas teóricas de los modelos

El objetivo de esta sección es obtener la expresión de los modelos de Ogden y neoohookeano para el caso particular del ensayo de tracción simple.

En la figura 3.11 se muestra el esquema del ensayo, donde se supone tensión en una sola dirección.

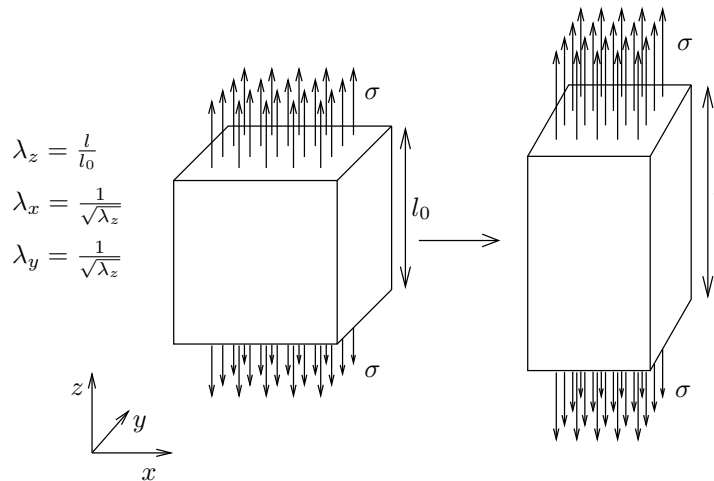


Figura 3.11: *Esquema del ensayo de tracción con la hipótesis de incompresibilidad.*

En la expresión de la tensión en función de los alargamientos principales (3.19) hay que considerar la incompresibilidad, por lo que hay que añadir el término π correspondiente a la presión interna:

$$\sigma_a = -\pi + J^{-1} \lambda_a \frac{\partial W}{\partial \lambda_a} \quad (3.30)$$

que se ha denotado con π para diferenciarla de p , que hace referencia a la presión externa aplicada en los ejemplos de la sección posterior 3.5.

Para determinar π se utiliza la hipótesis de que en este ensayo la tensión es uniaxial en dirección z . Con esta hipótesis, particularizando (3.30) en dirección x se tiene:

$$\sigma_x = -\pi + J^{-1}\lambda_x \frac{\partial W}{\partial \lambda_x} = 0 \quad \longrightarrow \quad \pi = J^{-1}\lambda_x \frac{\partial W}{\partial \lambda_x} \quad (3.31)$$

Sustituyendo (3.31) en la expresión de la tensión en z queda:

$$\sigma_z = -\pi + J^{-1}\lambda_z \frac{\partial W}{\partial \lambda_z} = -J^{-1}\lambda_x \frac{\partial W}{\partial \lambda_x} + J^{-1}\lambda_z \frac{\partial W}{\partial \lambda_z} = J^{-1} \left(\lambda_z \frac{\partial W}{\partial \lambda_z} - \lambda_x \frac{\partial W}{\partial \lambda_x} \right) \quad (3.32)$$

Asimismo, considerando la hipótesis de incompresibilidad $J = \lambda_x \lambda_y \lambda_z = 1$ la expresión (3.32) queda:

$$\sigma_z = \lambda_z \frac{\partial W}{\partial \lambda_z} - \lambda_x \frac{\partial W}{\partial \lambda_x} \quad (3.33)$$

También se hace la hipótesis suplementaria $\lambda_x = \lambda_y$, con lo que de la condición de incompresibilidad se tiene:

$$\lambda_x = \lambda_y = \frac{1}{\sqrt{\lambda_z}} \quad (3.34)$$

Estos resultados se introducen a continuación en las ecuaciones constitutivas correspondientes a los modelos de Ogden y neohookeano.

Material de Ogden

Derivando en (3.22) se tiene:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_a} = \sum_{p=1}^3 \mu_p \lambda_a^{\alpha_p - 1} \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.35) en (3.33) resulta:

$$\sigma_z = \lambda_z \sum_{p=1}^3 \mu_p \lambda_z^{\alpha_p - 1} - \lambda_x \sum_{p=1}^3 \mu_p \lambda_x^{\alpha_p - 1} = \sum_{p=1}^3 \mu_p (\lambda_z^{\alpha_p} - \lambda_x^{\alpha_p}) \quad (3.36)$$

y teniendo en cuenta (3.34), queda finalmente:

$$\sigma_z = \sum_{p=1}^3 \mu_p \left(\lambda_z^{\alpha_p} - \lambda_z^{-\frac{\alpha_p}{2}} \right) \quad (3.37)$$

que es la curva que hay que ajustar a los datos experimentales para obtener las constantes μ_p y α_p .

Material neohookeano

Derivando en (3.24) se obtiene:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_a} = 2c_1 \lambda_a \quad (3.38)$$

y sustituyendo este resultado junto con (3.34) en (3.33) queda:

$$\sigma_z = 2c_1 \left(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_z} \right) \quad (3.39)$$

Esta expresión ha de ajustarse a los resultados experimentales para obtener la constante c_1 .

3.4.3. Resultados experimentales y ajuste de los modelos

Se muestran ahora los resultados empíricos y el ajuste de los modelos de Ogden (3.37) y neohookeano (3.39) a dichos resultados.

En las figuras 3.12 y 3.13 se observan los resultados experimentales de las tres probetas tomadas en las tres direcciones diferentes que se indicaron en la figura 3.5 para la aorta sana y la aorta dañada con estenosis respectivamente.

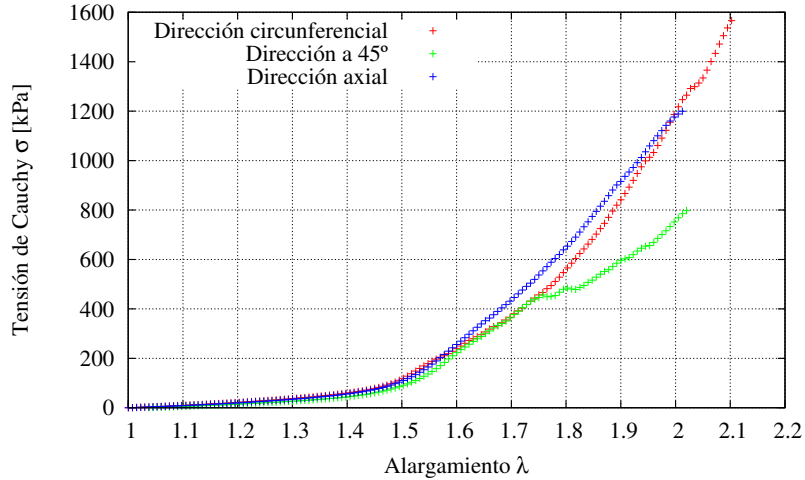


Figura 3.12: *Curvas tensión-alargamiento obtenidas en los ensayos para la aorta sana.*

Las medidas se registraron en el ensayo en intervalos de $\Delta\lambda = 0.0003$ pero en las figuras anteriores se dibujan los puntos cada 25 medidas para mayor claridad. El final de las curvas es el punto de rotura de la arteria (ver figura 3.10).

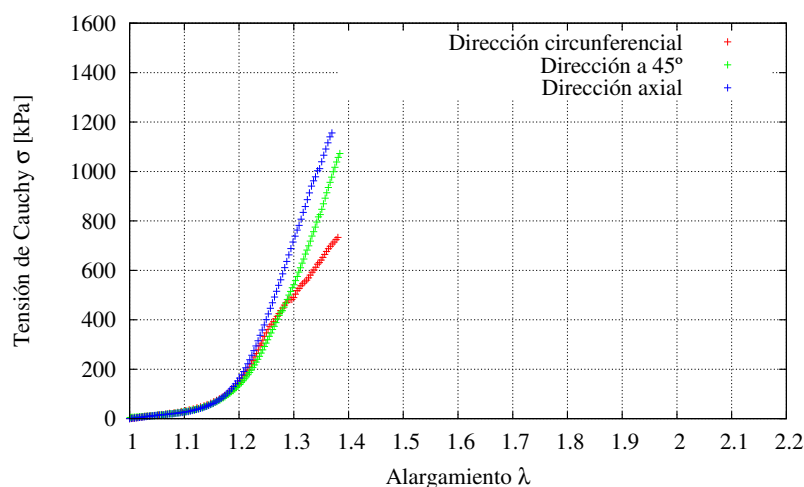


Figura 3.13: *Curvas tensión-alargamiento obtenidas en los ensayos para la aorta dañada con estenosis.*

Se han dibujado ambos gráficos con el mismo intervalo de variación del alargamiento y la tensión para poder comparar la arteria sana con la dañada. En ambas es claro el comportamiento no lineal, salvo para pequeños alargamientos donde se observa una relación prácticamente lineal entre alargamiento y tensión. Esto puede explicarse por el comportamiento de las fibras elásticas y de colágeno (ver figura 3.2). Para pequeñas deformaciones únicamente trabajan las fibras elásticas pero a partir de un nivel determinado de deformación comienzan a trabajar las fibras de colágeno, las cuales son mucho más rígidas que las elásticas. Las curvas de las figuras 3.12 y 3.13 representan el comportamiento combinado real de ambos conjuntos de fibras.

Cabe destacar que la influencia de la dirección es muy pequeña y posiblemente no se pudiera distinguir esta influencia de la dispersión estadística que se daría al ensayar varias probetas.

Si bien es cierto que la estructura de la pared arterial es anisótropa y, como se comentó en el apartado 3.3.2, está constituida por direcciones preferenciales de las fibras, esto no parece influir de forma apreciable en la elasticidad y resistencia de la arteria. Por tanto hacen falta ensayos con más exactitud para poder distinguir el efecto de las direcciones preferenciales.

Lo que sí tiene relevancia es la diferencia entre la arteria sana y la dañada mediante estenosis. Se observa que la arteria dañada es mucho más rígida que la sana y que la arteria dañada tiene una resistencia mucho menor que la sana. De hecho, independientemente de la dirección, la arteria dañada rompe para $\lambda < 1.4$, mientras que la arteria sana rompe para $\lambda > 2$.

Observación. *No obstante, cabe matizar que la arteria sana pertenece a un paciente distinto que el de la arteria dañada, pudiendo esto ser una varia-*

ble explicativa más para el diferente comportamiento. Pero parece razonable pensar que la variable explicativa fundamental es la diferencia entre arteria sana y arteria dañada.

Ajuste de los modelos

Se trata ahora de ajustar las expresiones (3.37) y (3.39) a las curvas de la arteria sana y la arteria dañada con estenosis por medio de los parámetros libres en dichas expresiones.

El método de ajuste utilizado es el de *mínimos cuadrados ordinarios*, aunque la forma de resolver las ecuaciones resultantes es distinta para cada material. Esto es así porque en el caso de material de Ogden se obtiene un sistema de seis ecuaciones algebraicas no lineales, mientras que en el material neohookeano una ecuación lineal.

Para el caso no lineal se utiliza el programa `gnuplot`³, el cual dispone de librerías matemáticas para el ajuste de funciones.

Es importante señalar las siguientes consideraciones sobre el ajuste que se ha hecho:

- a) Como en el fenómeno de interacción las tensiones predominantes son las circunferenciales, se ajustarán únicamente las curvas de las probetas en dirección circunferencial.
- b) El rango de deformaciones en el fenómeno de interacción para la presión y caudal fisiológicos es normalmente $1 < \lambda < 1.2$. Por lo tanto, lo que se ajustará es la rama de las curvas experimentales que cubre este rango.

De acuerdo con esto último no sería correcto utilizar los modelos con los parámetros que se obtendrán para modelizar situaciones con un rango de deformación $\lambda > 1.2$, ya que habría que realizar otro ajuste específico para este rango.

Observación. *En principio sería deseable que el modelo se ajustara a la curva experimental en todo su rango, pero esto es difícil de conseguir porque viendo la forma de las curvas 3.12 y 3.13 no es fácil imaginar una función analítica que se ajuste a éstas, ya que tienen una parte lineal al principio (donde actúan las fibras elásticas) y después una evolución exponencial (donde actúan las fibras de colágeno). Aún así, aquí se ha comprobado que el modelo de Ogden se ajusta mejor que el modelo neohookeano a la curva completa.*

El orden que seguiremos es primero plantear el problema con el modelo de Ogden, luego con el neohookeano, y finalmente mostrar los resultados para ambas arterias comparando ambos modelos.

³<http://www.gnuplot.info>

Material de Ogden

Si llamamos $F(\mu_p, \alpha_p)$ la función a minimizar y λ_i y σ_i los datos experimentales, se tiene:

$$F(\mu_p, \alpha_p) = \sum_{i=1}^N \left[\sigma_i - \sum_{p=1}^3 \mu_p \left(\lambda_i^{\alpha_p} - \lambda_i^{-\frac{\alpha_p}{2}} \right) \right]^2 \quad (3.40)$$

donde N es el número de puntos experimentales, que es del orden de 700 para la arteria sana y 250 para la arteria dañada en la zona $\lambda \leq 1.2$.

Haciendo las derivadas parciales respecto los parámetros obtenemos las 6 ecuaciones a resolver:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_a} = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^N \left[\left(\sigma_i - \sum_{p=1}^3 \mu_p \left(\lambda_i^{\alpha_p} - \lambda_i^{-\frac{\alpha_p}{2}} \right) \right) \left(\lambda_i^{\alpha_a} - \lambda_i^{-\frac{\alpha_a}{2}} \right) \right] = 0 \quad (3.41a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_b} = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^N \left[\left(\sigma_i - \sum_{p=1}^3 \mu_p \left(\lambda_i^{\alpha_p} - \lambda_i^{-\frac{\alpha_p}{2}} \right) \right) \alpha_b \left(\lambda_i^{\alpha_b-1} + \frac{1}{2} \lambda_i^{-\frac{3}{2}\alpha_b} \right) \right] = 0 \quad (3.41b)$$

donde $a = 1, 2, 3$ y $b = 1, 2, 3$.

El sistema de ecuaciones anterior es lineal en los parámetros μ_p y no lineal en los parámetros α_p . Para solucionarlo se ha empleado el programa `gnuplot`, el cual tiene implementado el algoritmo de *Marquardt-Levenberg* para resolver los problemas de ajustes no lineales. Se han hecho iteraciones con una tolerancia de 10^{-8} , esto es, teniendo en cuenta (3.40), hasta que:

$$\frac{|F(\mu_p^{i+1}, \alpha_p^{i+1}) - F(\mu_p^i, \alpha_p^i)|}{F(\mu_p^i, \alpha_p^i)} < 10^{-8} \quad (3.42)$$

representando con el superíndice i el número de iteración.

No obstante, está demostrado que para el modelo de Ogden no existe un único conjunto de parámetros óptimos (OGDEN ET AL. [2004]). Por tanto, el resultado depende de con qué parámetros se comienza a iterar.

Para evitar esta incertidumbre se ha utilizado una variante del método con el fin de determinar sistemáticamente los parámetros. Consiste en ir obteniendo escalonadamente los tres pares de parámetros (μ_p, α_p) en tres pasos. En el cuadro 3.2 se muestra la mecánica del método. En cada paso solamente hay dos parámetros incógnita, con lo que el ajuste mediante el algoritmo de *Marquardt-Levenberg* es más fácil.

Material neohookeano

Parámetros	Primer paso	Segundo paso	Tercer paso
μ_1	Incógnita	Conocido	Conocido
α_1	Incógnita	Conocido	Conocido
μ_2	0	Incógnita	Conocido
α_2	0	Incógnita	Conocido
μ_3	0	0	Incógnita
α_3	0	0	Incógnita

Cuadro 3.2: *Método Marquardt-Levenberg multipaso para ajustar el modelo de Ogden.*

De forma similar a lo hecho anteriormente, definiendo ahora $F(c_1)$ la función a minimizar, ésta es:

$$F(c_1) = \sum_{i=1}^N \left[\sigma_i - 2c_1 \left(\lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_i} \right) \right]^2 \quad (3.43)$$

Y derivando (3.43) respecto al parámetro c_1 queda:

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^N \left[\left(\sigma_i - 2c_1 \left(\lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_i} \right) \right) \left(\lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_i} \right) \right] = 0 \quad (3.44)$$

y de aquí se puede despejar fácilmente c_1 , resultando:

$$c_1 = \frac{\sum_{i=1}^N \sigma_i \left(\lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_i} \right)}{2 \sum_{i=1}^N \left(\lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_i} \right)^2} \quad (3.45)$$

que no es otra cosa que la covarianza dividida por la varianza de dos variables: una de ellas función del alargamiento y la otra la tensión.

Mostremos ahora los resultados del ajuste. Como se comentó, el rango del alargamiento que se ha usado es $1 < \lambda < 1.2$. En la figura 3.14 se muestran los resultados para la arteria sana y en la figura 3.15 los de la arteria con estenosis.

Se observa que el modelo de Ogden se ajusta muy bien en ambos casos, tanto para la arteria sana como para la arteria estenótica. En cambio, el modelo neohookeano parece adecuado para la arteria sana al ser la curva $\sigma - \lambda$ bastante lineal. En cambio este modelo no es adecuado para simular el comportamiento constitutivo de la arteria estenótica.

En el cuadro 3.3 se muestran los parámetros obtenidos para el modelo de Ogden. Es importante decir que no se cumple la condición de consistencia (3.23). Como se ve en el cuadro, $\mu_2\alpha_2 < 0$ para la arteria sana. No obstante, al ser $|\mu_1| \gg |\mu_2|$ la violación de la condición de consistencia no tiene mucha relevancia.

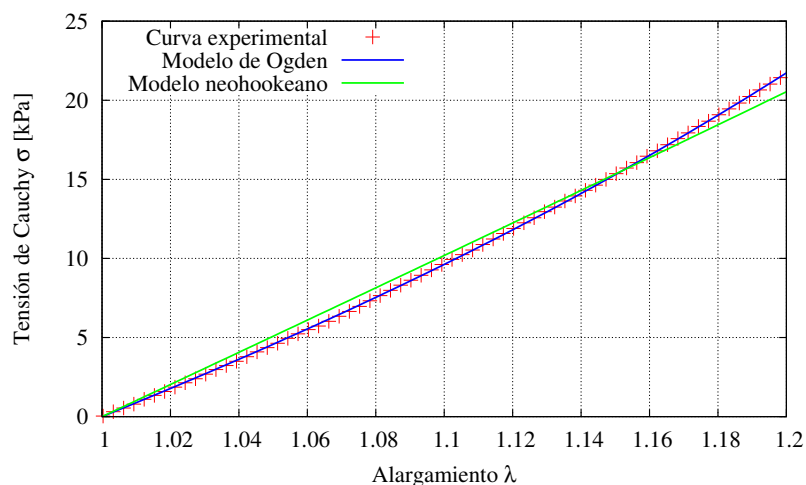


Figura 3.14: Ajuste de los modelos de Ogden y neohookeano en la aorta sana.

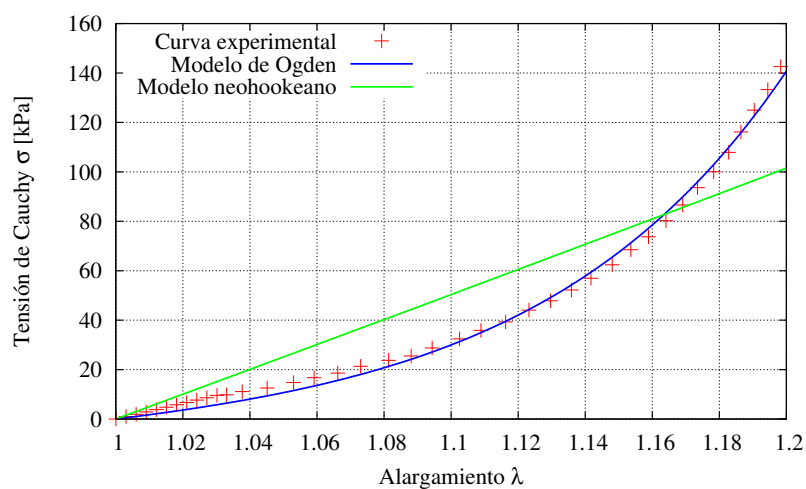


Figura 3.15: Ajuste de los modelos de Ogden y neohookeano en la aorta dañada con estenosis.

3.5. Ejemplos de validación

Para verificar la formulación utilizada se han elegido dos casos con solución analítica.

Se utiliza el material de Ogden y el neohookeano para cada uno de los ejemplos y los parámetros del material obtenidos experimentalmente en el apartado anterior para la arteria aorta sana.

Los desarrollos matemáticos se harán menos detallados porque la mecánica de éstos es similar a la del apartado 3.4.2.

Parámetros*	Aorta sana	Aorta dañada
μ_1	11.63	6.60
α_1	5.03	16.82
μ_2	-0.05	44.76
α_2	0.01	0.02
μ_3	0.0001	2.21
α_3	4.96	0.001

* Los módulos μ están en kPa

Cuadro 3.3: Parámetros del modelo de Ogden para ambas arterias.

Parámetro*	Aorta sana	Aorta dañada
c_1	16.93	83.71

* c_1 está en kPa

Cuadro 3.4: Parámetro del modelo neohookeano para ambas arterias.

3.5.1. Cilindro sometido a presión interna

Este ensayo consiste en imponer una historia de desplazamientos radiales en la pared interior de un cilindro (ver figura 3.16) y obtener como resultado la tensión de Cauchy en dirección circunferencial σ_θ . Dicha tensión se relacionará con el alargamiento en esa misma dirección.

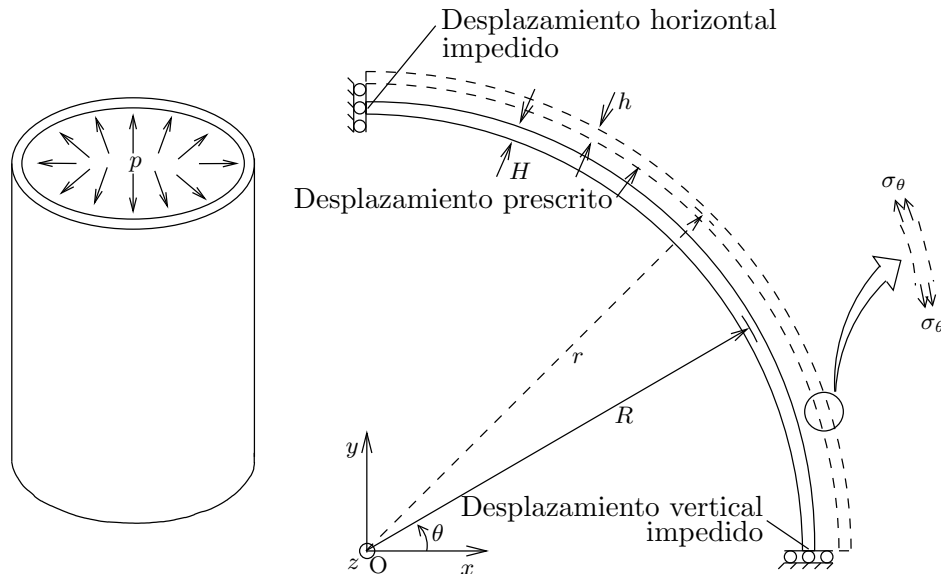


Figura 3.16: Esquema del modelo del cilindro con simetría axial.

Debido a la simetría las direcciones principales coinciden con los vecto-

res radial, circunferencial y axial, luego escribiremos todas las relaciones en esa base vectorial. Denotamos con un subíndice r las variables en la dirección radial y con un subíndice θ las variables en la dirección circunferencial (tangencial).

El cálculo se ha hecho con desplazamiento impuesto, luego para cada incremento del desplazamiento el alargamiento en la dirección tangencial es:

$$\lambda_\theta = \frac{r}{R}$$

Como se supone material incompresible hay que utilizar la expresión (3.30) para expresar las tensiones. Análogamente a como se hizo en el apartado 3.4.2 para deducir la presión interna π , se utiliza la hipótesis de que la tensión radial es nula. Con esta hipótesis adicional se tiene:

$$\sigma_r = -\pi + J^{-1}\lambda_r \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} = 0 \quad \longrightarrow \quad \pi = J^{-1}\lambda_r \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} \quad (3.46)$$

y la tensión circunferencial resulta:

$$\sigma_\theta = -\pi + J^{-1}\lambda_\theta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} = -J^{-1}\lambda_r \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} + J^{-1}\lambda_\theta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} = \lambda_\theta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} - \lambda_r \frac{\partial W}{\partial \lambda_r} \quad (3.47)$$

donde en la expresión final ya se ha incluido la incompresibilidad con $J = 1$.

Observación. *En realidad la tensión radial es una curva decreciente. En la pared interior $\sigma_r = p$ y en la pared exterior $\sigma_r = 0$. Pero como se verá en los resultados, $p \ll \sigma_\theta$, por lo que considerar la tensión radial nula es una aproximación razonable.*

Respecto a la cinemática suponemos que es un problema de deformación plana, luego en la dirección z no se produce deformación, esto es, $\lambda_z = 1$. Por tanto, al suponer incompresibilidad se tiene la siguiente restricción:

$$J = \lambda_r \lambda_\theta = 1 \quad (3.48)$$

Se puede también obtener la presión impuesta p a partir de la ecuación de equilibrio de los tubos de pared delgada, esto es:

$$p = \frac{h}{r} \sigma_\theta \quad (3.49)$$

Teniendo en cuenta que $h = \lambda_r H$ y que $r = \lambda_\theta R$ así como (3.48) se llega a que la presión externa es:

$$p = \frac{H}{R} \lambda_\theta^{-2} \sigma_\theta \quad (3.50)$$

Material de Ogden

Utilizando (3.35) y sustituyendo dicha expresión en (3.47) se obtiene:

$$\sigma_\theta = - \sum_{p=1}^3 \mu_p \lambda_r^{\alpha_p} + \sum_{p=1}^3 \mu_p \lambda_\theta^{\alpha_p} = \sum_{p=1}^3 \mu_p (\lambda_\theta^{\alpha_p} - \lambda_r^{\alpha_p}) \quad (3.51)$$

Teniendo en cuenta la restricción cinemática (3.48) se tiene que $\lambda_r = \lambda_\theta^{-1}$. Utilizando esto último en la expresión (3.51) queda:

$$\sigma_\theta = \sum_{p=1}^3 \mu_p (\lambda_\theta^{\alpha_p} - \lambda_\theta^{-\alpha_p}) \quad (3.52)$$

La expresión de la presión es, sustituyendo (3.52) en (3.50):

$$p = \frac{H}{R} \sum_{p=1}^3 \mu_p (\lambda_\theta^{\alpha_p-2} - \lambda_\theta^{-\alpha_p-2}) \quad (3.53)$$

Los parámetros μ_p y α_p que se han tomado, como se comentó anteriormente, son los ajustados a los ensayos experimentales de la arteria aorta sana (ver cuadro 3.3).

En las figuras 3.17 y 3.18 se muestran respectivamente las curvas de la tensión σ_θ y presión p frente al alargamiento λ_θ para este material, donde se ha tomado $R = 10$ mm. y $H = 0.1$ mm. Se comparan en cada gráfico los resultados analíticos con los computacionales, observándose una muy buena concordancia.

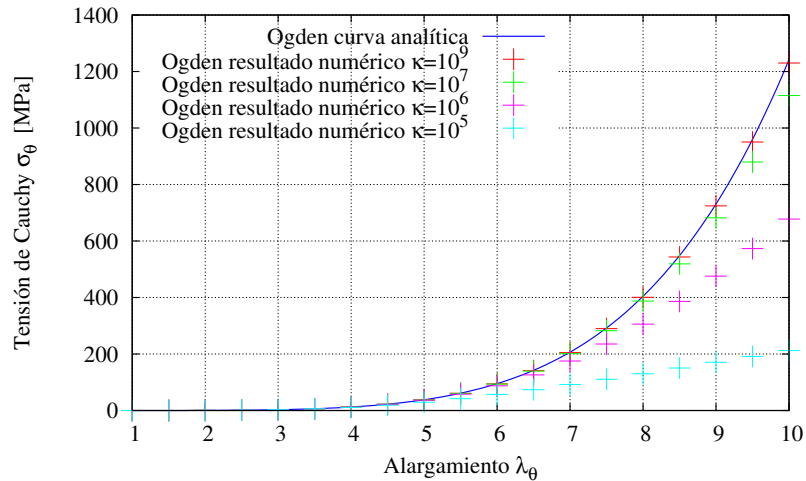


Figura 3.17: Cilindro sometido a presión interna con material de Ogden. Tensión circunferencial y análisis de sensibilidad de dicha tensión respecto el módulo volumétrico κ .

En la figura 3.17 se han dibujado cuatro resultados numéricos para observar la importancia del módulo volumétrico κ de la expresión (3.25). Cuanto

mayor es dicho módulo mejor se impone la restricción de incompresibilidad. Pero κ no puede hacerse arbitrariamente grande porque cuanto mayor es κ la matriz tangente calculada para hacer las iteraciones de *Newton-Raphson* queda peor condicionada, llegando un punto en el que no es posible invertirla. Por lo tanto hay que tantear un valor de compromiso. En este caso tomando $\kappa = 10^9$ se obtiene un buen resultado, y es el valor que se tomará también en el ejemplo siguiente del inflado del globo.

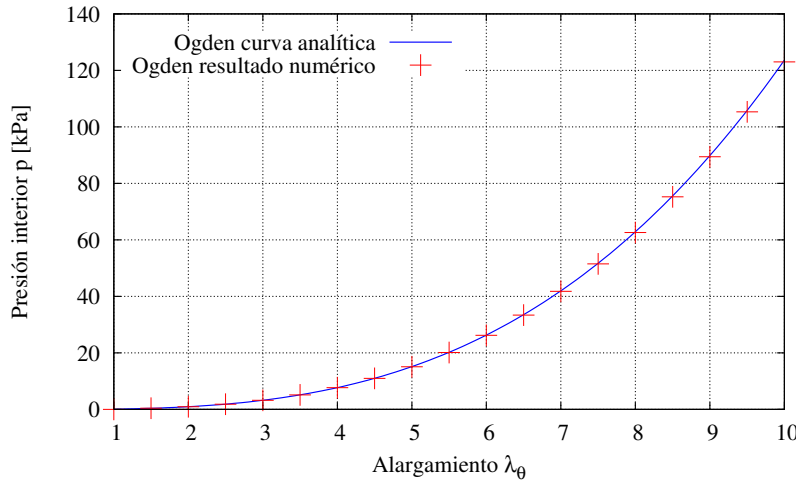


Figura 3.18: *Cilindro sometido a presión interna con material de Ogden. Presión.*

Material neohookeano

De forma similar al material anterior, sustituyendo ahora (3.38) en (3.47) queda:

$$\sigma_\theta = \lambda_\theta 2c_1 \lambda_\theta - \lambda_r 2c_1 \lambda_r = 2c_1(\lambda_\theta^2 - \lambda_r^2) \quad (3.54)$$

que junto a la condición (3.48) obtenemos para la tensión circunferencial:

$$\sigma_\theta = 2c_1(\lambda_\theta^2 - \lambda_\theta^{-2}) \quad (3.55)$$

Y sustituyendo (3.55) en (3.50) la presión es:

$$p = 2c_1 \frac{H}{R} (1 - \lambda_\theta^{-4}) \quad (3.56)$$

El parámetro c_1 es el ajustado con el ensayo experimental para la arteria sana (ver cuadro 3.4).

Las figuras 3.19 y 3.20 representan las curvas de la tensión σ_θ y presión p frente al alargamiento λ_θ respectivamente, con buena concordancia analítica y numérica.

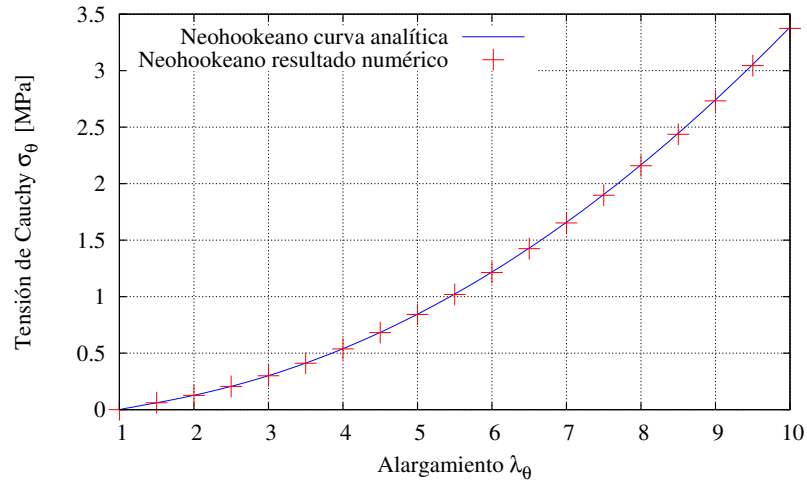


Figura 3.19: *Cilindro sometido a presión interna con material neohookeano. Tensión circunferencial.*

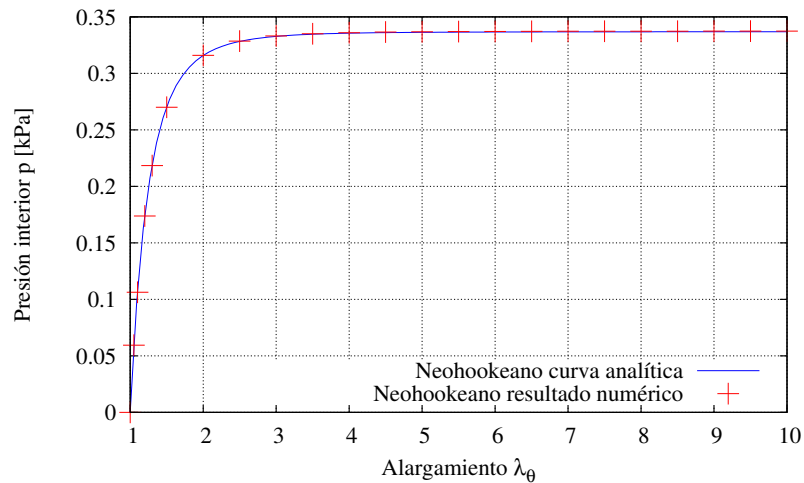


Figura 3.20: *Cilindro sometido a presión interna con material neohookeano. Presión.*

A diferencia del modelo de Ogden, en el modelo neohookeano la presión no crece indefinidamente sino que se estabiliza en el valor $2c_1H/R = 0,3386$ kPa.

Cabe resaltar la gran diferencia en el valor de las tensiones entre ambos modelos, sobre todo en el rango de las grandes deformaciones, ofreciendo el material de Ogden una rigidez mucho mayor que el neohookeano.

3.5.2. Globo sometido a presión interna

Este caso es similar al anterior, pero el resultado de la curva presión-alargamiento en grandes deformaciones es interesante por existir un tramo decreciente en el material neohookeano, lo cual no es intuitivo *a priori*.

Consiste en imponer una historia de desplazamientos radiales en la pared interior de un globo (ver figura 3.21) obteniendo como resultado la tensión de Cauchy en las direcciones del paralelo y del meridiano.

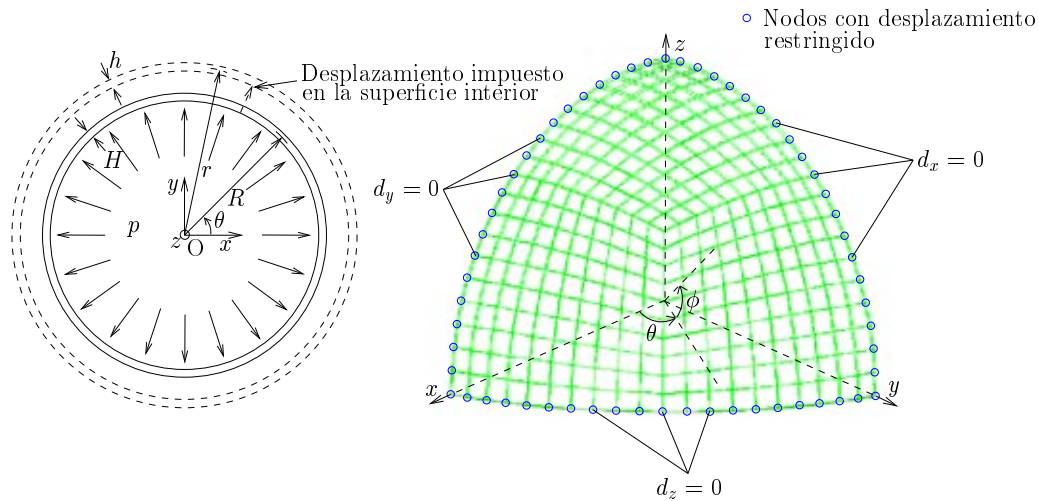


Figura 3.21: A la izquierda, esquema del globo seccionado por un plano meridiano. A la derecha, malla de hexaedros de un octante de globo.

Utilicemos la base natural de las coordenadas esféricas para representar las magnitudes, denotando con un subíndice r las variables en la dirección radial, con un subíndice θ las asociadas a la dirección del paralelo y con ϕ a las del meridiano.

Debido a la simetría polar del problema, tanto los alargamientos como las tensiones asociadas a las direcciones del paralelo y meridiano coinciden, esto es:

$$\lambda_\theta = \lambda_\phi \quad (3.57a)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\phi \quad (3.57b)$$

Se ha hecho una malla tridimensional de un octante para validar los elementos en tres dimensiones, ya que son los que se utilizarán en las arterias con geometría real. La parte derecha de la figura 3.21 muestra la malla utilizada. Dicha malla consiste en un octante de esfera con elementos hexaedros y se ha hecho con el mallador que se ha desarrollado también en esta tesis.

También por simetría, en el plano tangente todas las direcciones son principales y por tanto la dirección radial también es dirección principal (por ser perpendicular a dicho plano).

Imponiendo el movimiento en dirección radial, el alargamiento en las direcciones tangenciales es:

$$\lambda_\theta = \lambda_\phi = \frac{r}{R}$$

De nuevo se supone incompresibilidad y se utiliza la expresión (3.30) para expresar la tensión. Asimismo se hace la hipótesis adicional de que en la dirección radial la tensión es nula, con lo que se puede utilizar la ecuación del apartado anterior (3.47). Cabe realizar la misma observación que en el ejemplo anterior.

La restricción cinemática de incompresibilidad es, teniendo en cuenta (3.57a):

$$J = \lambda_r \lambda_\theta \lambda_\phi = 1 \longrightarrow \lambda_r \lambda_\theta^2 = 1 \quad (3.58)$$

Para obtener la presión impuesta p , teniendo también en cuenta la hipótesis de pared delgada se llega a la ecuación de equilibrio:

$$p = 2 \frac{h}{r} \sigma_\theta \quad (3.59)$$

Considerando que $h = \lambda_r H$, $r = \lambda_\theta R$ y la relación (3.58) se llega a la siguiente expresión para la presión:

$$p = 2 \frac{H}{R} \lambda_\theta^{-3} \sigma_\theta \quad (3.60)$$

Material de Ogden

La expresión para la tensión es la misma que en (3.51), y teniendo en cuenta por (3.58) que $\lambda_r = \lambda_\theta^{-2}$ se llega a:

$$\sigma_\theta = \sum_{p=1}^3 \mu_p (\lambda_\theta^{\alpha_p} - \lambda_\theta^{-2\alpha_p}) \quad (3.61)$$

La expresión para la presión es, sustituyendo (3.61) en (3.60):

$$p = 2 \frac{H}{R} \sum_{p=1}^3 \mu_p (\lambda_\theta^{\alpha_p-3} - \lambda_\theta^{-2\alpha_p-3}) \quad (3.62)$$

Los parámetros μ_p y α_p son los mismos que para el caso anterior del cilindro, esto es, los obtenidos de los datos experimentales para la arteria aorta sana. Los parámetros de la geometría son $R = 10$ mm. y $H = 0.1$ mm.

Las figuras 3.22 y 3.23 muestran las curvas de la tensión σ_θ y presión p respectivamente, con buena correspondencia entre las curvas analíticas y los resultados numéricos.

Material neohookeano

La expresión de la tensión coincide con (3.54), y teniendo en cuenta (3.58) tenemos:

$$\sigma_\theta = 2c_1(\lambda_\theta^2 - \lambda_\theta^{-4}) \quad (3.63)$$

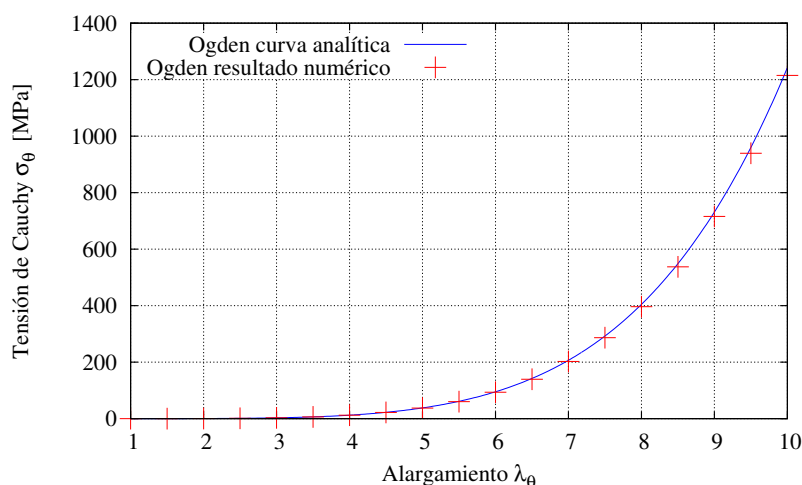


Figura 3.22: *Globo sometido a presión interna con material de Ogden. Tensión circunferencial.*

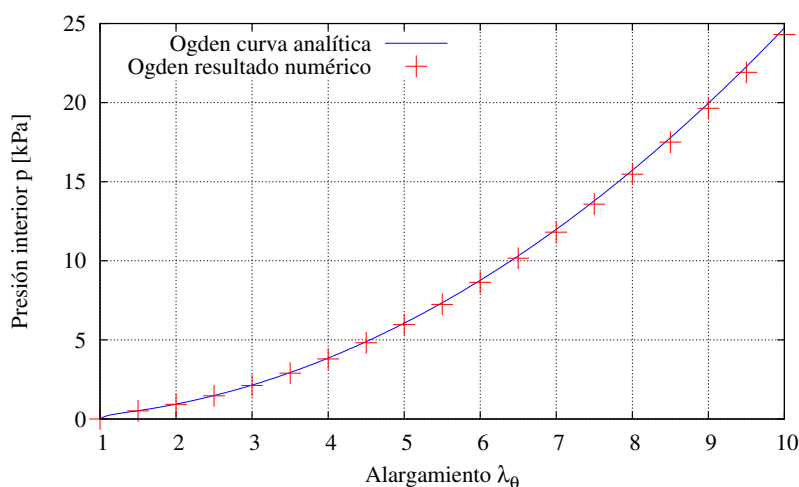


Figura 3.23: *Globo sometido a presión interna con material de Ogden. Presión.*

Y sustituyendo (3.63) en (3.60) resulta la expresión de la presión:

$$p = 4 \frac{H}{R} c_1 (\lambda_\theta^{-1} - \lambda_\theta^{-7}) \quad (3.64)$$

El parámetro c_1 es el mismo que en el caso del cilindro.

En la figura 3.24 se muestran los resultados de la tensión y en la figura 3.25 los de la presión, también con buenos resultados.

Es de destacar la forma de la curva de presión. La asíntota de esta curva es $p = 0$, esto es, si el alargamiento crece indefinidamente la presión tendería

a hacerse nula.

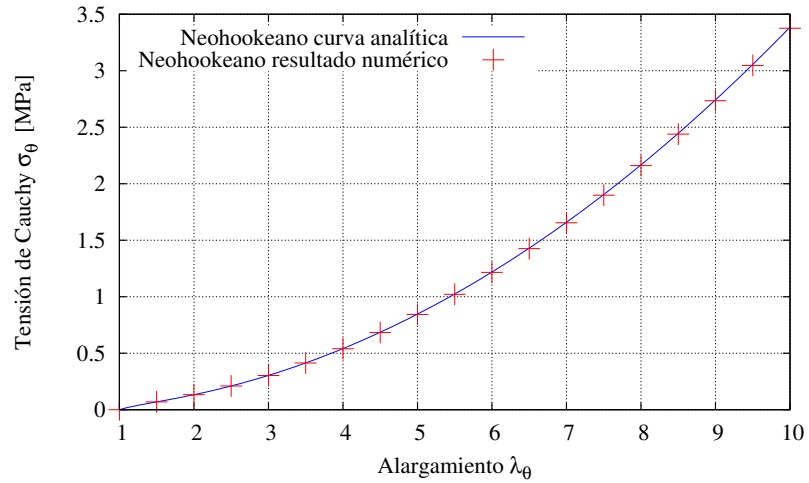


Figura 3.24: *Globo sometido a presión interna con material neohookeano. Tensión circunferencial.*

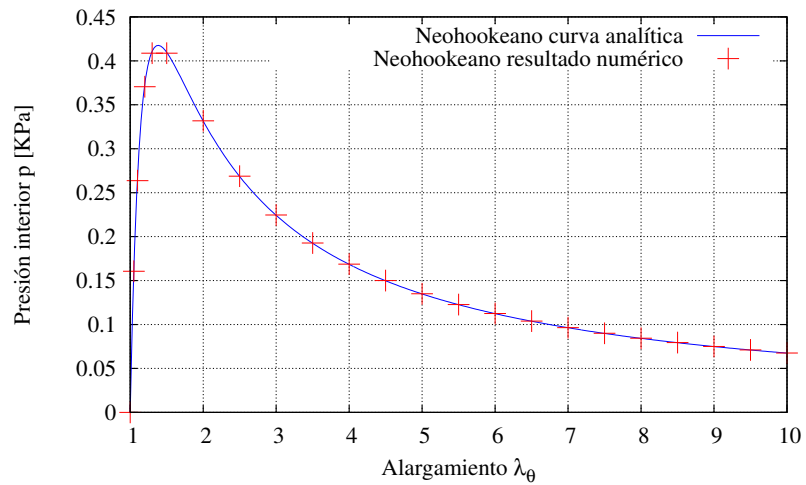


Figura 3.25: *Globo sometido a presión interna con material neohookeano. Presión.*

Capítulo 4

Modelos de interacción fluido-estructura

En los dos capítulos anteriores se ha estudiado por separado un modelo para el fluido sangre y un modelo para el sólido pared arterial. Los objetivos principales eran:

- a) La justificación de una ecuación constitutiva adecuada teniendo en cuenta las bases fisiológicas del sistema cardiovascular.
- b) La discretización de las ecuaciones mediante el método de los elementos finitos, con un tratamiento especial de la condición de incompresibilidad.

El objetivo de este capítulo es acoplar estos dos sistemas mediante la igualdad de las condiciones de contorno en la frontera común a ambos.

A efectos de formulación matemática, la principal consecuencia del fenómeno de interacción es que el dominio del fluido no es fijo, sino que tiene que ir adaptándose al movimiento del sólido. Para ello, la formulación lagrangiana del sólido ya desarrollada es adecuada, pero la formulación euleriana del fluido no es correcta para un dominio variable. Por tanto, lo primero que se hará es plantear una formulación más general del fluido que se adapte a contornos móviles (apartado 4.1).

En el apartado 4.2 se plantea el problema de interacción matemáticamente y se definen unos operadores matemáticos que simplifiquen la notación. La composición de estos operadores permite formular el problema y las ecuaciones de forma concisa, para así permitir una clasificación de los métodos de solución en el apartado 4.3.

Posteriormente se comenta el método utilizado e implementado en este trabajo justificando por qué se ha elegido un método particionado y finalmente se muestran dos ejemplos de validación. Uno de ellos es la transmisión de un pulso rectangular de presión en un tubo tridimensional y el otro corresponde al caso de *flujo confinado en una cavidad* (ver apartado 2.4.1), pero con la pared inferior flexible y una velocidad impuesta pulsátil. Este caso se

analiza con detalle por no haberlo encontrado suficientemente documentado en la literatura.

4.1. Formulación ALE del fluido

La formulación ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*) es el marco adecuado para plantear las ecuaciones del fluido con contornos móviles. Básicamente consiste en flexibilizar la malla utilizada permitiendo que ocupe un dominio arbitrario. Esto es, no es necesario que la malla acompañe el movimiento de la materia (como la formulación lagrangiana de los sólidos) ni que la malla sea fija en el espacio (como la formulación euleriana de los fluidos), sino que a dicha malla se le permite ocupar cualquier dominio del espacio (de ahí la palabra *Arbitrary*). En particular este dominio se elige para que su contorno acompañe el movimiento del sólido.

Unos de los primeros artículos donde aparece este método en el contexto de los elementos finitos son DONEA ET AL. [1977] y HUGHES ET AL. [1981]. Desde entonces se ha utilizado esta técnica tanto para fluidos con contornos móviles como para sólidos con grandes deformaciones.

4.1.1. Fundamentos de la formulación

En la figura 4.1 se muestra la idea básica de este método. La gota de agua entra en el dominio de estudio, pero ningún nodo de la malla está asociado a una partícula material de ésta, esto es, los nodos de la malla se mueven de forma independiente a la gota.

La formulación ALE se basa en tres funciones (DONEA Y HUERTA [2003]) para hacer correspondencias entre los dominios de referencia, material y espacial, según se muestra en la figura 4.2. La aplicación característica de la formulación ALE es la función Φ , que relaciona los puntos del dominio de referencia $\boldsymbol{\chi}$ con los puntos espaciales \boldsymbol{x} :

$$\Phi : \Omega_{\boldsymbol{\chi}} \times [t_0, t_{final}] \rightarrow \Omega_{\boldsymbol{x}} \times [t_0, t_{final}] \quad (4.1)$$

$$(\boldsymbol{\chi}, t) \rightarrow \Phi(\boldsymbol{\chi}, t) = (\boldsymbol{x}, t) \quad (4.2)$$

Observación. *En el contexto del método de los elementos finitos la función Φ es la que define el movimiento de la malla (ver figura 4.1).*

La velocidad de la malla $\hat{\boldsymbol{u}}$ es la derivada de Φ respecto el tiempo:

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} \Big|_{\boldsymbol{\chi}} \quad (4.3)$$

Observación. *En el desarrollo de la formulación ALE, siempre que se hagan derivadas respecto del tiempo se indicará explícitamente qué dominio se*

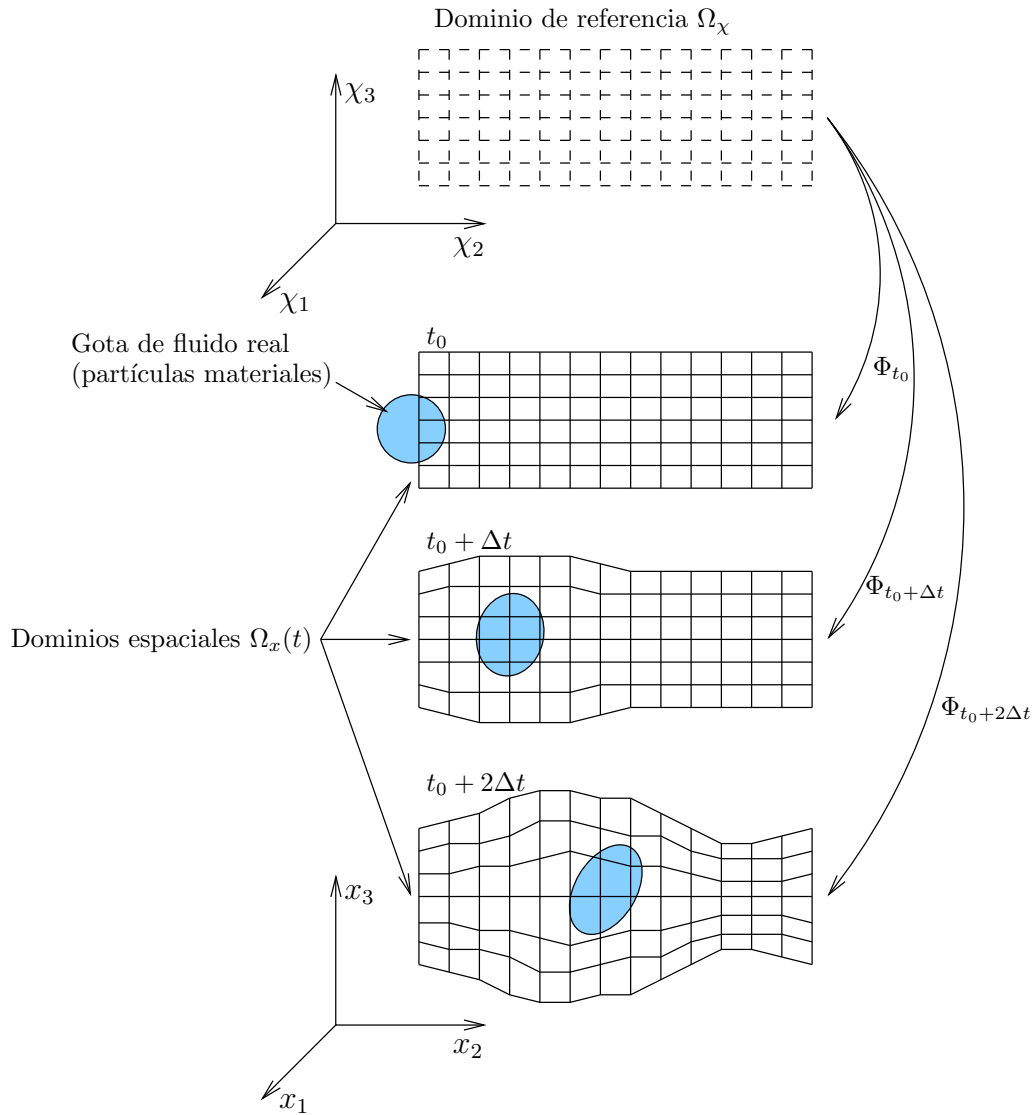


Figura 4.1: Idea de la formulación ALE para un fluido con contornos móviles.

mantiene fijo. Por ejemplo, en 4.3 la derivada se realiza considerando fijo el dominio Ω_χ .

En este sistema de coordenadas una magnitud vendría expresada simbólicamente como:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}, t) \quad \boldsymbol{\chi} \in \Omega_\chi \quad (4.4)$$

donde la diferencia ahora respecto la formulación euleriana es que el dominio de referencia Ω_χ no representa las coordenadas espaciales (ni tampoco las materiales).

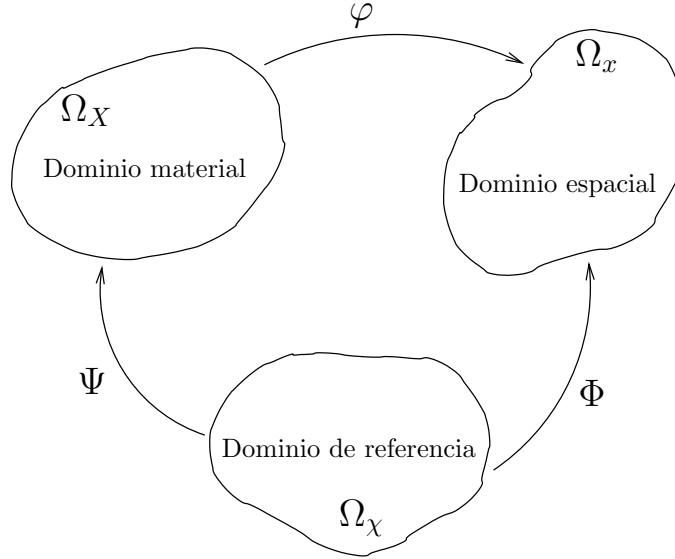


Figura 4.2: Correspondencias entre los dominios lagrangiano, euleriano y ALE.

La derivada temporal material se calcula aplicando la regla de la cadena:

$$\dot{\mathbf{f}} \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \Big|_x \quad (4.5)$$

Observación. El hecho de calcular la derivada temporal material es porque es la que tiene significado físico y la que interviene en las ecuaciones de la dinámica.

Si se define \mathbf{w} como la velocidad de una partícula material respecto el dominio de referencia Ω_χ :

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \Big|_X \quad (4.6)$$

entonces, sustituyendo (4.6) en (4.5) queda la expresión de la derivada material como:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \mathbf{w} \quad (4.7)$$

De todas maneras es conveniente expresar la derivada material en función del gradiente espacial (derivadas respecto las coordenadas espaciales), ya que es el que tiene significado físico para el término viscoso en las ecuaciones de Navier-Stokes. Utilizando la regla de la cadena, la expresión (4.7) se puede escribir así:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \mathbf{w} \quad (4.8)$$

donde queda por calcular el término $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \mathbf{w}$. Para ello se calcula la velocidad material de las partículas de fluido:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \Big|_X \quad (4.9)$$

y sustituyendo ahora (4.3) y (4.6) en (4.9) queda:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \mathbf{w} \quad (4.10)$$

Ahora se define la *velocidad convectiva* \mathbf{c} como la diferencia entre la velocidad material \mathbf{u} y la velocidad de la malla $\hat{\mathbf{u}}$. Esto es, la velocidad de las partículas vistas por un observador solidario a la malla:

$$\mathbf{c} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \quad (4.11)$$

que se puede reescribir, utilizando (4.10):

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \mathbf{w} \quad (4.12)$$

Con estas definiciones la derivada material (4.8) se expresa como:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \Big|_x + \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{f} \quad (4.13)$$

donde se usa el símbolo ∇ para expresar el gradiente espacial.

Observación. *Las formulaciones lagrangiana y euleriana son casos particulares de la formulación ALE. En efecto, al ser el movimiento de la malla arbitrario (función Φ), y por tanto su velocidad \mathbf{c} , si hacemos $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ obtenemos la formulación lagrangiana, y si hacemos $\mathbf{c} = \mathbf{u}$ nos queda la formulación euleriana.*

4.1.2. Ecuaciones del fluido en contornos móviles

Para reescribir la formulación euleriana del fluido (capítulo 2) en el marco de la formulación ALE, cabe destacar los siguientes aspectos:

a) La aceleración material del fluido es, aplicando (4.13):

$$\dot{\mathbf{u}} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_x + \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (4.14)$$

siendo ésta la expresión a emplear en (2.9).

- b) Los contornos del dominio fluido no son fijos en general. Este hecho es vital para poder entender el porqué se utiliza la formulación ALE o cuándo es posible utilizar cada formulación (lagrangiana, euleriana ó ALE).

El problema fuerte del movimiento del fluido expresado en (2.14) se reescribe en el marco de la formulación ALE en los siguientes términos : *Sea un dominio fluido* $\Omega(t) \in \mathbb{R}^3$. *Encontrar un campo vectorial de velocidades* $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbb{R}^3$ *y un campo escalar de presiones* $p(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbb{R}$ *tales que:*

$$\begin{aligned} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p - 2\mu \nabla \cdot \mathbf{D} &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega(t) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{en } \Omega(t) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_d(t) && \text{en } \Gamma_d(t) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}_n(t) && \text{en } \Gamma_n(t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde \mathbf{c} ha de cumplir:

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{u}_d(t) - \dot{\Gamma}_d(t) \quad \text{en } \Gamma_d(t) \quad (4.16)$$

siendo $\dot{\Gamma}_d(t)$ la velocidad del contorno con condiciones de Dirichlet. La condición (4.16) es necesaria para determinar el movimiento de los nodos interiores de la malla, tal y como se describe en el apartado siguiente.

4.1.3. Implementación computacional

La implementación de un elemento finito con la formulación ALE se ha hecho sobre la base del capítulo 2. Lo único que hay que hacer es modificar el término convectivo en el residuo y en la matriz tangente. Esto es, el nuevo término convectivo es:

$$\rho_f \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho_f (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (4.17)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}$ es la velocidad del dominio espacial, que a efectos del método de los elementos finitos es la velocidad de los nodos de la malla.

Por tanto en las ecuaciones (B.3) hay que reescribir la matriz $\mathbf{N}(\mathbf{u}_A)$. Entonces, con la misma estructura de la matriz general ensamblada (2.24), los coeficientes $n(\mathbf{u}_A)^{\alpha\beta}$ que se escribieron en (2.25) hay que reescribirlos de la siguiente forma:

$$n(\mathbf{u}_A)^{\alpha\beta} = \rho_f \int_{\Omega_e} N_u^\alpha(\mathbf{u}^h - \hat{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla N_u^\beta d\Omega_e \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n_u) \quad (4.18)$$

donde se ha utilizado $\hat{\mathbf{u}}^h$ en vez de $\hat{\mathbf{u}}$ para indicar que la velocidad de la malla también ha sido discretizada. En particular $\hat{\mathbf{u}}^h$ se ha discretizado con las mismas funciones de forma que la velocidad \mathbf{u}^h .

La siguiente cuestión es cómo calcular la velocidad de los nodos de la malla $\hat{\mathbf{u}}_A$.

Observación. *Al ser el movimiento de la malla arbitrario (salvo en el contorno, que se tiene que adaptar al movimiento del sólido), existen infinitos campos de velocidades posibles de la malla, todos ellos válidos. No obstante, existen criterios que permite discriminar entre ellos, como la “Ley de Conservación Geométrica” que se describe más adelante en este apartado.*

La estrategia que se ha seguido en este trabajo para calcular la velocidad de la malla es la siguiente: *Partiendo de unos desplazamientos dados del contorno, denotados por \mathbf{d}_Γ :*

1. Se toma como movimiento de los nodos interiores el que resultaría de imponer a un sólido ficticio los mismos desplazamientos en su contorno. El objetivo es conseguir un campo de desplazamientos lo más suave posible, pero que su cálculo no consuma apenas tiempo. Por ello se toma la ecuación constitutiva del sólido elástico lineal e isótropo, que al ser análogo a un flujo de Stokes se puede utilizar el elemento de fluido tomando la densidad nula. Vamos a denotar con $\hat{\mathbf{d}}$ el desplazamiento de la malla. Se puede definir simbólicamente esta operación: consistiría en partir del movimiento del contorno \mathbf{d}_Γ y *extender* dicho movimiento a los nodos interiores $\hat{\mathbf{d}}$, esto es:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathcal{M}(\mathbf{d}_\Gamma) \quad (4.19)$$

donde se ha utilizado \mathcal{M} para denotar el operador *extensión* de la malla (FERNÁNDEZ Y MOUBACHIR [2004]).

En SOULI ET AL. [2000] se pueden ver otras definiciones del operador \mathcal{M} , siendo también habitual resolver un problema de Poisson (del laplaciano) como analogía a un problema de transmisión de calor o de difusión en medios porosos. Todas estas técnicas dan lugar a campos de desplazamientos suaves.

2. Se calcula la velocidad de la malla de forma implícita:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{d}}}{\partial t}, \text{ o en forma discreta } \hat{\mathbf{u}}^{n+1} \approx \frac{\hat{\mathbf{d}}^{n+1} - \hat{\mathbf{d}}^n}{\Delta t} \quad (4.20)$$

La ley de conservación geométrica

La idea clave de la ley de conservación geométrica (*Geometric Conservation Law*) es que el resultado de un problema con una malla móvil debiera ser independiente del operador \mathcal{M} , esto es, de cómo se mueva la malla (ver THOMAS Y LOMBARD [1979] para ver el origen de esta ley en el contexto de diferencias finitas y volúmenes finitos, y CHEN Y SHEU [2003] para una extensión al método de los elementos finitos).

Concretamente esta ley se puede formular (GUILLARD Y FARHAT [2000]): *Un flujo uniforme debe conservarse con independencia de cómo se mueva la malla.*

Esto quiere decir que por ejemplo en un flujo de Poiseuille se podría mover la malla interiormente, pero el flujo debería siendo de Poiseuille. Pero sobre flujos no uniformes no impone ninguna condición.

No obstante, existe un debate sobre si utilizar un operador \mathcal{M} que cumpla esta ley ofrece ventajas significativas o no para el caso de flujos no uniformes. Un argumento a favor es que si cumple esta ley, debemos obtener en nuestro problema mejores resultados, aunque no estemos en un problema con flujo uniforme. Y un argumento en contra es que parece inútil tener un operador \mathcal{M} que preserve el flujo uniforme para problemas en los que al fin y al cabo el flujo no es uniforme *per se*, por lo que no se obtendría ventaja alguna.

En este trabajo el operador \mathcal{M} no cumple dicha ley. En hemodinámica los flujos son siempre transitorios y generalmente lejanos de un flujo uniforme, por lo que no parece razonable que varíen mucho los resultados por no cumplir la ley de conservación geométrica.

Observación. *Matemáticamente la solución exacta es independiente del movimiento de la malla. Esta independencia no está garantizada en el caso en el que el problema se resuelve de forma numérica.*

4.1.4. Validación de la formulación ALE

El caso ha sido tomado de SHEU Y CHEN [1999], donde un flujo pasa a través de un tubo bidimensional cuyo contorno está sometido a un movimiento sinusoidal impuesto (figura 4.3).

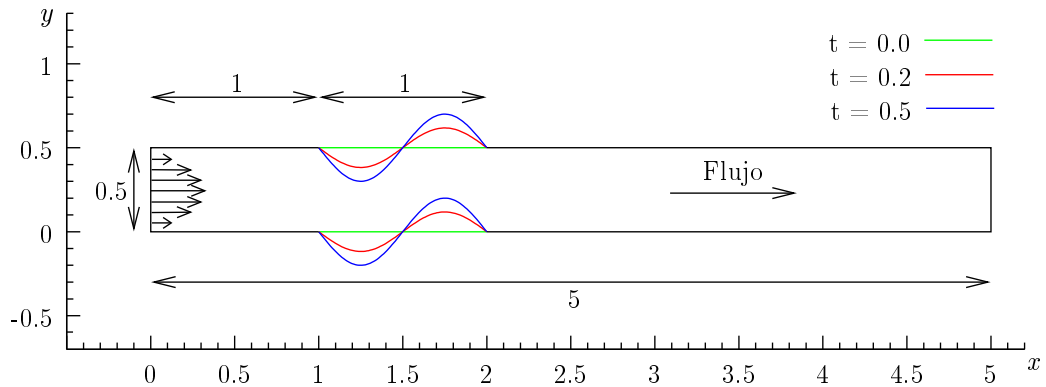


Figura 4.3: Esquema del tubo con movimiento impuesto.

Descripción del problema:

- Se impone un flujo parabólico de velocidades a la entrada cuya velocidad media es $u_{\text{media}} = 2$. En el instante inicial se supone velocidad nula en todo el dominio.
- Se asume que no hay deslizamiento en la pared del tubo, esto es, la velocidad del fluido en el contorno es la misma que la de la pared.

- c) El fluido tiene comportamiento newtoniano, cuya densidad es $\rho_f = 1$ y la viscosidad dinámica $\mu = 0.0025$. Con estos datos el número de Reynolds es $Re = 400$.
- d) Para la discretización del dominio se ha utilizado una malla de 30x300 elementos. El objetivo es captar bien todos los vórtices y de ahí que se halla utilizado una discretización tan fina. No obstante, en SHEU Y CHEN [1999] se observa que con una malla más fina cerca de los bordes y más gruesa en la parte central también se obtienen buenos resultados con menos elementos. El paso de tiempo empleado es $\Delta t = 0.02$.
- e) El movimiento impuesto en la parte móvil de la pared tiene la siguiente ley:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= \begin{cases} y_0 - 0.2 \sin(2\pi(x_0 - 1)) \sin(\omega\pi t) & 1 < x_0 < 2 \\ y_0 & x_0 \leq 1 \text{ ó } 2 \leq x_0 \end{cases} \quad (4.21) \end{aligned}$$

donde (x_0, y_0) representa la posición inicial de la malla y (x, y) la posición actual.

Observación. Para validar la formulación ALE lo esencial es elegir un problema en el que el contorno del dominio no sea fijo. Para ello no es necesario que éste sea una incógnita (como en el caso de interacción pura), sino que puede estar definido a priori. Es decir, elegimos un problema donde un movimiento predefinido se ha impuesto al contorno. Esto hace que no haya interacción con ningún sólido, evitando así el problema de las iteraciones que aparece en la interacción, como se verá en el apartado siguiente.

Según el movimiento impuesto la malla solamente es modificada en un tramo y en su coordenada vertical, adoptando la forma de la figura 4.4.

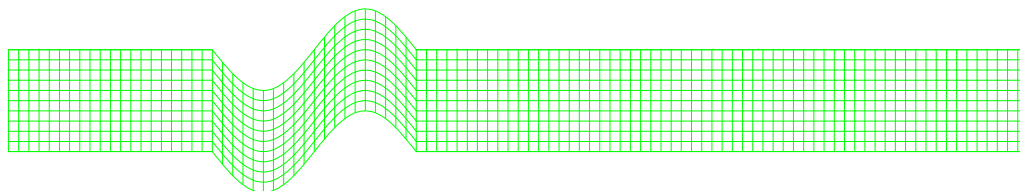


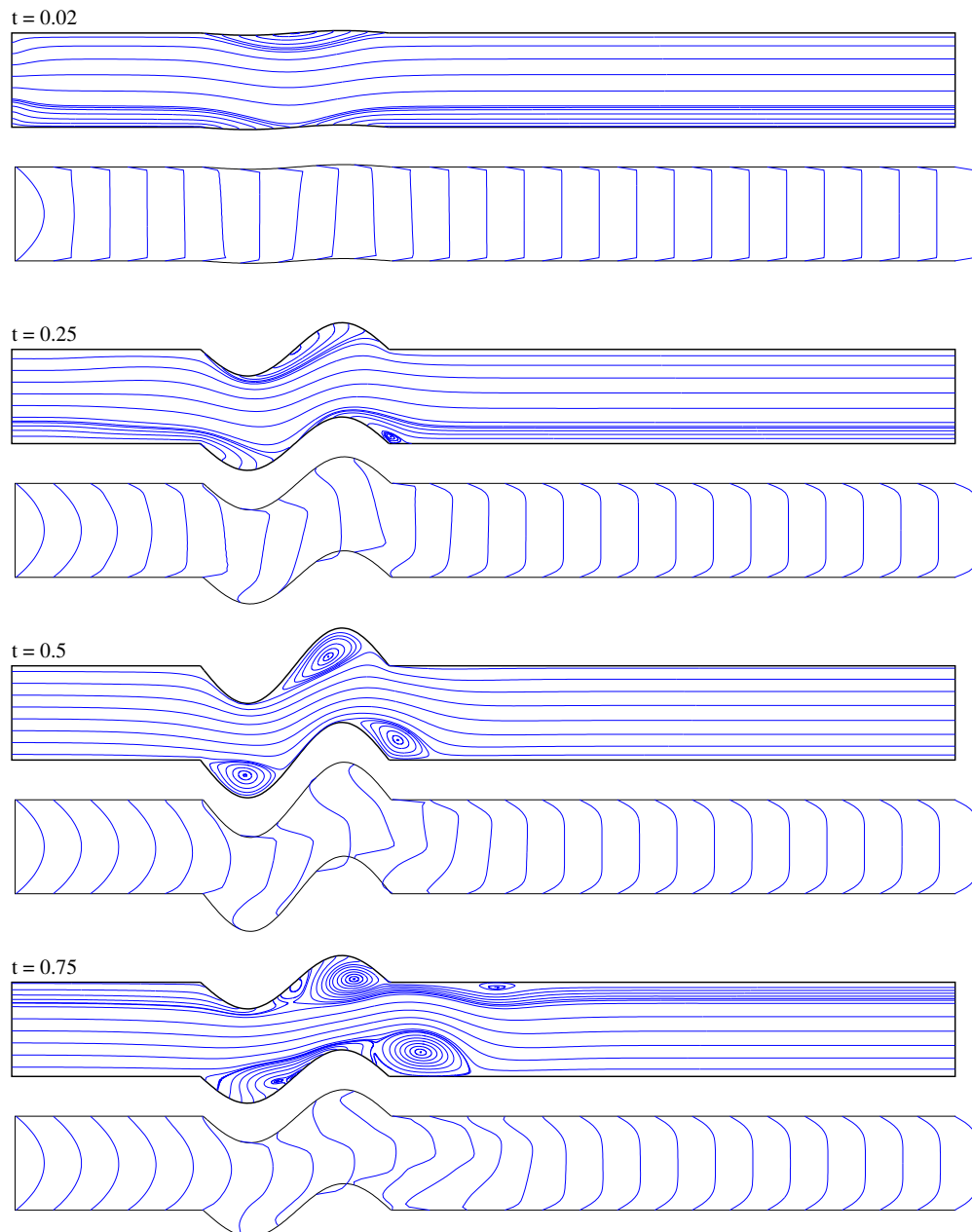
Figura 4.4: Malla deformada verticalmente con movimiento impuesto. Se representa con menos elementos por claridad.

El movimiento del contorno crea obstáculos en la geometría que propicia la formación de vórtices, los cuales evolucionan en la zona del movimiento impuesto. Posteriormente se trasladan en la dirección del flujo disipándose antes de llegar al final del tubo.

En la figura 4.5 se muestran las líneas de corriente y los perfiles de velocidad horizontal en distintos instantes de tiempo.

Obsérvese que las líneas de corriente tienen un extremo en el contorno móvil salvo cuando la velocidad de éste es nula (en los instantes $t = 0.5$ y $t = 1.5$). Esto debe ser así, ya que un contorno móvil ha de ser forzosamente el sitio donde comience o termine una línea de corriente.

Los perfiles de velocidad horizontal comienzan siendo planos, ya que para $t = 0$ las condiciones iniciales son velocidad nula en todo el dominio. El perfil parabólico va desarrollándose con el tiempo.



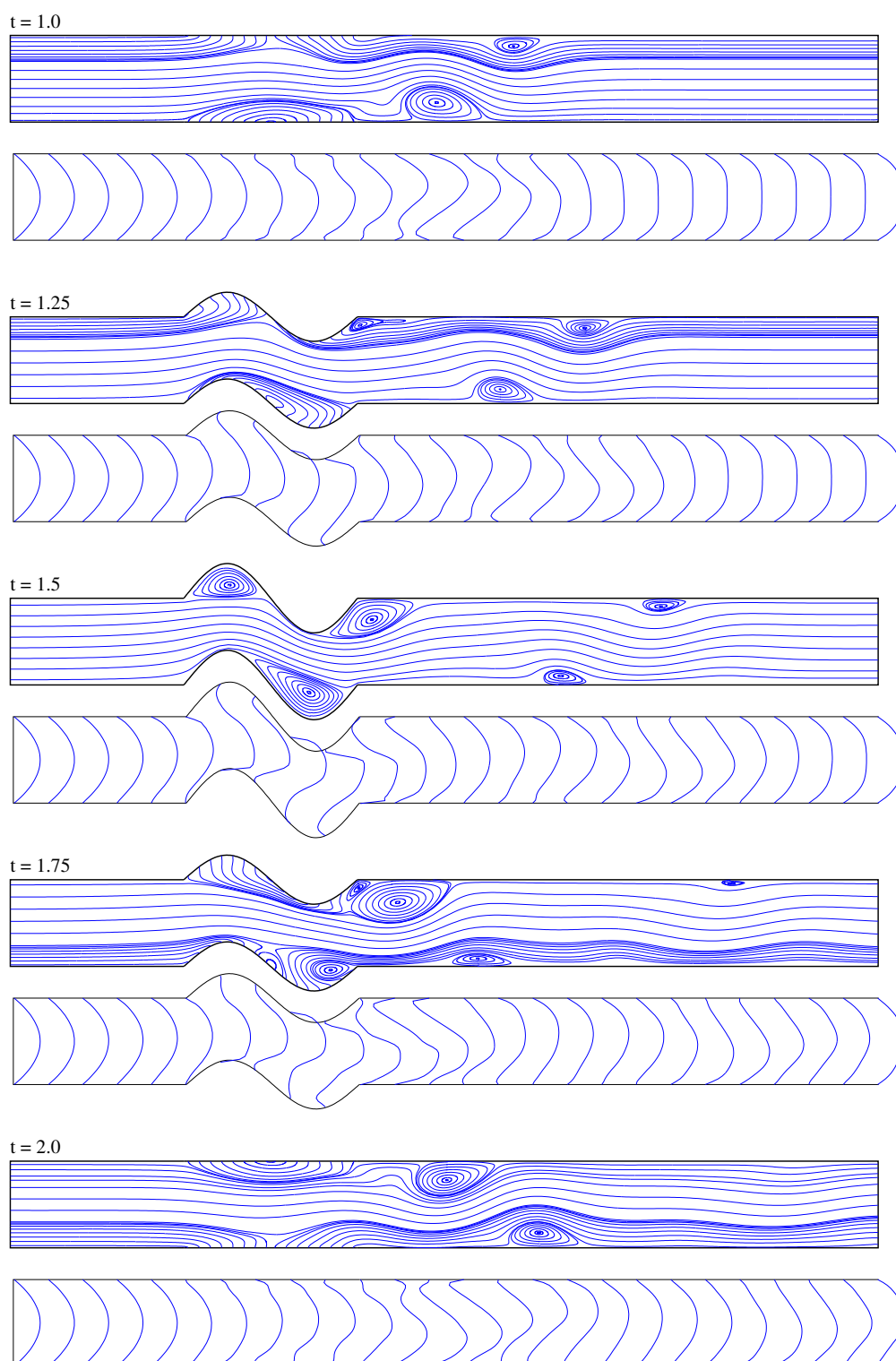


Figura 4.5: *Tubo con movimiento impuesto. Líneas de corriente y perfiles de velocidad horizontal.*

En cuanto a las presiones, como las condiciones de contorno consisten en

un perfil de velocidades impuesto y en un movimiento impuesto en la pared cabe hacer la misma consideración que en la observación sobre la figura 2.8 del apartado 2.4.1. En la figura 4.6, a modo representativo se muestran las curvas isobaras en el instante $t = 2.5$, cuando el flujo ya se ha desarrollado lo suficiente para que los perfiles dejen de ser planos.

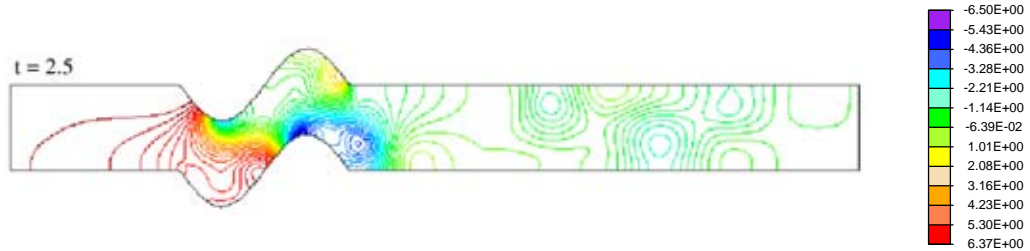


Figura 4.6: *Tubo con movimiento impuesto. Representación de las curvas isobaras.*

En el artículo SHEU Y CHEN [1999] no se muestran resultados cuantitativos, por lo que la comparación es únicamente a título cualitativo. Para ello, las líneas de corriente aquí presentadas incluyen los instantes de tiempo que en dicho artículo se muestran, observándose una buena concordancia tanto en los vórtices formados como en las otras líneas. Asimismo, las curvas isobaras (figura 4.6) también se comparan con los contornos de presión mostrados en el artículo, resultando similares.

4.2. Formulación del problema de interacción

Al resolver el problema de interacción se pretende determinar el movimiento de la interfaz que desconocemos *a priori*.

Partiendo de una estimación del movimiento de dicha interfaz en un instante de tiempo t , el proceso para verificar si la estimación es correcta consta de los siguientes pasos:

- Usar el operador \mathcal{M} definido en el apartado 4.1.3 para obtener la nueva malla, así como la fórmula (4.20) para calcular la velocidad de ésta.
- Resolver las ecuaciones del fluido con la formulación ALE y así obtener las nuevas velocidades.
- A partir de las velocidades obtenidas en b) calcular las tensiones y posteriormente las fuerzas en los nodos de la interfaz.
- Resolver las ecuaciones del sólido imponiendo las fuerzas calculadas en la interfaz.
- Obtener los desplazamientos del sólido y así comparar con los que hemos supuesto al principio.

Haciendo esto no solamente verificamos si la estimación es correcta, sino que a partir del últimos paso podemos obtener una nueva y mejor estimación.

Observación. *De aquí en adelante, llamaremos interfaz al contorno común del fluido y del sólido, esto es, a la zona donde interaccionan y hay que imponer las condiciones de compatibilidad. Como ya se hizo en el apartado anterior, la denotaremos con Γ . Así, las variables con un subíndice Γ representan dichas variables en la interfaz. (Aunque la interfaz es variable en el tiempo, esto es $\Gamma(t)$, para evitar una notación demasiado densa no se escribirá explícitamente esta dependencia). Asimismo, se denotará con Ω_f el dominio del fluido y con Ω_s el del sólido, siendo también variables en el tiempo.*

Para formalizar el problema de interacción se van a definir un conjunto de operadores que permitirán formular el problema de forma precisa y compacta. Asimismo esta formulación, similar a la utilizada en GERBEAU Y VIDRASCU [2003a] y FERNÁNDEZ Y MOUBACHIR [2004], pondrá en perspectiva y facilitará el análisis de los distintos pasos en el proceso y su solución numérica.

Vamos a suponer el problema ya discretizado en el tiempo, por lo que asumimos que hemos obtenido la solución en el instante t^n y queremos obtenerla en t^{n+1} .

Por consistencia, volvamos a definir más formalmente el operador malla \mathcal{M} :

Definición 4.2.1 *Sea \mathbf{d}_Γ^{n+1} el desplazamiento actual de la interfaz $\Gamma^{n+1} \in \mathbb{R}^3$. Se define el operador \mathcal{M} como aquel que a partir de \mathbf{d}_Γ^{n+1} obtiene el desplazamiento actual de toda la malla de fluido $\hat{\mathbf{d}}^{n+1}$ en $\Omega_f^{n+1} \in \mathbb{R}^3$:*

$$(\mathbf{d}_\Gamma^{n+1}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{d}_\Gamma^{n+1}) = \hat{\mathbf{d}}^{n+1} \quad (4.22)$$

De forma similar definamos el operador fluido \mathcal{F} :

Definición 4.2.2 *Sea $\hat{\mathbf{d}}^{n+1}$ el desplazamiento actual de la malla en $\Omega_f^{n+1} \in \mathbb{R}^3$, $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$ la velocidad actual de la malla en $\Omega_f^{n+1} \in \mathbb{R}^3$ y \mathbf{u}^n la velocidad del fluido en el instante anterior en $\Omega_f^n \in \mathbb{R}^3$. Se define el operador \mathcal{F} como aquel que a partir de $\hat{\mathbf{d}}^{n+1}$, $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$ y \mathbf{u}^n obtiene la velocidad actual del fluido \mathbf{u}^{n+1} en $\Omega_f^{n+1} \in \mathbb{R}^3$ así como las fuerzas actuales sobre la interfaz \mathbf{f}_Γ^{n+1} en $\Gamma^{n+1} \in \mathbb{R}^3$:*

$$(\hat{\mathbf{d}}^{n+1}, \hat{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{u}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\hat{\mathbf{d}}^{n+1}, \hat{\mathbf{u}}^{n+1}, \mathbf{u}^n) = (\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{f}_\Gamma^{n+1}) \quad (4.23)$$

Intrínsecamente, el operador \mathcal{F} supone resolver las ecuaciones (4.15).

Para abreviar la notación, tengamos en cuenta que la velocidad de la malla $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$ se puede obtener a partir del desplazamiento de ésta $\hat{\mathbf{d}}^{n+1}$ según (4.20)

y la solución se supone conocida en t^n , por lo que prescindimos de escribir \mathbf{u}^n . Asimismo, de momento lo que nos interesa es trabajar con las fuerzas en el contorno \mathbf{f}_Γ^{n+1} para así resolver el sólido, empleando las velocidades \mathbf{u}^{n+1} únicamente para calcular dichas fuerzas. De acuerdo con esto se puede escribir más condensadamente:

$$\mathbf{f}_\Gamma^{n+1} = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{d}}^{n+1}) \quad (4.24)$$

Por tanto, el operador \mathcal{F} en (4.24) se puede ver de forma abstracta como una aplicación que asocia a cada vector de desplazamientos $\tilde{\mathbf{d}}^{n+1}$ definido en el dominio del fluido un vector de fuerzas \mathbf{f}_Γ^{n+1} definido en la interfaz.

Observación. La dimensión del vector $\tilde{\mathbf{d}}^{n+1}$ es el número de nodos de la interfaz multiplicado por el número de dimensiones del problema (2 ó 3). La dimensión del vector \mathbf{f}_Γ^{n+1} es la misma.

Finalmente definamos el operador sólido \mathcal{S} :

Definición 4.2.3 Sean \mathbf{f}_Γ^{n+1} las fuerzas actuales sobre la interfaz $\Gamma^{n+1} \in \mathbb{R}^3$ y \mathbf{d}^n y $\dot{\mathbf{d}}^n$ el desplazamiento y la velocidad del sólido respectivamente en el instante anterior en $\Omega_s^n \in \mathbb{R}^3$. Se define el operador \mathcal{S} como aquel que a partir de \mathbf{f}_Γ^{n+1} , \mathbf{d}^n y $\dot{\mathbf{d}}^n$ obtiene el desplazamiento \mathbf{d}^{n+1} y velocidad $\dot{\mathbf{d}}^{n+1}$ actuales en $\Omega_s^{n+1} \in \mathbb{R}^3$.

$$(\mathbf{f}_\Gamma^{n+1}, \mathbf{d}^n, \dot{\mathbf{d}}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{f}_\Gamma^{n+1}, \mathbf{d}^n, \dot{\mathbf{d}}^n) = (\mathbf{d}^{n+1}, \dot{\mathbf{d}}^{n+1}) \quad (4.25)$$

No obstante, lo que nos interesa ahora son los desplazamientos en la interfaz, y haciendo consideraciones similares a las hechas con el operador fluido, reescribimos este operador así:

$$\mathbf{d}_\Gamma^{n+1} = \mathcal{S}(\mathbf{f}_\Gamma^{n+1}) \quad (4.26)$$

El operador \mathcal{S} en (4.26), visto de forma abstracta es una aplicación que asocia a cada vector de fuerzas \mathbf{f}_Γ^{n+1} un vector de desplazamientos \mathbf{d}_Γ^{n+1} , ambos definidos en la interfaz.

Observación. Sobre la linealidad o no linealidad de los tres operadores definidos, el operador \mathcal{M} es lineal ya que consiste en resolver un problema de elasticidad lineal. El operador \mathcal{F} es no lineal debido al término convectivo de las ecuaciones de fluido y el operador \mathcal{S} es en este trabajo no lineal porque el modelo de sólido es hiperelástico no lineal, aunque en los ejemplos de interacción para validar el método el sólido es lineal y por tanto el operador \mathcal{S} también.

Los tres operadores actúan *secuencial* y además *circularmente* en un sentido determinado, ya que la salida (*output*) de uno es la entrada (*input*) del

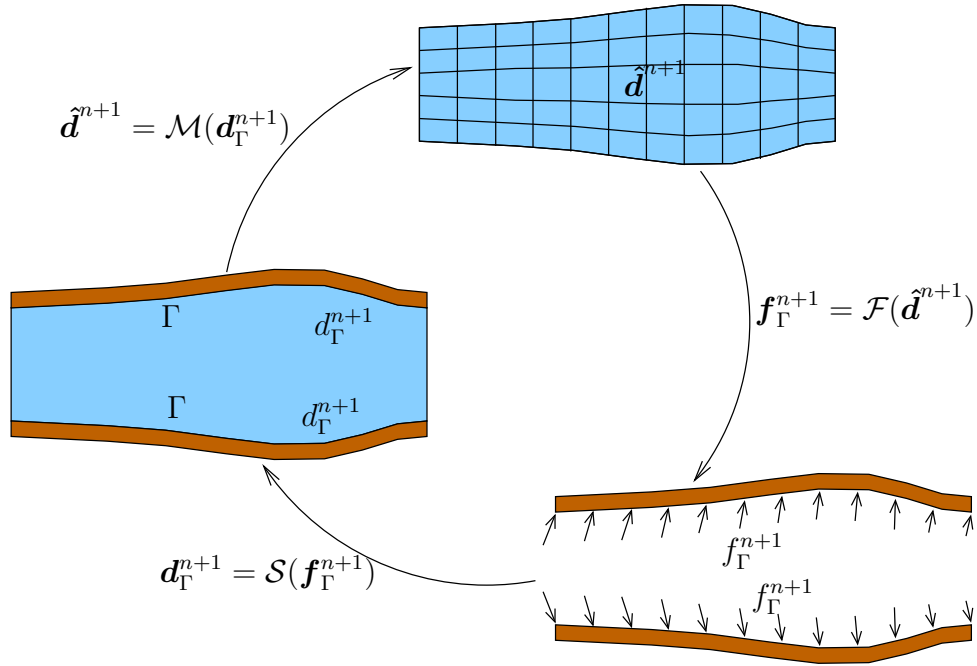


Figura 4.7: Operadores abstractos para formular el problema de interacción. Obsérvese que actúan secuencial y circularmente.

siguiente. En la figura 4.7 se muestra dicha secuencia circular con un esquema del resultado de cada operador.

Ahora el problema de interacción se formula en los siguientes términos:

Ecuación fundamental del problema de interacción: *Conociendo la solución en t^n de los problemas (4.15) y (3.26), hallar los desplazamientos d_Γ^{n+1} de la interfaz en $\Gamma^{n+1} \in \mathbb{R}^3$ en el instante t^{n+1} de tal forma que se cumpla:*

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{M}(d_\Gamma^{n+1}) = d_\Gamma^{n+1} \quad (4.27)$$

donde el símbolo \circ es el usado habitualmente para la composición de funciones. Es decir, en (4.27) primero actúa \mathcal{M} sobre d_Γ^{n+1} , sobre su resultado actúa \mathcal{F} y sobre el resultado de este último actúa \mathcal{S} . A la ecuación (4.27) se le puede llamar ecuación fundamental del problema de interacción.

Esta forma abstracta de enfocar el problema de interacción permite escribir la ecuación a resolver (4.27) de tal forma que sea más fácil enfocar el método de solución, sobre todo porque (4.27) tiene la forma adecuada para aplicar el teorema del punto fijo, como se verá en el apartado siguiente.

Observación. *Al actuar los operadores circularmente, se podría haber planteado la ecuación (4.27) de otra forma diferente por simple permutación circular de los operadores, a saber: $\mathcal{F} \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{S}(f_\Gamma^{n+1}) = f_\Gamma^{n+1}$, donde ahora las incógnitas serían las fuerzas en la interfaz. Estas formas de planteamiento*

to recuerdan conceptualmente al método de los desplazamientos y al método de las fuerzas en los problemas de elasticidad, dependiendo qué incógnitas tomemos, aunque aquí el contexto sea diferente.

De esta manera el problema queda planteado con la ecuación implícita (4.27). Dado que no es posible obtener de forma cerrada \mathbf{d}_Γ^{n+1} , debido principalmente a la no linealidad del operador \mathcal{F} , se hace necesario un método numérico para resolver esta ecuación.

4.3. Clasificación de los métodos de interacción

Para mayor claridad, se puede escribir la ecuación fundamental del problema de interacción (4.27) de forma más estándar:

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{M}(\mathbf{d}_\Gamma^{n+1}) - \mathbf{d}_\Gamma^{n+1} = \mathbf{0} \quad (4.28)$$

A partir de la definición de \mathcal{I} como el operador identidad, que asocia un vector a sí mismo, se define el operador \mathcal{R} :

$$\mathcal{R}(\mathbf{d}_\Gamma^{n+1}) = \mathbf{0} \quad \text{donde} \quad \mathcal{R} = \mathcal{S} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{M} - \mathcal{I} \quad (4.29)$$

haciendo la letra \mathcal{R} referencia a la inicial de *Residuo*.

Para resolver (4.29) se pueden utilizar los métodos habituales en la resolución de ecuaciones no lineales: el método del punto medio, la *regula falsi* (método de la secante), el método de Newton-Raphson (método de la tangente), y utilizando la expresión previa (4.27) también es posible utilizar métodos de punto fijo.

Una posible clasificación de los métodos para resolver el problema de interacción se muestra en el cuadro 4.1.

Cabe destacar que resolver las ecuaciones de interacción por métodos de Newton-Raphson, o en general por cualquier método que suponga calcular la matriz tangente de las ecuaciones supone un cambio cualitativo muy importante. Tal es así, que puede constituir un matiz diferenciador de las distintas metodologías de solución.

A la hora de plantear un método de solución se debe considerar la posibilidad de usar un programa específico para el fluido y otro programa específico para el sólido. Si eso es así, podemos hacer uso de programas especializados y ya validados para el fluido y para el sólido, que pueden ser comerciales, empleando métodos particionados. Si se usan métodos donde se precise la matriz tangente global, no se podrán usar programas separados, sino que habrá que diseñar un programa específico para calcular dicha matriz.

Métodos de interacción		
Métodos monolíticos - Programas específicos - Proporcionan un acoplamiento fuerte - Métodos <i>Newton</i> o <i>quasi-Newton</i>	Métodos particionados - Programas diferentes para el fluido y el sólido	
	Acoplamiento débil - También llamados explícitos y secuenciales (<i>staggered</i>) - Condicionalmente estables	Acoplamiento fuerte - También llamados implícitos e iterativos - Métodos de <i>Block-Jacobi</i> y <i>Block-Gauss-Seidel</i>

Cuadro 4.1: Clasificación de los métodos de interacción.

4.3.1. Métodos monolíticos

La idea de los métodos monolíticos se basa en resolver la ecuación (4.29) por un método tangente, con lo que se obtiene un orden de convergencia supralineal ¹.

En principio sería deseable utilizar estos métodos, pero calcular la matriz tangente de (4.29) no es trivial.

Para expresar la matriz tangente de (4.29), se deriva dicha expresión respecto \mathbf{d}_Γ^{n+1} , y denotando la derivada de un operador con una coma como superíndice se obtiene:

$$\mathcal{R}'(\mathbf{d}_\Gamma^{n+1}) = [\mathcal{S}' \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{M}(\mathbf{d}_\Gamma^{n+1})] \cdot [\mathcal{F}' \circ \mathcal{M}(\mathbf{d}_\Gamma^{n+1})] \cdot \mathcal{M}'(\mathbf{d}_\Gamma^{n+1}) - \mathcal{I} \quad (4.30)$$

siendo:

$$\mathcal{M}'(\mathbf{d}_\Gamma^{n+1}) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{d}}^{n+1}}{\partial \mathbf{d}_\Gamma^{n+1}} \quad (4.31a)$$

$$\mathcal{F}'(\tilde{\mathbf{d}}^{n+1}) = \frac{\partial \mathbf{f}_\Gamma^{n+1}}{\partial \tilde{\mathbf{d}}^{n+1}} \quad (4.31b)$$

$$\mathcal{S}'(\mathbf{f}_\Gamma^{n+1}) = \frac{\partial \mathbf{d}_\Gamma^{n+1}}{\partial \mathbf{f}_\Gamma^{n+1}} \quad (4.31c)$$

El cálculo de \mathcal{M}' es trivial, por ser \mathcal{M} lineal. El cálculo de \mathcal{S}' se obtiene de la forma estándar en mecánica no lineal de sólidos.

El cálculo de \mathcal{F}' es más complejo, ya que hay que calcular la solución de las ecuaciones del fluido ante variaciones del propio dominio del fluido Ω_f . A las derivadas de (4.31b) también se le llaman *acobianos cruzados*.

Como alternativa, se pueden establecer distintas alternativas de \mathcal{F}' . En MATTHIES Y STEINDORF [2002] y MATTHIES Y STEINDORF [2003] se

¹Si se calcula de forma exacta la matriz tangente, se consigue habitualmente una tasa de convergencia de orden 2.

utiliza diferencias finitas para calcular las derivadas de (4.31b), obteniendo buenos resultados en problemas uni y bidimensionales. No obstante, usando diferencias finitas hay que elegir el tamaño del paso para calcular el cociente de forma algo heurística. Procediendo de esta forma incluso se puede resolver el problema aprovechando los códigos estándar para la solución de los modelos fluido y sólido (MATTHIES Y STEINDORF [2003]).

Otra alternativa que se ha utilizado de forma exitosa es aproximar el operador \mathcal{F} por otro operador lineal $\bar{\mathcal{F}}$ (GERBEAU Y VIDRASCU [2003b]). La idea es resolver un fluido cuya ecuación sea lineal (también llamado *modelo reducido*) eliminando el término convectivo y suponiendo que la viscosidad es nula. Procediendo así se plantean unas ecuaciones que *capturan* el efecto de la *masa adicional* en el fluido y constituyen una aproximación razonable al comportamiento real.

Observación. *El efecto de la masa adicional sobre el sólido se puede ver en GERBEAU Y VIDRASCU [2003b]. En las ecuaciones de la dinámica del sólido el efecto de la interacción se introduce mediante fuerzas de inercia adicionales asociadas al movimiento de la masa del fluido. En el apartado 4.3.2 se describe en detalle la relevancia de este efecto.*

Los dos métodos anteriores para aproximar \mathcal{F}' no siempre proporcionan convergencia. Recientemente en FERNÁNDEZ Y MOUBACHIR [2004] se ha desarrollado un método en el que se calculan de forma exacta las derivadas cruzadas (4.31b). Para ello se utilizan herramientas de “cálculo de sensibilidad a la geometría”. De esta manera se obtiene un método de *Newton-Raphson* que acelera extraordinariamente la convergencia.

En el apartado 5.1, dentro de los modelos específicos para hemodinámica, se expone un modelo unidimensional simplificado en el que se utiliza un método monolítico de solución. Este modelo se utiliza para imponer condiciones de contorno absorbentes.

4.3.2. Métodos particionados

El objetivo de los métodos particionados es utilizar códigos de fluido y de sólido, que resuelven de manera independiente los correspondientes modelos, para resolver el problema de la interacción.

De acuerdo con la clasificación hecha en el cuadro 4.1 se analizan separadamente los modelos de acoplamiento débil y acoplamiento fuerte.

Para la representación esquemática de los distintos métodos de solución se ha hecho un esquema tridimensional (ver figura 4.8), donde los ejes Ox y Oy se usan para representar el tiempo y la iteración dentro del paso de tiempo (si la hubiere) y el eje Oz para representar el sistema (fluido o sólido).

El sistema fluido se representa con un círculo azul y el sólido con un cuadrado marrón. En este esquema la resolución de la malla con el operador

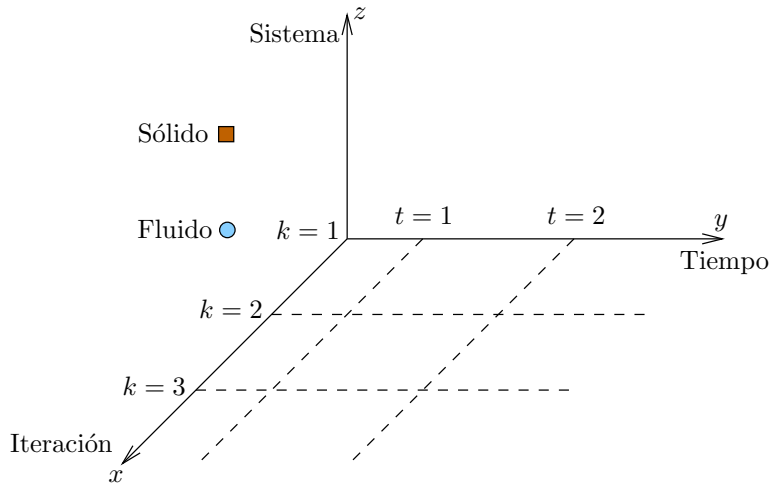


Figura 4.8: Esquema para representar los métodos particionados.

\mathcal{M} se engloba en el sistema fluido para mayor claridad en el gráfico. Es decir, el sistema fluido supone hacer $\mathcal{F} \circ \mathcal{M}$.

Acoplamiento débil

Este método avanza en cada paso de tiempo sin hacer iteraciones internas (de ahí el nombre de métodos secuenciales), por lo que es un método que no acopla totalmente el fluido con el sólido.

Con esta técnica se consigue avanzar rápido en el tiempo pero con el inconveniente de no hacer un acoplamiento completo, por lo que se puede volver inestable fácilmente. De ahí que también se le llamen *métodos de acoplamiento explícito*, siendo condicionalmente estables, lo que hace que el paso de tiempo esté acotado superiormente.

En el gráfico 4.9 se observan dos posibles estrategias de este método. Una de ellas permite resolver ambos sistemas en paralelo, y la otra en serie.

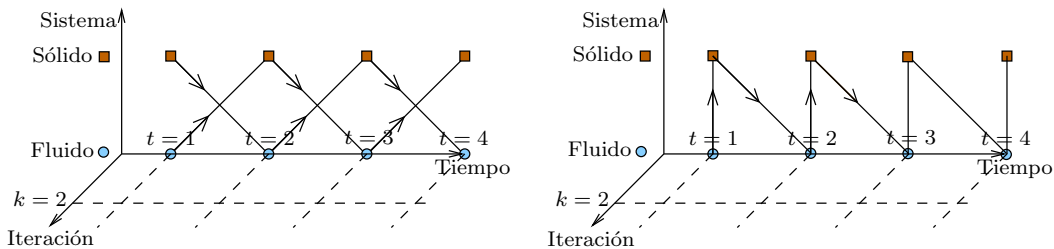


Figura 4.9: Acoplamiento débil. Esquemas de resolución. A la izquierda solución en paralelo y a la derecha solución en serie.

Ambos sistemas (fluido y sólido) intercambian información al final de

cada paso de tiempo y esa información se utiliza para seguir avanzando en el tiempo. En el caso de solución *en paralelo* se tiene:

$$\mathbf{f}_\Gamma^{n+1} = \mathcal{F} \circ \mathcal{M}(\mathbf{d}_\Gamma^n) \quad (4.32a)$$

$$\mathbf{d}_\Gamma^{n+1} = \mathcal{S}(\mathbf{f}_\Gamma^n) \quad (4.32b)$$

Y en el caso de solución *en serie*:

$$\mathbf{f}_\Gamma^{n+1} = \mathcal{F} \circ \mathcal{M}(\mathbf{d}_\Gamma^n) \quad (4.33a)$$

$$\mathbf{d}_\Gamma^{n+1} = \mathcal{S}(\mathbf{f}_\Gamma^{n+1}) \quad (4.33b)$$

Se han llevado a cabo experimentos numéricos donde se observa que en hemodinámica estos esquemas no funcionan bien, debido al *efecto de la masa adicional* (ver MORAND Y OHAYON [1992] para una descripción detallada). Al desarrollar las ecuaciones del sólido, la fuerza normal (presión) en la interfaz fluido-sólido Γ depende de la aceleración de ésta y de la densidad del fluido. En consecuencia, en las ecuaciones del sólido aparece el término de inercia:

$$(\rho_s \mathbf{M}_s + \rho_f \mathbf{M}_f) \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} \quad (4.34)$$

donde la matriz \mathbf{M}_s es la matriz de masas del sólido y \mathbf{M}_f proviene de las ecuaciones del fluido. La masa adicional es precisamente el término $\rho_f \mathbf{M}_f$. En (4.34) se observa que si la densidad del sólido es muy superior a la del fluido ($\rho_s \mathbf{M}_s \gg \rho_f \mathbf{M}_f$) el efecto de la masa adicional tiene poca importancia, como por ejemplo en la aerodinámica de estructuras sometidas a las acciones del viento, donde la densidad del aire es varios órdenes de magnitud menor que la del sólido. En este caso un esquema particionado con acoplamiento débil puede funcionar bien.

En cambio, si la densidad del fluido es similar a la del sólido, como ocurre en hemodinámica que son prácticamente iguales, el efecto de la masa adicional sí cobra importancia, ya que $\rho_s \mathbf{M}_s \approx \rho_f \mathbf{M}_f$. Esto origina problemas de estabilidad en el método explícito (MORAND Y OHAYON [1992]).

Acoplamiento fuerte

Los métodos de acoplamiento fuerte están basados en resolver la ecuación (4.27), la cual tiene la estructura adecuada para ser resuelta por métodos basados en el teorema del punto fijo. Reescribamos dicha ecuación aquí:

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{M}(\mathbf{d}_\Gamma^{n+1}) = \mathbf{d}_\Gamma^{n+1} \quad (4.35)$$

donde se supone conocida la solución en el instante t^n y se quiere obtener la solución en t^{n+1} .

Para resolver (4.35) se pueden utilizar esquemas similares a los métodos iterativos de *Jacobi* y *Gauss-Seidel* en los sistemas de ecuaciones lineales. En

el contexto de la interacción fluido-estructura estos métodos son llamados *Block-Jacobi* y *Block-Gauss-Seidel*.

El grado de acoplamiento logrado con estos métodos es el mismo que el alcanzado con métodos monolíticos, pero normalmente realizando más iteraciones en cada paso de tiempo. Estas iteraciones suponen un incremento extraordinario del coste computacional, ya que para un grado razonable de tolerancia en el acoplamiento son necesarias normalmente varias decenas de iteraciones.

Observación. Algunos autores llaman *subiteraciones* a lo que aquí se ha llamado *iteraciones dentro de cada paso de tiempo*, ya que para ellos avanzar en el tiempo es hacer iteraciones.

Método de Block-Jacobi

Este método se basa en la solución en paralelo el sistema fluido y sólido, intercambiando la información de ambos sistemas después de cada iteración. Esquemáticamente se representa en la figura 4.10.

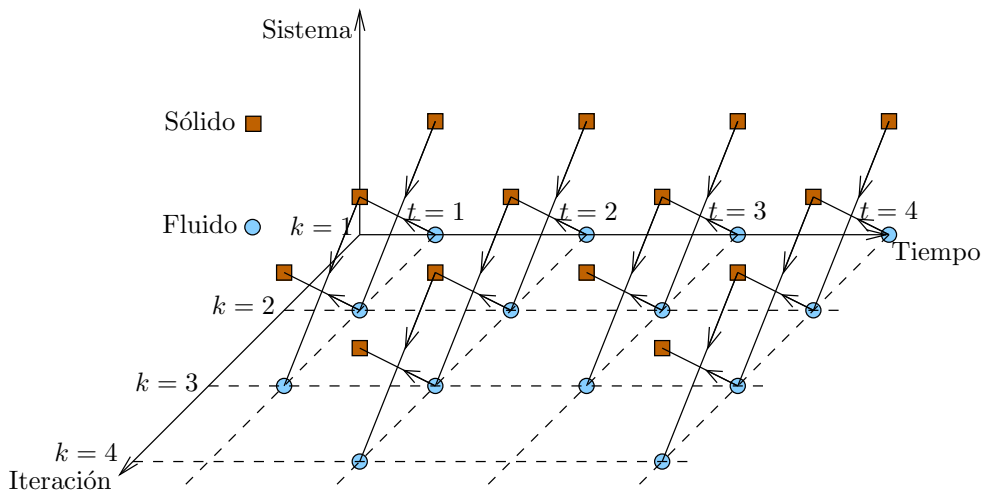


Figura 4.10: Acoplamiento fuerte con el método de Block-Jacobi. Se puede utilizar cálculo en paralelo.

En este ejemplo, para $t = 1$ son necesarias 3 iteraciones para lograr la convergencia del sistema acoplado (de acuerdo a una tolerancia preestablecida). En $t = 2$ se hacen 4 iteraciones, etc... En cada iteración se obtienen unas nuevas fuerzas y unos nuevos desplazamientos en la interfaz de acuerdo con:

$$\mathbf{f}_{\Gamma,k+1}^{n+1} = \mathcal{F} \circ \mathcal{M}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) \quad (4.36a)$$

$$\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} = \mathcal{S}(\mathbf{f}_{\Gamma,k}^{n+1}) \quad (4.36b)$$

donde se ha utilizado el subíndice k para denotar las iteraciones. En (4.36) se observa más claramente que ambos sistemas se pueden resolver en paralelo,

ya que para hallar los resultados en $k + 1$ son únicamente necesarios los resultados en k . Pero si no se dispone de la infraestructura necesaria para un cálculo en paralelo es más eficiente utilizar el método de *Block-Gauss-Seidel* ya que converge más rápidamente.

Método de Block-Gauss-Seidel

Con este método se resuelve un sistema y se transfiere el resultado inmediatamente al otro sistema antes de solucionarlo. En consecuencia los sistemas se resuelven secuencialmente y no es aplicable la solución de ambos sistemas mediante cálculo en paralelo.

En la figura 4.11 se muestra esquemáticamente este método.

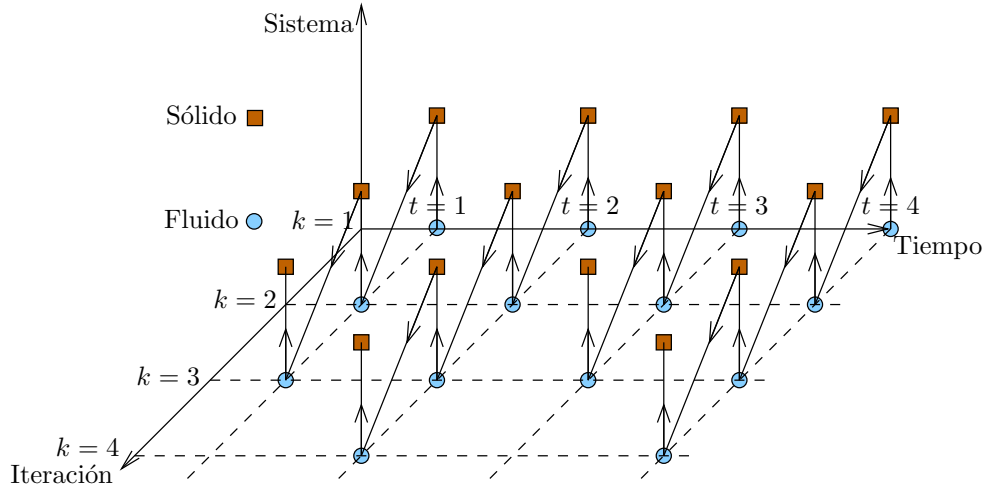


Figura 4.11: Acoplamiento fuerte con el método de *Block-Gauss-Seidel*. Se ha de resolver en serie.

En este caso se transfiere información del sistema fluido para resolver el sólido en la misma iteración, representando dicha transferencia mediante flechas verticales.

Las fuerzas y desplazamientos en cada iteración son en este caso:

$$\mathbf{f}_{\Gamma,k+1}^{n+1} = \mathcal{F} \circ \mathcal{M}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) \quad (4.37a)$$

$$\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} = \mathcal{S}(\mathbf{f}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) \quad (4.37b)$$

En este trabajo se propone un método basado en el de *Block-Gauss-Seidel*. Para simplificar la notación definamos el operador \mathcal{A} como:

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{S} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{M} \quad (4.38)$$

por lo que podemos escribir la ecuación a resolver:

$$\mathcal{A}(\mathbf{d}_{\Gamma}^{n+1}) = \mathbf{d}_{\Gamma}^{n+1} \quad (4.39)$$

donde se explicita que la incógnita buscada \mathbf{d}_Γ^{n+1} es un punto fijo del operador \mathcal{A} .

Para buscar el punto fijo de (4.39) mediante métodos basados en el teorema de *Picard* (ver cuadro 4.2) es necesario que la función \mathcal{A} sea contractiva, propiedad que en general no se verifica (en ningún experimento numérico realizado ha resultado ser contractiva).

Tanteo inicial	$\mathbf{d}_{\Gamma,0}^{n+1}$
Iteración 1	$\mathbf{d}_{\Gamma,1}^{n+1} = \mathcal{A}(\mathbf{d}_{\Gamma,0}^{n+1})$
Iteración 2	$\mathbf{d}_{\Gamma,2}^{n+1} = \mathcal{A}(\mathbf{d}_{\Gamma,1}^{n+1})$
\vdots	\vdots
Iteración k	$\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} = \mathcal{A}(\mathbf{d}_{\Gamma,k-1}^{n+1})$

Cuadro 4.2: *Esquema iterativo del método del punto fijo.*

Para conseguir una sucesión convergente hay que hacer cambios más suaves de un punto de la sucesión al siguiente, esto es, que la norma de la diferencia entre los resultados de dos iteraciones consecutivas $\|\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} - \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}\|$ no sea tan grande como la que resultaría del método del cuadro 4.2. Una forma de conseguir esto es introduciendo un *parámetro de relajación* ω tal que:

$$\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} = \omega \mathcal{A}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) + (1 - \omega) \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} \quad (4.40)$$

ó lo que es equivalente:

$$\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} = \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} + \omega \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) \quad (4.41)$$

donde ω es un escalar tal que $\omega \in (0, 1]$. Así resulta la sucesión mostrada en el cuadro 4.3, donde se observa que ahora la sucesión avanza en la dirección del residuo actual (esto también lo hace la sucesión del cuadro 4.2), pero ahora dicho avance está modulado por el parámetro de relajación, que actuaría a modo de *freno* para dar pasos más pequeños de un punto a otro de la sucesión.

Tanteo inicial	$\mathbf{d}_{\Gamma,0}^{n+1}$
Iteración 1	$\mathbf{d}_{\Gamma,1}^{n+1} = \mathbf{d}_{\Gamma,0}^{n+1} + \omega \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,0}^{n+1})$
Iteración 2	$\mathbf{d}_{\Gamma,2}^{n+1} = \mathbf{d}_{\Gamma,1}^{n+1} + \omega \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,1}^{n+1})$
\vdots	\vdots
Iteración k	$\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} = \mathbf{d}_{\Gamma,k-1}^{n+1} + \omega \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k-1}^{n+1})$

Cuadro 4.3: *Sucesión para resolver el problema de interacción con la técnica del parámetro de relajación.*

Observación. *La sucesión del cuadro 4.2 es un caso particular de la del cuadro 4.3 haciendo en este último $\omega = 1$.*

La elección del parámetro de relajación ω no es única. Además, se puede elegir constante para todo el cálculo o variable para cada iteración.

Para ω constante, si se elige ω muy pequeño se mejora la convergencia pero a costa de un número elevado de iteraciones. Lo contrario sucede para valores de ω mayores.

En los ejemplos de los apartados 4.5.1 y 4.5.2 se comparará el número de iteraciones necesarias para varios valores de ω junto con el método adoptado. En FORMAGGIA ET AL. [2001] se hace un estudio más extenso del parámetro de relajación en el problema del apartado 4.5.1.

Existen alternativas más eficientes que elegir ω constante en la fórmula (4.41). En este trabajo se utilizan valores de ω no constantes, que se determinan mediante el método de *Aitken*.

4.4. Método de interacción propuesto

En este trabajo se ha adoptado un método particionado con acoplamiento fuerte. La justificación del acoplamiento fuerte se dio en el apartado 4.3.2, y era debido a la similitud de las densidades del fluido y sólido. Utilizar un método particionado no tiene una justificación tan clara ya que los métodos monolíticos son más eficientes a pesar de que se tengan que calcular los jacobianos cruzados de (4.31b) (ver FERNÁNDEZ Y MOUBACHIR [2004]). Este trabajo, aparte de la gran componente de modelos numéricos, también está orientado a aplicar un método de interacción a geometrías reales con modelos no lineales para la pared arterial. De ahí que no se haya entrado más a fondo en implementar un método monolítico para geometrías tridimensionales, dejando ello como una línea abierta para futuros trabajos.

Dentro de los métodos particionados se ha optado por el método de *Block-Gauss-Seidel*, ya que converge más rápido que el método de *Block-Jacobi*. Solamente si se utilizara cálculo en paralelo para el método de *Block-Jacobi* pudiera este último tener ventaja compensando el mayor número de iteraciones con el menor tiempo de cálculo de cada iteración.

El criterio de convergencia se basa en la norma euclídea $\|\cdot\|$ de la diferencia entre los desplazamientos de la interfaz al comienzo y al final de cada iteración:

$$\frac{\|\mathcal{A}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) - \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}\|}{\|\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}\|} = \frac{\|\mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1})\|}{\|\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}\|} < \text{tolerancia} \quad (4.42)$$

donde la tolerancia es un número muy pequeño. En este trabajo, salvo que se diga lo contrario en algún caso, se ha tomado típicamente: tolerancia = 10^{-4} .

4.4.1. Método de aceleración de Aitken

En (4.41) adoptar ω constante para todo el cálculo es muy ineficiente. Una estrategia que mejora la eficiencia es modificar los valores de ω mediante el método de Aitken. El orden de convergencia de este método está demostrado cuando la incógnita es un escalar, pero para el caso de variables vectoriales no hay resultados reportados.

Método de Aitken con variable escalar

Supongamos que tenemos que resolver la siguiente ecuación:

$$f(x) = x \tag{4.43}$$

que puesta en forma de residuo es:

$$R(x) = 0 \quad \text{siendo} \quad R(x) \equiv f(x) - x \tag{4.44}$$

En este caso el método de Aitken es equivalente al método de la secante, que es a su vez una generalización a ecuaciones no lineales del antiquísimo método de la *regula falsi*². En este método se halla la recta que une dos puntos de la curva $R(x)$ y se calcula el punto en que se anula la ordenada de dicha recta (x_3 en la figura 4.12).

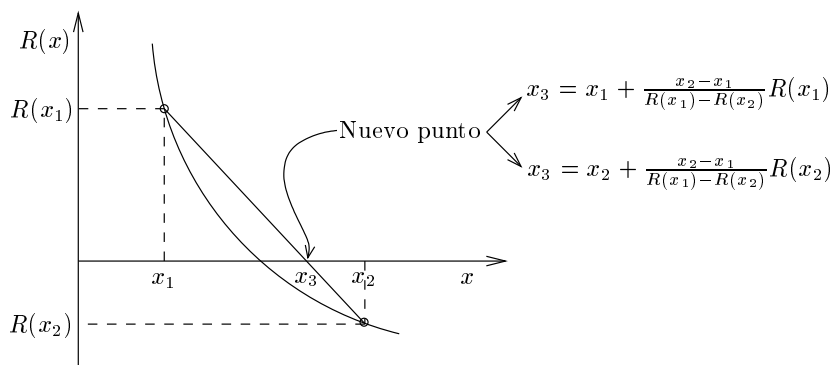


Figura 4.12: Ilustración del método de Aitken para una variable escalar.

Como se ve en dicha figura, es posible hallar x_3 de dos formas distintas. Por tanto, el método comienza haciendo dos tanteos $(x_1, R(x_1))$ y $(x_2, R(x_2))$, hallando a partir de estos x_3 . Ahora seguiríamos a partir de $(x_2, R(x_2))$ y $(x_3, R(x_3))$ para hallar un x_4 , etc... Generalizando a cualquier iteración, la fórmula general queda: *Sabiendo los valores en x_k y x_{k+1} , hallar un nuevo valor x_{k+2} según:*

$$x_{k+2} = x_{k+1} + \frac{x_{k+1} - x_k}{R(x_k) - R(x_{k+1})} R(x_{k+1}) \tag{4.45}$$

²Este método consiste en resolver una ecuación lineal a partir del tanteo en dos puntos. Dicho método aparece ya en el texto chino *Nine Chapters on the Mathematical Art*, siglo II a.C.

La fórmula (4.45) se puede escribir con la misma estructura que (4.41) definiendo ω de tal forma que:

$$x_{k+2} = x_k + \omega R(x_k) \quad (4.46a)$$

$$x_{k+2} = x_{k+1} + \omega R(x_{k+1}) \quad \text{siendo } \omega \equiv \frac{x_{k+1} - x_k}{R(x_k) - R(x_{k+1})} \quad (4.46b)$$

donde se han escrito las dos formas de hallar el nuevo punto.

Método de Aitken con variable vectorial

Para resolver la ecuación (4.29) se extrapola el método de una variable escalar a una variable vectorial, a modo de una *regula falsi generalizada*. Partiendo de dos tanteos $\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}$ y $\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}$ se calcula el valor $\mathbf{d}_{\Gamma,k+2}^{n+1}$ mediante (4.46):

$$\tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1} = \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} + \omega \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) \quad (4.47a)$$

$$\tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1} = \mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} + \omega \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) \quad (4.47b)$$

donde se han indicado con los símbolos $\tilde{\cdot}$ y $\tilde{\cdot}$ los dos posibles valores de $\mathbf{d}_{\Gamma,k+2}^{n+1}$.

En general para el caso vectorial ocurre que $\tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1} \neq \tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1}$, cumpliéndose siempre la igualdad estricta para el caso escalar (siempre y cuando se tome ω como en (4.46)).

La idea del método de Aitken es tomar el parámetro ω de tal forma que $\tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1}$ sea lo más parecido posible a $\tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1}$. O dicho en términos matemáticos, minimizar la distancia entre ambos respecto una norma. El problema queda así planteado:

$$\min_{\omega} \left\| \tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1} - \tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1} \right\|^2 \quad (4.48)$$

Desarrollando (4.48) con la norma euclídea y teniendo en cuenta (4.47):

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \left\| \tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1} - \tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1} \right\|^2 &= \min_{\omega} \left(\tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1} - \tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1} \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1} - \tilde{\mathbf{d}}_{\Gamma,k+2}^{n+1} \right) = \\ \min_{\omega} & \left(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} \cdot \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} + 2\omega \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) + \omega^2 \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) + \mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} \cdot \mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} + \right. \\ & 2\omega \mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) + \omega^2 \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) - 2\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} \cdot \mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} - \\ & \left. 2\omega \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) - 2\omega \mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) - 2\omega^2 \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

denotando con \cdot el producto escalar de dos vectores.

Derivando la última expresión de (4.49) respecto ω e igualando el resultado a cero:

$$\begin{aligned} & \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) + \omega \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) + \mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) + \\ & \omega \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) - \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) - \mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) - \\ & 2\omega \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Despejando ω de (4.50) y reordenando términos se llega a:

$$\omega = \frac{(\mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) - \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1})) \cdot (\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} - \mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1})}{(\mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) - \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1})) \cdot (\mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1}) - \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}))} \quad (4.51)$$

Entrando con el parámetro de relajación (4.51) en por ejemplo (4.47b) obtenemos el valor $\mathbf{d}_{\Gamma,k+2}^{n+1}$ de la siguiente iteración, avanzando en el eje k de la figura 4.11.

Observación. La fórmula (4.51), para el caso particular de una variable escalar se reduce a la ya obtenida en (4.46).

El parámetro de relajación ω también puede interpretarse como una aproximación escalar a la inversa de la matriz tangente utilizada en el método de *Newton-Raphson*: $-(\mathcal{R}'(\mathbf{d}_{\Gamma}^{n+1}))^{-1}$

Variantes del método de Aitken

Existen variantes de este método basadas en tomar distintos ω_i para las componentes del vector $\mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1})$. En general los resultados no suponen una mejora apreciable respecto al método original. Algunas de estas variantes son (ver DEPARIS [2004] para mayor detalle):

- a) Relajación diagonal. Consiste en dividir los nodos de la interfaz en varios grupos y aplicar a cada uno de ellos un parámetro de relajación distinto. Esta estrategia también se ha analizado en este trabajo, pero al ser ω distinta en cada grupo no hay continuidad entre los desplazamientos de grupos de nodos adyacentes.
- b) Relajación en bloque. Este método es parecido al anterior, pero dividiendo la interfaz en grupos de igual número de nodos. Los distintos grupos pueden compartir nodos por lo que se logra mayor continuidad en el movimiento de la interfaz.
- c) Evaluaciones independientes. Pensado para poder utilizar cálculo en paralelo, consiste en hacer dos evaluaciones independientes en cada iteración, esto es, utilizar (4.47a) y (4.47b) para lograr dos estimaciones distintas y calcular un nuevo ω con esas dos estimaciones. En el presente trabajo también se ha analizado este método (aunque calculando en serie), pero el número de iteraciones hasta la convergencia no ha mejorado, e incluso ha empeorado en general.

4.4.2. Programa inter3D

En este apartado se describe el programa desarrollado e implementado en la tesis para resolver los modelos de interacción. A este programa se le ha llamado `inter3D`, y está formado por un conjunto de programas ejecutados secuencialmente. Los códigos programados para fluido y sólido se ejecutan

llamándolos desde este programa, y además se procesa y se transmite entre ellos los resultados obtenidos con los modelos de fluido y sólido.

Además de los programas de elementos finitos que resuelven los modelos de fluido y sólido, desarrollados en *FEAP* (TAYLOR [2000c]), se ha utilizado código *fortran 77* para las tareas que requieren numerosas operaciones matemáticas y lenguaje *awk* para las tareas de trasiego de datos.

Al igual que en la figura 4.11, se utiliza el entero n para el paso de tiempo y el entero k para el número de iteración dentro del paso de tiempo. Se supone que se parte de la situación en $t = 0$ ($n = 0$) la cual es tomada como condición inicial y conocida. Para las iteraciones, el primer tanteo a partir de los valores del paso de tiempo anterior es $k = 0$ (ver figura 4.11).

En el cuadro 4.4 se presenta el algoritmo de solución.

El procedimiento descrito da las líneas generales del cálculo, aunque en ciertos pasos haya que ejecutar más de un programa. En el paso 2.2 la fórmula para extrapolar el movimiento de la interfaz al paso de tiempo siguiente (4.53) mejora ligeramente la extrapolación de (4.52) (MOK Y WALL [2001], GERBEAU Y VIDRASCU [2003b]). En los cálculos hechos aquí no se ha apreciado que el número de iteraciones se reduzca significativamente.

En los pasos 3.4 y 3.5 se ha denotado con $\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}$ los desplazamientos de la pared tras resolver el sólido, que son los que se comparan con los supuestos inicialmente.

El paso que más tiempo consume con una enorme diferencia sobre todos los demás es el 3.3, donde se resuelven las ecuaciones del fluido.

4.5. Validación del método de interacción

En los ejemplos de validación que se muestran no se han encontrado apenas resultados cuantitativos por lo que la comparación es en su mayor parte cualitativa, observando los dibujos y las gráficas del movimiento de la parte flexible en ambos casos.

4.5.1. Transmisión de un pulso de presión en un cilindro

Este ejemplo se describe en FORMAGGIA ET AL. [2001] y FERNÁNDEZ Y MOUBACHIR [2004].

Es un caso con simetría axial pero aquí se ha resuelto en tres dimensiones para usar los mismos elementos y algoritmos que se usarán para el caso de arterias con geometría real. Se usa el sistema cegesimal de unidades.

Descripción del problema (ver figura 4.13):

- a) El cilindro tiene una longitud $L = 5$ cm. y un diámetro inicial $\phi_0 = 1$ cm. El espesor inicial de la pared es $h_0 = 0.1$ cm.

1. Partimos de las condiciones iniciales en $t = 0$, inicializando $n = 0$.
2. Se quiere hallar la solución en t^{n+1} . Inicializamos $k = 0$ y se realiza el primer tanteo.
 - 2.1. Si $n = 0$ (esto es, si es el primer paso de tiempo):

$$\mathbf{d}_{\Gamma,0}^{n+1} = \hat{\mathbf{d}}_{\Gamma}^n \Delta t \quad (4.52)$$

- 2.2. Si $n \geq 1$ (segundo y sucesivos pasos de tiempo):

$$\mathbf{d}_{\Gamma,0}^{n+1} = \frac{3}{2} \hat{\mathbf{d}}_{\Gamma}^n \Delta t - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{d}}_{\Gamma}^{n-1} \Delta t \quad (4.53)$$

3. Calculamos el residuo $\mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1})$ de acuerdo con las siguientes etapas:

- 3.1. Se obtiene la nueva malla: $\hat{\mathbf{d}}_k^{n+1} = \mathcal{M}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1})$
- 3.2. Se calcula la velocidad de la malla como en (4.20)

$$\hat{\mathbf{u}}_k^{n+1} \approx \frac{\hat{\mathbf{d}}_k^{n+1} - \hat{\mathbf{d}}_k^n}{\Delta t} \quad (4.54)$$

- 3.3. Se resuelven las ecuaciones del fluido: $\mathbf{f}_{\Gamma,k}^{n+1} = \mathcal{F}(\hat{\mathbf{d}}_k^{n+1})$
- 3.4. Se resuelven las ecuaciones del sólido: $\underline{\mathbf{d}}_{\Gamma,k}^{n+1} = \mathcal{S}(\mathbf{f}_{\Gamma,k}^{n+1})$
- 3.5. El residuo es: $\mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) = \mathcal{A}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) - \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} = \underline{\mathbf{d}}_{\Gamma,k}^{n+1} - \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}$

4. Se realiza el test de convergencia según (4.42):

$$\frac{\|\mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1})\|}{\|\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}\|} < \text{tolerancia} \quad (4.55)$$

- 4.1. Si ha convergido, copiamos los valores actuales de todas las variables de estado a las variables de valores convergidos (ya sin el subíndice k). Incrementamos el tiempo $t^{n+2} = t^{n+1} + \Delta t$, y si $t^{n+2} \leq t_{\text{final}}$ hacemos $n = n + 1$ y vamos al paso 2. Si por el contrario $t^{n+2} > t_{\text{final}}$ terminamos en el paso 5.
- 4.2. Si no ha convergido se vuelve a iterar, calculando el parámetro de relajación ω :
 - 4.2.1. Si $k = 0$ (esto es, si es la primera iteración):

$$\omega_0 = 1$$

- 4.2.2. Si $k \geq 1$ tomamos (4.51) con una traslación del índice k :

$$\omega_k = \frac{(\mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) - \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k-1}^{n+1})) \cdot (\mathbf{d}_{\Gamma,k-1}^{n+1} - \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1})}{(\mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) - \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k-1}^{n+1})) \cdot (\mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) - \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k-1}^{n+1}))} \quad (4.56)$$

Se obtienen los nuevos desplazamientos de la interfaz:

$$\mathbf{d}_{\Gamma,k+1}^{n+1} = \mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1} + \omega_k \mathcal{R}(\mathbf{d}_{\Gamma,k}^{n+1}) \quad (4.57)$$

Hacemos $k = k + 1$ y volvemos al paso 3.

5. Fin del cálculo.

Cuadro 4.4: *Algoritmo de interacción entre los modelos 3D fluido-pared arterial.*

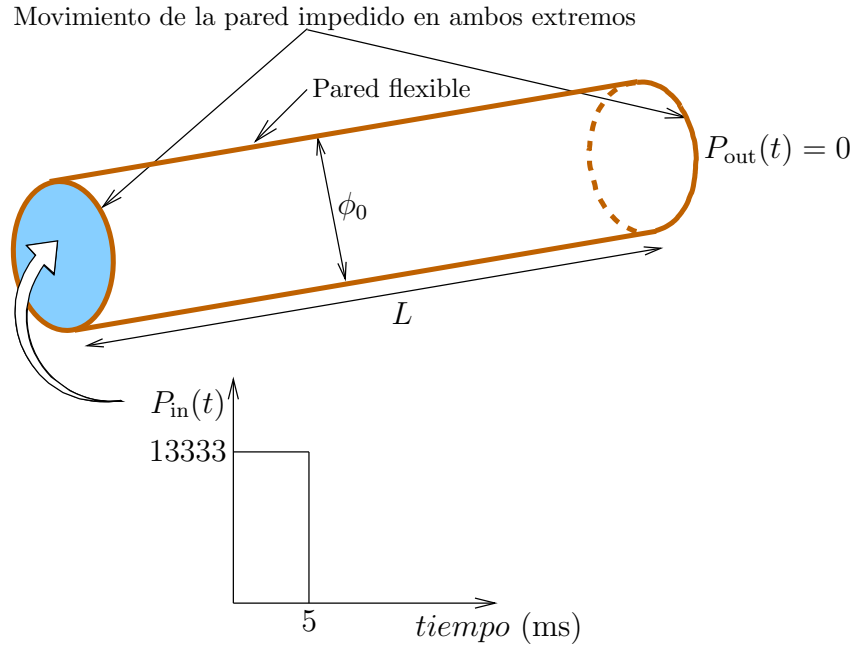


Figura 4.13: Esquema del cilindro y del pulso de presión.

- b) En un extremo se impone un pulso rectangular de presión de 13333 dyn/cm² durante 5 milisegundos ³:

$$P_{in}(t) = \begin{cases} 13333 & t \leq 5 \text{ ms} \\ 0 & t > 5 \text{ ms} \end{cases} \quad (4.58)$$

- c) En el otro extremo se impone presión nula $P_{out}(t) = 0$.
- d) El fluido es newtoniano e incompresible, con una viscosidad dinámica $\mu = 0.03$ Poise y una densidad de $\rho_f = 1$ g/cm³.
- e) La pared tiene una densidad $\rho_s = 1.2$ g/cm³ y se supone isotrópica con comportamiento elástico lineal. El módulo de elasticidad es $E = 3 \cdot 10^6$ dyn/cm² y el coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.
- f) Los dos extremos de la pared están sujetos, es decir, tienen movimiento nulo durante todo el cálculo. Además, en el instante inicial la velocidad del fluido es nula en todo el cilindro.
- g) No se produce deslizamiento en la pared del tubo por lo que la velocidad del fluido en la interfaz es la misma que la de la pared.

³Esta presión equivale a 10 mm Hg

- h) El paso de tiempo tomado es $\Delta t = 10^{-4}$ s. El cálculo se ha hecho hasta $t_{\text{final}} = 12$ ms, dando un total de 120 pasos de tiempo. La malla del fluido consta de 1620 elementos y la del sólido tiene 720 elementos (ver figura 4.14).

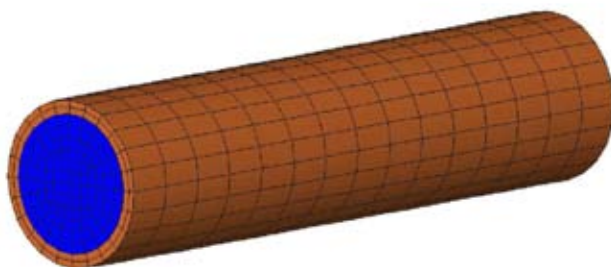


Figura 4.14: *Transmisión de un pulso de presión. Malla del fluido (en azul) y del sólido (en marrón).*

Cabe señalar que el tiempo de cálculo hasta los 12 ms. se debe a que es el tiempo que tarda en llegar la onda de presión hasta el extremo final. Como se ha restringido el movimiento de la pared en los extremos se produce una reflexión de la onda de presión, pero ahora con valores negativos de ésta. Este es un tema muy importante en los modelos de hemodinámica, ya que lo deseable es imponer condiciones de contorno no reflectantes en el extremo final, lo cual se desarrollará en el siguiente capítulo.

La tolerancia para el cálculo, según la expresión (4.55), es 10^{-4} . En el gráfico de la figura 4.15 se observa el número de iteraciones necesarias (el valor de k en la figura 4.11) según el método de Aitken adoptado aquí, tomando el valor del parámetro de relajación según (4.56). Resulta una media de 19.4 iteraciones por paso de tiempo. También se ha calculado el valor medio del parámetro de relajación del cálculo completo, resultando $\omega_{\text{medio}} = 0.2$. Adicionalmente se muestra a efectos de comparación el número de iteraciones que son necesarias si se adopta un valor del parámetro de relajación constante.

Se observa la ventaja del método de *Aitken* en cuanto al número de iteraciones. Respecto al tiempo de cálculo, como obtener el parámetro de relajación ω consume un tiempo despreciable frente al tiempo total de cada iteración, la misma figura 4.15 se puede emplear para comparar el tiempo empleado en cada método.

En la figura 4.16 se han dispuesto las líneas de corriente en distintos instantes del tiempo. Para ello, al existir simetría axial se muestra una sección representativa, que va desde el eje hasta la pared. En la misma figura también se muestran los contornos de presión en el dominio tridimensional. En este último se ha aumentado por 10 el movimiento del contorno para que se aprecie mejor.

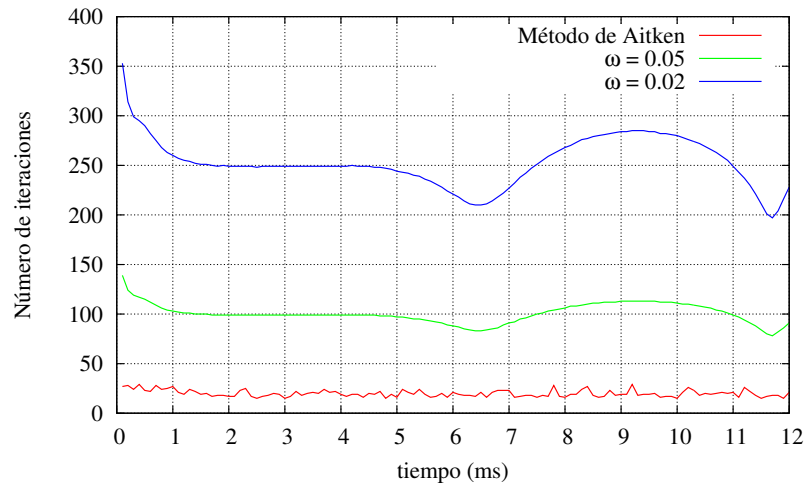
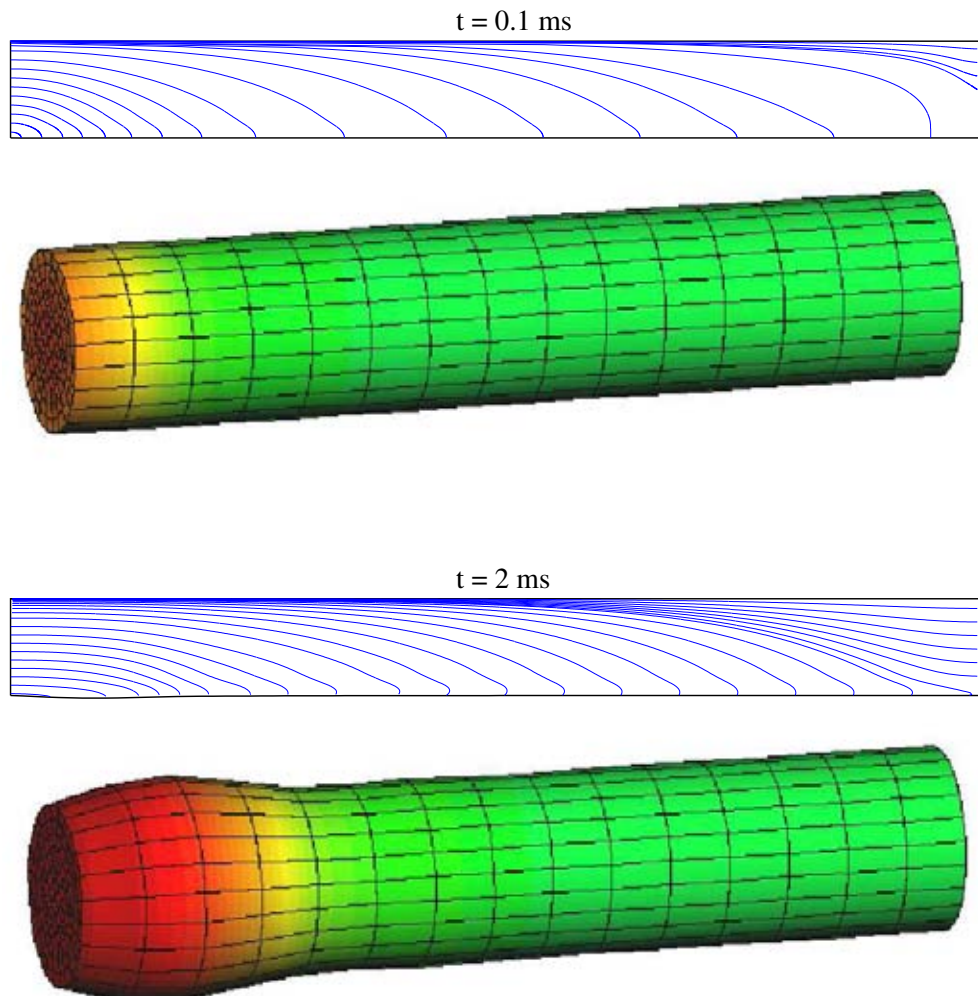
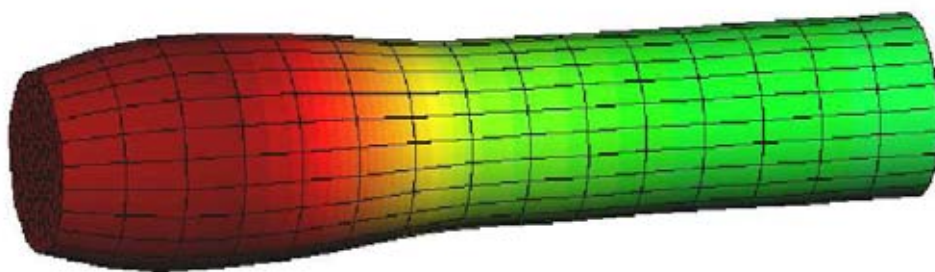
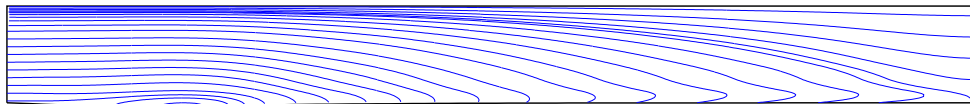


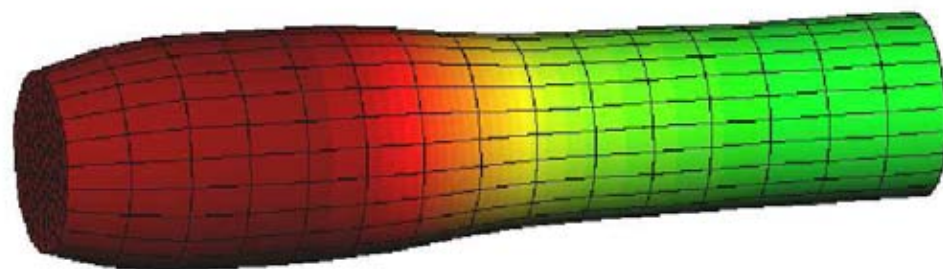
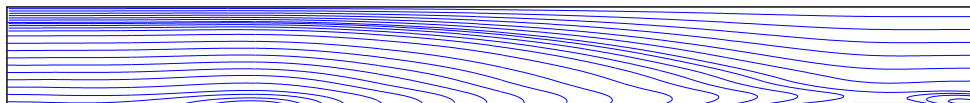
Figura 4.15: Pulso de presión. Número de iteraciones para converger. Comparación entre el método de Aitken y otros métodos con ω constante.



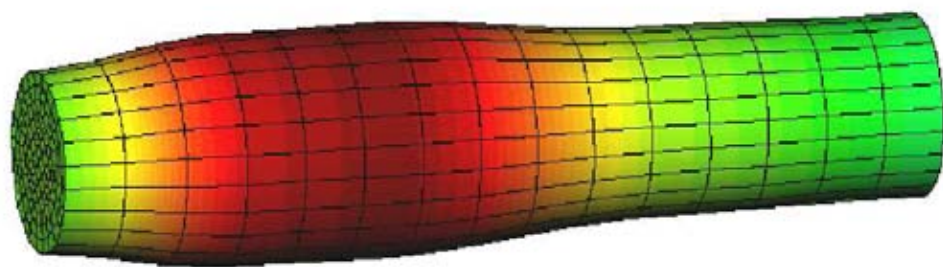
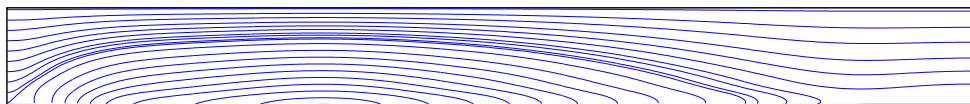
t = 4 ms



t = 5 ms



t = 6 ms



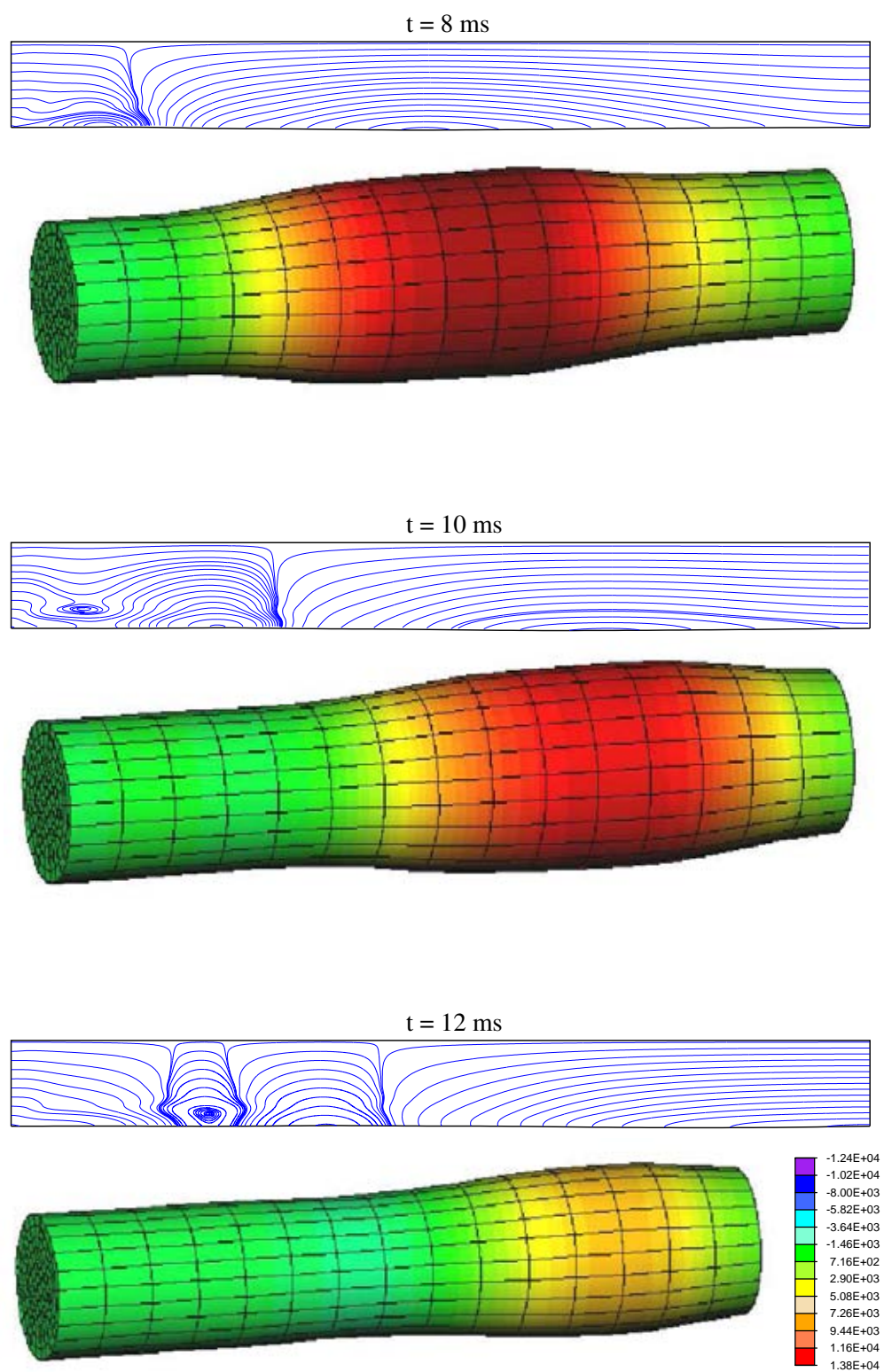


Figura 4.16: Líneas de corriente y contornos de presión de 0 a 12 ms. La deformación en los contornos de presión ha sido aumentada por 10.

Los resultados de los contornos de presión coinciden con los dibujos mostrados en FORMAGGIA ET AL. [2001]. Las líneas de corriente no se han encontrado en ninguna de las referencias consultadas, por lo que aquí se muestran por primera vez.

Como el extremo final no tiene condiciones de contorno absorbentes la onda de presión se refleja. Esto significa que para tiempos posteriores a los mostrados en la figura 4.16 la presión es negativa y el tubo se colapsa, aunque esto no se ha mostrado.

En el gráfico 4.17 se muestra el desplazamiento de la pared a varias distancias axiales del tubo. No se muestran los puntos del final del tubo porque la onda reflejada se superpone a la primera onda y los resultados dejan de ser significativos.

El desplazamiento en la coordenada $z = 0.33$ cm. (curva roja) es menor porque el movimiento de la pared se ha impedido en el extremo inicial. Siguiendo en esta coordenada, obsérvese que para $t = 5$ ms. se produce un cambio brusco en el desplazamiento, ya que es cuando la presión impuesta en el extremo inicial deja de actuar.

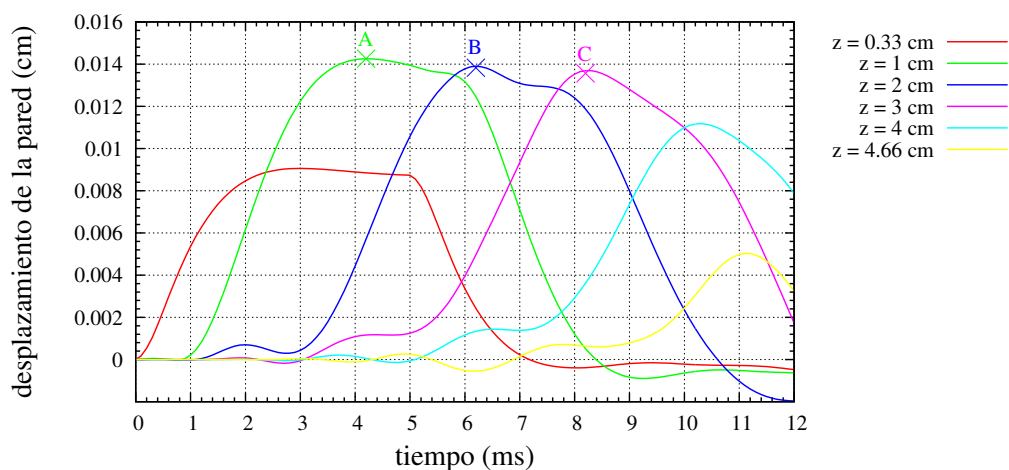


Figura 4.17: Curvas con los desplazamientos de la pared a distintas distancias axiales.

Aprovechando el mismo gráfico 4.17 se puede calcular la velocidad de transmisión de la onda de presión y compararla con el valor teórico. Para ello se han señalado con las letras A , B y C en dicho gráfico los puntos de máximo desplazamiento, cuyo valor numérico se muestran en el cuadro 4.5.

Con los datos del cuadro 4.5, combinados dos a dos, se pueden calcular

Punto	Coordenada axial (cm)	Tiempo (ms)	Desplazamiento (cm)
A	$z = 1.0$	4.2	0.014257
B	$z = 2.0$	6.2	0.013902
C	$z = 3.0$	8.2	0.013696

Cuadro 4.5: *Tiempo para el que el desplazamiento es máximo en distintos puntos del cilindro.*

tres velocidades de onda y obtener el valor medio:

$$\text{Puntos } A \text{ y } B \longrightarrow c_{AB} = \frac{z_B - z_A}{t_B - t_A} = 500 \text{ cm/s} \quad (4.59a)$$

$$\text{Puntos } A \text{ y } C \longrightarrow c_{AC} = \frac{z_C - z_A}{t_C - t_A} = 500 \text{ cm/s} \quad (4.59b)$$

$$\text{Puntos } B \text{ y } C \longrightarrow c_{BC} = \frac{z_C - z_B}{t_C - t_B} = 500 \text{ cm/s} \quad (4.59c)$$

coincidiendo la velocidad de la onda, $c_{\text{numérico}} = 500 \text{ cm/s}$, en los tres casos.

La velocidad de transmisión de las ondas para un sólido elástico lineal, suponiendo las simplificaciones habituales en tubos de pared delgada, se puede obtener a partir de la clásica expresión de *Moens-Korteweg*⁴:

$$c_{\text{teórico}} = \sqrt{\frac{Eh_0}{\rho_f \phi_0}} = 547.72 \text{ cm/s} \quad (4.60)$$

Comparando el resultado numérico con el teórico se tiene que $c_{\text{teórico}}$ es ligeramente mayor a $c_{\text{numérico}}$.

Por último se muestra en la figura 4.18 el caudal en distintas secciones, habiéndose calculado mediante la integración del campo de velocidades en cada sección. Se incluye la sección inicial (curva roja), apareciendo de nuevo el cambio brusco a los 5 ms.

4.5.2. Velocidad oscilante en una cavidad con una pared flexible

Este ejemplo está inspirado en el caso de una cavidad bidimensional mostrado en el apartado 2.4.1. Lo que cambia es que la pared de abajo ahora es flexible y el flujo impuesto en la parte superior es oscilante en vez de constante, todo ello para obtener un problema de interacción. Originalmente este problema fue diseñado en dos dimensiones (MOK Y WALL [2001]). En GERBEAU Y VIDRASCU [2003a] se modificó añadiendo una tercera dimensión usando elementos lámina no lineales para la pared inferior que interacciona.

⁴La expresión (4.60) fue obtenida experimentalmente a finales del siglo XIX.

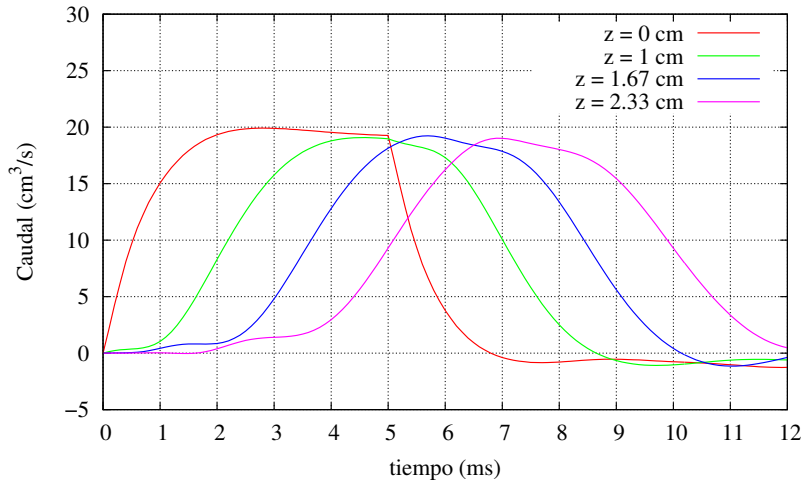


Figura 4.18: Caudal en diferentes secciones del tubo.

Pero en esta tercera dimensión solamente añadieron un elemento con el fin de seguir imitando el caso bidimensional, luego no es un caso tridimensional puro, sino de dos dimensiones con deformación plana.

Aquí se desarrolla el caso tridimensional completo (figura 4.19), aunque para poder comparar resultados con las referencias anteriores se calcula también el caso bidimensional, en el que se utilizan elementos viga en grandes deformaciones para simular la estructura. Las unidades no se explicitan, luego los valores numéricos pueden interpretarse en cualquier sistema de unidades.

Descripción del problema (ver figura 4.19):

- a) La cavidad es un cubo de lado $L = 1$. En la parte superior de éste existen unas aberturas de 0.1 en las cuatro caras (pintadas en azul).
- b) En la cara superior (en verde) se impone una ley de velocidades periódica en la dirección x de la figura tal que:

$$u_x = 1 - \cos(\Omega t) \quad \text{siendo} \quad \Omega = \frac{2\pi}{5} \quad (4.61)$$

En dicha cara se deja libre la velocidad en dirección y , mientras que en dirección vertical z se impone que la velocidad es nula, esto es, no puede salir ni entrar fluido por la cara superior.

- c) En las dos aberturas de la dirección del movimiento impuesto ($x = 0$ y $x = L$) se imponen condiciones de contorno de *Neumann* homogéneas, esto es, tensión nula. Por lo tanto, el flujo que entra y sale en la cavidad es un resultado obtenido del cálculo. En las otras dos aberturas ($y = 0$ e $y = L$) se impide la velocidad en la dirección y para que por ahí no salga ni entre fluido. En el instante inicial tanto el fluido como el sólido están en reposo.

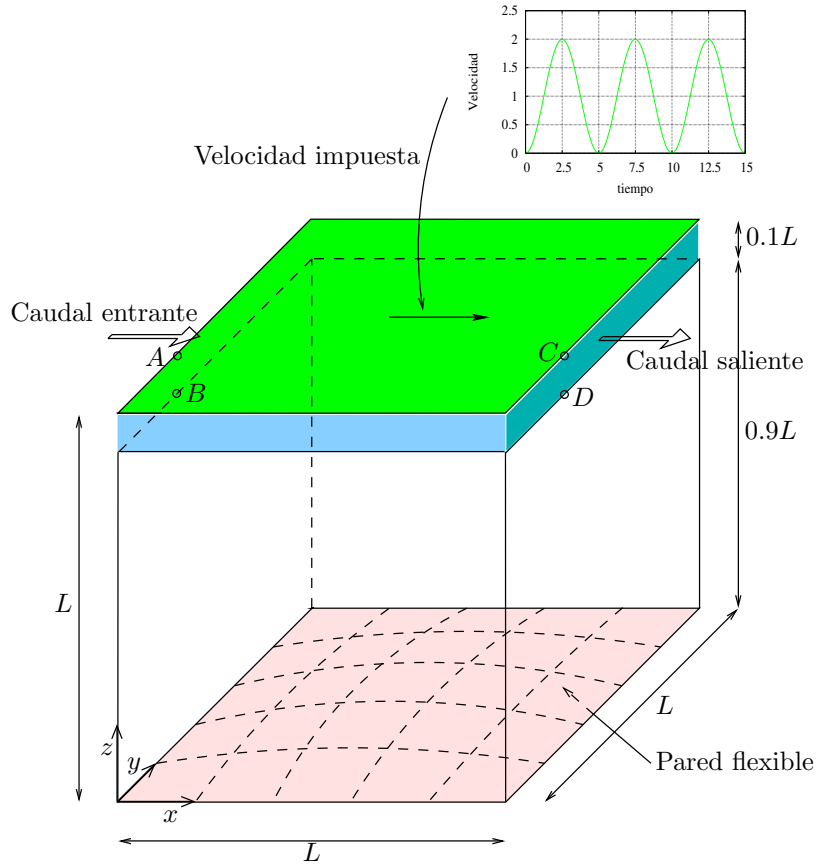


Figura 4.19: Esquema de la cavidad tridimensional.

- d) En el resto de las paredes se supone condición de *no deslizamiento* entre fluido y pared. Concretamente, en las paredes verticales (hasta la altura de $0.9L$) la velocidad es nula, y en la pared inferior la velocidad es la del sólido resultante del cálculo.
- e) El fluido es newtoniano e incompresible, con viscosidad dinámica $\mu = 0.01$ y densidad $\rho_f = 1$.
- f) La pared inferior (la estructura, de color salmón) tiene un espesor $h = 0.002$. y una densidad $\rho_s = 500$. Se supone isotropía y comportamiento elástico con un módulo de elasticidad $E = 20$ para el caso tridimensional y $E = 250$ para el caso 2D. El módulo de Poisson es $\nu = 0.4$. Se han utilizado elementos lámina para el modelo 3D y elementos viga para el caso 2D, ambos con formulación no lineal en grandes deformaciones (TAYLOR [2000b]).
- g) El paso de tiempo para el cálculo es $\Delta t = 0.1$ y el cálculo se ha llevado hasta $t_{final} = 100$ en el caso 2D y $t_{final} = 50$ en el 3D. Los elementos

lámina se integran con el método *energía-momento* (SIMÓ Y TARNOW [1992]) y los elementos viga con el método de *Newmark* (NEWMARK [1959]).

- h) En el caso tridimensional la malla del fluido es de $24 \times 24 \times 30$ elementos en las direcciones x , y y z respectivamente (6 de los 30 elementos son para la abertura) y la del sólido 24×24 elementos lámina. Para el caso bidimensional la malla del fluido es de 40×48 elementos en las direcciones x y z (8 de los 48 elementos son para la abertura) y la del sólido de 40 elementos viga.

Observación. *Este problema de interacción está especialmente bien condicionado con los parámetros tomados, como lo demuestra el paso de tiempo relativamente elevado tomado y el bajo número de iteraciones para converger.*

Observación. *Para obtener desplazamientos similares se ha tomado el módulo de elasticidad en el caso 3D menor que en el caso 2D. Esto es porque en el caso 2D solamente hay rigidez a flexión en una dirección, mientras que en el caso 3D hay rigidez en dos direcciones.*

Debido al movimiento de la pared inferior el volumen de la cavidad varía con el tiempo. Como el fluido es incompresible, ha de producirse un flujo neto de fluido hacia la cavidad, y por eso se dejan las aberturas superiores, para que entre y salga fluido de la cavidad.

El problema está en que a la hora de discretizar la cavidad con una malla, si en la abertura solamente colocamos un elemento en dirección z no estaríamos dejando que el caudal entrante y saliente resultara del cálculo, sino que en realidad lo estaríamos imponiendo. En la figura 4.20 se muestra este hecho donde los puntos A , B , C y D se corresponden con los de la figura 4.19 (el caudal en dicha figura 4.20 corresponde al de la sección definida por dichos puntos, no al total de la cavidad). Con esto lo que estaríamos haciendo es restringir el movimiento de la pared inferior, lo cual sería erróneo.

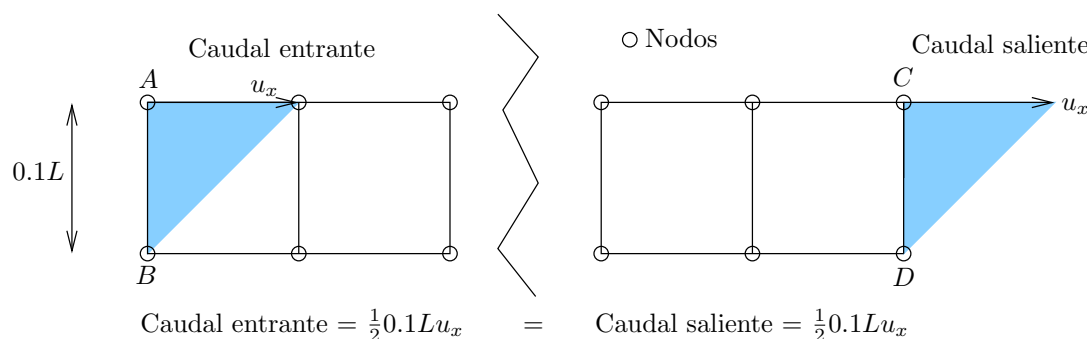


Figura 4.20: Un único elemento en la abertura equivale a imponer el caudal.

Debido a ello es necesario discretizar la zona de la abertura con más elementos para que el caudal a la entrada pueda ser distinto al de la salida. En la figura 4.21 se observa que como hay nodos intermedios en la abertura, hay grados de libertad para que el caudal entrante sea distinto al saliente. Al igual que anteriormente, los puntos A , B , C y D se corresponden con los de la figura 4.19.

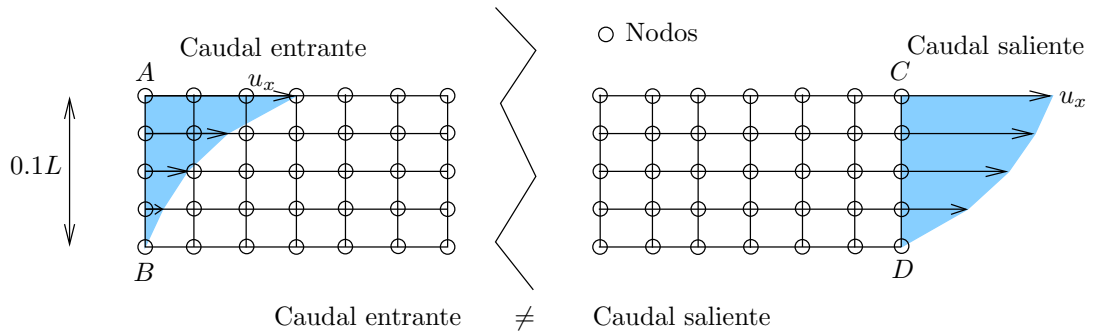


Figura 4.21: *Varios elementos en la abertura para que los caudales de entrada y salida puedan ser diferentes.*

En nuestro caso y para la variante tridimensional, de los 30 elementos en dirección z , 6 de ellos corresponden a la abertura. Para el caso bidimensional, de los 48 elementos en dicha dirección, 8 se emplean para la abertura.

Caso bidimensional

En este caso tomamos la sección que resulta de cortar por un plano paralelo al xz en $y = 0.5L$, manteniendo todo lo demás tal como se describió anteriormente. La inercia de los elementos viga, teniendo en cuenta que el espesor para los elementos lámina es $h = 0.002$ resulta $I = \frac{1}{12}h^3 = \frac{2}{3}10^{-9}$, y el área $A = h = 0.002$. Estos valores se toman por unidad de longitud en dirección y .

La tolerancia utilizada de acuerdo con la expresión (4.55) es 10^{-4} . En la figura 4.22 se compara el número de iteraciones (ver figura 4.11) en cada paso de tiempo que resulta del método de Aitken con los métodos en que el parámetro de relajación ω es constante. El número medio de iteraciones es 3.6 con el método de Aitken, y el parámetro de relajación medio $\omega_{\text{medio}} = 0.68$.

En la figura 4.23 se muestra el desplazamiento de tres puntos situados en la pared, a una distancia de $x = 0.25L$, $x = 0.5L$ y $x = 0.75L$. Se observa el transitorio inicial, para luego llegar a una situación periódica, donde la pared oscila con la misma frecuencia Ω que la velocidad impuesta. Los resultados son similares a los de GERBEAU Y VIDRASCU [2003a], aunque no exactamente iguales, posiblemente debido a la formulación particular de los elementos lámina que emplean en dicha referencia.

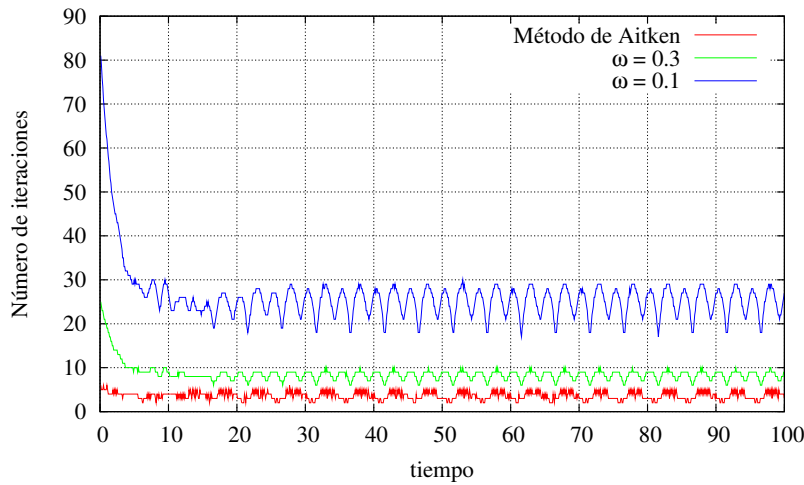


Figura 4.22: *Número de iteraciones para converger. Método de Aitken y métodos con el parámetro de relajación constante. Caso 2D.*

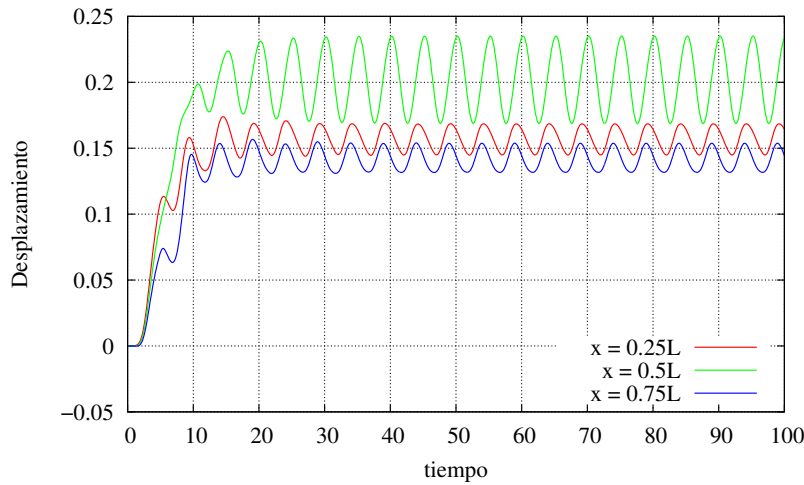


Figura 4.23: *Desplazamiento de 3 puntos de la pared inferior. Caso 2D.*

En la figura 4.24 se compara el flujo neto de caudal (caudal entrante menos caudal saliente) con la variación de volumen de la cavidad, que al ser el fluido incompresible deben ser iguales. Se ha representado en rojo el volumen total que ha entrado en la cavidad, siendo éste igual a la integral en el tiempo del flujo. En verde está el volumen saliente, también calculado con la correspondiente integral. En azul se dibuja la diferencia de los volúmenes anteriores, esto es, el volumen entrante menos el saliente. Y luego, en puntos rosas se representa la variación de volumen de la cavidad calculada a través de los desplazamientos de los elementos viga de la parte inferior de la cavidad.

Los resultados muestran que efectivamente se cumple correctamente la condición de incompresibilidad.

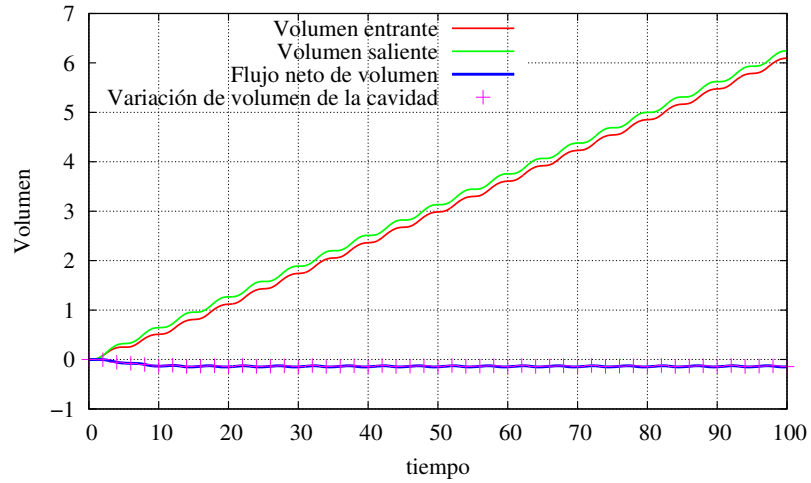
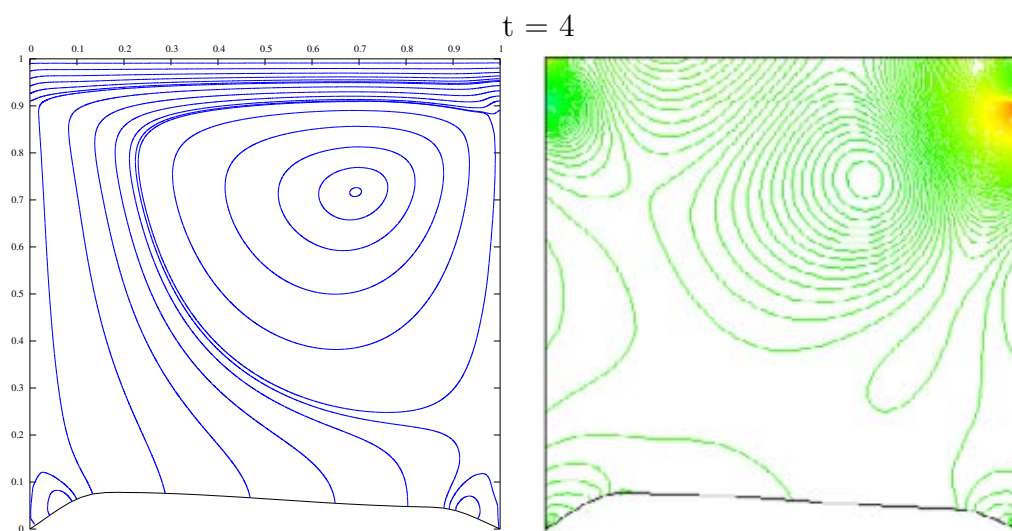
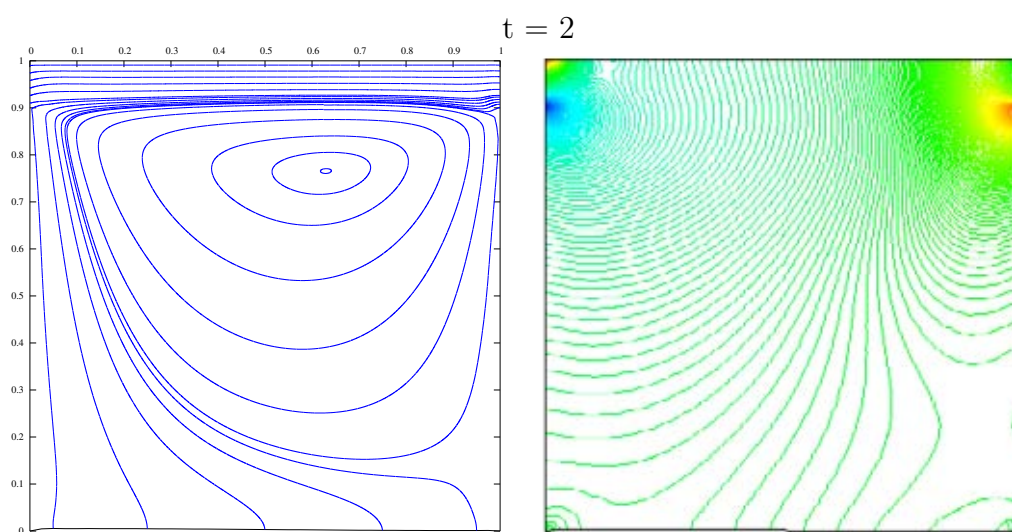
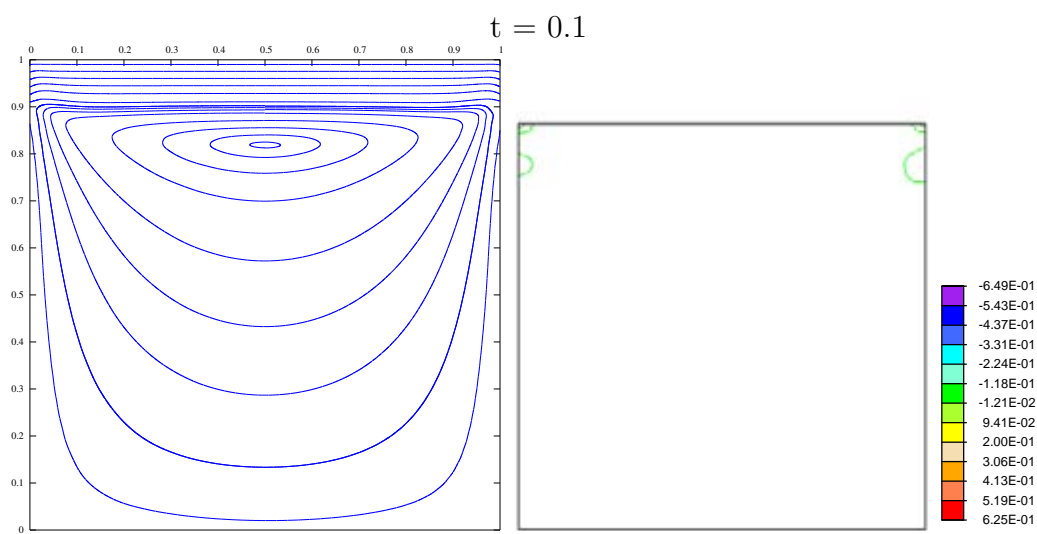


Figura 4.24: *Volúmenes entrante y saliente y cambio de volumen en la cavidad. Caso 2D.*

En las figuras 4.25 y 4.26 se muestran las líneas de corriente y las curvas isobaras en distintos instantes de tiempo. La figura 4.25 corresponde al régimen transitorio (hasta $t = 10$) y la figura 4.26 corresponde a un período representativo del régimen permanente (de $t = 60$ a $t = 64$), cuya frecuencia se ha comprobado que coincide con la del movimiento impuesto.



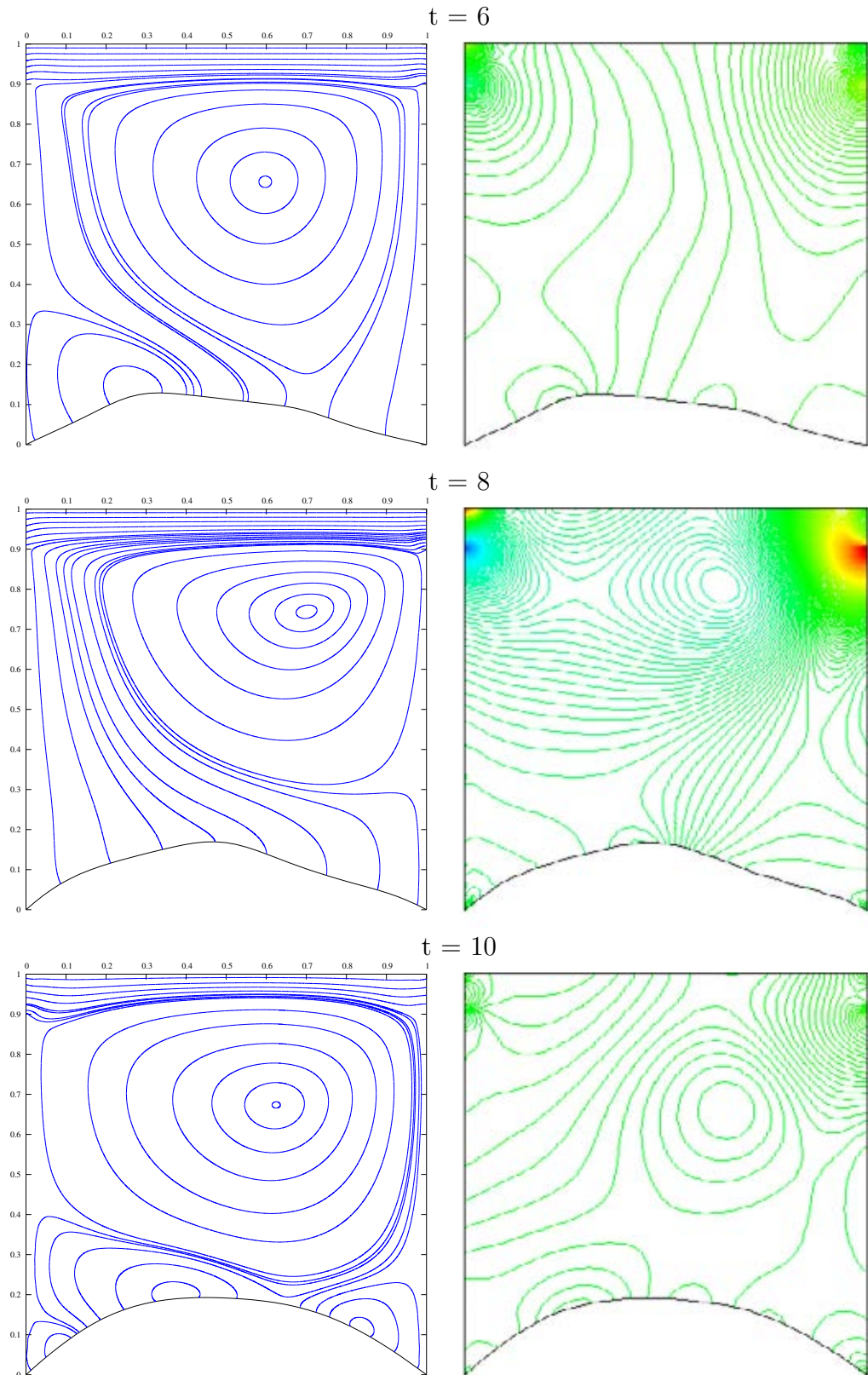
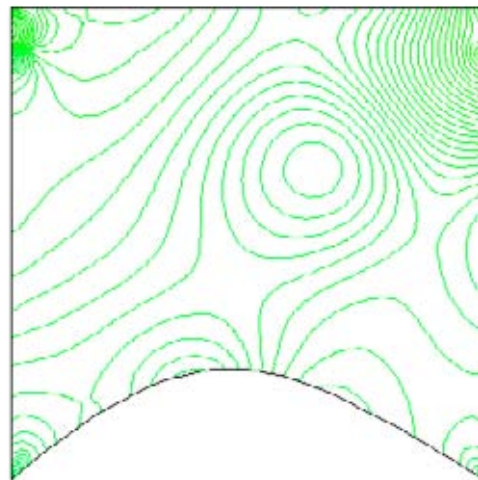
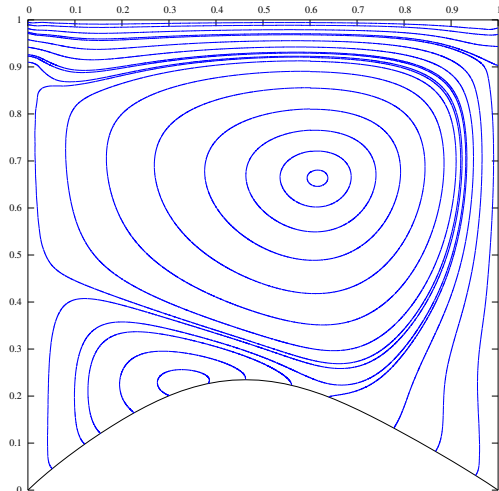
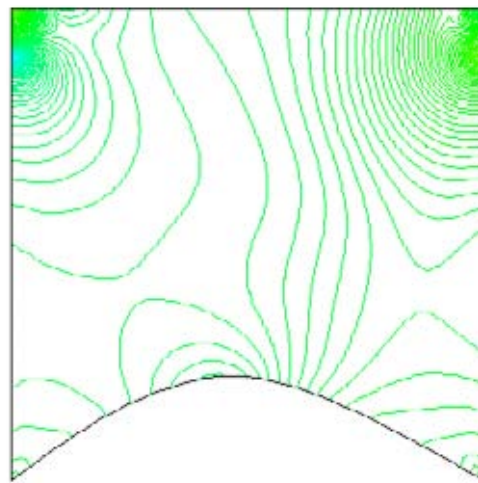
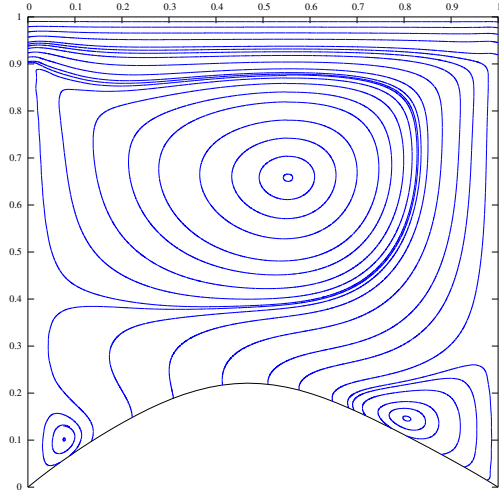


Figura 4.25: *Líneas de corriente (izquierda) y curvas isobaras (derecha) durante el régimen transitorio.*

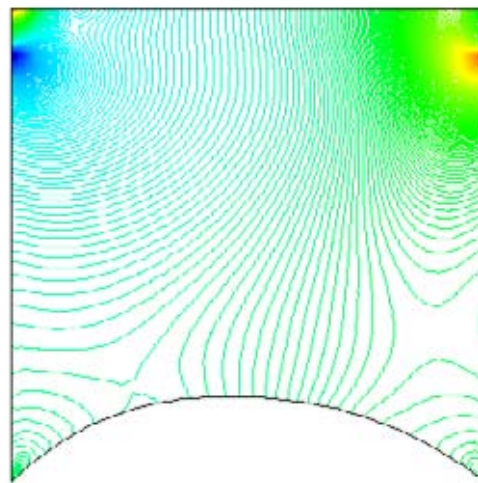
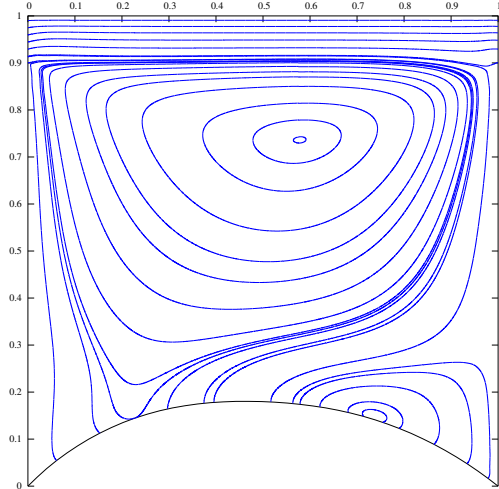
$t = 60, t = 65$



$t = 61$



$t = 62$



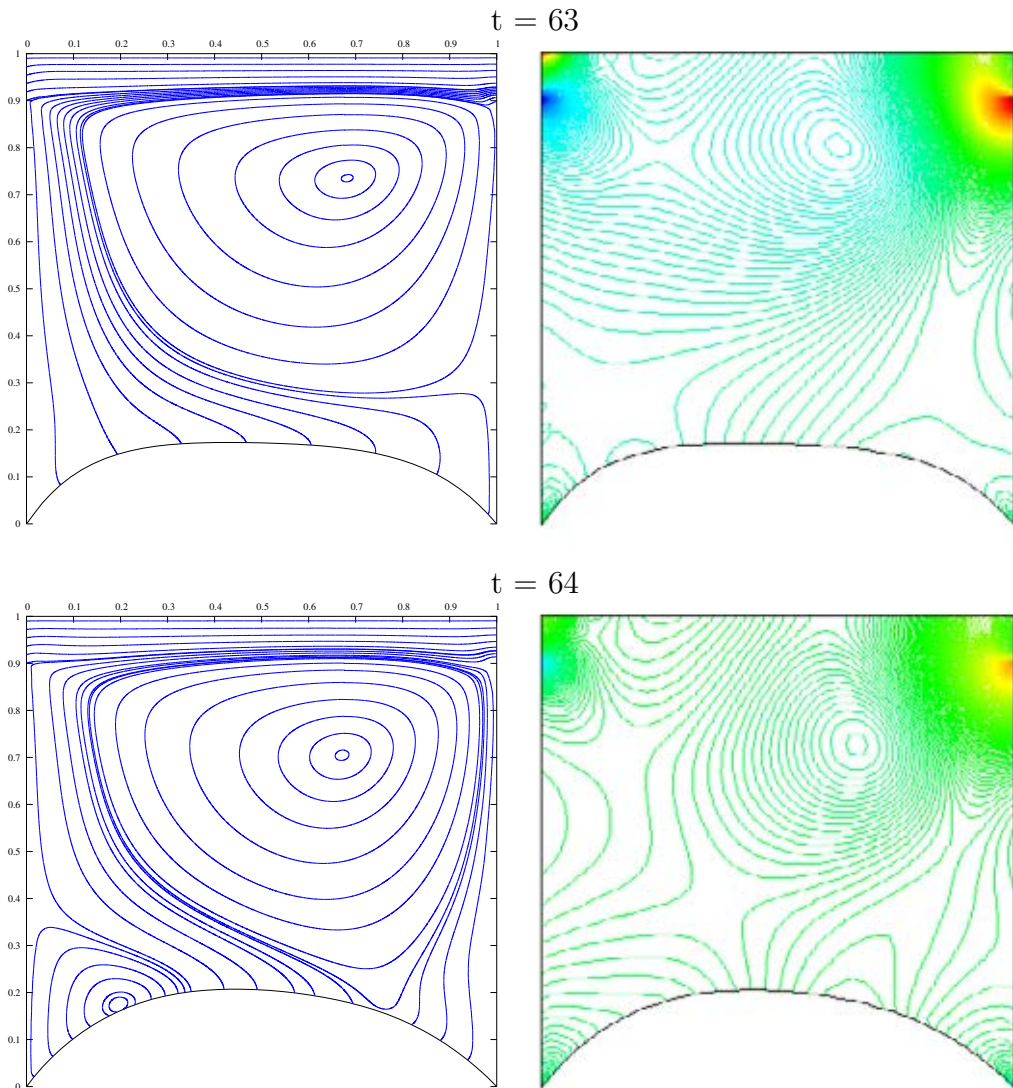


Figura 4.26: Líneas de corriente (izquierda) y curvas isobaras (derecha) a lo largo de un período.

Se observa que el movimiento de la pared inferior provoca que algunas líneas de corriente comiencen o terminen ahí.

El vórtice principal en la parte central de la cavidad es permanente, aunque su centro se desplaza describiendo una curva cerrada con un período T . También se forman dos vórtices secundarios en las dos esquinas inferiores (véase el instante $t = 61$ de la figura 4.26) sucediendo esto cuando la pared inferior comienza a bajar, aunque se disipan en poco tiempo.

Caso tridimensional

Este caso se ha discretizado con una malla más gruesa que en el caso 2D con el fin de hacer el cálculo asequible con la potencia computacional disponible.

El número de iteraciones resultante se muestra en la figura 4.27, con una media de 6.3 iteraciones por paso de tiempo, casi el doble que en el caso bidimensional. Y aquí, el parámetro de relajación medio resultó $\omega_{\text{medio}} = 0.53$.

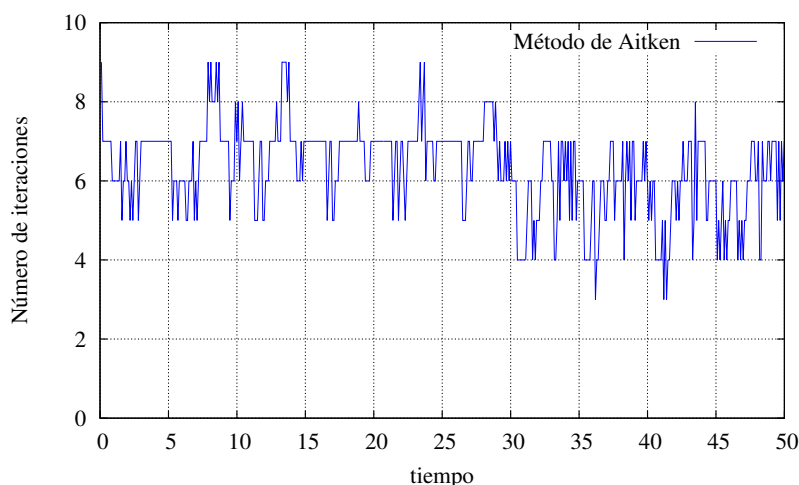


Figura 4.27: *Número de iteraciones para converger con el método de Aitken. Caso 3D.*

En la figura 4.28 se muestra el desplazamiento de varios puntos representativos de la pared inferior cuyas coordenadas se indican en la propia gráfica. Debido a la simetría por el plano $y = 0.5L$ el movimiento de los puntos en $y = 0.75L$ es el mismo que en $y = 0.25L$. La forma de las curvas es la misma que en el caso 2D de la figura 4.23, con un transitorio hasta aproximadamente $t = 20$ y posteriormente un movimiento de régimen permanente.

También aquí se ha calculado el volumen de fluido que entra y sale, así como la variación de volumen de la cavidad debido al movimiento de la pared inferior. En la figura 4.29 se observan las curvas resultantes, comprobando que se cumple la condición de incompresibilidad.

Respecto a las líneas de corriente, en el caso tridimensional han resultado ser curvas espaciales que no se cierran, luego la visualización de éstas no es tan clara como en el caso 2D ya que en la proyección a un plano se cruzarían unas líneas con otras.

No obstante, con el fin de mostrar una perspectiva del caso 3D en las figuras 4.30 y 4.31 se han representado las líneas de corriente en los instantes $t = 32.5$ y $t = 35$ respectivamente. Estos instantes se eligen de tal forma que en $t = 32.5$ el valor de la velocidad impuesta es máxima ($u_x = 2$) y en $t = 35$ la velocidad impuesta es nula.

Obsérvese cómo en la figura 4.30 las líneas de corriente en la parte superior entran por una abertura y salen por la otra debido al valor no nulo de la velocidad impuesta en la cara superior, cosa que no sucede en la figura 4.31,

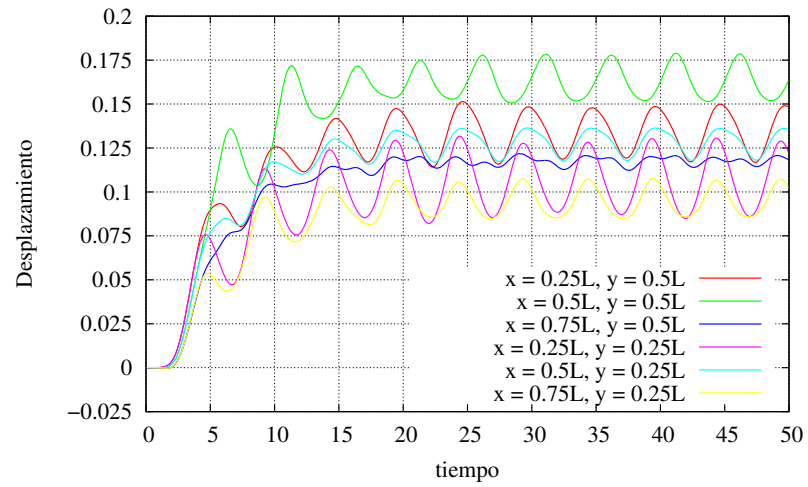


Figura 4.28: Desplazamiento de varios puntos representativos de la pared inferior. Caso 3D.

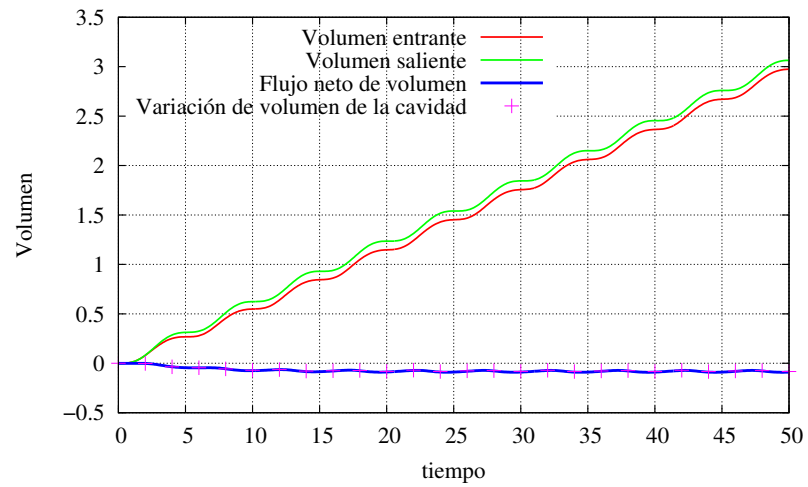


Figura 4.29: Volumen de fluido entrante y saliente y cambio de volumen en la cavidad. Caso 3D.

al ser la velocidad impuesta nula.

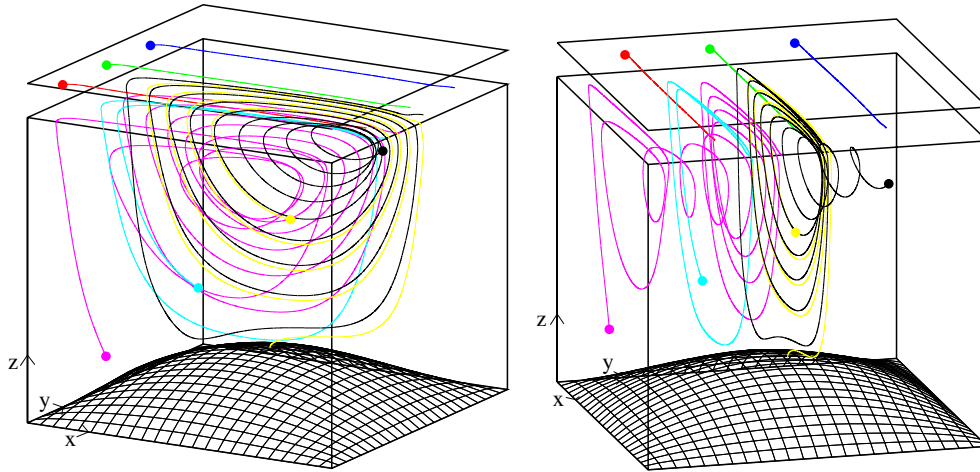


Figura 4.30: *Líneas de corriente en $t = 32.5$ en dos perspectivas.*

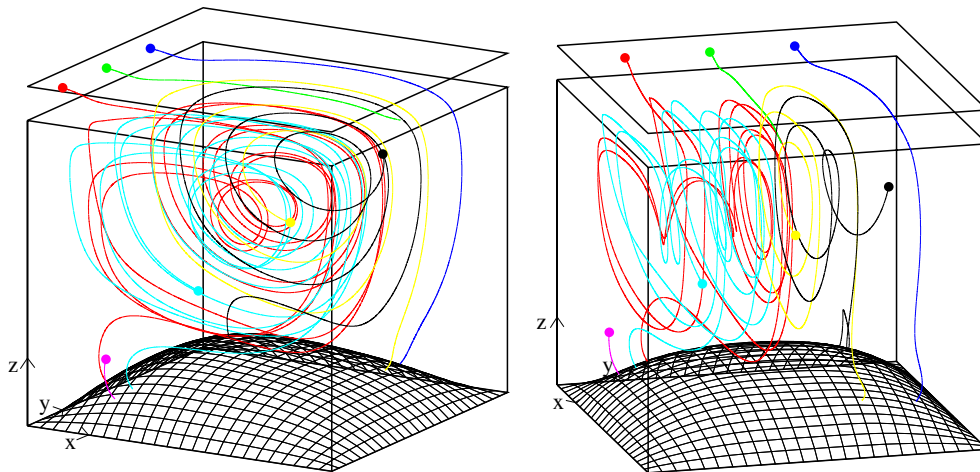


Figura 4.31: *Líneas de corriente en $t = 35$ en dos perspectivas.*

Capítulo 5

Modelos de interacción sangre-pared arterial

En este capítulo se hacen aplicaciones de los métodos expuestos en el capítulo anterior estudiando problemas específicos en el contexto de hemodinámica. Se desarrolla un modelo unidimensional (modelo 1D) cuyo acoplamiento se resuelve con un método monolítico. Este modelo es útil para el análisis de modelos con un elevado número de arterias, pero en este trabajo se usa como una solución posible para imponer condiciones de contorno absorbentes. Se propone un método original de resolver el acoplamiento entre los modelos 3D y 1D, de tal forma que se consigue la convergencia con muy pocas iteraciones. El ejemplo mostrado al final de este capítulo tiene el objetivo de integrar los modelos de interacción desarrollados a lo largo de este trabajo, a la vez que proporcionar resultados más de tipo cualitativo.

5.1. Modelo unidimensional

Los resultados de un cálculo con los modelos de fluido y sólido desarrollados en los capítulos 2 y 3 respectivamente y el método expuesto en 4 son los campos de velocidad y presión para el fluido y los campos de desplazamiento y tensión para el sólido principalmente. No obstante, en algunos casos el interés clínico puede estar en conocer la presión y caudal en distintos puntos del sistema cardiovascular en vez de una información detallada en cada sección. De ahí que se desarrolle un modelo que utiliza valores medios de las variables en cada sección y que permite representar una parte importante del sistema cardiovascular mediante un modelo unidimensional tal como se ha representado en la figura 5.1. De hecho, si se intentara representar esa misma parte con modelos tridimensionales el número de grados de libertad necesarios lo haría inabordable con los recursos de cálculo disponibles hoy en día.

Además el modelo que se va a presentar puede resolverse monolíticamente con poco esfuerzo computacional. La figura 5.2 muestra un esquema del



Figura 5.1: *Red de vasos sanguíneos susceptible de ser incluida en un modelo unidimensional.*

modelo cuyas hipótesis básicas se pueden ver en FORMAGGIA Y VENEZIANI [2003], PEIRÓ Y SHERWIN [2003b] y son:

- a) Simetría axial de todas las variables.
- b) El movimiento de la pared arterial es únicamente radial y se desprecian las fuerzas de inercia de ésta.
- c) El eje del cilindro es fijo, esto es, la arteria no tiene desplazamientos de sólido rígido.
- d) La presión P es uniforme en cada sección transversal, existiendo una relación biunívoca entre la presión y el área de acuerdo con la ley constitutiva de la pared arterial.
- e) Se desprecian las fuerzas volumétricas.
- f) La velocidad axial es predominante, siendo la componente radial de la velocidad despreciable respecto a aquélla.

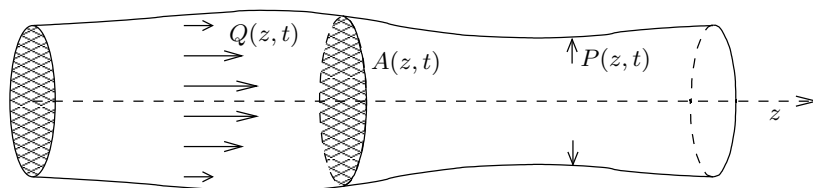


Figura 5.2: *Modelo unidimensional para resolver monolíticamente.*

Se toman como variables básicas el área A , el caudal Q y la presión P . Para situar cada sección se usa la coordenada espacial z a lo largo del eje

de revolución. Por tanto, y usando una formulación euleriana, las funciones incógnitas son $A(z, t)$, $Q(z, t)$ y $P(z, t)$.

Las ecuaciones se obtienen a partir de los principios fundamentales de *continuidad* y *momento lineal*, así como una relación adicional para la ecuación constitutiva de la pared, siendo:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad (\text{continuidad}) \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} + K_r \left(\frac{Q}{A} \right) = 0 \quad (\text{momento lineal}) \quad (5.1b)$$

$$P = P_{ext} + \psi(A(z, t), A_0(z), \boldsymbol{\beta}(z)) \quad (\text{ley constitutiva}) \quad (5.1c)$$

En la ecuación (5.1b), cuya deducción se puede ver en FORMAGGIA Y VENEZIANI [2003], el coeficiente α depende del tipo de perfil de velocidades supuesto y K_r es un parámetro de fricción que depende de la pendiente de dicho perfil en la interfaz fluido-pared y de la viscosidad.

En la ecuación constitutiva (5.1c) P_{ext} es la presión exterior que los tejidos que rodean a la arteria ejercen sobre ésta, A_0 es el área cuando la presión interna es nula y $\boldsymbol{\beta}$ es un conjunto de parámetros constitutivos relacionados con las propiedades mecánicas de la pared.

Si se utiliza (5.1c) para eliminar la presión en (5.1b) y derivando ψ respecto de z usando la regla de la cadena, queda:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho_f} \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial A_0} \frac{dA_0}{dz} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\beta}} \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dz} \right) + K_r \left(\frac{Q}{A} \right) = 0 \quad (5.2)$$

con lo que se reduce a un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales (5.1a) y (5.2) con las dos funciones incógnita $A(z, t)$ y $Q(z, t)$.

Las simplificaciones adicionales que se han tomado son:

- a) El parámetro de fricción K_r se supone nulo.
- b) Tanto el área inicial A_0 como los parámetros $\boldsymbol{\beta}$ los suponemos constantes en todo el eje.

Con estas suposiciones se anulan algunas derivadas de (5.2) quedando:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho_f} \frac{\partial \psi}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (5.3)$$

Por simplificar la notación, se denota con c_1 la siguiente cantidad:

$$c_1(A, A_0, \boldsymbol{\beta}) \equiv \sqrt{\frac{A}{\rho_f} \frac{\partial \psi}{\partial A}} \quad (5.4)$$

que tiene dimensiones de velocidad y está relacionada con la velocidad de propagación de las ondas. Si ahora definimos C_1 como la integral de c_1^2 respecto el área de la sección:

$$C_1(A, A_0, \beta) \equiv \int_{A_0}^A c_1^2(\Omega, A_0, \beta) d\Omega \quad (5.5)$$

se puede reescribir (5.3) agrupando términos como:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} + C_1 \right) = 0 \quad (5.6)$$

Es común y útil emplear notación matricial para las dos ecuaciones (5.1a) y (5.6). Esto se hace de forma sencilla escribiendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial t} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} Q \\ \alpha \frac{Q^2}{A} + C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Definiendo el vector incógnita \mathbf{U} y la matriz \mathbf{F} como:

$$\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) \equiv \begin{bmatrix} Q \\ \alpha \frac{Q^2}{A} + C_1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

la ecuación (5.7) se expresa de forma más compacta:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

Finalmente, definiendo la matriz \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}) \equiv \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(c_1^2 - \alpha \left(\frac{Q}{A} \right)^2 \right) & 2\alpha \frac{Q}{A} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

se puede escribir (5.9) como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{H}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (5.11)$$

donde la dependencia de \mathbf{H} de las incógnitas \mathbf{U} origina la no linealidad del sistema.

Para la integración del sistema (5.9) se han empleado elementos finitos en la discretización espacial y diferencias finitas para la discretización temporal.

5.1.1. Discretización en el tiempo. Diferencias finitas

Respecto a la integración temporal sería deseable utilizar un método implícito, pero la no linealidad del sistema debido a la matriz $\mathbf{H}(\mathbf{U})$ hace que sea complejo de resolver y caro respecto al tiempo de cálculo. Por ello se elige un método explícito. Entre éstos, un esquema de primer orden produce demasiada disipación numérica, por lo que se ha elegido un esquema de segundo orden de un paso, tipo *Lax-Wendroff*. La idea es la siguiente: si se hace el desarrollo en series de *Taylor* para el avance en el tiempo se tiene:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right|^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \right|^n + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (5.12)$$

teniendo que calcular las derivadas primera y segunda respecto al tiempo para $t = t^n$ en función de las variables y sus derivadas espaciales. Teniendo en cuenta (5.9) la derivada primera es:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right|^n = - \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial z} \right|^n \quad (5.13)$$

y la derivada segunda:

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \right|^n = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{H}(\mathbf{U}) \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial z} \right|^n \right) \quad (5.14)$$

donde se ha tenido en cuenta la propiedad de las derivadas cruzadas, así como (5.10) y (5.13).

Sustituyendo ahora (5.13) y (5.14) en (5.12) y despreciando los términos de tercer orden y superiores se llega a:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \Delta t \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial z} \right|^n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{H}(\mathbf{U}) \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial z} \right|^n \right) \quad (5.15)$$

que es la ecuación discretizada en el tiempo.

Observación. En (5.15) todos los términos a la derecha de la igualdad se pueden calcular conociendo la solución en $t = t^n$ ya que el desarrollo anterior ha permitido eliminar las derivadas temporales, dejando \mathbf{U}^{n+1} en función del valor de las variables y de sus derivadas espaciales en $t = t^n$.

5.1.2. Discretización en el espacio. Elementos finitos

Dentro del método de los elementos finitos se ha utilizado la técnica de *Bubnov-Galerkin* (HUGHES [2000]), que es la misma que se ha descrito en el capítulo 2.

Se utilizan funciones de forma lineales, mostrando en la figura 5.3 la discretización en n elementos y por tanto $n + 1$ nodos.

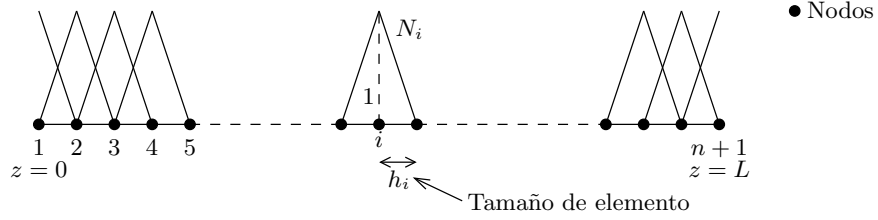


Figura 5.3: *Funciones de forma lineales para discretizar el espacio.*

Si se llama \mathcal{V}_h al espacio de las funciones de forma lineales, a partir de éste definimos \mathcal{V}_h^0 como el mismo espacio pero restringido a valores nulos en los extremos $z = 0$ y $z = L$. En el espacio \mathcal{V}_h buscamos la solución de las funciones $A(z, t)$ y $Q(z, t)$, esto es, $\mathbf{U}_h \in [\mathcal{V}_h]^2$, mientras que las funciones de peso $\phi(z)$ las definimos en el espacio \mathcal{V}_h^0 , esto es, $\phi_h \in [\mathcal{V}_h^0]^2$. Notar que para seguir con la notación vectorial se ha definido $\phi = [\phi^1 \ \phi^2]^T$, siendo ϕ^1 y ϕ^2 funciones de peso independientes.

Por tanto, las funciones incógnita discretizadas quedarían:

$$\mathbf{U}_h = \sum_{i=1}^{n+1} N_i(z) \mathbf{U}_i \quad (5.16)$$

donde \mathbf{U}_i son los valores de las incógnitas en los nodos. Las funciones de peso se discretizan como:

$$\phi_h = \sum_{i=2}^n N_i(z) \phi_i \quad (5.17)$$

siendo ϕ_i el valor de las funciones de peso en los nodos.

Observación. *El sumatorio para las funciones de peso en (5.17) no abarca los dos nodos extremos porque en ellos las funciones de peso son nulas.*

Definiendo ahora el producto escalar de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} como:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \equiv \int_0^L \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, dz \quad (5.18)$$

y multiplicando escalarmente (5.15) (discretizadas con (5.16)) por las funciones de peso (discretizadas con (5.17)) se llega a las ecuaciones discretizadas:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}_h^{n+1}, \phi_h \rangle &= \langle \mathbf{U}_h^n, \phi_h \rangle - \Delta t \left\langle \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}_h)}{\partial z} \right|^n, \phi_h \rangle + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{H}(\mathbf{U}_h) \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}_h)}{\partial z} \right) \right|^n, \phi_h \rangle \quad \forall \phi_h \in [\mathcal{V}_h^0]^2 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Integrando por partes (5.19) y teniendo en cuenta que las funciones de peso ϕ_h se anulan en el contorno se llega a:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}_h^{n+1}, \phi_h \rangle = & \langle \mathbf{U}_h^n, \phi_h \rangle + \Delta t \langle \mathbf{F}(\mathbf{U}_h^n), \frac{d\phi_h}{dz} \rangle - \\ & - \frac{\Delta t^2}{2} \langle \mathbf{H}(\mathbf{U}_h^n) \mathbf{H}(\mathbf{U}_h^n) \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial z} \Big|_n, \frac{d\phi_h}{dz} \rangle \quad \forall \phi_h \in [\mathcal{V}_h^0]^2 \end{aligned} \quad (5.20)$$

que son las ecuaciones que se han implementado.

Sobre la estabilidad del modelo discreto

Al haber usado un método explícito es preciso acotar el paso de tiempo Δt debido a que los métodos explícitos son condicionalmente estables. En QUARTAPELLE [1993] se analiza la estabilidad del sistema (5.20) linealizado, obteniendo la siguiente condición para el paso de tiempo:

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \min_{0 \leq i \leq n} \left[\frac{h_i}{\max_{k=i, i+1} (|\lambda_{1,k}| |\lambda_{2,k}|)} \right] \quad (5.21)$$

donde $\lambda_{1,i}$ y $\lambda_{2,i}$ son los autovalores de \mathbf{H} (ver (5.10)) en el nodo i . Dichos autovalores se calculan resolviendo una ecuación de segundo grado, resultando:

$$\lambda_1 = \alpha \frac{Q}{A} + \sqrt{c_1^2 + \alpha(\alpha - 1) \left(\frac{Q}{A} \right)^2} \quad (5.22a)$$

$$\lambda_2 = \alpha \frac{Q}{A} - \sqrt{c_1^2 + \alpha(\alpha - 1) \left(\frac{Q}{A} \right)^2} \quad (5.22b)$$

donde es útil darse cuenta que Q/A es la velocidad media del fluido. Los autovalores son las velocidades de propagación de onda.

5.1.3. Condiciones de contorno y condiciones de compatibilidad

Para resolver el sistema de ecuaciones (5.11) son necesarias dos condiciones de contorno. En el contexto de la hemodinámica el flujo se desarrolla en régimen subcrítico ($\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$) por lo que las variables características correspondientes *viajan* una en sentido positivo y la otra en sentido negativo respectivamente. Por tanto, una condición de contorno ha de imponerse en el extremo inicial y la otra en el extremo final.

En este modelo las $2n + 2$ incógnitas corresponden al caudal y el área de $n + 1$ nodos. Por otro lado, el número de ecuaciones en (5.20) es de $2n - 2$, ya que las funciones de peso ϕ_h se anulan en los nodos extremos.

De todo esto se deduce que tenemos $2n$ ecuaciones ($2n - 2$ provenientes de (5.20) y 2 más de las condiciones de contorno) para $2n + 2$ incógnitas, por lo que necesitamos dos ecuaciones adicionales, que corresponden a las *condiciones de compatibilidad*. Este déficit de ecuaciones está asociado al método numérico empleado.

Las condiciones de compatibilidad se obtienen en general proyectando las ecuaciones (5.11) sobre los autovectores de \mathbf{H} correspondientes a la característica que abandona el dominio (FORMAGGIA Y VENEZIANI [2003]). En nuestro caso se ha hecho una aproximación explícita. La idea es extrapolar las variables características viajando a la velocidad λ_1 y λ_2 en los extremos:

$$W_2^{n+1}(0) = W_2^n(-\lambda_2^n(0)\Delta t) \quad (5.23a)$$

$$W_1^{n+1}(L) = W_1^n(L - \lambda_1^n(L)\Delta t) \quad (5.23b)$$

donde W_1 y W_2 son las variables características. Las ecuaciones (5.23) proporcionan las dos condiciones que faltaban. W_1 es la característica que viaja en sentido positivo a una velocidad λ_1 y sale del dominio por $z = L$. W_2 viaja en sentido negativo a una velocidad λ_2 y sale del dominio por $z = 0$.

El problema ahora es calcular las variables características en función de las variables originales A y Q , esto es, obtener $W_1(A, Q)$ y $W_2(A, Q)$.

Haciendo la hipótesis $\alpha = 1$ se puede demostrar (ver FORMAGGIA Y VENEZIANI [2003]) que las variables características son:

$$W_1 = \frac{Q}{A} + 4(c_1 - c_{1,0}) \quad (5.24a)$$

$$W_2 = \frac{Q}{A} - 4(c_1 - c_{1,0}) \quad (5.24b)$$

donde c_1 depende de A según (5.4) y $c_{1,0}$ es el valor de c_1 para $A = A_0$. Las expresiones (5.24) permiten obtener $A^{n+1}(0)$, $A^{n+1}(L)$, $Q^{n+1}(0)$ y $Q^{n+1}(L)$ una vez calculado el valor de las características en los extremos según (5.23), ya que es fácil despejar A y Q de (5.24).

Observación. *La hipótesis $\alpha = 1$ corresponde a asumir un perfil plano de velocidades.*

Estrategia para la solución de las ecuaciones

Las ecuaciones (5.20) se pueden escribir en forma estándar:

$$\mathbf{K}U_i^{n+1} = \mathbf{F}^n \quad (5.25)$$

donde \mathbf{K} hace las veces de matriz de rigidez, U_i^{n+1} es el vector de incógnitas nodales y \mathbf{F}^n sería el vector de fuerzas en los nodos.

Este sistema de ecuaciones junto con las condiciones de compatibilidad (5.23) forman un sistema de ecuaciones que permite obtener de forma desacoplada el área A_i^{n+1} y el caudal Q_i^{n+1} .

Observación. Las ecuaciones para los nodos interiores (5.20) están desacopladas para el área y el caudal. El acoplamiento se produciría si para obtener las condiciones de compatibilidad no se hubiera hecho la aproximación explícita de (5.23), ya que el valor del área y caudal en los extremos estarían relacionados con el valor en los nodos interiores en $t = t^{n+1}$. Por tanto, la aproximación (5.23) es la que permite mantener el sistema desacoplado.

Escribamos explícitamente el sistema (5.25) de forma desacoplada como dos sistemas de ecuaciones con $n - 1$ incógnitas cada uno:

$$\mathbf{K}_a A_i^{n+1} = \mathbf{F}_a^n \quad (5.26a)$$

$$\mathbf{K}_q Q_i^{n+1} = \mathbf{F}_q^n \quad (5.26b)$$

donde se señala con el subíndice a las submatrices y subvectores referentes al área y con el subíndice q las referentes al caudal.

Las matrices \mathbf{K}_a y \mathbf{K}_q son tridiagonales e iguales (lo cual es evidente por el tipo de funciones de forma utilizadas) cuya inversa se calcula con la descomposición LU. En este caso es ventajoso desde el punto de vista computacional calcular la matriz inversa en vez de resolver el sistema sin llegar a obtener la matriz inversa explícitamente, porque dicha matriz es constante durante todo el cálculo.

5.1.4. Ejemplo: transmisión de un pulso sinusoidal en el modelo 1D

Se considera un ejemplo de validación muy similar al de la sección 4.5.1 con los mismos parámetros y condiciones que en FORMAGGIA Y VENEZIANI [2003]. Se trata de un cilindro en el que se impone una semionda de presión en un extremo, mientras que en el otro extremo se impone condición de contorno absorbente (figura 5.4). La diferencia fundamental respecto al caso en 4.5.1 es precisamente esta última condición de contorno en el extremo final. Ahora la onda de presión no se refleja sino que abandona el dominio. Cabe destacar que al resolver el modelo unidimensional por un método explícito el paso de tiempo requerido es más pequeño que en los ejemplos anteriores.

Descripción del problema:

- a) La longitud del cilindro es $L = 15$ cm. y el diámetro inicial $\phi_0 = 1$ cm. El espesor de la pared es $h = 0.05$ cm.
- b) En el extremo inicial se impone una semionda de presión durante un período de tiempo de 2.5 ms tal que:

$$P = \begin{cases} 20000 \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \text{ dyn/cm}^2 & t \leq 2.5 \text{ ms} \\ 0 & t > 2.5 \text{ ms} \end{cases} \quad (5.27)$$

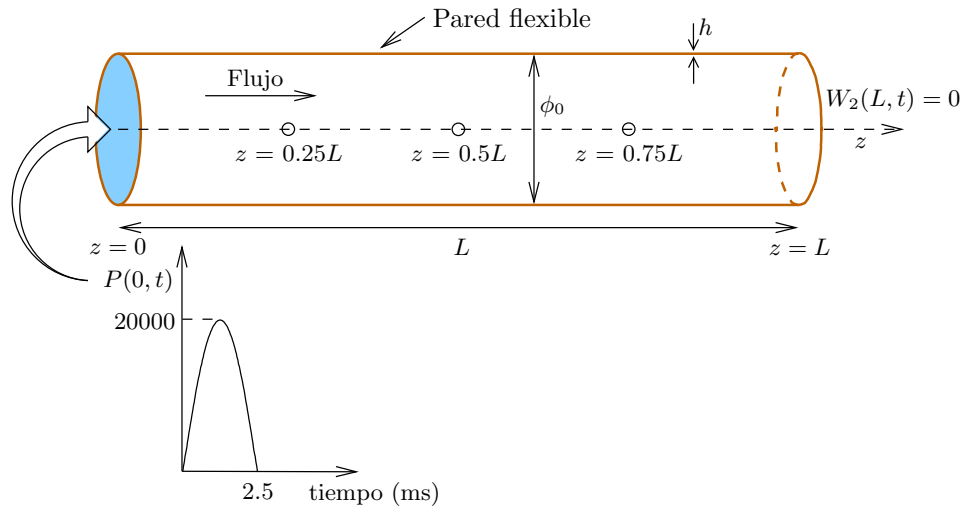


Figura 5.4: Pulso sinusoidal en el modelo 1D.

- c) En el extremo final se impone que la variable característica que viaja en sentido negativo sea igual en todo instante a su valor en el instante inicial (que es nulo), esto es, $W_2(L, t) = 0$. Esto tiene el significado físico de condición de contorno absorbente y simula un tubo de longitud infinita.
- d) La densidad del fluido es $\rho_f = 1 \text{ g/cm}^3$ y la viscosidad se supone nula ya que al construir el modelo se despreció el coeficiente de viscosidad K_r de (5.1b). Para el coeficiente de perfil se toma $\alpha = 1$, como se ha descrito anteriormente. Las hipótesis de viscosidad nula y perfil plano no son realistas, si bien pueden ser razonables dentro del orden de aproximación de este modelo.
- e) El modelo constitutivo de la pared (5.1c) es elástico lineal y se utiliza la fórmula de los tubos de pared delgada para obtener la relación entre presión y área.

$$\psi(A, A_0, \beta) = \frac{\beta}{A_0}(\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \quad \text{siendo} \quad \beta = \frac{\sqrt{\pi}hE}{1 - \nu^2} \quad (5.28)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson y E el módulo de elasticidad, habiendo tomado $\nu = 0.5$ para simular la incompresibilidad y $E = 3 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$. La presión exterior de los tejidos sobre la pared P_{ext} se supone nula.

- f) Se utiliza una malla uniforme con 52 elementos. El paso de tiempo se toma $\Delta t = 10^{-5} \text{ s}$. y el cálculo se lleva hasta los 0.05 s, con lo que se hacen 5000 pasos en total.

Observación. El valor de W_2 en el instante inicial es arbitrario, pero se toma cero por simplicidad. El paso de tiempo cumple sobradamente la condición de estabilidad (5.21).

El número de elementos utilizado tiene importancia, ya que si se utiliza una malla con muchos elementos, el paso de tiempo preciso se hace menor según la condición (5.21). Por contra, si se utilizan pocos elementos se produce mucha disipación numérica y la onda de presión se amortigua rápidamente, disminuyendo su amplitud. Por lo tanto en este modelo es conveniente hacer algún tanteo previo en cuanto al número de elementos.

En las figuras 5.5 y 5.6 se muestran los resultados para la presión y el caudal respectivamente.

Se observa claramente la transmisión de la onda de presión. Se ha prolongado el gráfico hasta los 50 ms. para mostrar que efectivamente la condición de contorno $W_2(L, t) = 0$ es absorbente. No obstante, se produce una pequeña reflexión, la cual puede estar asociada a la aproximación numérica. También se ha dibujado la onda de presión impuesta (curva roja correspondiente a $z = 0$) a efectos de tenerla de referencia en amplitud y período para las demás.

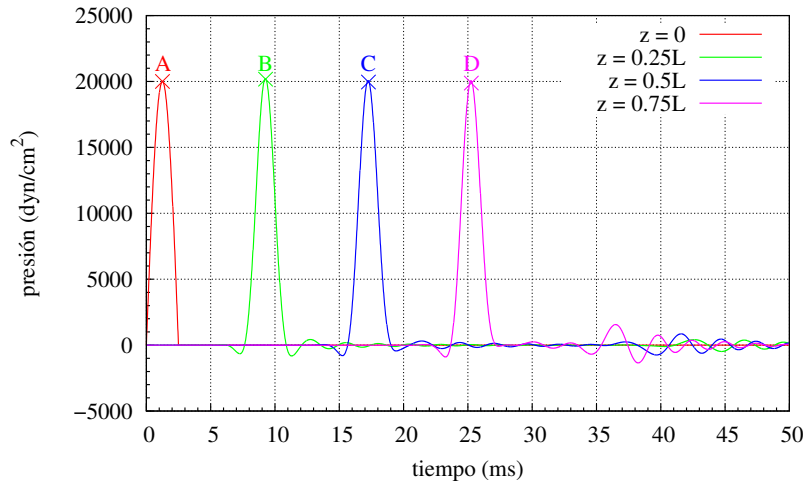


Figura 5.5: Curvas de presión en distintos puntos del tubo.

En el cuadro 5.1 se han escrito los valores de los picos de presión de la figura 5.5. A partir de estos valores se calcula la velocidad con que se transmite la onda de presión en el modelo numérico y se compara con λ_1 .

Por ejemplo, entre los puntos $z = 3.75$ y $z = 7.5$ cm resulta con los valores del cuadro 5.1:

$$\bar{\lambda}_{1,num} = 468.87 \text{ cm/s} \quad (5.29)$$

De forma análoga se puede hacer para los otros puntos, obteniendo prácticamente la misma velocidad media.

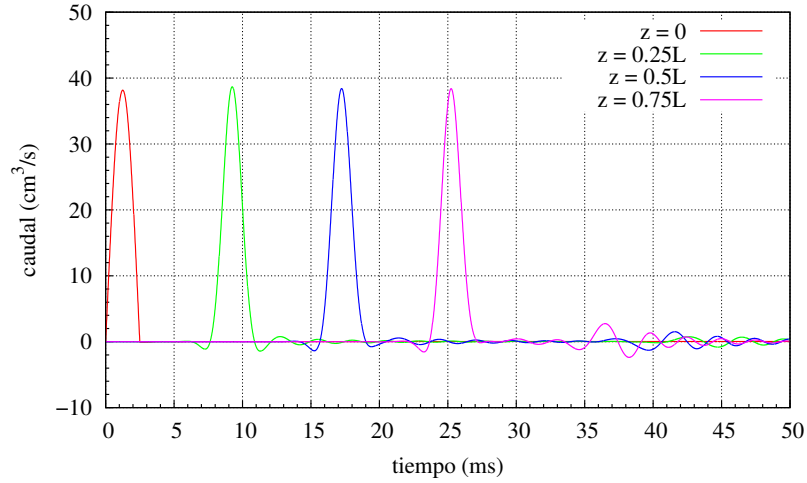


Figura 5.6: *Curvas de caudal en distintos puntos del tubo.*

Punto	Coordenada (cm)	Tiempo (ms)	Presión (dyn/cm ²)
A	$z = 0.0$	1.25	20000
B	$z = 3.75$	9.268	20173.67
C	$z = 7.5$	17.266	19956.43
D	$z = 11.25$	25.27	19880.17

Cuadro 5.1: *Tiempo para el que la presión es máxima en diferentes puntos.*

El valor teórico se obtiene de (5.22a) con $\alpha = 1$:

$$\lambda_{1,\text{teo}} = \frac{Q}{A} + c_1 \quad (5.30)$$

En la figura 5.7 se muestra el valor de $\lambda_{1,\text{teo}}$ obtenido en cada instante en los puntos de control *A*, *B*, *C* y *D*, así como el valor medio $\bar{\lambda}_{1,\text{num}}$ calculado en (5.29).

En FORMAGGIA Y VENEZIANI [2003] se obtiene un valor medio de λ_1 menor que 375 cm/s, lo cual no tiene sentido al quedar por debajo del valor mínimo $\lambda_{1,\text{min}} = 447$ cm/s. Además, en dicha referencia se observa que las curvas de presión están desfasadas respecto a las obtenidas aquí en la figura 5.5. Por tanto, este desfase es atribuible a alguna errata en la mencionada referencia.

Comentarios sobre el modelo unidimensional

El modelo 1D descrito es muy barato de implementar y se permite simular una gran parte del sistema vascular con éste. En las zonas donde hay

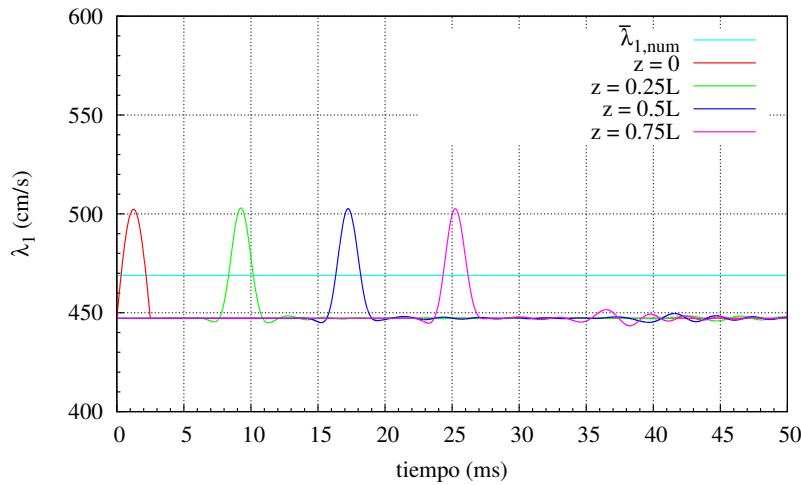


Figura 5.7: Curva con el valor teórico de λ_1 y el valor medio.

una bifurcación habría que acoplar tres modelos unidimensionales mediante la imposición de las condiciones de continuidad del caudal (1 ecuación) e igualdad de la presión (2 ecuaciones). En FORMAGGIA Y VENEZIANI [2003] se desarrollan estos modelos para simular el conjunto de las principales arterias elásticas, esto es, la arteria aorta y sus principales ramificaciones, con un total de 55 arterias.

Como el fenómeno de interacción flujo sanguíneo-pared arterial únicamente se produce en las arterias elásticas (ver figura 1.2), el modelo unidimensional se podría utilizar para simular todas ellas. El número de arterias elásticas es, de acuerdo con el cuadro 1.1 aproximadamente de 160 (considerando las arterias de varios milímetros de diámetro como elásticas). Por tanto, desde el punto de vista computacional es viable simular esta red.

Como se comentó en la introducción de este modelo un inconveniente de éste es que la información obtenida no es local, sino que son valores medios en cada sección. Esto es, no se obtiene el campo de velocidades y de presión característico de un modelo tridimensional, sino la velocidad y presión medias.

Teniendo en cuenta que uno de los objetivos principales es obtener la tensión tangencial en la pared, ya que es la variable que parece estar relacionada con el desarrollo de las placas de ateroma (consultar sección 1.3.3), el modelo unidimensional no es adecuado para nuestro objetivo.

Observación. *Se podría estimar una tensión tangencial con el modelo 1D a partir de la hipótesis sobre la forma del perfil de velocidades. Pero el problema es que se hizo la hipótesis de perfil plano ($\alpha = 1$) con el fin de obtener explícitamente las expresiones (5.24). Y un perfil de velocidades plano da lugar teóricamente a una tensión tangencial nula.*

Pero el modelo unidimensional tiene una utilidad importante, y es utilizarlo para imponer condiciones de contorno absorbentes en los modelos tridimensionales. Esta idea aparece en FORMAGGIA ET AL. [2001] y se comentará con más detalle en el próximo apartado.

5.2. Sobre las condiciones de contorno fisiológicas

Establecer las condiciones de contorno no es un asunto trivial, ya que tanto en la experimentación como en la solución de modelos numéricos hay que acotar el dominio de estudio, e imponer condiciones de contorno artificiales que sean realistas no es fácil en general.

En esta tesis se estudia el modelo de interacción para una arteria y para una bifurcación de ésta, pero no se hace un modelo del sistema cardiovascular completo. Por ello, a la hora de pensar en las condiciones de contorno caben señalar dos zonas distintas que limitan nuestro dominio:

- a) La parte exterior de las arterias está en contacto con tejidos blandos. Por tanto, en su movimiento la arteria interacciona con éstos. Esto afecta únicamente al sólido.
- b) Los dos extremos de la arteria que se modeliza interaccionan con el resto del sistema cardiovascular. Esto afecta tanto al sólido como al fluido.

5.2.1. Condiciones de contorno del fluido

Las partículas de fluido en contacto con la pared arterial se suponen que no deslizan respecto a ésta. Esta hipótesis se ha tomado en todos los ejemplos de los capítulos 2 y 4 y está fundamentada en que las partículas del plasma sanguíneo en contacto con las células del endotelio tienen cierta atracción eléctrica (BEST Y TAYLOR [1993]).

Los glóbulos rojos, blancos y plaquetas no están adheridos. Pero el estudio de si esta hipótesis es o no razonable pertenece al campo de la micromecánica, y desde el punto de vista de la mecánica de medios continuos (que es un punto de vista *macro*) los fenómenos de interacción entre las partículas del plasma y las células del endotelio se modelizan y aproximan con la condición de no deslizamiento.

En cambio, las condiciones de contorno a la entrada y salida de la arteria son conceptualmente distintas y no vienen dadas por motivos físicos sino porque a nuestro modelo hay que ponerle límites prácticos (lo que usualmente se llama condiciones de contorno artificiales). Es decir, el sistema cardiovascular tiene continuidad en el fluido pero el modelo toma solamente una parte de él.

Esta idea se expresa en la figura 5.8, donde se muestra un trozo de arteria que interacciona con el resto del sistema cardiovascular. Se trataría de hacer un modelo muy simplificado del sistema cardiovascular, utilizando el modelo unidimensional para el resto de las arterias elásticas. Con esta estrategia evitaríamos tener que definir las condiciones de contorno explícitamente en los extremos de la arteria en estudio.

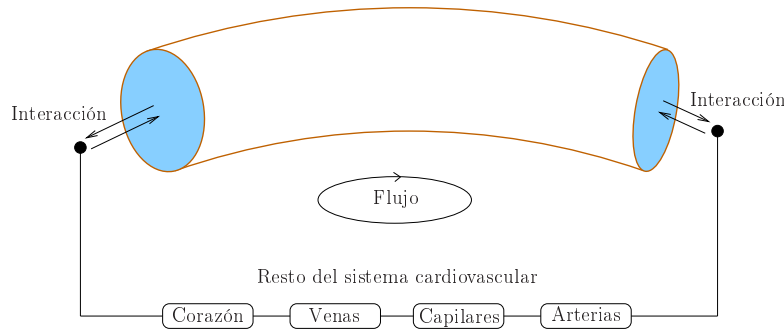


Figura 5.8: *Modelo de arteria acoplado con el resto del sistema cardiovascular.*

Otra posibilidad es imponer directamente condiciones de contorno no considerando el resto del sistema cardiovascular. Esto implica que se necesitan medidas experimentales de la presión o el caudal en ambos extremos de la sección. En la figura 5.9 se esquematiza esta idea, donde las condiciones de contorno son conformes a la formulación basada en la divergencia de la tensión.

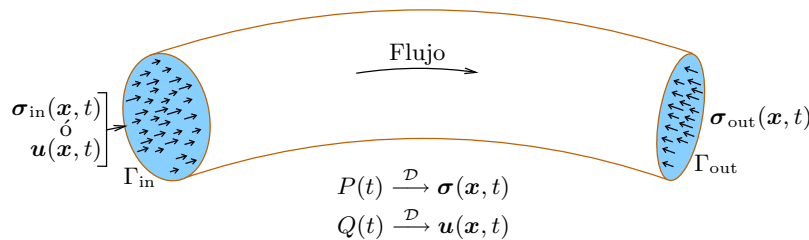


Figura 5.9: *Modelo de arteria desacoplada.*

El problema de este último método es que de las medidas experimentales del escalar presión o el escalar caudal hay que pasar a una distribución sobre una superficie tridimensional de tensiones o velocidades respectivamente.

Para hacer esta operación y abreviar la notación definamos el operador \mathcal{D} , el cual opera sobre un escalar y asigna un campo vectorial a una superficie. Matemáticamente sería, poniendo como ejemplo el caudal que entra:

Definición 5.2.1 *Sea $Q(t)$ el escalar caudal entrante por la sección de la arteria Γ_{in} . Se define el operador \mathcal{D} como aquel que a partir de $Q(t)$ asigna*

un campo vectorial sobre la superficie tridimensional Γ_{in} .

$$Q(t) \longrightarrow \mathcal{D}(Q(t)) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{in} \quad (5.31)$$

donde \mathbf{u} es un campo vectorial normal a la superficie Γ_{in} .

Analicemos los operadores \mathcal{D} correspondientes a la presión y el caudal separadamente:

Operador \mathcal{D} para la presión

En este caso dicho operador consiste sencillamente en asignar una tensión normal uniforme en toda la superficie igual a dicha presión P . Si bien es posible hacer una distribución no uniforme con tal que la presión media sea P , no existen datos empíricos para poder hacer una hipótesis sobre dicha distribución.

A la tensión tangencial se le asigna un valor nulo, aunque esto es ciertamente no realista ya que en cualquier sección existen gradientes de velocidades que dan lugar a una tensión tangencial. Por tanto, consideremos esto como una simplificación más.

Cabe resaltar que imponer una tensión uniforme en la sección de salida es adecuado en geometrías sencillas como puede ser el caso de un cilindro, pero en geometrías realistas se presentan ciertos problemas. En el ejemplo al final de este capítulo (que es un cilindro perfecto) se verá que al acoplar el modelo 3D con el modelo 1D solamente se refleja del orden del 10% de la onda de presión. En cambio, en los ejemplos del capítulo 6 con geometrías reales, la proporción reflejada llega al 20% e incluso el cálculo deja de converger en el caso de la bifurcación. Esto es porque en zonas con curvatura elevada la presión se aleja demasiado de ser uniforme en la sección transversal. El cálculo de un operador \mathcal{D} que proporcione resultados más robustos se propone para futuros trabajos.

Operador \mathcal{D} para el caudal

Si las arterias tuvieran sección circular y el flujo fuera estacionario se podría imponer el perfil de velocidades en forma de paraboloides que es característico del flujo de Poiseuille.

Por otra parte, si la sección fuera circular y el flujo pulsátil y perfectamente sinusoidal podríamos utilizar los resultados del flujo de Womersley (ver sección 2.4.3) e imponer los perfiles de velocidad analíticos que se obtienen a partir de las funciones de Bessel sumados al perfil parabólico resultante de la presión media.

Todo ello constituiría una buena aproximación aunque no exacta debido a que en las hipótesis tanto del flujo de Poiseuille como de Womersley no se contempla el fenómeno de interacción. Además, en el flujo de Womersley considera fluido de *Stokes*.

Aquí, por simplificar, se toma como operador \mathcal{D} el que proporciona el perfil en forma de paraboloides. En el apéndice E se desarrolla dicho operador. Esto quiere decir que para imponer velocidades se desprecian los efectos

dinámicos y en cada instante se impone el perfil que resultaría de un flujo estacionario.

Queda por tanto para posteriores trabajos utilizar los perfiles del flujo de Womersley para imponer el caudal.

5.2.2. Condiciones de contorno de la pared arterial

Las arterias están rodeadas por otros tejidos blandos e interaccionan con éstos, aunque simular de una forma razonable el efecto de los tejidos sobre la superficie exterior de la arteria no es fácil.

Un modelo muy simplificado sería colocar una capa de elementos con un modelo constitutivo elástico, pero se carece de las propiedades elásticas de dichos tejidos, que por otra parte, son diversos.

Por ello en este trabajo se prescinde de la interacción con estos tejidos y se supone que la tensión sobre la pared exterior de la arteria es nula.

El problema ahora es que si la capa externa de la arteria está libre, hay que sujetarla por algún sitio para hacer los cálculos porque si no tendría traslaciones y rotaciones de sólido rígido.

Lo que hacen otros autores es sujetar ambos extremos restringiendo completamente sus movimientos FERNÁNDEZ Y MOUBACHIR [2004]. Pero el problema de esto es que si se restringe el movimiento de la sección final la onda de presión se refleja, tal como se ha descrito en el ejemplo del apartado 4.5.1.

En este trabajo se consideran las siguientes condiciones de contorno (ver figura 5.10):

- a) En el extremo inicial se restringe el movimiento, esto es, se impone desplazamiento nulo en los nodos.
- b) El extremo final se deja libre. Esto origina que en las geometrías realistas se produzcan desplazamientos importantes en este extremo debido a una traslación superpuesta a las deformaciones de la pared.

Respecto al extremo final, para evitar el movimiento de traslación se ha probado a sujetar la sección por un nodo, esto es, imponer desplazamiento nulo a un sólo nodo de esa sección. Pero esto no ha dado buenos resultados porque ese nodo sujeto originaba una zona singular en el campo de tensiones y velocidades a su alrededor.

Cabe decir que imponer movimiento nulo en el extremo inicial no es realista, pero es válido en tanto y cuanto lo que se quiere es estudiar el fenómeno de propagación.

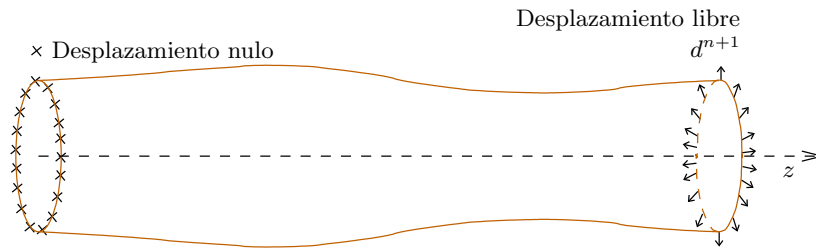


Figura 5.10: Condiciones de contorno de la pared coaccionando el extremo inicial y dejando libre el final.

5.3. Acoplamiento de los modelos 3D y 1D. Programa interbio

En cuanto a las condiciones de contorno para el fluido, en este trabajo se ha optado por una solución que combina los dos modelos propuestos anteriormente (ver figuras 5.8 y 5.9).

Para la sección de entrada se adopta una historia de presiones $P(t)$ o caudales $Q(t)$ tomadas de la literatura y mediante el operador \mathcal{D} correspondiente se impone la distribución de tensiones o velocidades en el fichero de entrada para el cálculo por elementos finitos.

Las condiciones para la sección de salida se basan en el trabajo de FORMAGGIA ET AL. [2001] en el que un modelo 1D se acopla al extremo final de un tubo cilíndrico. Por tanto la sección de salida del modelo 3D de la arteria se acopla con el modelo unidimensional descrito en el apartado 5.1 para dar continuidad al flujo y presión. En el extremo final del modelo 1D se imponen condiciones de contorno absorbentes.

El resultado es un problema en el que la incógnita que se toma es el escalar presión en la sección de salida del modelo 3D y sección de entrada del modelo 1D $P(\Omega_I)$, como se ilustra en la figura 5.11. La sección donde interaccionan los modelos 3D y 1D se ha denotado con Ω_I .

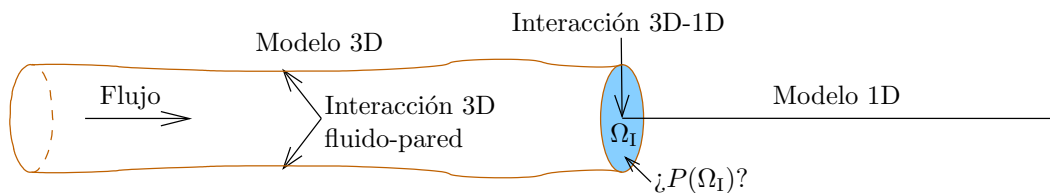


Figura 5.11: Interfaz Ω_I de los modelos 3D y 1D donde la presión es la incógnita.

Para resolverlo se utiliza el método de *Aitken* para una variable escalar

(ver sección 4.4.1 figura 4.12). Asimismo se necesita una relación entre la presión y el área de una sección para el modelo 1D. Para este cálculo se supone sección circular y la ecuación constitutiva ψ del sólido despreciando los efectos dinámicos, tal como en (5.1c).

Es un método iterativo en el que se incorpora el algoritmo descrito en la sección 4.4.2 dentro del algoritmo más general que se muestra en el cuadro 5.2. A este nuevo programa se le llama **interbio**.

Observación. *Aquí se ha empleado el subíndice m distinto a k para las iteraciones. Esto es así porque las iteraciones en m son entre el modelo de interacción 3D y el modelo 1D (ver figura 5.13), mientras que las iteraciones k son internas del modelo 3D (ver figura 5.14) y explicadas en el apartado 4.4.2. Esto es, en cada paso de tiempo hay que hacer varias iteraciones en m y por cada iteración en m hay que hacer varias iteraciones en k .*

En los pasos 3.3.3 y 3.4 se señala con \underline{A}_m^{n+1} y \underline{P}_m^{n+1} el área y la presión, respectivamente, tras resolver el problema de interacción unidimensional.

La originalidad del método está en utilizar el escalar presión como incógnita en la sección Ω_I y plantear un problema general en el que dicho escalar es la única incógnita, facilitando así la comprensión y planteamiento del problema. La utilización del método de Aitken para resolver este problema general ha permitido la convergencia entre los modelos 3D y 1D en pocas iteraciones, como se verá en todos los casos posteriores.

5.4. Ejemplo de validación. Cilindro 3D acoplado a un modelo 1D

Con las ideas de los apartados anteriores se muestra el ejemplo del apartado 4.5.1 pero aplicando el acoplamiento con el modelo 1D descrito en el apartado anterior. Para poder comparar se utiliza para el modelo 3D la misma geometría, malla y condiciones de contorno, salvo en el extremo final que ahora se acopla con un modelo 1D, como se muestra en la figura 5.12.

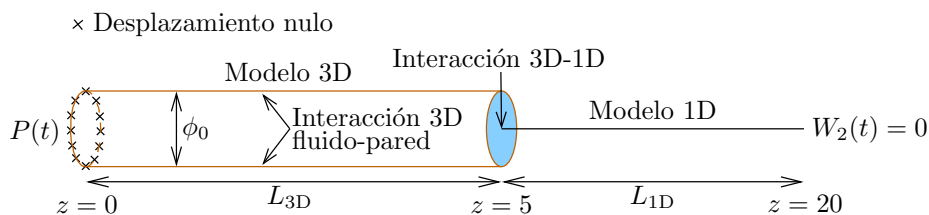


Figura 5.12: Modelo 3D acoplado con un modelo 1D.

Las características del modelo 1D son:

1. Se parte de las condiciones iniciales en $t = 0$ inicializando con $n = 0$. En este instante inicial se conoce el valor de todas las variables.
2. Se pretende hallar la solución en t^{n+1} . Se inicializa $m = 0$ (el subíndice para las iteraciones entre los modelos 3D y 1D) y se realiza el primer tanteo de la presión en la sección de la interfaz Ω_I :

$$P_0^{n+1}(\Omega_I) = P^n(\Omega_I)$$

3. Se calcula el residuo del problema $R(P_m^{n+1}(\Omega_I))$. Para ello se hacen los siguientes pasos:
 - 3.1. Se resuelve el problema de interacción fluido-pared arterial (4.29) del modelo 3D con el algoritmo descrito en el apartado 4.4.2 (programa `inter3D`).
 - 3.2. Se calcula el valor de la variable característica $W_{1,m}^{n+1}(\Omega_I)$ como sigue:
 - 3.2.1. Se obtiene mediante integración del campo de velocidades el caudal en la sección de la interfaz $Q_m^{n+1}(\Omega_I)$.
 - 3.2.2. Con los desplazamientos de la pared se calcula el área de la sección $A_m^{n+1}(\Omega_I)$.
 - 3.2.3. A partir del caudal y el área se calcula el valor de la variable característica $W_{1,m}^{n+1}(\Omega_I)$ según (5.24a).
 - 3.3. Se resuelve el modelo 1D como sigue:
 - 3.3.1. Se imponen las condiciones de contorno $W_{1,\text{in}}^{n+1} = W_{1,m}^{n+1}(\Omega_I)$ en la sección de entrada y $W_{2,\text{out}}^{n+1} = 0$ en la sección de salida.
 - 3.3.2. Se resuelven las ecuaciones (5.26).
 - 3.3.3. Se obtiene $\underline{A}_m^{n+1}(\Omega_I)$ y por tanto una nueva presión $\underline{P}_m^{n+1}(\Omega_I)$ (de acuerdo con (5.1c)) en la sección Ω_I .
 - 3.4. El residuo es $R(P_m^{n+1}(\Omega_I)) = \underline{P}_m^{n+1}(\Omega_I) - P_m^{n+1}(\Omega_I)$.
4. Se realiza el test de convergencia para la presión:

$$|R(P_m^{n+1}(\Omega_I))| < \text{tolerancia} \quad (5.32)$$

- 4.1. Si ha convergido, guardamos todas las variables como valores convergidos. Se incrementa el tiempo $t^{n+2} = t^{n+1} + \Delta t$ y si $t^{n+2} \leq t_{\text{final}}$ se hace $n = n + 1$ y vamos al paso 2. Si $t^{n+2} > t_{\text{final}}$ terminamos en el paso 5.
- 4.2. Si no ha convergido, se hace una nueva iteración. Para ello, se calcula el parámetro de relajación ω_m .
 - 4.2.1. Si $m = 0$ (primera iteración):

$$\omega_0 = 1$$

- 4.2.2. Si $m \geq 1$ tomamos el equivalente a (4.46) con la variable presión:

$$\omega_m = \frac{P_m^{n+1}(\Omega_I) - P_{m-1}^{n+1}(\Omega_I)}{R(P_{m-1}^{n+1}(\Omega_I)) - R(P_m^{n+1}(\Omega_I))} \quad (5.33)$$

Se obtiene el nuevo valor de la presión:

$$P_{m+1}^{n+1}(\Omega_I) = P_m^{n+1}(\Omega_I) + \omega_m R(P_m^{n+1}(\Omega_I))$$

Se hace $m = m + 1$ y volvemos al paso 3.

5. Fin del cálculo.

Cuadro 5.2: Algoritmo de interacción entre modelos 3D y 1D.

- La longitud es $L_{1D} = 15$ cm. El diámetro del vaso y el espesor de la pared son los mismos que en el modelo 3D.
- La densidad del fluido es $\rho_f = 1$ g/cm³ y se desprecia la viscosidad. El parámetro del perfil de velocidades es $\alpha = 1$ (esto es, perfil plano).
- El modelo constitutivo para la pared es elástico lineal según la expresión (5.28). El módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson son los mismos que para la pared del modelo 3D.
- La discretización se hace con 52 elementos uniformes. Este número se ha tanteado teniendo en cuenta el paso de tiempo dado, que es $\Delta t = 10^{-4}$ s.

El cálculo se ha llevado hasta los 0.05 s. La tolerancia para las iteraciones internas del modelo 3D según (4.55) es 10^{-4} y la tolerancia para la presión según (5.32) es 1 dyn/cm² (del orden de 10^{-4} veces la presión impuesta).

El número de iteraciones se desglosa ahora en dos partes. Por un lado, en la figura 5.13 se muestra el número de iteraciones entre los modelos 3D y 1D en cada paso de tiempo (el número de iteraciones en m). Se observa que el método propuesto para resolver la interacción según (5.33) da buenos resultados ya que la convergencia se alcanza en muy pocas iteraciones.

Observación. *En los primeros instantes el número de iteraciones entre modelos es uno porque todo el fluido que entra se almacena en el cilindro en el nuevo espacio que se crea al deformarse. Cuando el fluido comienza a salir por la sección final es cuando comienzan las iteraciones entre modelos.*

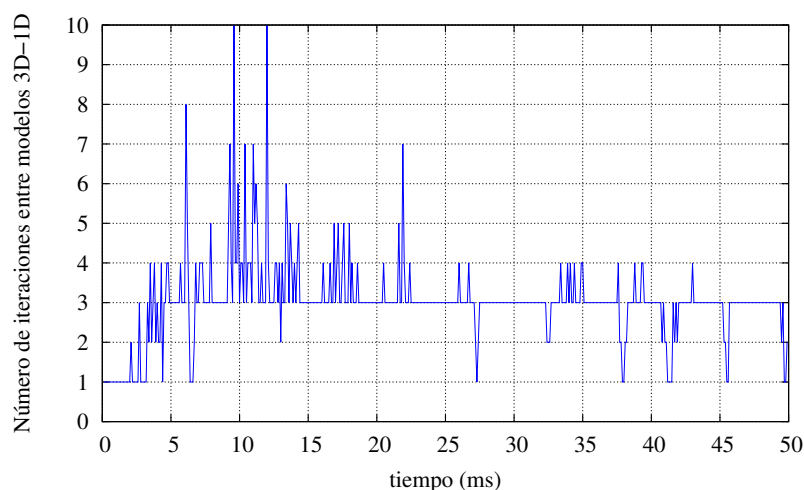


Figura 5.13: Número de iteraciones entre los modelos 3D y 1D utilizando el método de Aitken para la interacción entre ambos.

Por otro lado, en la figura 5.14 se representa el número total de iteraciones, que resulta del orden de $m \cdot k$ en cada paso de tiempo, siendo m el número de iteraciones entre los modelos 3D y 1D y k el número de iteraciones entre los modelos 3D de fluido y sólido. El tiempo total de cálculo fue de 76 horas en una máquina con un procesador de 64 bits a 2.6 GHz y memoria RAM 4 Gb.

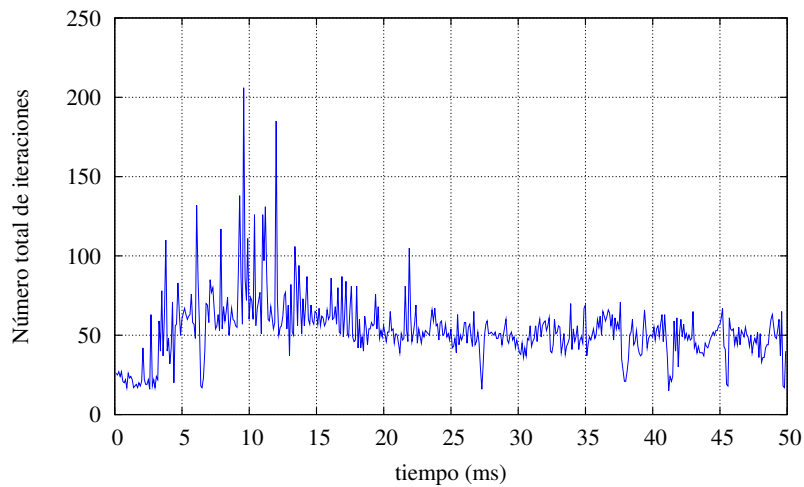
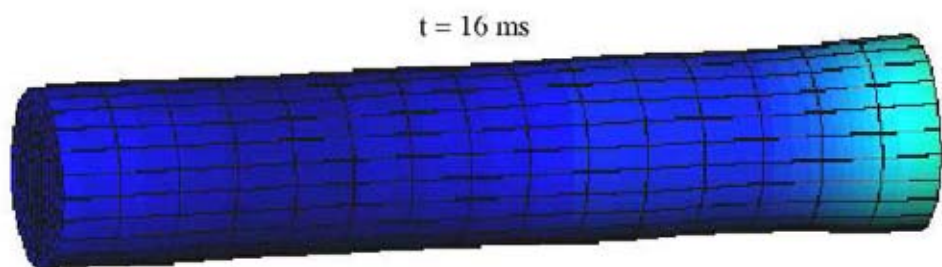
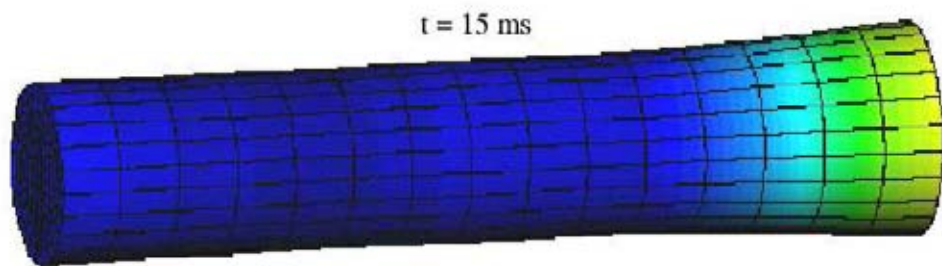
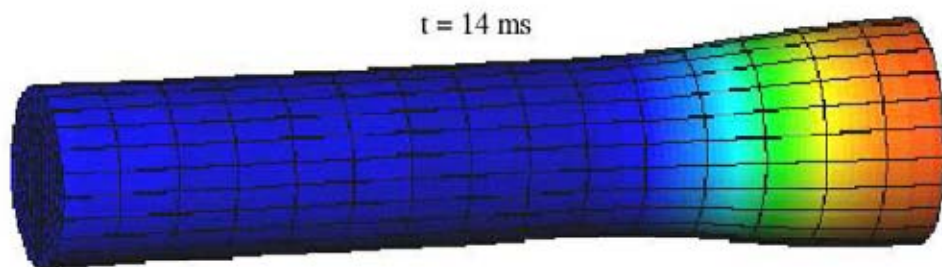
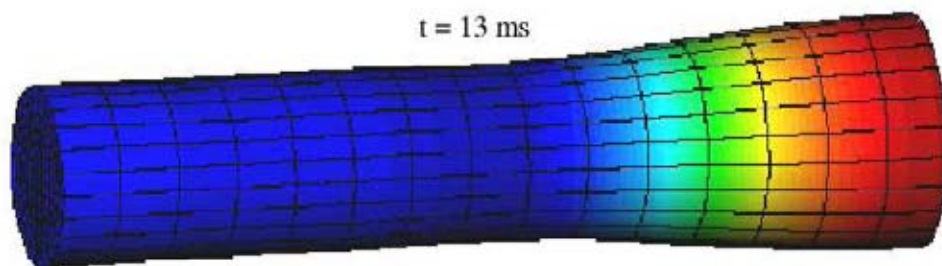
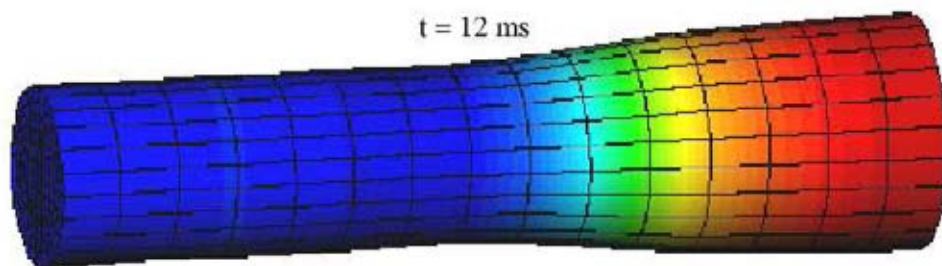


Figura 5.14: *Número total de iteraciones utilizando el método de Aitken para la interacción entre los modelos 3D de fluido y sólido.*

Respecto de la onda de presión es interesante observar la sección $z = 5$ cm para comprobar que efectivamente la presión sale del dominio 3D y se transmite al modelo 1D. No se van a repetir aquí los resultados hasta $t = 12$ ms porque son prácticamente idénticos a los descritos en el apartado 4.5.1.

En la figura 5.15 se muestran los contornos de presión, donde se observa cómo la onda de presión llega a la sección $z = 5$ cm. y sale del dominio. No obstante parte de la onda es reflejada (sobre el 13% de su amplitud). De todas maneras es notable la mejora respecto la figura 4.16, donde allí se reflejaba prácticamente la totalidad de la onda de presión.

En la figura 5.16 se muestra cómo la onda de presión se ha transmitido por el dominio del modelo 1D. Obsérvese que en los primeros instantes la presión es nula hasta aproximadamente los 5 ms. En ese instante llega el frente de la onda de presión.



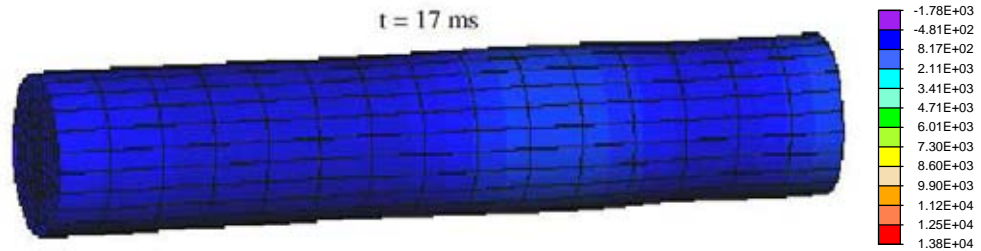


Figura 5.15: Contornos de presión de $t = 12$ a 17 ms. La deformación ha sido aumentada por 10.

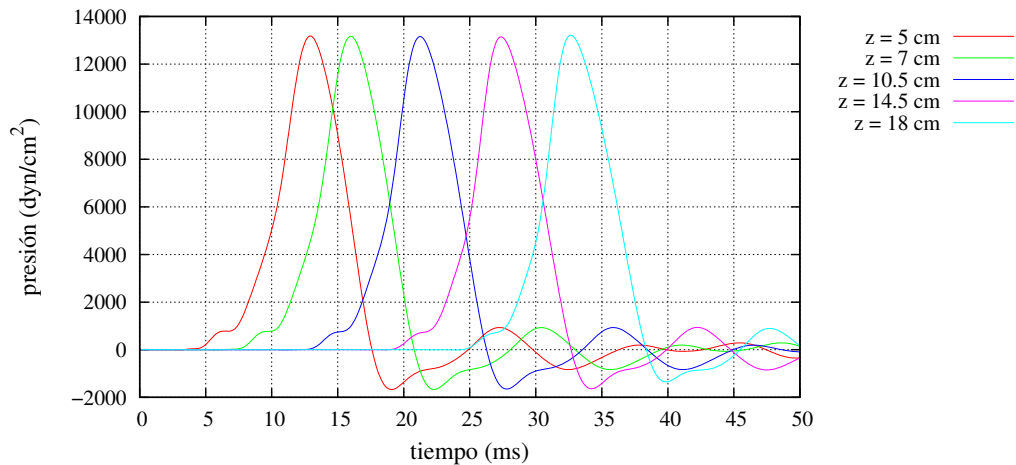


Figura 5.16: Presión en distintos puntos del modelo 1D.

En la figura 5.17 están las curvas con el desplazamiento en distintas secciones del modelo 3D. Obsérvese que la diferencia con la figura 4.17 está en el desplazamiento de los puntos del tramo superior del cilindro (por ejemplo $z = 4$ cm). Esto es porque en el ejemplo 4.5.1 se impuso movimiento nulo en el extremo final del tubo mientras que ahora éste está libre. En $z = 5$ cm el desplazamiento es algo mayor, quizás debido a un problema numérico por el método de acoplamiento utilizado.

Finalmente la figura 5.18 muestra las curvas de caudal en distintas secciones. En el modelo 3D el caudal ha de ser calculado de forma análoga a como se hizo en el ejemplo 4.5.1 mientras que en el modelo 1D el caudal es una de las variables del modelo, luego lo obtenemos directamente del cálculo.

Se observa que la curva del caudal va evolucionando en las distintas secciones de tal forma que disminuye la amplitud, pero esto se compensa con el aumento del intervalo de tiempo en que se extiende la curva. De esta forma se conserva el volumen de fluido que se transmite.

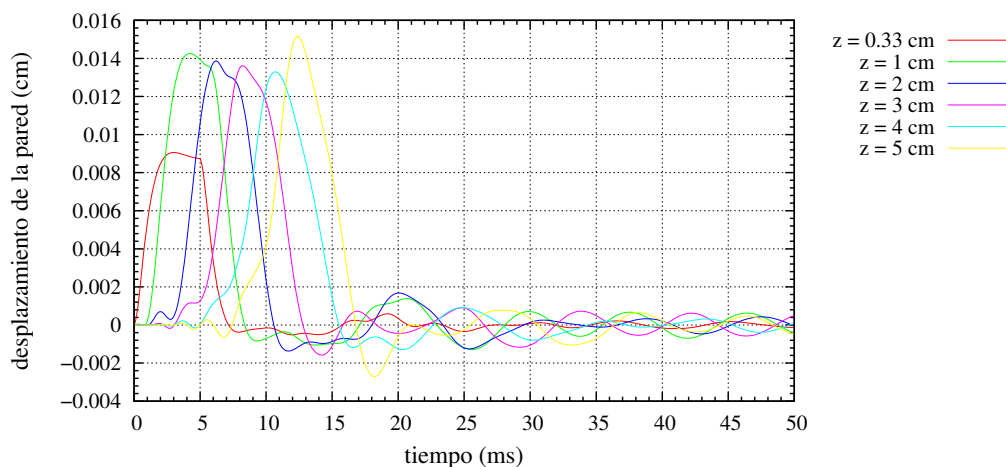


Figura 5.17: *Desplazamiento en distintas distancias axiales del modelo 3D.*

El cambio más brusco en el perfil del caudal se produce en la zona de transición del modelo 3D al 1D ($z = 5$ cm). Una vez en el modelo 1D el perfil se mantiene prácticamente constante en las distintas secciones.

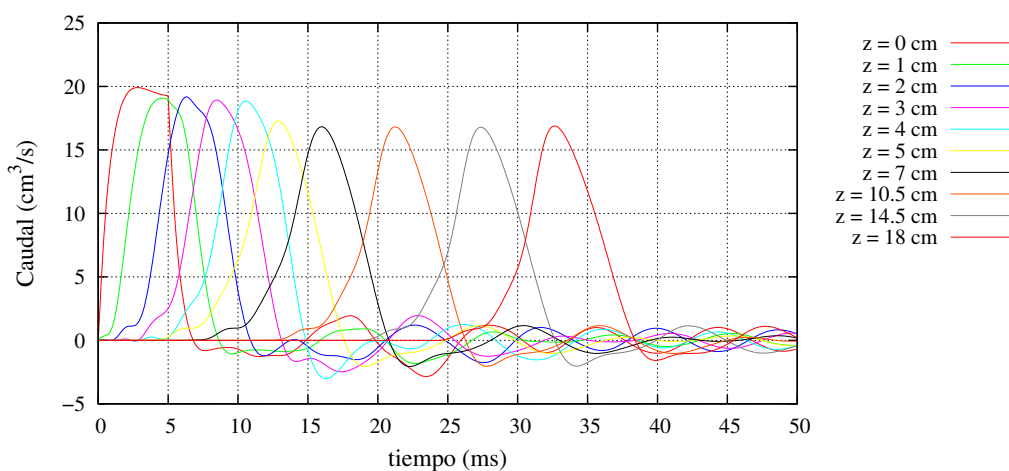


Figura 5.18: *Caudal en distintas distancias axiales en los modelos 3D (hasta $z = 5$ cm) y 1D (a partir de $z = 5$ cm).*

Capítulo 6

Aplicaciones a geometrías realistas

En este capítulo aplicamos todo lo desarrollado anteriormente a arterias con geometría real, tanto en el lumen como en la pared.

Primero se describe el procedimiento para obtener la geometría y los programas desarrollados para postprocesar los resultados obtenidos y así obtener las variables de interés, fundamentalmente la tensión tangencial y las líneas de corriente.

Después se desarrollan tres ejemplos con geometrías reales de la arteria coronaria izquierda. En los tres se calcula el caso de interacción imponiendo un pulso de presión, utilizando para la pared arterial el material de Ogden, el neohookeano y un material elástico lineal a efectos de comparación. Los parámetros de estos modelos constitutivos son los ajustados a los experimentos en la sección 3.4. También en los ejemplos se hace la simulación de un ciclo cardíaco completo imponiendo un caudal realista a la entrada, pero en este caso no se tiene en cuenta la interacción con el fin de hacer el cálculo en tiempos asequibles.

6.1. Pre-proceso y Post-proceso

Con la expresión *pre-proceso* nos referimos a las técnicas que se utilizan para tomar la geometría de la arteria del paciente y luego a partir de ésta hacer la malla de elementos finitos. El proceso de obtener la geometría del paciente se comentará sucintamente, ya que no forma parte de los objetivos de esta tesis.

El *post-proceso* consiste en obtener todas las variables de interés clínico a partir de los resultados del cálculo de elementos finitos. Para esto se ha diseñado un programa que también forma parte del trabajo de esta tesis.

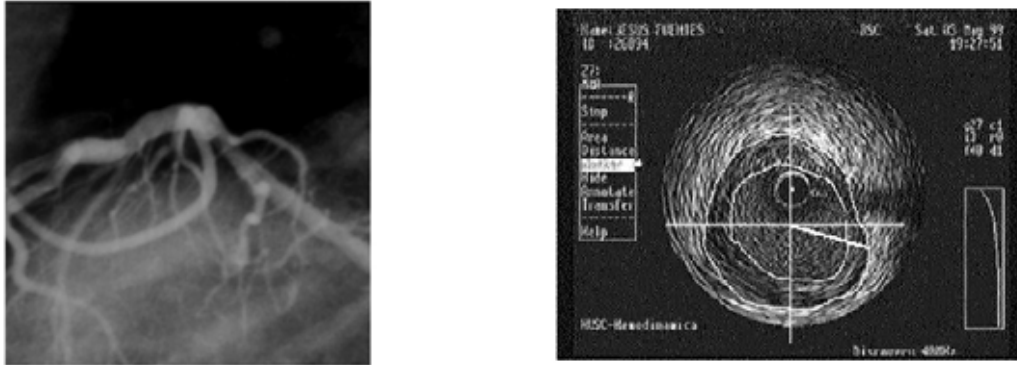


Figura 6.1: A la izquierda una angiografía y a la derecha una imagen IVUS.

6.1.1. Obtención de la geometría real y la malla

La obtención de la geometría fue parte del proyecto CICYT TIC2000-1635-C04-01 con el objetivo de hacer Modelos TRIdimensionales de las arterias COronarias (MOTRICO). La generación de la geometría a partir de actuaciones *in vivo* se lleva a cabo en el *Centre de Visió per Computador* (CVC. Universidad Autónoma de Barcelona).

La técnica (llamada *ANGUS*) consiste en (SLAGER ET AL. [2000]):

- a) Obtener el perfil longitudinal por medio de un procedimiento estándar para tomar angiografías (resonancia magnética en este caso).
- b) Obtener la sección transversal en cada punto del eje por medio de técnicas *IVUS* (IntraVascular UltraSound). Con este procedimiento se obtuvo la sección tanto en sístole como en diástole.

La figura 6.1 muestra una imagen de ambos procedimientos para las arterias coronarias. En SANMARTÍN ET AL. [2006] se aplica la misma técnica para estudiar la tensión tangencial en arterias coronarias con *stent*.

A partir del perfil longitudinal y la sección transversal se reconstruye la geometría para hacer la malla de hexaedros por dos vías distintas:

- a) Para la arteria con esclerosis la malla fue elaborada por el Grupo de Informática Gráfica Avanzada (GIGA) de Zaragoza mediante la aplicación del programa CUBIT¹, partiendo de un fichero CAD elaborado por el CVC.
- b) Para la arteria sana y la bifurcación se ha utilizado un *software* desarrollado en esta tesis, el cual se detalla en el apéndice D. Para ello previamente hay que aproximar la directriz a una sucesión de curvas cúbicas, pero esta aproximación es prácticamente exacta porque el número de cúbicas puede ser tan grande como queramos.

¹<http://cubit.sandia.gov>

6.1.2. Programa post-bio para el post-proceso

Los resultados que se obtienen usualmente de un cálculo de elementos finitos para el fluido son las velocidades nodales.

Por otra parte, es de interés clínico conocer la tensión tangencial (o de cizallamiento) así como las líneas de corriente y trayectorias de las partículas de fluido. El interés de esto último es para comprobar si existen zonas de recirculación, las cuales son propensas a la acumulación y depósito de sustancias.

Para ello se ha diseñado un programa, al que llamaremos para abreviar `postbio`, que realiza las siguientes tareas:

- a) Cálculo de la *tensión tangencial* $\boldsymbol{\tau}$ sobre la pared arterial. La estrategia es hallar el gradiente de la velocidad \boldsymbol{u} y multiplicarlo por la viscosidad μ . Para ello se obtiene para cada nodo de la pared el nodo más cercano del lumen así como el vector normal \boldsymbol{n} y por tanto el plano tangente (ver figura 6.2). Para obtener el vector normal, como cada nodo es compartido por cuatro elementos se hace una media ponderada de cuatro vectores.

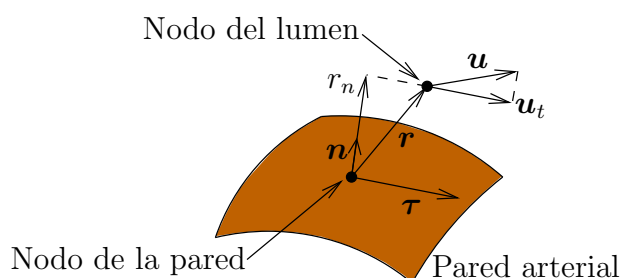


Figura 6.2: Cálculo de la tensión tangencial sobre la pared arterial.

La tensión tangencial resulta así:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \frac{\boldsymbol{u}_t}{r_n} \quad (6.1)$$

donde \boldsymbol{u}_t es el vector proyección del vector velocidad \boldsymbol{u} sobre el plano tangente y r_n es la proyección del vector que va del nodo de la pared al nodo del lumen sobre el vector normal unitario \boldsymbol{n} .

- b) Cálculo de las *líneas de corriente*, incluyendo la salida gráfica y la animación de la trayectoria de las partículas en geometrías con contornos móviles. Para calcular las líneas de corriente se precisa hallar las curvas tangentes al campo vectorial de la velocidad. En el apéndice C se muestra el método de integración utilizado. Para la salida gráfica, en los casos de los capítulos anteriores se ha utilizado el programa `gnuplot`, generando ficheros `postscript`. En este capítulo se utilizan las librerías gráficas (`vtk`) programadas sobre `openGL` para los dibujos de las líneas de corriente. Las

animaciones consisten en pasar una secuencia de imágenes en formato *jpg* con el programa *xanim*. El paso de los ficheros *postscript* al formato *jpg* se hace con el programa *convert*. Cabe comentar que las líneas de corriente se calculan para triángulos (2D) y tetraedros (3D). Para el caso 2D los elementos utilizados son cuadriláteros, y el paso de una malla de cuadriláteros a una de triángulos es inmediato. Para el caso 3D, como los elementos son hexaedros, se ha diseñado un programa que pasa de la malla de hexaedros a una de tetraedros, lo cual no es inmediato si se quiere conseguir que la malla sea conforme. Esta propiedad de la malla es necesaria para hallar las líneas de corriente con el método utilizado en este trabajo. Para dividir los hexaedros se ha seguido lo propuesto en PIQUET ET AL. [1996], que consiste en dividir cada hexaedro en 5 tetraedros. La razón por la que se calculan las líneas de corriente en tetraedros y triángulos es porque las funciones de forma para la interpolación son lineales, lo que hace que se pueda calcular la función inversa de forma unívoca. Esta función es la que asocia un punto del elemento de referencia un punto del elemento real, como en elementos finitos. En cambio, en cuadriláteros/hexaedros las funciones de forma son al menos bilineales, y a menos que sus lados/caras sean paralelos dos a dos, la función inversa no es única, por lo que se complica el cálculo de las líneas de corriente. Para más detalles, consultar el apéndice C.

6.2. La arteria coronaria izquierda

La arteria coronaria izquierda parte de la base de la arteria aorta y junto con sus posteriores ramificaciones se encarga de suministrar sangre aproximadamente a la mitad del corazón ². De ahí su importancia, ya que un taponamiento en una de sus ramificaciones puede provocar la muerte de parte de las células musculares del corazón ³, lo que viene a llamarse *infarto de miocardio*. La importancia de esto es enorme, ya que es una de las principales causas de muerte en los países desarrollados (FARRERAS Y ROZMAN [1995]).

La primera ramificación ocurre a 1 – 2,5 cm. de su comienzo. La parte principal sigue descendiendo por el surco interauricular y se llama arteria anterior descendente izquierda (LAD), mientras que a casi 90° se bifurca en la arteria circunfleja (LCX), como se ve en la figura 6.3.

En este capítulo se hacen modelos de la LAD en estado sano y con un grado severo de estenosis, así como un modelo de la bifurcación de la coronaria izquierda en la LAD y LCX.

Es importante comentar que las arterias coronarias son más musculares que elásticas (BEST Y TAYLOR [1993]), pero los parámetros que se obtuvieron de los experimentos eran de la arteria aorta, que es una arteria elástica.

²El corazón es el órgano que más oxígeno consume por unidad de masa de tejido.

³Las células mueren debido al corte en el suministro de oxígeno y nutrientes.

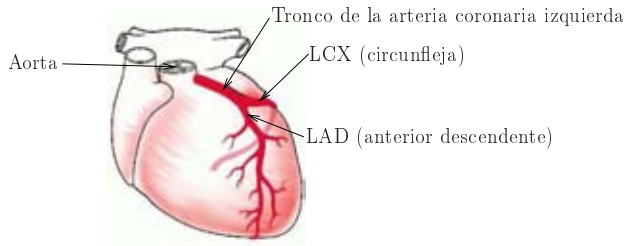


Figura 6.3: *Ubicación de la arteria coronaria izquierda en el corazón.*

Como se comentó en el apartado 3.1, la capa media de una arteria muscular tiene mayor proporción de células musculares mientras que la de una arteria elástica tiene más fibras elásticas, lo que da lugar a características constitutivas diferentes. No obstante, se van a aplicar los parámetros de la arteria aorta obtenidos en el apartado 3.4 a las arterias coronarias, aunque para un modelo más exacto habría que hacer ensayos con las arterias coronarias y así obtener sus correspondientes parámetros constitutivos.

La densidad de la pared se ha tomado $\rho_s = 1.05 \text{ g/cm}^3$.

En cuanto a la sangre, en todos los casos se tomará el modelo de fluido newtoniano descrito en el apartado 2.2 con densidad $\rho_f = 1 \text{ g/cm}^3$ y viscosidad $\mu = 0.04 \text{ Poise}$.

En las tres arterias se muestra primero el problema de interacción, en el que un pulso de presión de 13333 dyn/cm^2 (10 mm Hg) se impone durante 2 ms. (ver figura 6.4). Este tiempo tan breve permite analizar la transmisión del pulso de presión en la arteria. El paso de tiempo para el cálculo es $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$. y se dan 250 pasos en los dos casos de la LAD y 110 en la bifurcación. El menor número de pasos en la bifurcación es debido a que en ésta el método no converge a partir de cierto instante, lo cual se analiza en el apartado 6.2.3.

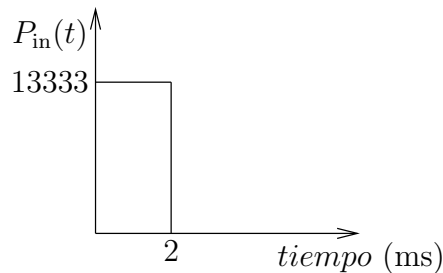


Figura 6.4: *Pulso de presión impuesto en la arteria.*

La tolerancia entre los modelos 3D de fluido y sólido se ha tomado 10^{-4} (ver (4.55)) y la tolerancia entre los modelos 3D y 1D es 1 dyn/cm^2 (ver (5.32)).

Después se simulará (también para los tres casos) un ciclo cardíaco completo, aunque esta vez no se tendrá en cuenta la interacción para poder dar

pasos de tiempo mayores. El objetivo de estos análisis es obtener la tensión tangencial en la superficie del endotelio de la arteria. Se impone un caudal a la entrada, que con el algoritmo explicado en el apéndice E se define mediante una ley parabólica de velocidades. Los datos experimentales sobre el caudal en la arteria coronaria izquierda se han extraído de SANKARANARAYANAN ET AL. [2005] y se muestran en la figura 6.5.

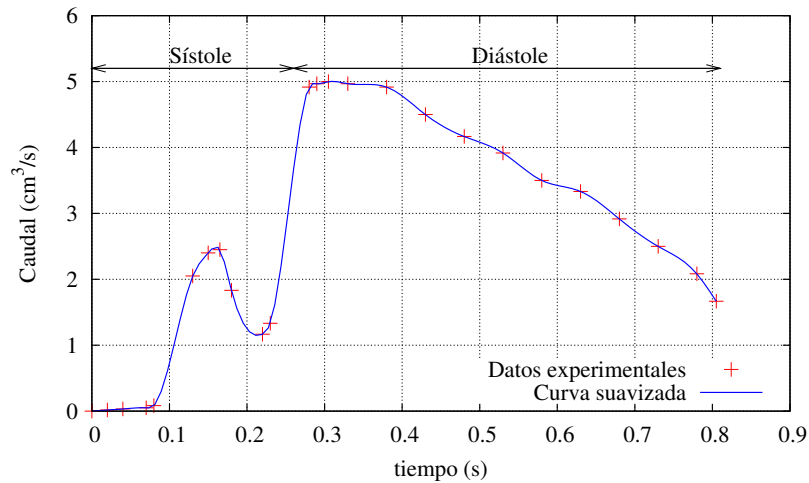


Figura 6.5: Caudal en la arteria coronaria izquierda en un ciclo cardíaco.

Si se integra la curva del caudal en la figura 6.5 se obtiene un volumen de unos 175 ml/min, valor que está de acuerdo con los reportados en la literatura (MILNOR [1989]).

La distribución del caudal en la LAD y LCX depende de la predominancia del flujo coronario en la coronaria izquierda o derecha, y aquí vamos a suponer siguiendo BEST Y TAYLOR [1993] que típicamente un 60 % sigue por la LAD y un 40 % por la LCX.

Cabe destacar que es durante la diástole cuando circula la mayor parte del caudal en las arterias coronarias (ver figura 6.5), lo que puede ser contrario a la intuición. Por ello no es adecuado hacer un modelo en el que se imponga simplemente una onda de presión, sino que también habría que tener en cuenta la interacción con el movimiento del corazón. Esto es así porque el corazón, durante la sístole, presiona la arteria coronaria y dificulta la circulación de la sangre. Durante la diástole deja de estar presionada facilitando la circulación. Para profundizar en este fenómeno consultar por ejemplo FUNG [1997].

En cuanto a la realización de los cálculos, antes de comenzar a utilizar los modelos no lineales del sólido conviene hacer cálculos previos con un modelo elástico lineal para tener un orden de magnitud de los resultados así como para detectar posibles errores en la definición del problema. Para este fin se obtiene el módulo tangente en el origen de las curvas de las figuras 3.14 y 3.15.

La medida experimental de E se ha hecho ajustando una recta por mínimos cuadrados con los primeros puntos de la curva experimental, concretamente en el rango $1 < \lambda < 1.01$, donde la deformación alcanza solamente un 1 %:

$$E_{\text{expe}} = \frac{\sum_{i=1}^{\lambda_i \leq 1.01} \sigma_i \lambda_i}{\sum_{i=1}^{\lambda_i \leq 1.01} \lambda_i^2} \quad (6.2)$$

Por otro lado, se puede calcular un módulo tangente por medio de los modelos de Ogden y neohookeano utilizando la expresión:

$$E_{\text{teor}} = \left. \frac{\partial \sigma_z}{\partial \lambda_z} \right|_{\lambda_z=1} \quad (6.3)$$

y aplicándola a (3.37) y (3.39), resultando:

$$E_{\text{ogden}} = \sum_{p=1}^3 \mu_p \alpha_p \left(\lambda_z^{\alpha_p-1} + \frac{1}{2} \lambda_z^{-\frac{3}{2}\alpha_p} \right) \Big|_{\lambda_z=1} = \sum_{p=1}^3 \mu_p \alpha_p \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} \sum_{p=1}^3 \mu_p \alpha_p \quad (6.4a)$$

$$E_{\text{neoh}} = 2c_1 \left(2\lambda_z + \frac{1}{\lambda_z^2} \right) \Big|_{\lambda_z=1} = 2c_1(2 + 1) = 6c_1 \quad (6.4b)$$

En el cuadro 6.1 se muestran todos los valores obtenidos, con los valores del cuadro 3.3 para (6.4a) y del cuadro 3.4 para (6.4b).

Parámetro E	Aorta sana	Aorta dañada
E_{expe}	82.77	316.94
E_{ogden}	87.71	167.92
E_{neoh}	101.58	502.26

Cuadro 6.1: *Módulo de elasticidad E (en kPa) para ambas arterias.*

Como cabía esperar en la arteria sana los 3 valores son muy aproximados, no ocurriendo así en la arteria dañada.

En todo caso, se utilizarán siempre los valores E_{expe} , ya que son los más realistas.

6.2.1. Arteria coronaria anterior descendente sana

La geometría de la arteria fue obtenida de un paciente sano y tiene una longitud de 1.28 cm. Las mallas se han obtenido con el mallador desarrollado para esta tesis. En este caso la directriz real ha sido aproximada por una sucesión de 3 cúbicas.

LAD sana. Transmisión del pulso de presión

La malla utilizada se muestra en la figura 6.6. Se ha comprobado que para dar 250 pasos de tiempo y conseguir tiempos de cálculo razonables (del orden de 1 día) la malla 3D del fluido ha de tener del orden de 2000 elementos. Concretamente la malla de la figura 6.6 tiene 720 elementos para el lumen y 480 elementos para la pared arterial.

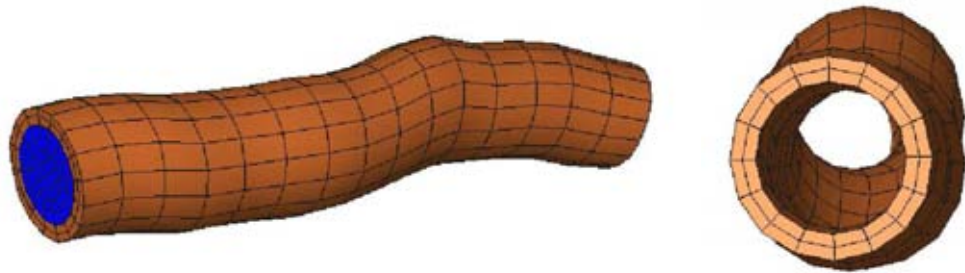


Figura 6.6: *Interacción en LAD sana. Malla del fluido (en azul) y del sólido (en marrón).*

Para la pared arterial se ha hecho el cálculo con tres modelos con los parámetros obtenidos para la arteria sana en el apartado 3.4, esto es:

- Modelo elástico lineal, con módulo de elasticidad $E = 827700 \text{ dyn/cm}^2$ (obtenido del cuadro 6.1) y coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.
- Modelo de Ogden, con los parámetros del cuadro 3.3 para la aorta sana.
- Modelo neohookeano con $c_1 = 169300 \text{ dyn/cm}^2$ (obtenido del cuadro 3.4).

En la figura 6.7 se muestra el número de iteraciones necesario para los tres modelos constitutivos y en el cuadro 6.2 se muestra el número medio de iteraciones para los análisis de interacción realizados.

Material	Número medio de iteraciones (LAD sana)	
	Modelo 3D - Modelo 1D	Fluido 3D - Sólido 3D
Elástico lineal	5.7	90.4
Ogden	6.2	96.7
Neohookeano	5.4	87.7

Cuadro 6.2: *Número medio de iteraciones en LAD sana.*

La diferencia en el número de iteraciones no es relevante, aunque es mayor con el material de Ogden. Es de destacar que el material neohookeano, aun siendo no lineal, haya necesitado menos iteraciones que el modelo elástico lineal para converger.

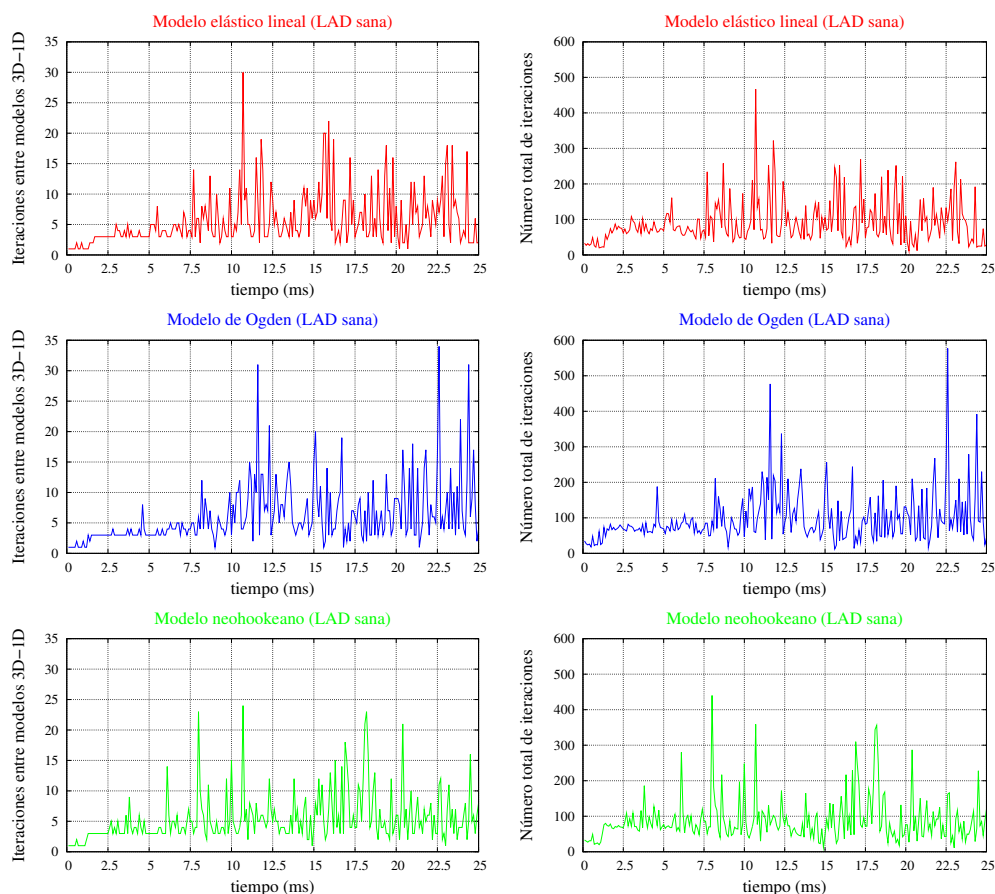


Figura 6.7: *Número de iteraciones en el cálculo de la LAD sana.*

Para obtener una medida de las deformaciones es ilustrativo comparar el desplazamiento medio de los nodos de la pared del extremo final (una vez depurados del movimiento de traslación de dicha sección). En la figura 6.8 se muestra el diámetro medio de la sección en función del tiempo para los tres materiales.

También en las deformaciones la diferencia es pequeña comparando los tres modelos de material. La deformación máxima es del 7.6% ($\lambda = 1.076$). Si se observan los valores del módulo de elasticidad tangente en el origen del cuadro 6.1 para la arteria sana, los tres valores se diferencian poco, obteniéndose en consecuencia resultados similares para los movimientos.

En la figura 6.9 se muestra cómo se transmite la onda de presión. Las deformaciones son similares en los tres materiales, representándose aquí los resultados con el modelo neo-hookeano.

La mayor parte de la onda se transmite al modelo 1D, aunque una parte (sobre el 20%) se refleja y da lugar a las presiones negativas observadas en la leyenda. La transmisión de la onda en el modelo 1D se muestra en la figura 6.10.

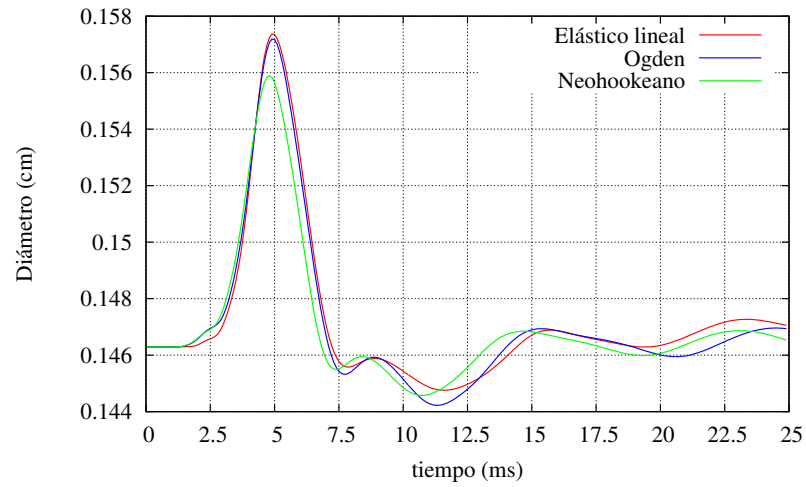
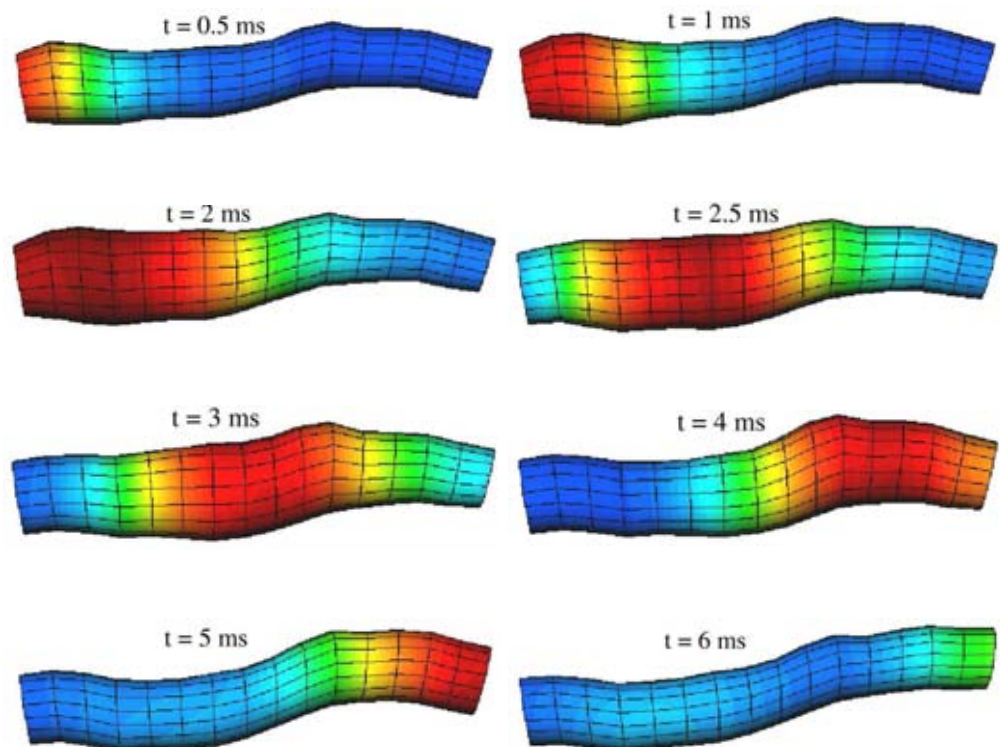


Figura 6.8: *Diámetro medio de la sección final de la LAD sana.*

La sección $s = 1.28$ cm (curva roja) es el extremo final de la arteria y el comienzo del modelo 1D, por lo que la figura 6.10 da continuidad a la figura 6.9 recogiendo los instantes posteriores. Observar que la presión negativa de la curva roja se corresponde con la presión negativa de la leyenda de la figura 6.9. El parámetro s representa la longitud de arco, que en la parte del modelo 3D es la longitud sobre la directriz.



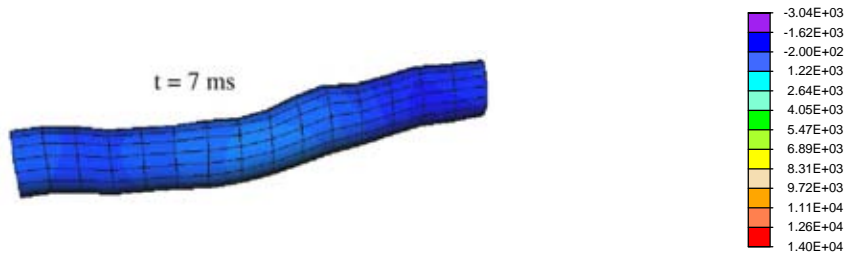


Figura 6.9: Contornos de presión (dyn/cm^2) en la LAD sana para material neohookeano. La deformación ha sido aumentada por 5.

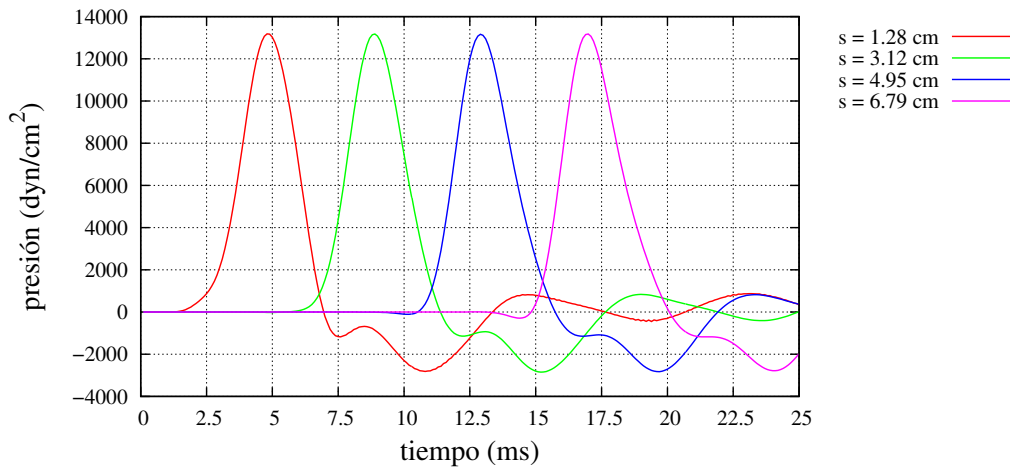


Figura 6.10: Presión en el modelo 1D acoplado a la LAD sana.

LAD sana. Simulación de un ciclo cardíaco

El objetivo de este análisis es simular un ciclo cardíaco completo, obteniéndose la tensión tangencial en la pared y las líneas de corriente a lo largo del mismo. Para captar el fenómeno de transmisión de onda debido a la elasticidad de la pared es necesario adoptar un paso de tiempo muy pequeño para el cálculo (típicamente $\Delta t = 10^{-4}$ s). Este paso de tiempo viene condicionado por una característica fisiológica, que es la velocidad de propagación de una onda de presión en las arterias, no siendo posible realizar el análisis de interacción con los medios de cálculo disponibles en el momento de realización de la tesis.

Por ello, aquí se prescinde del fenómeno de interacción y se adopta un paso de tiempo $\Delta t = 10^{-2}$ s. El despreciar la interacción disminuye enormemente el tiempo de cálculo, luego nos podemos permitir hacer una malla más fina. Concretamente, ahora utilizamos una malla de 9600 elementos de fluido que

da lugar a un modelo con 26550 ecuaciones.

Como partimos de condiciones iniciales de velocidad nula y éstas son irreales, es preciso hacer primero varios ciclos completos para eliminar este transitorio inicial. Aquí se han dado 4 ciclos seguidos de la curva de la figura 6.5, siendo los resultados que se muestran los del cuarto ciclo.

En la figura 6.11 se muestran los contornos de la tensión tangencial sobre la pared para el instante en que se producen los máximos valores de la misma. Dicho instante corresponde al del máximo caudal en la entrada ($t \approx 0.3$ s. en la figura 6.5).

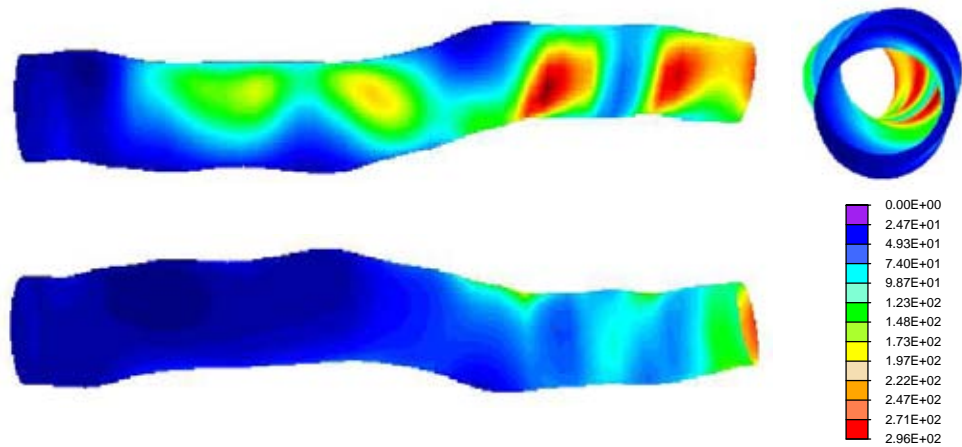


Figura 6.11: *Tensión tangencial (dyn/cm²) sobre la pared de la LAD sana.*

En la figura 6.12 se ha calculado la máxima tensión tangencial de toda la superficie de la arteria para cada instante de tiempo. Se observa que dicho valor máximo está en fase con el valor del caudal impuesto de la curva de la figura 6.5. También en dicha figura se muestra la tensión tangencial máxima que resulta de un cálculo en régimen estacionario imponiendo el caudal medio, que es $Q_{\text{med}} = 1.75 \text{ cm}^3/\text{s}$. Como se observa, es necesario considerar los efectos dinámicos, pues la relación entre el máximo valor de la tensión tangencial en régimen transitorio (296 dyn/cm^2) y el valor en régimen estacionario (107 dyn/cm^2) es mayor que la relación del caudal punta ($3 \text{ cm}^3/\text{s}$) y el caudal medio ($1.75 \text{ cm}^3/\text{s}$), y la extrapolación a partir de un cálculo en régimen estacionario estaría infravalorando el valor de la máxima tensión tangencial, ya que daría $(3/1.75) \cdot 107 = 183 < 296 \text{ dyn/cm}^2$.

Finalmente se muestran las líneas de corriente en las figuras 6.13 y 6.14, la primera en el instante cuando el caudal impuesto es máximo ($t \approx 0.3$ s) y la segunda en el instante posterior a cuando es nulo ($t = 0.01$ s). En ambas figuras se ha partido de los mismos puntos en la sección de entrada, así que se percibe claramente que cuando el caudal en la entrada es prácticamente nulo se producen torbellinos. Esto es, en el tramo de la curva descendente del caudal impuesto se forman torbellinos, que por otra parte es un fenómeno

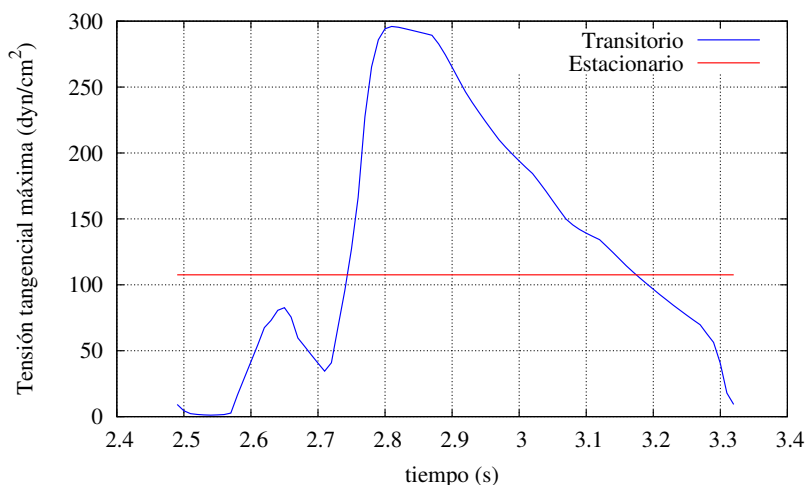


Figura 6.12: *Tensión tangencial máxima durante un ciclo cardíaco en la LAD sana.*

que cabía esperar debido a la geometría no regular y régimen transitorio del cálculo.

Observación. *Recordar que se ha hecho el cálculo a lo largo de varios ciclos y muestran los resultados del cuarto ciclo, luego los tiempos anteriores no son absolutos, sino relativos al cuarto ciclo.*

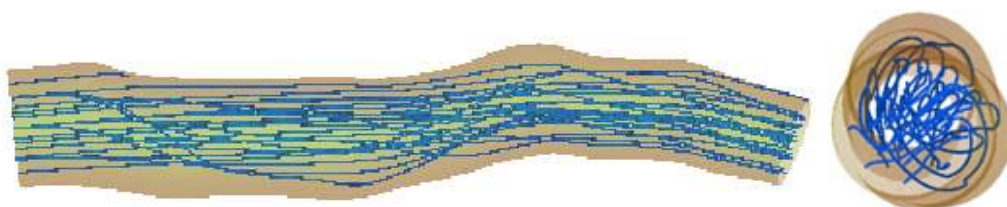


Figura 6.13: *Líneas de corriente en el instante de caudal máximo en la LAD sana.*

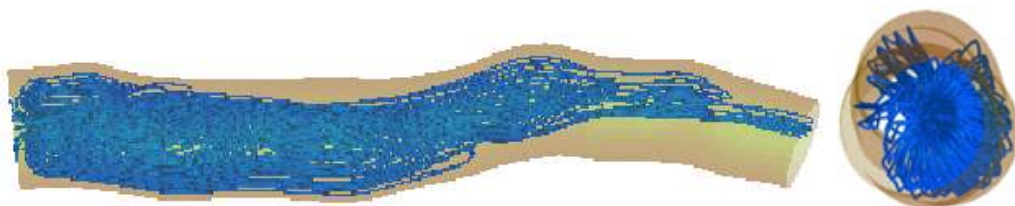


Figura 6.14: *Líneas de corriente en el instante de caudal casi nulo en la LAD sana.*

6.2.2. Arteria coronaria anterior descendente dañada

En este apartado estudiamos la misma arteria que en el ejemplo anterior, pero con una placa de ateroma muy desarrollada que obstruye más del 50 % de la sección. La longitud es también de 1.28 cm.

Las mallas de esta arteria han sido generadas por el Grupo de Informática Gráfica Avanzada de la Universidad de Zaragoza utilizando la metodología descrita en SERÓN ET AL. [2001b]. La malla más gruesa se ha utilizado en los análisis con interacción y la malla más fina para simular el pulso cardíaco despreciando la interacción.

LAD dañada. Transmisión del pulso de presión

En la figura 6.15 se pueden ver las mallas utilizadas, con 872 elementos para el lumen y 912 elementos para la pared arterial incluyendo la placa de ateroma.



Figura 6.15: *Interacción en la LAD dañada. Malla del fluido (en azul) y del sólido (en marrón).*

También aquí se hace el cálculo con tres modelos para la pared arterial con los parámetros obtenidos para la arteria dañada en el apartado 3.4, esto es:

- Modelo elástico lineal con módulo de elasticidad $E = 3169400 \text{ dyn/cm}^2$ (cuadro 6.1) y coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.
- Modelo de Ogden con los parámetros del cuadro 3.3 para la aorta dañada.
- Modelo neohookeano con $c_1 = 837100 \text{ dyn/cm}^2$ (obtenido del cuadro 3.4).

En la figura 6.16 se puede observar el número de iteraciones resultante para los tres materiales.

En el cuadro 6.3 se muestra el número medio de iteraciones. Cabe destacar que ahora el número de iteraciones entre los modelos 3D y 1D es menor que en el caso de la arteria sana (cuadro 6.2). Esto es debido a que la arteria

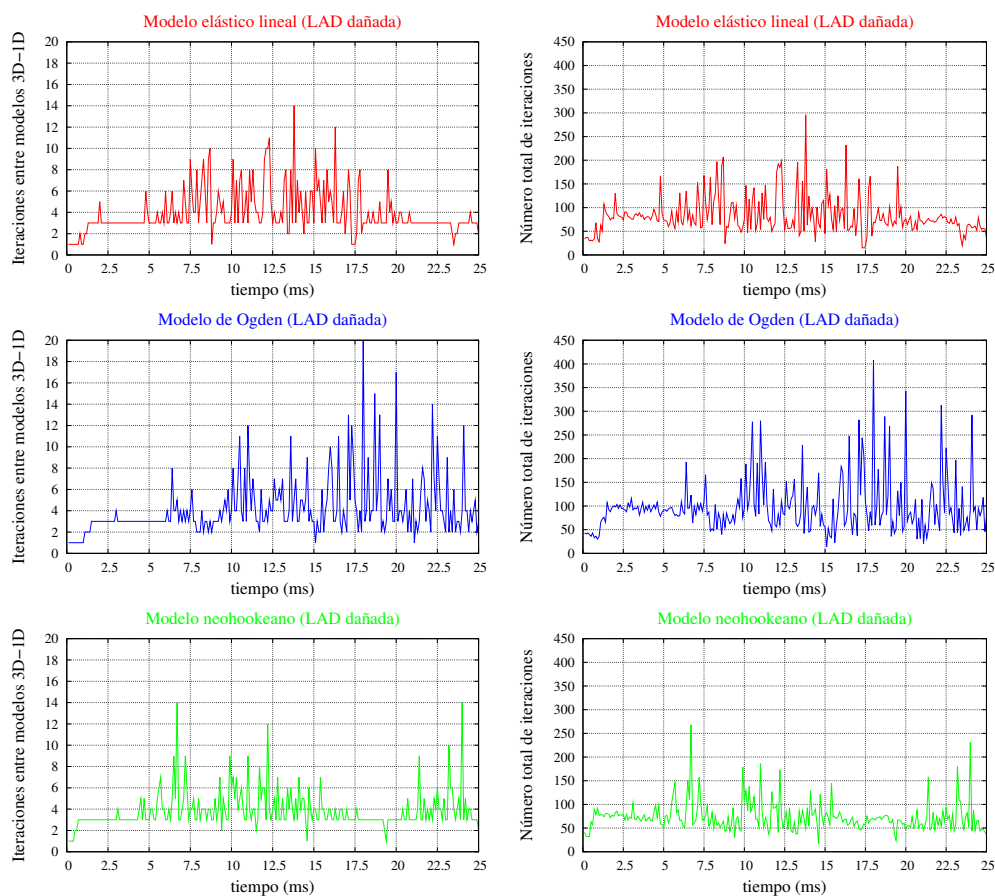


Figura 6.16: Número de iteraciones en el cálculo de la LAD dañada.

con la placa de ateroma es más rígida que la arteria sana, por lo que el desplazamiento de la pared es menor y por tanto es más rápido conseguir la convergencia.

Material	Número medio de iteraciones (LAD dañada)	
	Modelo 3D - Modelo 1D	Fluido 3D - Sólido 3D
Elástico lineal	3.9	82.5
Ogden	4.2	97.2
Neohookeano	3.9	73.6

Cuadro 6.3: Número medio de iteraciones en la LAD dañada.

El mayor número de iteraciones resulta con el material de Ogden.

Comparemos ahora la deformación de la sección final calculando su diámetro medio. En la figura 6.17 se muestra dicho diámetro en función del tiempo para los tres materiales.

Para analizar la figura 6.17 es conveniente tener en cuenta los valores

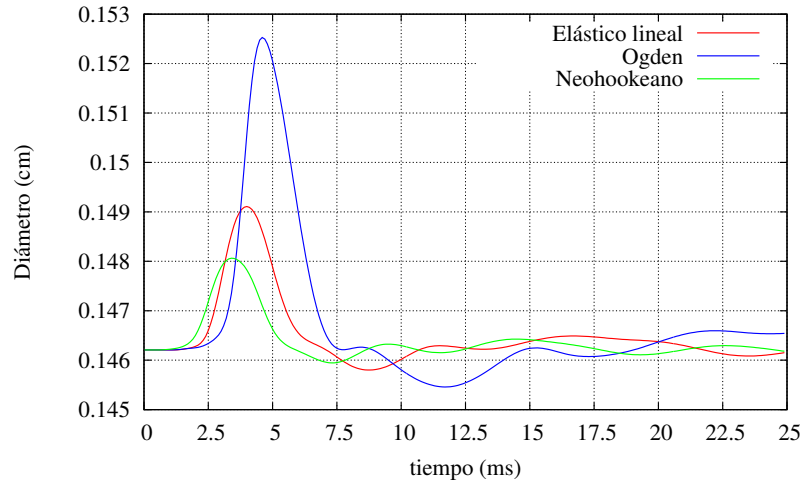
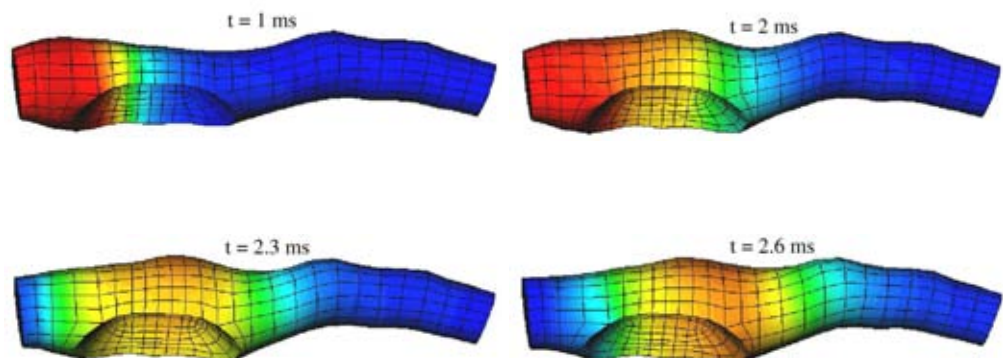


Figura 6.17: *Diámetro medio de la sección final de la LAD dañada.*

del módulo de elasticidad en el origen del cuadro 6.1 para la arteria dañada (ver también figura 3.15). Del cálculo resulta que utilizando el material de Ogden se alcanzan mayores deformaciones y la onda de presión se propaga más lentamente. El siguiente con mayor deformación es el modelo elástico lineal y por último el neohookeano. Esto está en consonancia con los valores del módulo de elasticidad tangente en el citado cuadro, ya que $E_{\text{ogden}} < E_{\text{expe}} < E_{\text{neoh}}$. Esto es, cuanto más flexible, mayores deformaciones y una menor velocidad de propagación de la onda de presión.

No obstante, esto sucede porque las deformaciones no son elevadas (la máxima deformación en la sección final es un 4.3% ó $\lambda = 1.043$ en el material de Ogden), ya que el material de Ogden se rigidiza para rangos mayores de deformación (ver figura 3.15) y se produciría una mayor velocidad de transmisión de la onda.

A continuación en la figura 6.18 se muestra la transmisión de la onda de presión para el caso de material de Ogden. En dicha figura se representa únicamente la malla del fluido para resaltar el estrechamiento por la placa de ateroma.



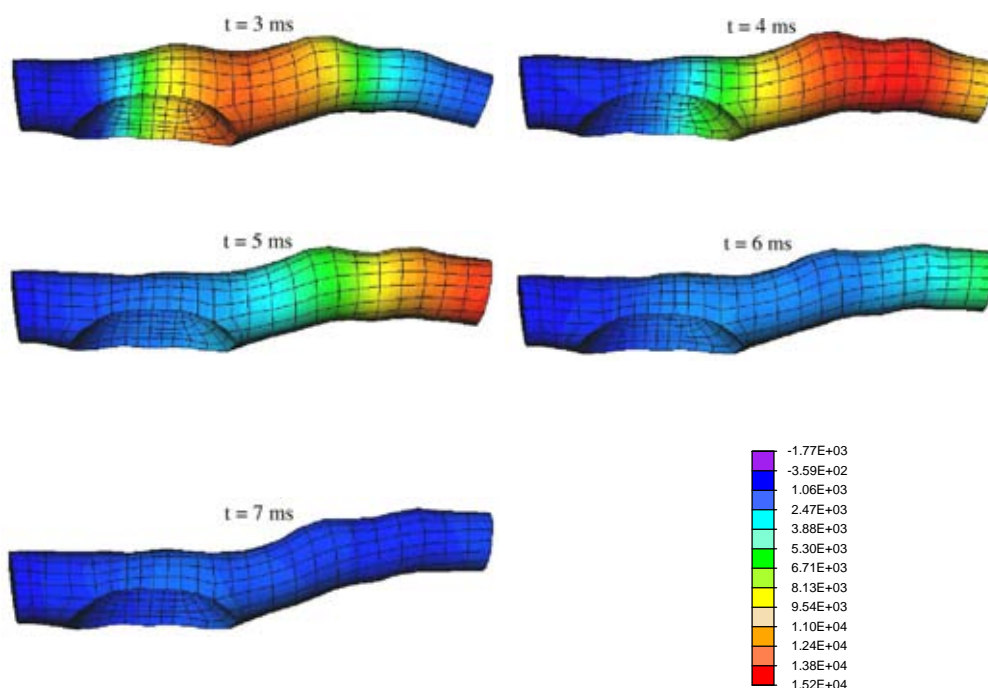


Figura 6.18: Contornos de presión en la LAD dañada para material de Ogden. La deformación ha sido aumentada por 5.

Se observa que casi la totalidad de la onda de presión se transmite al modelo 1D, aunque una pequeña parte se refleja (poco más del 10%). La continuidad de la onda de presión se muestra en la figura 6.19, donde la curva denotada con $s = 1.28$ cm (roja) representa la sección de interacción entre los modelos 3D y 1D. Notar en dicha curva el valor negativo alcanzado, que coincide con el de la leyenda de la figura 6.18.

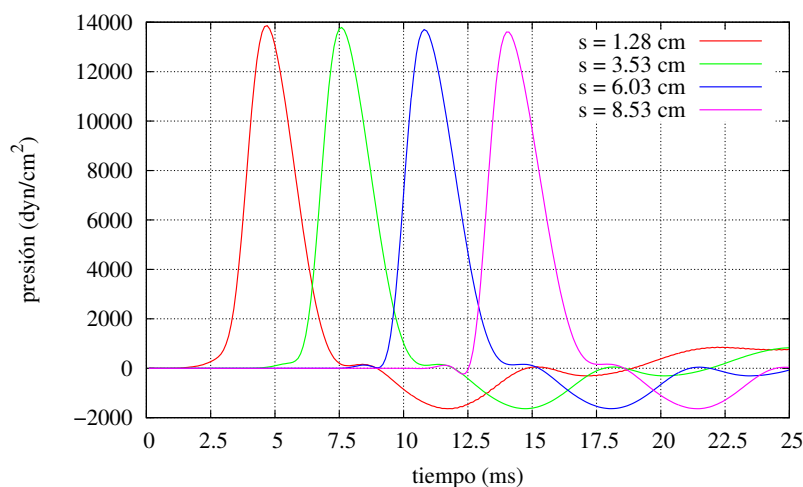


Figura 6.19: Presión en el modelo 1D acoplado a la LAD dañada.

LAD dañada. Simulación de un ciclo cardíaco

Al igual que para la arteria sana y por los motivos allí descritos, se dan 4 ciclos de la curva de la figura 6.5 y los resultados que se muestran son también los del cuarto ciclo. La malla utilizada tiene 13440 elementos originando un modelo con 35739 ecuaciones.

En la figura 6.20 se representan los contornos de la tensión tangencial sobre la pared en el instante de máximo caudal impuesto. En la misma figura se muestran dos perspectivas y la zona de la placa de ateroma aislada. Como cabía esperar, la tensión tangencial es elevada en la superficie de la placa, disminuyendo de forma considerable en la zona inmediatamente posterior a ésta.

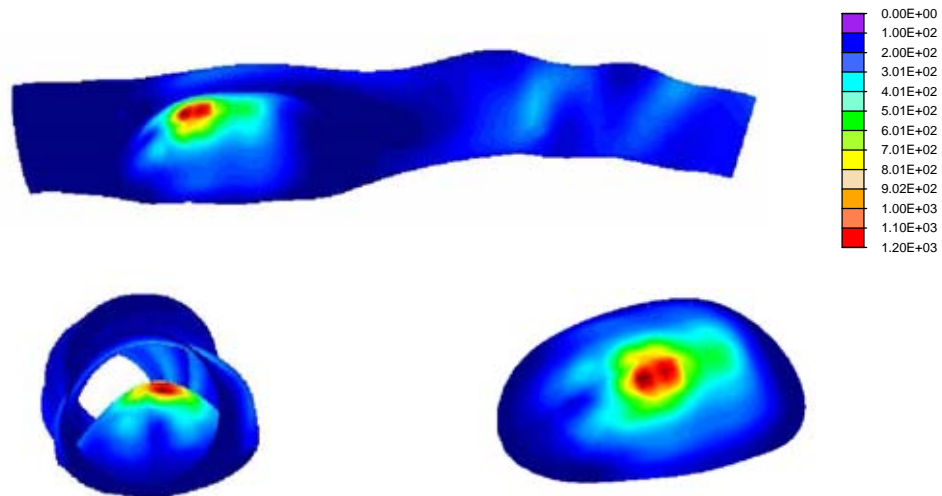


Figura 6.20: *Tensión tangencial (dyn/cm^2) sobre la pared de la LAD dañada.*

La curva de la figura 6.21 muestra la máxima tensión tangencial sobre la pared en cada instante. Al igual que pasaba con el caso de la arteria sana este valor está en fase con la curva 6.5. Si se comparan las figuras 6.12 y 6.21, el valor tan elevado de la tensión tangencial en esta última es únicamente debido a la placa. También se muestra aquí el valor de la tensión tangencial máxima que resulta de un cálculo en régimen estacionario con el caudal medio.

Por último, en las figuras 6.22 y 6.22 se han dibujado las líneas de corriente en dos instantes críticos (el primero con caudal máximo impuesto y el otro con caudal prácticamente nulo). Cuando el caudal es mínimo llama la atención que los torbellinos formados son relativamente grandes. Obsérvese la gran similitud con el caso analizado en el apartado 2.4.2, donde ahora la placa de ateroma hace las veces de escalón.

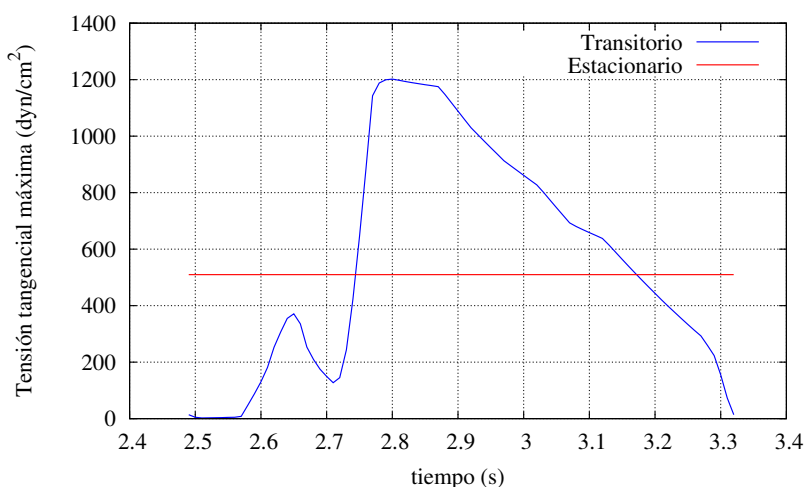


Figura 6.21: *Tensión tangencial máxima durante un ciclo cardíaco en la LAD dañada.*

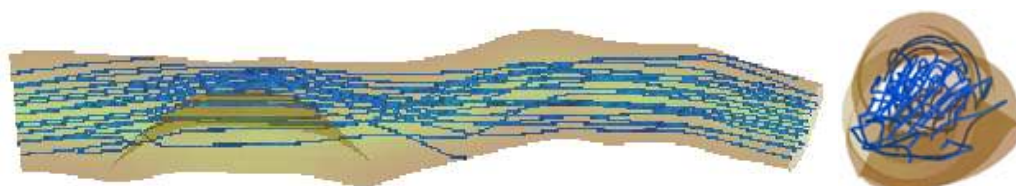


Figura 6.22: *Líneas de corriente en el instante de caudal máximo en la LAD dañada.*

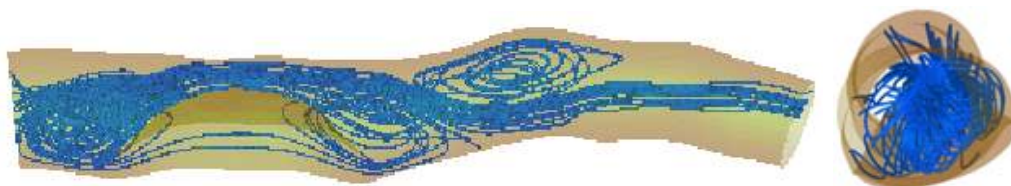


Figura 6.23: *Líneas de corriente en el instante de caudal casi nulo en la LAD dañada.*

6.2.3. Bifurcación en la arteria anterior descendente y la arteria circunfleja

El modelo de elementos finitos comienza en el tronco de la arteria coronaria izquierda a los pocos milímetros de su unión con la base de la arteria aorta (ver figura 6.3). La longitud del tronco es de 0.56 cm. hasta el comienzo de la bifurcación. A partir del punto de bifurcación, la longitud de la LAD es 1.3 cm. y la de la LCX es 1.54 cm, ambas medidas a partir de su base.

Bifurcación. Transmisión del pulso de presión

La figura 6.24 muestra la malla utilizada para el problema de interacción, con 932 elementos para el lumen y 428 elementos para la pared arterial.

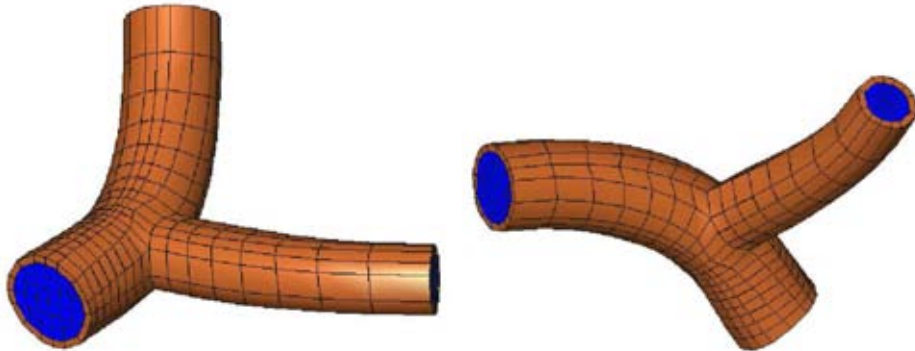


Figura 6.24: *Interacción en la bifurcación. Malla del fluido (en azul) y del sólido (en marrón).*

Los parámetros de los modelos de los materiales son los mismos que para el caso de la arteria sana (apartado 6.2.1).

El número de pasos de tiempo para el cálculo de la bifurcación es menor que en los dos casos anteriores para la LAD. Sucede que cuando la onda de presión llega al extremo del tramo de la LAD, el acoplamiento de los modelos 3D y 1D deja de converger. Esto sucede a los 12.1 ms para el modelo elástico lineal, a los 11.1 ms para el material de Ogden y a los 11.8 ms para el neohookeano.

La falta de convergencia se debe a que se ha impuesto un campo de presión uniforme en el modelo 3D al final del tramo de la LAD. Como ésta tiene una importante curvatura, el imponer una presión uniforme no es realista ya que en los tubos con curvatura la distribución de la presión en una sección transversal no es uniforme (WATERS Y PEDLEY [1999]). En un futuro sería interesante mejorar la forma de distribuir la presión en los extremos con curvatura.

En la figura 6.25 se observa el número de iteraciones y también el tiempo al que llega cada cálculo hasta que deja de converger.

Según se aprecia en la figura 6.4 el número medio de iteraciones entre los modelos 3D y 1D es ahora superior a los casos con la arteria LAD sola, mientras que el número de iteraciones entre los modelos 3D y 1D es similar.

En las figuras 6.26 y 6.27 se muestra el diámetro de las secciones finales de la LAD y LCX en la bifurcación respectivamente. Como se observa, en la LCX la curva es análoga a los casos de los dos apartados anteriores, mientras que en la LAD la curva tiene más irregularidades. Esto último es debido a la imposición de una presión uniforme en una sección con curvatura elevada.

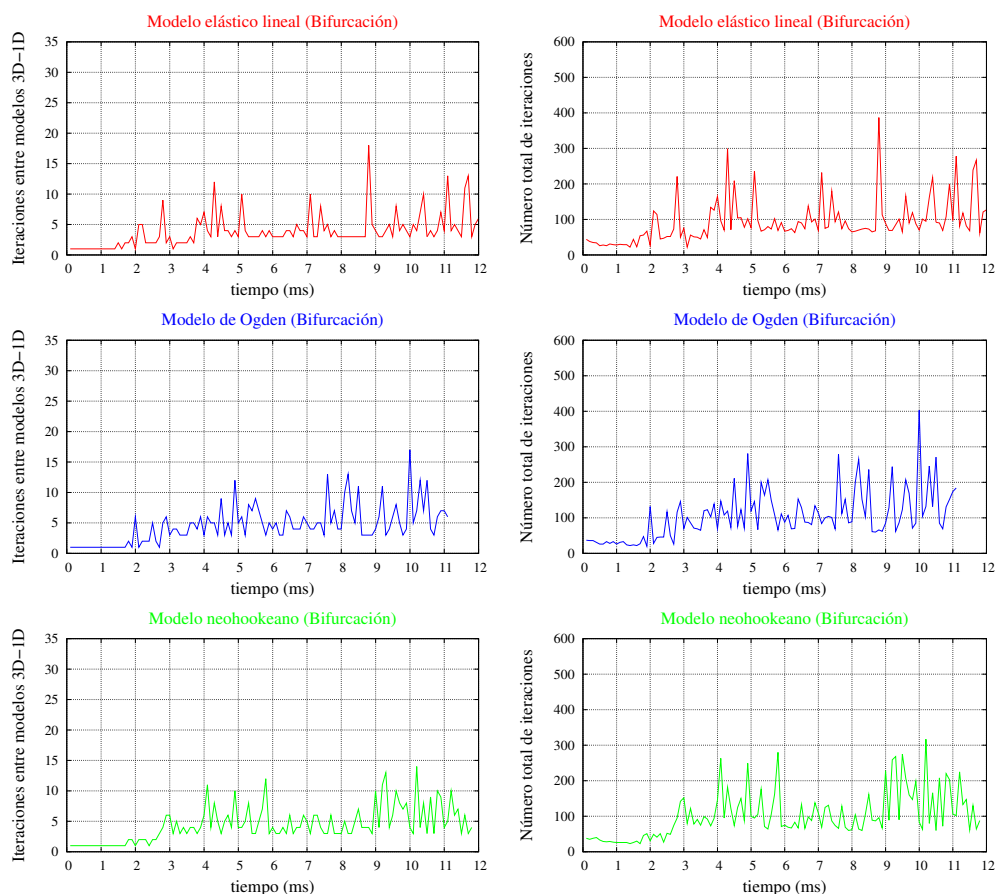


Figura 6.25: *Número de iteraciones en el cálculo de la bifurcación.*

Material	Número medio de iteraciones (bifurcación)	
	Modelo 3D - Modelo 1D	Fluido 3D - Sólido 3D
Elástico lineal	3.9	92.4
Ogden	4.6	105.6
Neohookeano	4.4	102.0

Cuadro 6.4: *Número medio de iteraciones en la bifurcación.*

Para el material de Ogden, la deformación máxima en la sección final de la LAD es un 5.8% ó $\lambda = 1.058$ y en la sección final de la LCX es un 3.4% ó $\lambda = 1.034$, valores deducidos de las figuras 6.26 y 6.27.

A continuación en la figura 6.28 se muestra la transmisión de la onda de presión para el caso de material de Ogden, llegando hasta los 11 ms. Después de ese tiempo el método deja de converger. Como ya se ha comentado, la razón es que la distribución de presión uniforme no es adecuada en este caso.

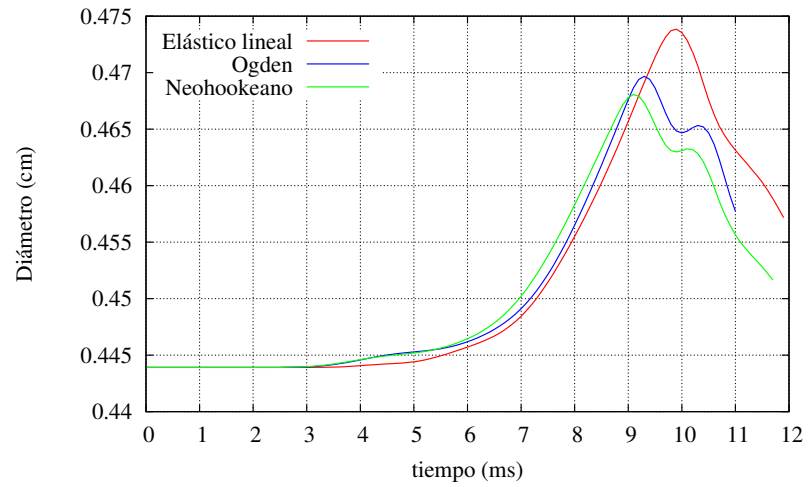


Figura 6.26: *Diámetro medio de la sección final de la LAD en la bifurcación.*

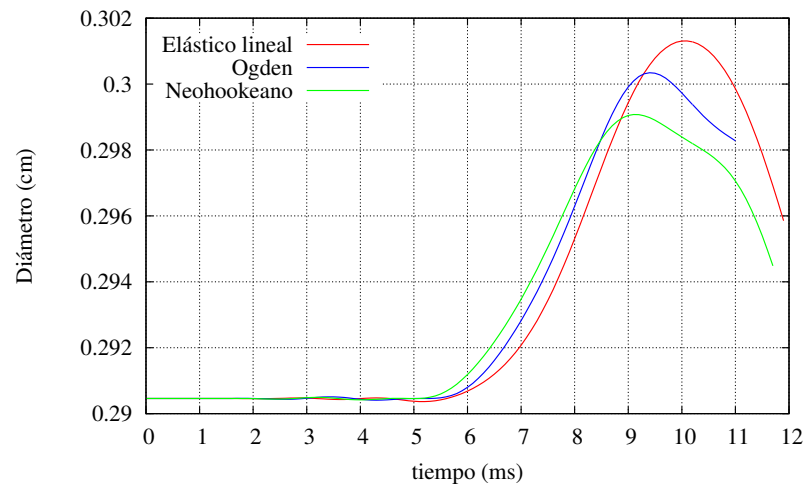
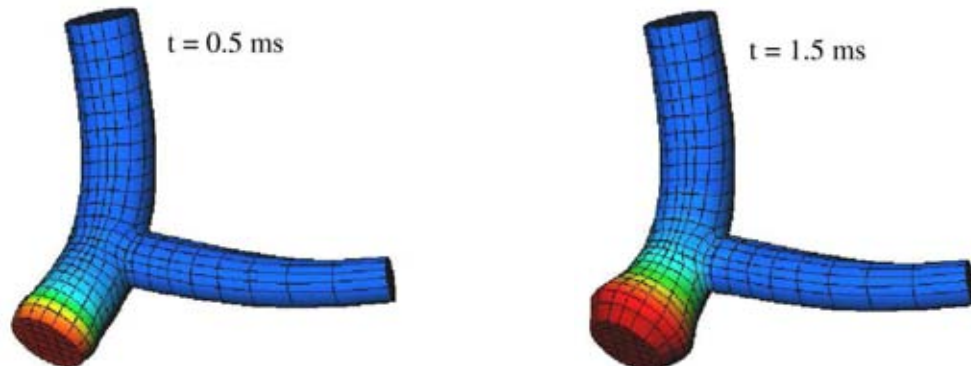
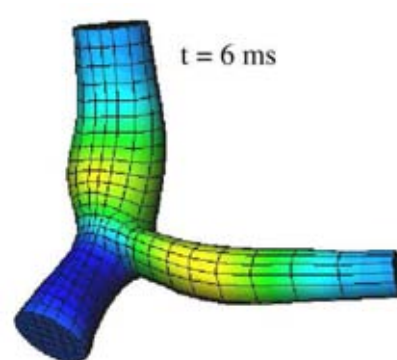
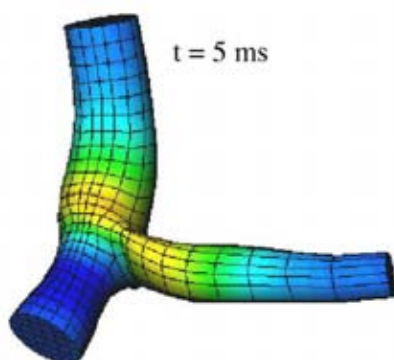
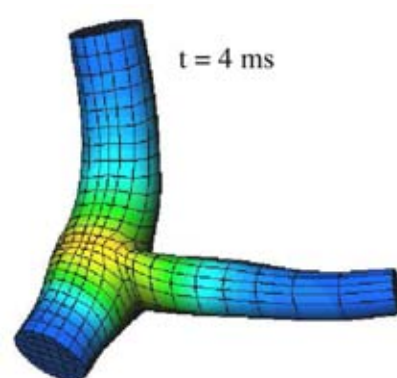
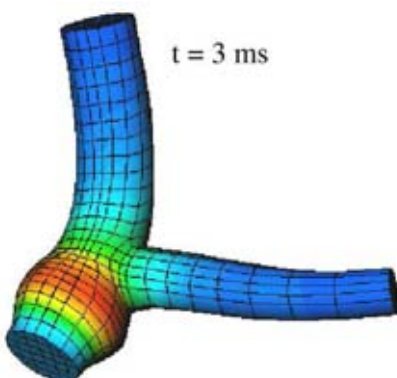
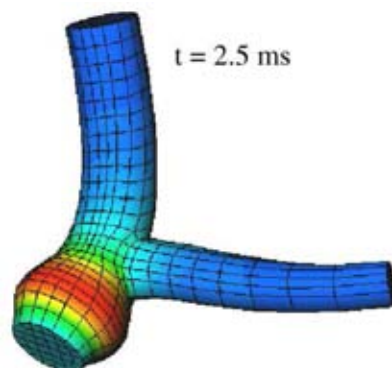
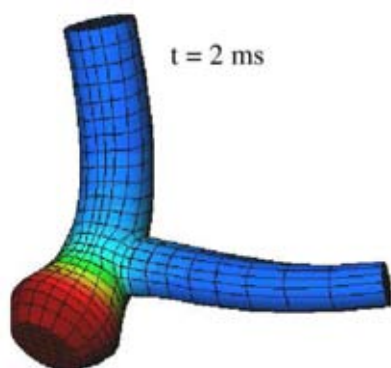


Figura 6.27: *Diámetro medio de la sección final de la LCX en la bifurcación.*





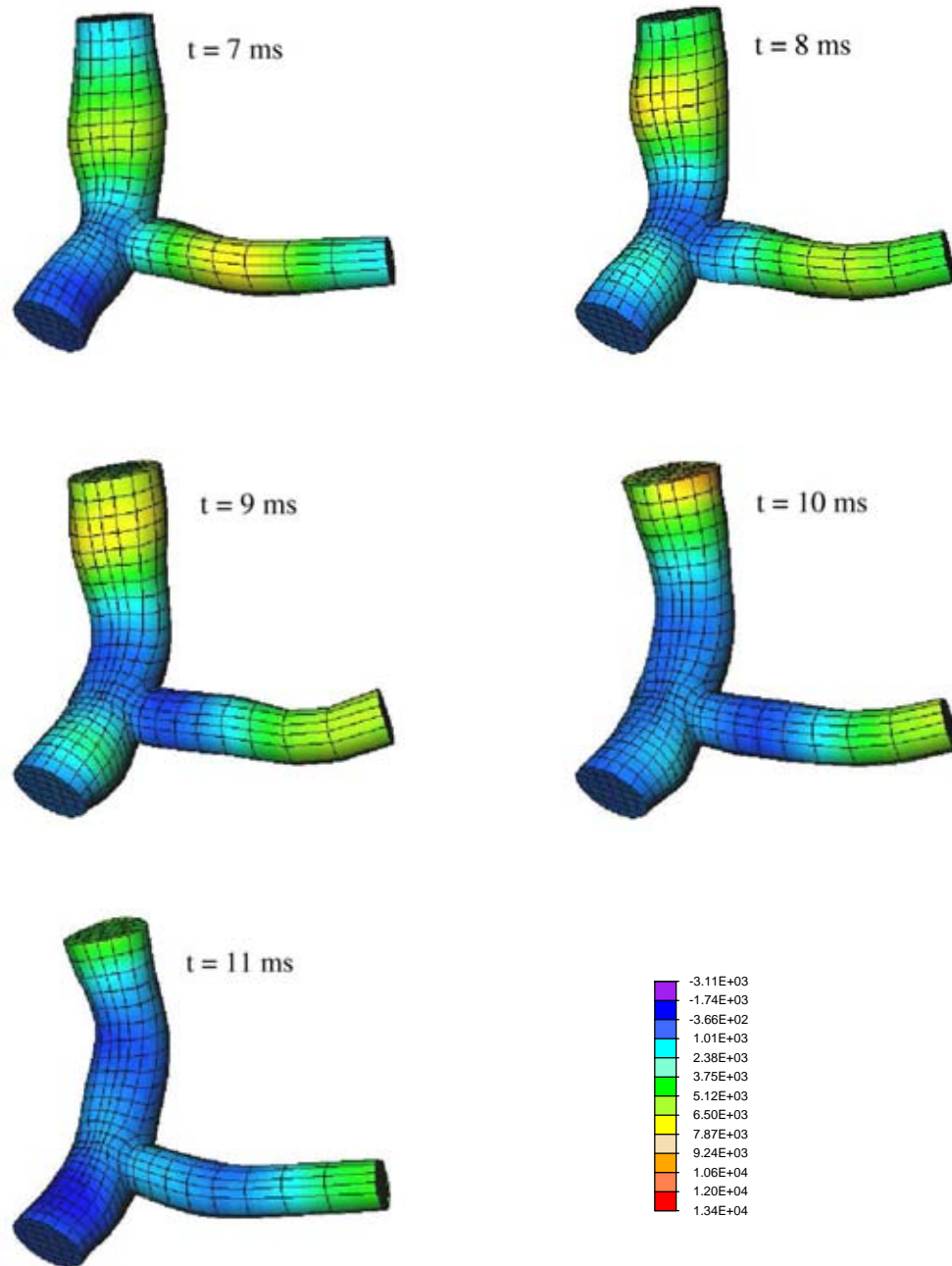


Figura 6.28: *Contornos de presión en la bifurcación para material de Ogden. La deformación ha sido aumentada por 5.*

Cuando la onda de presión llega al nudo de la bifurcación se produce una reflexión. Esto se ve en los instantes 5 y 6 ms de la figura 6.28 por el color azul oscuro (presión negativa) en el tronco.

La deformación producida es relativamente elevada, ya que tan sólo se ha hecho un aumento de 5 y el movimiento de la arteria se aprecia con toda claridad.

En las figuras 6.29 y 6.30 se muestra el movimiento de la onda de presión en los modelos 1D. Se indica ahora con el parámetro s_{lad} la longitud sobre la LAD y con s_{lcx} la longitud sobre la LCX. El final del tramo de la LAD corresponde a $s_{lad} = 1.86$ cm (esto es, 0.56 del tronco y 1.3 de la LAD) y el final de la LCX $s_{lcx} = 2.1$ cm (0.56 del tronco y 1.54 de la LCX).

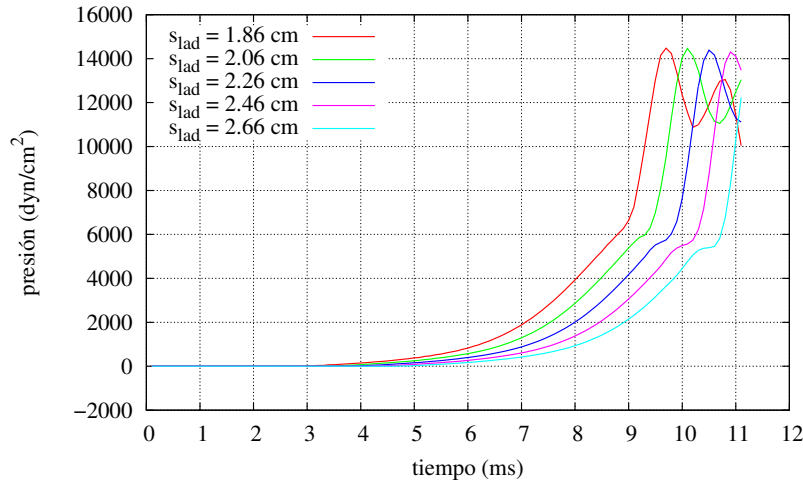


Figura 6.29: *Presión en el modelo 1D acoplado a la LAD en la bifurcación.*

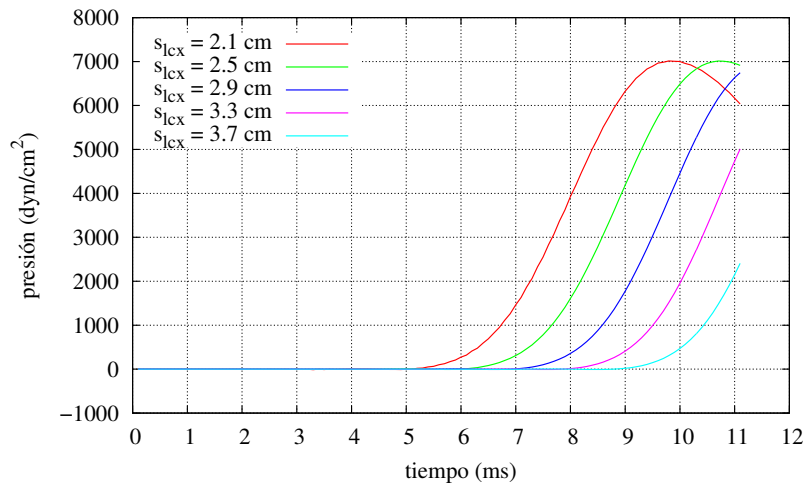


Figura 6.30: *Presión en el modelo 1D acoplado a la LCX en la bifurcación.*

Obsérvese que en la curva $s_{lad} = 1.86$ cm se produce una oscilación de la presión, mientras que en la curva $s_{lcx} = 2.1$ cm la presión se transmite limpiamente. El motivo es el que ya se ha comentado: la curvatura de la LCX es pequeña mientras que la de la LAD es relativamente elevada, lo cual afecta a la uniformidad o no uniformidad de la distribución de presiones respectivamente. Esto se puede apreciar en la figura 6.31, donde se ha tomado

el instante $t = 8$ ms. de la figura 6.28 y se han hecho dos cortes transversales, uno en la LAD y otro en la LCX, mostrando la distribución de presiones en las secciones de los cortes.

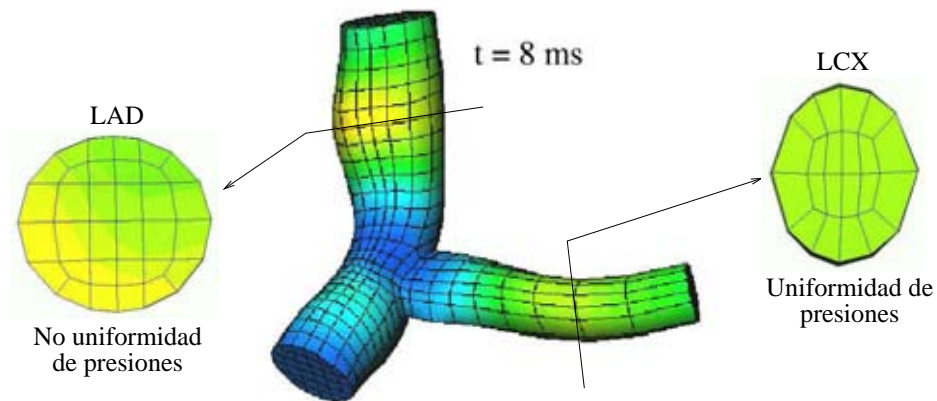


Figura 6.31: *Distribución de presiones en la LAD y en la LCX en dos secciones transversales.*

Bifurcación. Simulación de un ciclo cardíaco

De forma similar a los dos casos ya analizados, se hace el cálculo de 4 ciclos y se muestran los resultados del último, cuando ya se ha alcanzado prácticamente el régimen permanente. El número de elementos de la malla es 11576 dando lugar a un modelo con 31350 ecuaciones.

En la figura 6.32 se observan los contornos de la tensión tangencial en el instante en que dicha tensión es máxima, donde cabe comentar que la zona de más baja tensión es el nudo de la bifurcación (color azul oscuro).

Este resultado es un punto a favor de la hipótesis que el desarrollo de las placas de ateroma y la baja tensión tangencial están relacionadas, ya que experimentalmente se ha observado que las zonas de bifurcaciones de las coronarias son zonas de mayor propensión a la formación de placas de ateroma.

El valor de la tensión tangencial es globalmente menor que para el caso de la LAD sana. Esto es debido a que la geometría de la LAD sana es exacta mientras que la de la bifurcación es una aproximación. En la LAD sana los efectos de las curvaturas locales son los que provocan dos zonas de alta tensión tangencial, mientras que en la bifurcación la geometría aproximada es más suave, por lo que no se han captado las singularidades en la tensión tangencial que realmente existen.

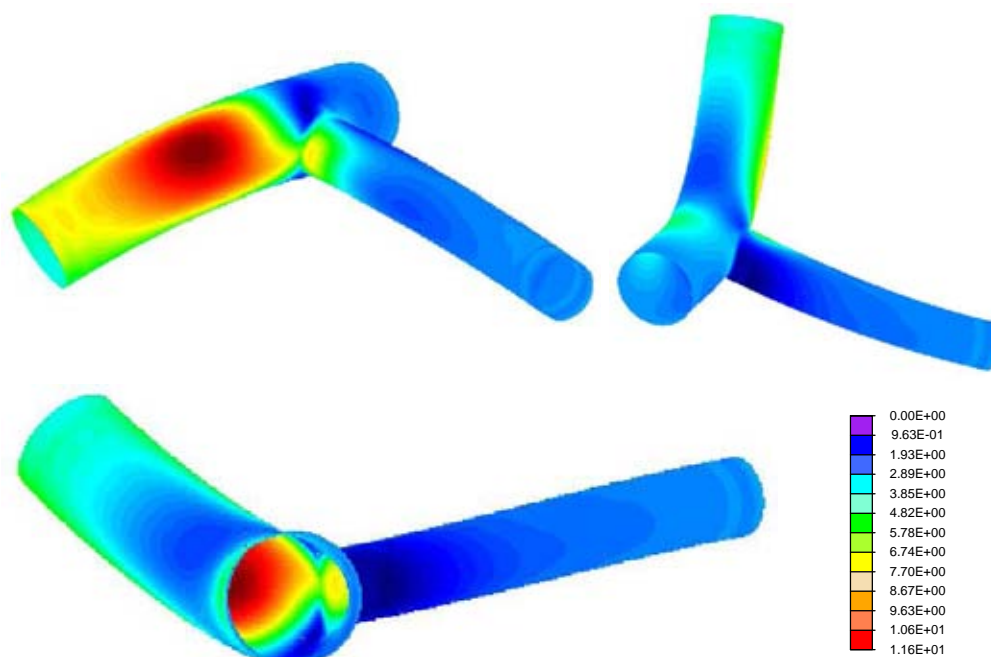


Figura 6.32: *Tensión tangencial (dyn/cm^2) sobre la pared de la bifurcación.*

El instante en que la tensión tangencial es máxima ($t = 2.91$ s) no coincide ahora con el instante en que el caudal impuesto es máximo ($t = 2.8$ s), luego la curva de la figura 6.33 no está en fase con la de la figura 6.5. En la figura 6.33 se muestran los valores de la máxima tensión tangencial. Cuando el caudal impuesto es nulo aparece una tensión relativamente elevada si la comparamos con los dos ejemplos anteriores. Esto es así porque se produce una circulación interior desde la LCX hacia la LAD, cosa que se ve claramente en la figura 6.35.

En las figuras 6.34 y 6.35 se han dibujado las líneas de corriente. Para el instante en que el caudal es máximo no se forman torbellinos, salvo en una pequeña zona del nudo de la bifurcación. En cambio, para el caudal mínimo, aparte de producirse torbellinos en la LAD y una circulación secundaria ⁴ también aparece una circulación interior desde la LCX hacia la LAD. En la figura 6.35 se observa dicha circulación interior por las líneas de corriente que parten desde el extremo final de la LCX y terminan en el extremo final de la LAD.

⁴La circulación secundaria hace referencia a la componente de la velocidad en el plano transversal a la directriz, que da lugar a un movimiento helicoidal.

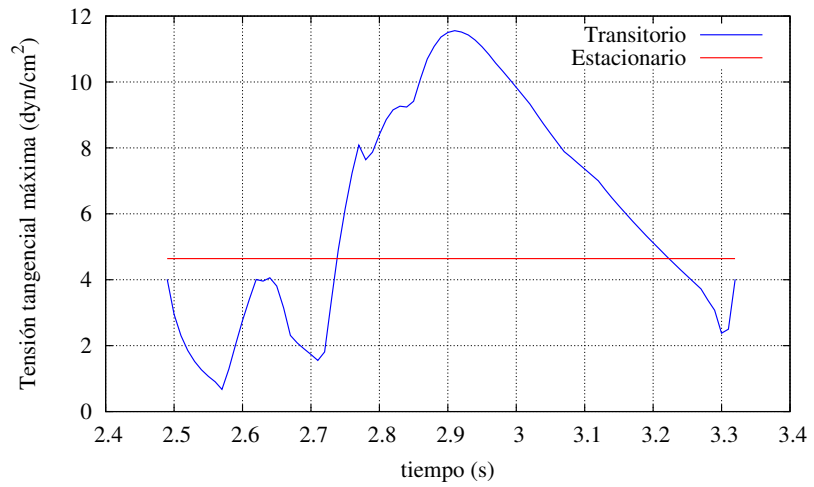


Figura 6.33: *Tensión tangencial máxima durante un ciclo cardíaco en la bifurcación.*

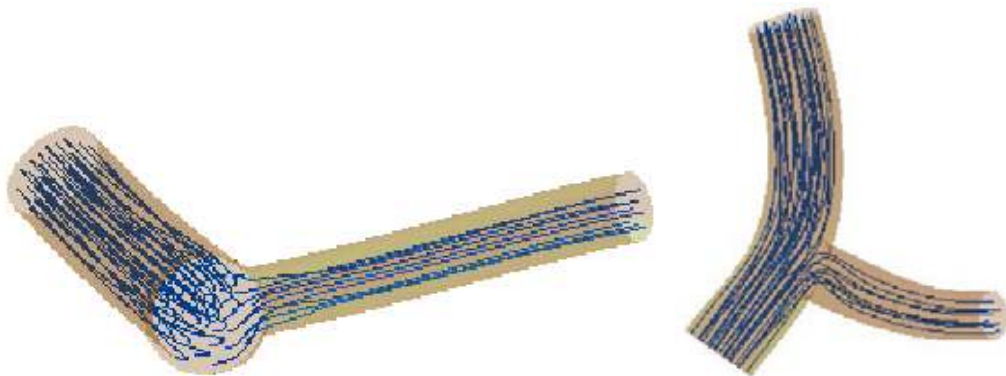


Figura 6.34: *Líneas de corriente en el instante de caudal máximo en la bifurcación.*

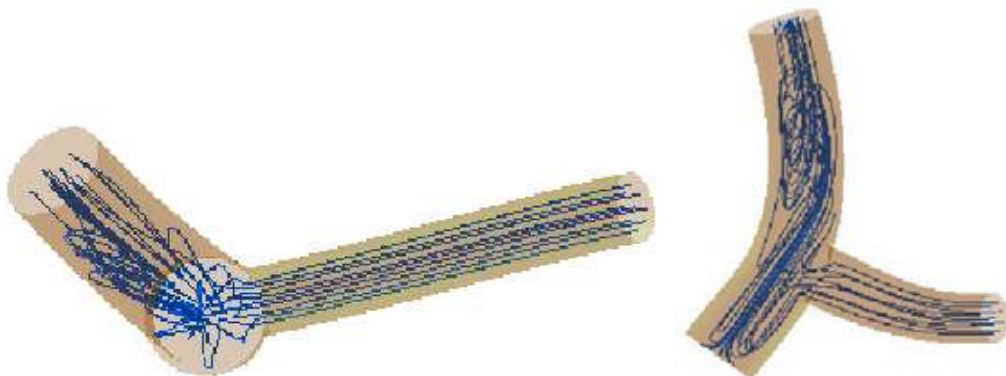


Figura 6.35: *Líneas de corriente en el instante de caudal casi nulo en la bifurcación.*

Capítulo 7

Conclusiones y líneas futuras de investigación

7.1. Resumen del trabajo realizado

El objetivo fundamental de esta tesis es el análisis y desarrollo de modelos para la simulación realista del flujo sanguíneo y su interacción con la pared arterial. Para ello se ha implementado el elemento de fluido $Q1/P0$ en el código de elementos finitos FEAP para 2D, 3D y flujo axilsimétrico. En dicho elemento ha sido estabilizado el campo de presiones y se ha añadido otro elemento con estabilización de la velocidad para utilizar en problemas con números de Reynolds elevados.

Se han obtenido parámetros realistas de los modelos de Ogden y neohookeano a partir de curvas experimentales para utilizar en los modelos de la pared arterial, habiéndose validado el elemento de FEAP con ejemplos con solución analítica y usando los parámetros obtenidos.

Se han programado las instrucciones para resolver problemas tridimensionales de interacción fluido-estructura (programa `inter3D`). Se utiliza el método de *Block-Gauss-Seidel*, que es un método particionado con acoplamiento fuerte. Las instrucciones son un conjunto de órdenes (bucles, llamadas a programas, condicionales, etc...) en el intérprete de comandos *bash* de Linux. En las llamadas a programas está incluida la ejecución del programa FEAP para el fluido, el sólido y la malla.

Englobando el algoritmo anterior se ha elaborado el programa `interbio`, el cual resuelve el problema de las condiciones de contorno absorbentes mediante el acoplamiento del modelo 3D de un trozo de arteria real con un modelo unidimensional. Este modelo 1D da continuidad al fenómeno de interacción evitando la reflexión de las ondas de presión. El programa `interbio` consiste también en órdenes en la *bash*, y el programa `inter3D` se ejecuta dentro de este nuevo algoritmo.

Finalmente se ha aplicado el programa anterior a tres arterias coronarias con geometrías realistas. Las mallas de hexaedros para la LAD sana y

para la bifurcación se han hecho con un *software* propio. Se ha simulado la transmisión de un pulso de presión utilizando modelos de interacción. Adicionalmente se ha hecho la simulación de un ciclo cardíaco completo con una curva de caudal realista para calcular la tensión tangencial en la pared.

Como trabajo adicional y complementario a los programas de interacción cabe destacar lo siguiente:

- a) Desarrollo de un generador de mallas 2D de cuadriláteros. La originalidad de este mallador está en que se consiguen mallas de alta calidad al lograr que la distorsión de los cuadriláteros sea muy pequeña. Este mallador se extiende a 3D para mallar arterias con hexaedros, y en particular se ha hecho un programa específico para poder mallar bifurcaciones.
- b) Desarrollo de un programa 2D/3D para calcular líneas de corriente y las trayectorias de las partículas a partir de las velocidades nodales, incluyendo animaciones con las partículas en movimiento. Este programa es también aplicable a dominios de fluido con contornos móviles.

7.2. Conclusiones

Las conclusiones de este trabajo se van a desglosar en diferentes apartados. Aunque a lo largo del trabajo se han ido insertando comentarios sobre los resultados, aquí se sintetizan todos ellos también a modo de resumen.

Modelos constitutivos en hemodinámica

- a) Los modelos hiperelásticos se ajustan razonablemente al comportamiento de los materiales biológicos. Tanto la sangre como la pared arterial han de considerarse incompresibles por el gran contenido de agua.
- b) Se han utilizado datos experimentales de arterias reales que proporcionan la curva tensión-deformación. El modelo de Ogden ha respondido bien a dichos datos en todo el rango de deformaciones, mientras que el neohookeano se ajusta bien en un rango más restringido.

Métodos numéricos y condición de incompresibilidad

- a) El elemento Q1/P0 de fluido es barato y el campo de presión se puede despejar a nivel de elemento, pero no cumple la condición LBB. Utilizando el método del factor de penalización se ha comprobado que se cumple bien la condición de incompresibilidad con valores del factor entre $\lambda = 10^6 - 10^8$.
- b) Para números de Reynolds elevados se produce una inestabilidad en el campo de velocidades. Se utiliza el método SUPG para la estabilización.

Para condiciones fisiológicas normales los números de Reynolds son relativamente bajos y no se produce este problema, pero en situaciones fisiológicas extraordinarias (deporte, esfuerzos elevados) los números de Reynolds son tales que sí se precisa de estabilización.

- c) La formulación de las ecuaciones del sólido admite una forma variacional. El principio variacional de *Simó-Taylor-Pister* utiliza tres campos incógnita para tratar el problema de la incompresibilidad, aunque los dos campos añadidos se pueden despejar a nivel de elemento.
- d) Para material de Ogden y con los parámetros realistas obtenidos de los experimentos se ha comprobado que con un módulo volumétrico entre $\kappa = 10^7 - 10^9$ se satisface muy bien la condición de incompresibilidad.

Interacción sangre-pared arterial

Métodos de interacción

- a) El movimiento del sólido hace que el contorno del fluido no sea fijo. La formulación ALE resuelve el problema del fluido con contornos móviles.
- b) Los métodos particionados con acoplamiento débil son los más baratos computacionalmente pero no funcionan en hemodinámica debido a que las densidades de la sangre y la pared arterial son similares.
- c) Los métodos monolíticos usando el método de *Newton-Raphson* son los más eficientes, pero en el caso de la hemodinámica su implementación es muy compleja y actualmente sólo existen resultados para modelos elásticos lineales de la pared arterial.
- d) El método particionado con acoplamiento fuerte desarrollado da buenos resultados. La utilización del método de Aitken rebaja enormemente el número de iteraciones necesario respecto a métodos que usan un parámetro de relajación constante.

Modelos de interacción en hemodinámica

- a) El número de vasos sanguíneos es muy elevado, pero el fenómeno de interacción con el flujo sanguíneo se produce únicamente en las arterias elásticas, que son las de mayor diámetro.
- b) Los modelos de una arteria o un conjunto de arterias precisan de condiciones de contorno artificiales.
- c) En el extremo inicial se puede imponer un pulso de presión o un determinado caudal, pero en el extremo final se desea imponer condiciones absorbentes para que la onda de presión abandone el dominio.

- d) Un modelo de interacción unidimensional resuelto de forma monolítica es muy barato computacionalmente y se puede usar para acoplarlo a los modelos tridimensionales de las arterias en el extremo final. Con esto se consigue que la mayor parte de la onda de presión abandone el dominio.
- e) El número de iteraciones necesario con este método de *doble interacción* se eleva. No obstante, con la implementación del método de *Aitken* para resolver esta segunda interacción se ha conseguido que el número de iteraciones entre los modelos 3D y 1D sea muy reducido.

Aplicaciones a geometrías realistas

- a) Con técnicas para obtener angiografías e imágenes IVUS se consigue la directriz y secciones transversales de las arterias. A partir de éstas se ha desarrollado una técnica de mallado para obtener automáticamente las mallas de hexaedros tanto para el lumen como para la pared arterial. Con la composición de varias mallas de bifurcaciones se puede conseguir una red más amplia de vasos sanguíneos.
- b) La arteria cuya geometría se dispone es la coronaria izquierda, concretamente tres trozos distintos que son:
 1. La bifurcación del tronco en la circunfleja y en la anterior descendente.
 2. La anterior descendente sin ninguna patología.
 3. La anterior descendente con una placa de ateroma muy desarrollada.
- c) Se han tomado parámetros realistas de los modelos constitutivos de Ogden y neo-hookeano para el sólido. La transmisión de un pulso de presión ha resultado satisfactoria en los modelos, aunque en el caso de la bifurcación este método deja de converger cuando la onda ha atravesado el final de la LAD, ya que imponer una presión uniforme en una sección con curvatura no es realista.
- d) La tensión tangencial resulta elevada en la placa de ateroma para la arteria dañada. En la arteria con bifurcación se produce una circulación secundaria del flujo y zonas de menor tensión tangencial en la zona de la bifurcación.

7.3. Aportaciones

Se resumen a continuación las aportaciones más destacadas de este trabajo:

- a) Se ha programado un algoritmo para resolver problemas de interacción 3D fluido-estructura utilizando un método que proporciona acoplamiento

fuerte y que es completamente general, válido para modelos constitutivos no lineales y problemas con grandes deformaciones.

- b) Se ha programado un método que resuelve conjuntamente el problema de interacción 3D flujo sanguíneo-pared arterial y da continuidad al problema de interacción en las secciones finales de las arterias mediante condiciones de contorno absorbentes. El método consiste en acoplar un modelo 1D en dichas secciones y resolver un problema en el que la incógnita es el escalar presión en esas secciones. La técnica para hallar la incógnita es iterar utilizando el método de la secante.
- c) Se ha aplicado el programa de interacción a arterias coronarias con geometrías realistas, habiendo simulado satisfactoriamente la transmisión de un pulso de presión.
- d) Se han obtenido parámetros realistas de los modelos hiperelásticos isotropos de Ogden y neohookeano para aplicarlos a paredes arteriales. Para el ajuste de los modelos se han utilizado curvas experimentales del ensayo de tracción de la arteria aorta.
- e) Se ha implementado el elemento de fluido $Q1/P0$ en un código de elementos finitos para resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes en régimen transitorio. Dicho elemento tiene estabilización de la presión y la velocidad.
- f) Adicionalmente se ha programado un generador de mallas de cuadriláteros, el cual hace las mallas de una forma original. Este mallador se ha extendido a 3D para generar las mallas de hexaedros de las arterias, tanto para tramos simples como para bifurcaciones.

7.4. Líneas futuras de investigación

A continuación se exponen, por orden de importancia decreciente según mi criterio, los temas sobre los que hay que enfocarse para mejorar los modelos de interacción:

- a) Validar los modelos desarrollados con información clínica o ensayos de laboratorio.
- b) Desarrollar un método de interacción monolítico en el que se resuelva el problema por el método de *Newton-Raphson* con el fin de conseguir convergencia de orden dos y también poder incrementar el paso de tiempo para poder simular al menos un ciclo cardíaco completo.
- c) Plantear condiciones de contorno más realistas para las geometrías tridimensionales:

1. Para el fluido, proponer una distribución de presiones en el extremo final más realista que la distribución uniforme asumida en este trabajo. Con esto se mejorará la transmisión de la onda de presión del dominio 3D al dominio 1D, con lo que la amplitud de la onda reflejada disminuirá.
 2. Para el sólido, hacer un modelo de interacción de la pared con el resto de los tejidos externos para no tener que sujetar con movimiento nulo el extremo inicial de las arterias en las simulaciones. Con esto también se evitaría tener que dejar el extremo final libre y así eliminar los movimientos de sólido rígido.
- d) Utilizar el mallador desarrollado aquí para automatizar la creación de una malla de hexaedros en una red de vasos sanguíneos a partir de las directrices y diámetros de éstas obtenidas de las imágenes de angiografía e IVUS respectivamente.
- e) Crear un modelo simplificado que simule el resto del sistema cardiovascular para acoplarlo a la red de arterias en que se produce la interacción sangre-pared y no utilizar únicamente un modelo unidimensional que simule la prolongación de la arteria.
- f) Implementar un modelo viscoelástico para la sangre, necesario para los casos en que la formación de *rouleaux* en las principales arterias sea muy frecuente, lo cual ocurre en algunas personas.

Apéndice A

Formulación débil de las ecuaciones de Navier-Stokes

Preliminares

Para plantear el problema (2.14) en forma débil primero hay que definir cuatro clases de funciones pertenecientes a sendos espacios funcionales (ZIENKIEWICZ Y TAYLOR [2000a]). En lo que sigue $\Omega \in \mathbb{R}^3$ es el dominio del fluido y $\Gamma \in \mathbb{R}^3$ es el contorno. El contorno se descompone en una parte con velocidad impuesta Γ_d y otra con tensión impuesta Γ_n tal que $\Gamma_d \cup \Gamma_n = \Gamma$ y $\Gamma_d \cap \Gamma_n = \emptyset$.

Espacios de funciones de prueba

- *Espacio \mathcal{U} de las funciones de prueba \mathbf{u} para la velocidad:*

A estas funciones se les exigen dos condiciones:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{en } \Gamma_d \quad (\text{A.1a})$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega \leq \infty \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.1b})$$

Las funciones que cumplen (A.1b) se llaman *funciones H^1* , siendo H^1 el espacio de Sobolev de orden 1 (BRENNER Y SCOTT [1994]). Así, el conjunto de todas las funciones de prueba u forman un espacio al que llamaremos \mathcal{U} .

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in H^1, \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ en } \Gamma_d \} \quad (\text{A.2})$$

- *Espacio \mathcal{P} de las funciones de prueba p para la presión:*

Como en la formulación aquí seguida no hay condiciones específicas para la presión en el contorno, solamente se les exige:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega \leq \infty \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.3})$$

Así, el conjunto de todas las funciones de prueba p forman un espacio al que llamaremos \mathcal{P} .

$$\mathcal{P} = \{p \mid p \in H^1\} \quad (\text{A.4})$$

Espacios de funciones de peso

- *Espacio \mathcal{V} de las funciones de peso \mathbf{v} de la velocidad:*
A estas funciones también se les exigen dos condiciones:

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_d \quad (\text{A.5a})$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega \leq \infty \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.5b})$$

El conjunto de todas las funciones de peso v forman un espacio al que llamaremos \mathcal{V} .

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in H^1, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_d\} \quad (\text{A.6})$$

- *Espacio \mathcal{Q} de las funciones de peso q para la presión:*
Al igual que a las funciones p , a las funciones q se les exige únicamente:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega \leq \infty \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.7})$$

Finalmente, el conjunto de todas las funciones de peso q forman un espacio al que llamaremos \mathcal{Q} .

$$\mathcal{Q} = \{q \mid q \in H^1\} \quad (\text{A.8})$$

Igualdades del cálculo diferencial

Escribimos ahora dos igualdades (KAY [1989]) que más adelante utilizaremos en el desarrollo.

- La **primera** igualdad es:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{A.9})$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}$ un tensor de segundo orden cualquiera y \mathbf{v} un tensor de primer orden (vector) cualquiera. Se utilizan los mismos s3mbolos que para el tensor de tensiones y funciones de peso de las velocidades respectivamente para mayor facilidad en el uso de la f3rmula.

- La **segunda** igualdad es:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A.10})$$

que en este caso se verifica 3nicamente cuando el tensor $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico (el tensor de tensiones lo es).

Teorema de Green

El teorema de *Green* o tambi3n llamado de la divergencia demuestra lo siguiente (KAY [1989]):

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (\text{A.11})$$

con el mismo significado de los s3mbolos que en la expresi3n anterior, transformando as3 una integral de volumen en una integral de contorno.

Planteamiento de la formulaci3n débil

Una vez expuestas las herramientas que se van a utilizar se procede a deducir la forma débil de las ecuaciones (2.14) junto con la condici3n de incompresibilidad (2.8).

El procedimiento se puede ver en HUGHES [2000] y es:

- Multiplicar la ecuaci3n de equilibrio del momento lineal (2.10) por una funci3n de peso \mathbf{v} .
- Multiplicar la ecuaci3n de incompresibilidad (2.8) por una funci3n de peso q .
- Sumar las expresiones resultantes de a) y b).
- Hacer la integral en el dominio Ω de la expresi3n obtenida en c).

De esa forma resulta la ecuaci3n integral:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q \, d\Omega = 0 \quad (\text{A.12})$$

siendo $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, $p \in \mathcal{P}$ las funciones velocidad y presión a calcular, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $q \in \mathcal{Q}$ funciones arbitrarias y \mathcal{U} , \mathcal{P} , \mathcal{V} y \mathcal{Q} los espacios funcionales definidos en (A.2), (A.4), (A.6) y (A.8) respectivamente. El último término de (A.12) se ha escrito con signo negativo, pero eso es irrelevante dada la arbitrariedad de las funciones q .

El primer sumando de (A.12) se puede desarrollar aplicando la igualdad (A.9):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v}) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Aplicando ahora al primer sumando del lado derecho de (A.13) el teorema de *Green* (A.11) queda:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \quad (\text{A.14})$$

Finalmente, asumiendo que $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico se puede usar la igualdad (A.10) para llegar a:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \quad (\text{A.15})$$

Hechas estas consideraciones, reescribimos la ecuación (A.12) como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \\ \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q \, d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

El primer sumando de esta ecuación se puede descomponer en dos sumandos:

$$\int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_d} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_d + \int_{\Gamma_n} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_n \quad (\text{A.17})$$

ya que $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_n$ y $\Gamma_d \cap \Gamma_n = \emptyset$

Y en esta última expresión tenemos en cuenta las condiciones de contorno de Neumann y la definición del espacio funcional \mathcal{V} en (A.6):

a) Funciones de peso \mathbf{v} .

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma_d \quad (\text{A.18})$$

Por lo tanto el primer sumando de (A.17) queda simplemente:

$$\int_{\Gamma_d} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_d = 0 \quad (\text{A.19})$$

b) Condiciones de Neumann.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_n \quad \text{en} \quad \Gamma_n \quad (\text{A.20})$$

Así el segundo sumando de (A.17) se puede escribir:

$$\int_{\Gamma_n} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_n = \int_{\Gamma_n} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_n \quad (\text{A.21})$$

Hecha esta descomposición en el contorno finalmente queda:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_n} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_n - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \\ & \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q \, d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Teniendo en cuenta el modelo constitutivo (2.11), la formulación débil del problema de contorno se establece en los siguientes términos:

Encontrar un campo vectorial $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ que cumpla $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d$ en Γ_d y un campo escalar $p \in \mathcal{P}$, tales que $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ y $\forall q \in \mathcal{Q}$ se cumpla:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q \, d\Omega = \\ & \int_{\Gamma_n} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_n \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Apéndice B

Aspectos de la implementación computacional

Se comentan aquí dos particularidades de la implementación que me parecen relevantes.

Eliminación de la presión en el elemento

Si se despeja \mathbf{p}_I de (2.46b) tenemos:

$$\mathbf{p}_I = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{u}_A \quad (\text{B.1})$$

Como el elemento únicamente tiene un nodo de presión en el centro, la función de forma de la presión es $N_p = 1$ en Ω_e . Esto implica que la matriz \mathbf{g}^e en (2.39) es un escalar 1×1 y la matriz \mathbf{q}^e en (2.30) un vector fila $1 \times n_{\text{dim}}$. De aquí resulta que cada elemento del vector \mathbf{p}_I en (B.1) se pueda expresar como:

$$p_e = -\frac{\lambda}{\int_{\Omega_e} N_p N_p \, d\Omega_e} \mathbf{q}^e \mathbf{u}_e \quad (\text{B.2})$$

donde e hace referencia a valores en el elemento. Esto quiere decir que la presión en el elemento solamente depende de las funciones de forma del propio elemento así como de las velocidades en los nodos del propio elemento. Este resultado es muy importante, ya que permite que cada elemento del vector de incógnitas de presión \mathbf{p}_I se pueda calcular a nivel de elemento sin necesidad de un ensamblaje posterior. Por tanto, el proceso de calcular \mathbf{p}_I y sustituirlo en (2.46a) se hace dentro de la subrutina del elemento. De este modo en las ecuaciones finales solamente hay incógnitas en velocidad:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_A + \mathbf{N}(\mathbf{u}_A)\mathbf{u}_A + \mathbf{K}\mathbf{u}_A + \mathbf{S}\mathbf{T}(\mathbf{u}_A)\mathbf{u}_A - \mathbf{Q}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{u}_A = \mathbf{F} \quad (\text{B.3})$$

Observación B.0.1 *Haciendo esto hemos reducido el número de ecuaciones a resolver, ya que hemos eliminado las incógnitas de presión. Es importante tener en cuenta que si para calcular el vector \mathbf{p}_I hubiera que ensamblar*

las matrices elementales esta estrategia no se podría haber aplicado, ya que tendríamos que haber programado aparte una rutina para calcular \mathbf{p}_I y luego implementarla dentro de FEAP, complicando así lo que ganamos con eliminar las incógnitas de presión.

Para integrar la ecuación (B.3) en el tiempo se ha discretizado el término de la aceleración como sigue:

$$\dot{\mathbf{u}}_A \approx \frac{\mathbf{u}_A^{n+1} - \mathbf{u}_A^n}{\Delta t} \quad (\text{B.4})$$

donde con un superíndice con la variable n se denota el paso de tiempo.

El método de integración utilizado es el implícito *backward euler*, por lo que se precisa linealizar las matrices no lineales, que son $\mathbf{N}(\mathbf{u}_A)$ y $\mathbf{ST}(\mathbf{u}_A)$.

Cálculo de las derivadas segundas

El término de estabilización ST añade nuevas dificultades. El residuo \mathbf{R} incluye el cálculo de $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$, término en el que aparecen las derivadas segundas de las funciones de forma de las velocidades N_u . Esta es una razón por la que no se han utilizado elementos triangulares de 3 nodos, ya que entonces las funciones de forma serían lineales y por tanto las derivadas segundas nulas. Si se desarrolla el cálculo de estas derivadas tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N_u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial N_u}{\partial x_i} \right) = \sum_{m=1}^{n_{dim}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial N_u}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \right) = \\ & \sum_{m=1}^{n_{dim}} \sum_{n=1}^{n_{dim}} \frac{\partial^2 N_u}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} + \sum_{m=1}^{n_{dim}} \frac{\partial N_u}{\partial \xi_m} \boxed{\frac{\partial^2 \xi_m}{\partial x_i \partial x_j}} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde se ha recuadrado el nuevo término que hay que calcular, esto es, las derivadas segundas de las coordenadas del elemento de referencia (ξ) respecto las coordenadas del elemento real (x). El cálculo de estas derivadas segundas no es inmediato y en esta tesis se propone el método descrito en el cuadro B.1.

Observación B.0.2 En este algoritmo δ_{ai} es la delta de Kronecker, siendo $\delta_{ai} = 1$ si $a = i$ y $\delta_{ai} = 0$ si $a \neq i$. La obtención de las derivadas segundas se reduce a resolver un problema de n_{dim} ecuaciones lineales con n_{dim} incógnitas, ya que las $n_{dim} \times n_{dim}$ ecuaciones resultantes están desacopladas en grupos de n_{dim} .

1. Se parte de la expresión de la transformación del elemento de referencia al elemento real:

$$x_a = x_a(\boldsymbol{\xi})$$

2. Se derivan ambos lados respecto las coordenadas del elemento real $\frac{\partial}{\partial x_i}$:

$$\delta_{ai} = \sum_{m=1}^{n_{dim}} \frac{\partial x_a}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i}$$

3. Se deriva de nuevo respecto las coordenadas del elemento real $\frac{\partial}{\partial x_j}$:

$$0 = \sum_{m=1}^{n_{dim}} \sum_{n=1}^{n_{dim}} \frac{\partial^2 x_a}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} + \sum_{m=1}^{n_{dim}} \frac{\partial x_a}{\partial \xi_m} \frac{\partial^2 \xi_m}{\partial x_i \partial x_j}$$

4. De esta última expresión se obtienen los sistemas de ecuaciones de n_{dim} ecuaciones cada uno de los que se despejan las derivadas segundas $\frac{\partial^2 \xi_m}{\partial x_i \partial x_j}$

Cuadro B.1: *Algoritmo para el cálculo de las derivadas segundas.*

Apéndice C

Cálculo de las trayectorias y líneas de corriente

Planteamiento del problema

El cálculo de las trayectorias y líneas de corriente consiste en integrar el campo de velocidades que se ha obtenido al resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para el fluido. Esto es, se parte de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, que es dato de partida, y se trata de hallar la curva $\mathbf{x}(t)$ que cumpla la ecuación:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) \quad (\text{C.1})$$

La misma ecuación se puede expresar en forma integral como sigue:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{u}(\mathbf{x}(\tau), \tau) d\tau \quad (\text{C.2})$$

La ecuación diferencial (C.1) no se puede resolver analíticamente, ya que hemos obtenido la solución $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ de forma discreta. Por tanto se ha de utilizar un método numérico para resolver la ecuación (C.1), que por ejemplo se puede discretizar de la forma:

$$\frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} = \alpha \mathbf{u}(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) + (1 - \alpha) \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) \quad (\text{C.3})$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Dependiendo del valor del parámetro α , obtenemos distintos métodos dentro de esta familia. Para $\alpha = 0$ tenemos un método explícito y para $\alpha > 0$ los distintos métodos implícitos. Las ventajas e inconvenientes de cada método son:

- a) **Integración implícita:** Tiene la ventaja de poder dar pasos de tiempo más elevados. El problema principal es que hay que estimar la velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)$ (notar que precisamente $\mathbf{x}(t + \Delta t)$ es la incógnita que queremos hallar) lo cual es complicado debido a que las funciones de

forma son cuadráticas, aunque se pueden linealizar en el entorno de $\mathbf{x}(t)$. Después hay que hallar la solución del sistema de ecuaciones resultante, teniendo que invertir una matriz de 2×2 en 2D ó 3×3 en 3D.

- b) **Integración explícita:** El avance en el tiempo es muy sencillo, ya que la única información necesaria es $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$, la cual ya se tiene del paso anterior. El problema es que es condicionalmente estable y hay que emplear un paso de tiempo muy pequeño para asegurar la convergencia, con lo que el tiempo de cálculo para obtener la curva se incrementa mucho.

A continuación se muestra un ejemplo para ilustrar el problema del paso de tiempo en un método explícito. Se trata del *flujo confinado en una cavidad*, mostrado ya en el apartado 2.4.1, con los mismos datos que aquel y tomando el caso de $Re = 400$. Considerando el estado estacionario, se calcula una línea de corriente comenzando por el punto $(0.6, 0.5)$ (señalado con un círculo en el dibujo). En el primer caso se ha tomado $\Delta t = 0.025$ seg. y en el segundo $\Delta t = 0.0025$ seg. En la figura C.1 se muestran los resultados. En el primer caso no se obtiene convergencia ya que el paso de tiempo es demasiado elevado, mientras que el segundo caso sí converge.

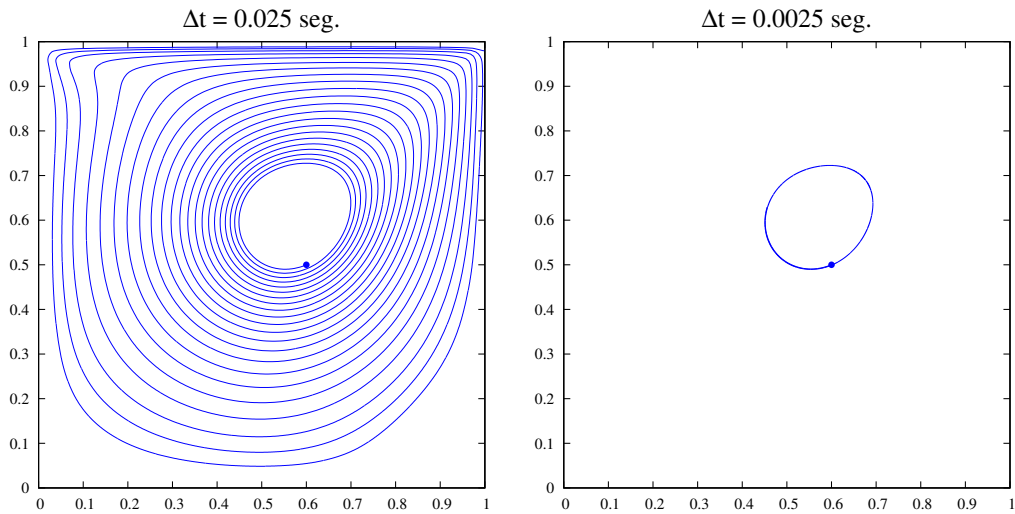


Figura C.1: Cálculo de líneas de corriente. No convergencia (izquierda) y convergencia (derecha).

Solución adoptada

En este trabajo se ha optado por un método implícito, con $\alpha = 0.5$ (que es la regla del punto medio), esto es:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2} \Delta t [\mathbf{u}(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)] \quad (\text{C.4})$$

Como hay que dar pasos de tiempo Δt pequeños se necesita obtener el campo de velocidades en tiempos intermedios a los calculados. Por lo tanto hay que construir un campo de velocidades continuo en el espacio y en el tiempo a partir de los valores nodales de la velocidad en instantes del tiempo discretos. Luego hay que hacer dos interpolaciones, una en el espacio y otra en el tiempo (ver figura C.2, donde se muestra en 2D).

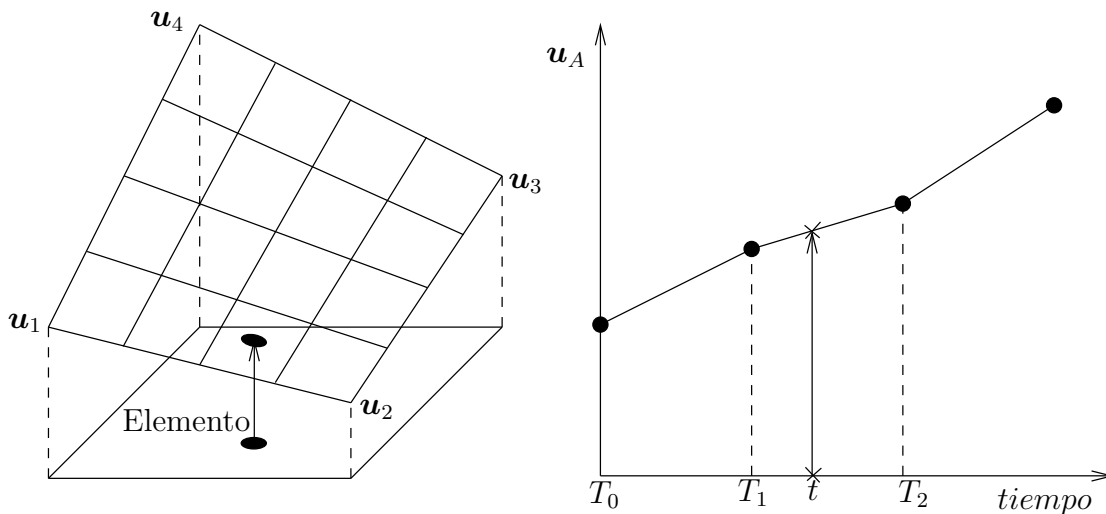


Figura C.2: *Interpolación espacial (izquierda) y temporal (derecha).*

Interpolación en el espacio

Esto se logra utilizando las mismas funciones de forma que se han empleado en el cálculo por elementos finitos (ver (2.17)). De hecho, esta es la forma adecuada y exacta de hacerlo. Congelando el tiempo en un instante fijo, se tiene:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{A=1}^{n_u} N_u^A(\mathbf{x}) \mathbf{u}_A \quad (\text{C.5})$$

donde el significado de los términos es el mismo que en (2.17).

Interpolación en el tiempo

Los valores intermedios se han obtenido por interpolación lineal entre los valores obtenidos por el cálculo de elementos finitos, que son T_0, T_1, T_2 , etc... Por ejemplo, la velocidad en un tiempo intermedio t entre T_1 y T_2 en el nodo

A es:

$$\mathbf{u}_A(t) \approx \frac{T_2 - t}{T_2 - T_1} \mathbf{u}_A(T_1) + \frac{t - T_1}{T_2 - T_1} \mathbf{u}_A(T_2) \quad T_1 \leq t \leq T_2 \quad (\text{C.6})$$

Obviamente la interpolación en el tiempo es necesaria para calcular la trayectoria de las partículas. En el caso de las líneas de corriente esto no es necesario ya que se *congela* el tiempo.

Descripción del algoritmo

En el cuadro C.1 se describen los pasos del algoritmo implementado.

Partiendo de la posición $\mathbf{x}(t)$:

1. Se halla la velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$ por medio de ambas interpolaciones espacial y temporal.
2. Se aproxima la velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)$ linealizando las variables espaciales de la función. En realidad, se trata de linealizar las funciones de forma cuadráticas. Esto se expresa:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t + \Delta t) + \nabla \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{x} \quad (\text{C.7})$$

donde $\nabla \mathbf{u}$ es el gradiente del campo de velocidades en el punto $\mathbf{x}(t)$ y en el instante $t + \Delta t$. El término $\Delta \mathbf{x}$ es el vector desplazamiento incógnita. Para calcular $\nabla \mathbf{u}$ se utiliza la misma estrategia que en el cálculo de elementos finitos, esto es, el elemento de referencia y su transformación al elemento real, calculando el jacobiano, la matriz jacobiana así como su inversa.

3. Se sustituye (C.7) en (C.4), teniendo en cuenta que $\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t) = \Delta \mathbf{x}$:

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{1}{2} \Delta t [\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t + \Delta t) + \nabla \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)] \quad (\text{C.8})$$

4. Se despeja $\Delta \mathbf{x}$ de la ecuación (C.8), que es lineal en $\Delta \mathbf{x}$ y se puede despejar fácilmente, esto es:

$$\left(\mathbf{1} - \frac{1}{2} \Delta t \nabla \mathbf{u} \right) \Delta \mathbf{x} = \frac{1}{2} \Delta t [\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t + \Delta t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)] \quad (\text{C.9})$$

$$\Delta \mathbf{x} = \left(\mathbf{1} - \frac{1}{2} \Delta t \nabla \mathbf{u} \right)^{-1} \frac{1}{2} \Delta t [\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t + \Delta t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)] \quad (\text{C.10})$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor unidad 2x2 ó 3x3 dependiendo si estamos en 2D ó 3D.

5. El nuevo punto es $\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta \mathbf{x}$. Ahora se comprueba si este punto pertenece al mismo elemento o se ha salido de él. Si se ha salido, se obtiene el nuevo elemento donde está el punto y las correspondientes velocidades nodales de ese elemento.
6. Vuelve al punto 1 y se repite todo el proceso.

Cuadro C.1: *Algoritmo para el cálculo de trayectorias y líneas de corriente.*

Cabe destacar otro detalle. En el paso 5 del algoritmo anterior, si el nuevo punto se sale del elemento actual, es necesario que dicho punto esté en un

elemento adyacente a aquel. Esto es porque antes de lanzar el algoritmo se ejecuta una rutina para hallar los elementos adyacentes a cada elemento. Por lo tanto, cuando se busca el nuevo elemento, se busca entre esos elementos adyacentes, que son unos pocos (como mucho 8 en 2D en el caso de cuadriláteros) acortando mucho el tiempo de cálculo. De aquí se tiene que el paso de tiempo Δt también tiene que tener en cuenta este hecho, y por lo que se ha observado en los cálculos hechos, esto es lo que condiciona Δt . Esto es, no hay que *saltarse* elementos.

Apéndice D

Mallador 2D con cuadriláteros y 3D con hexaedros

Planteamiento del problema

En esta tesis se han utilizado elementos finitos cuadriláteros de 4 nodos para los problemas bidimensionales. El problema de obtener una malla de triángulos está resuelto en casi cualquier mallador, pero no para los cuadriláteros, ya que no siempre se obtienen buenas mallas con dichos malladores, resultando elementos muy distorsionados. Aquí se ha hecho un mallador de cuadriláteros con el objetivo de obtener elementos lo menos distorsionados posible, esto es, intentando minimizar las desviaciones de los ángulos que forman los lados consecutivos respecto al ángulo recto (90°).

Adicionalmente se ha aprovechado esto para crear las mallas tridimensionales parametrizadas de cilindros y arterias, esto es, geometrías con una curva directriz y una sección transversal asociada a cada punto de la directriz. Las mallas de la arteria coronaria izquierda anterior descendente (LAD) sana y de la bifurcación se han hecho con este mallador.

Descripción del mallador 2D desarrollado

Para mallar con cuadriláteros se divide el dominio en parcelas de 4 lados. El problema se reduce a cómo mallar cada una de estas parcelas. Cada uno de esos lados se divide en un número de nodos, que depende de la finura de la malla. La originalidad de esta forma de mallar es que para hallar los nodos interiores hay que hacer la intersección no de dos rectas, sino de dos cúbicas (ver figura D.1). La razón de unir los puntos A y B de dicha figura con una cúbica es que también se imponen los ángulos de dicha curva en A y B . Por lo tanto, se busca una curva que pase por dos puntos y que tenga determinada pendiente en esos puntos. Para cumplir esas 4 condiciones se necesita un polinomio de tercer grado. Haciendo esto, es decir, imponiendo

también ángulos, se controla parcialmente la distorsión de los elementos. La definición de estos ángulos se hace interpolando linealmente ángulos entre los extremos de cada lado.

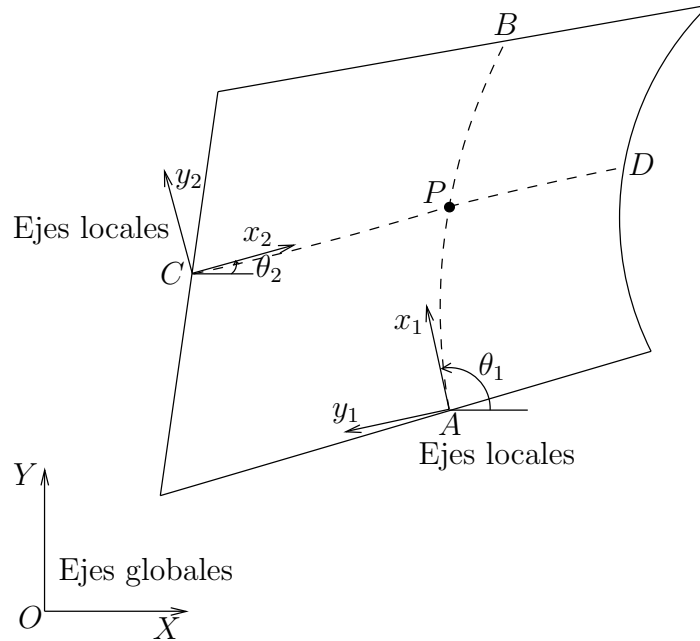


Figura D.1: Obtención de un nodo P por intersección de dos cúbicas.

Ecuación de la cúbica en los ejes locales

La expresión general de los polinomios de tercer grado que unen los puntos A con B y C con D de la figura D.1 son respectivamente:

$$y_1 = \alpha_{11}x_1^3 + \alpha_{12}x_1^2 + \alpha_{13}x_1 + \alpha_{14} \quad (\text{D.1a})$$

$$y_2 = \alpha_{21}x_2^3 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{24} \quad (\text{D.1b})$$

donde α_{ij} , ($i = 1, 2$), ($j = 1, \dots, 4$) son los coeficientes del polinomio que hay que hallar. Utilizamos minúsculas para las variables en ejes locales y mayúsculas para ejes globales.

Pero si definimos unos ejes locales de tal forma que la cúbica pase por el origen y con pendiente nula en él, las expresiones anteriores se simplifican:

$$y_1 = \alpha_{11}x_1^3 + \alpha_{12}x_1^2 \quad (\text{D.2a})$$

$$y_2 = \alpha_{21}x_2^3 + \alpha_{22}x_2^2 \quad (\text{D.2b})$$

Para obtener los dos coeficientes de cada curva se utiliza la condición que la cúbica pase por el otro punto y con una determinada pendiente. Por ejemplo, para la cúbica 1, imponemos que pase por el punto B con la pendiente

b' :

$$b_y = \alpha_{11}b_x^3 + \alpha_{12}b_x^2 \quad (\text{D.3a})$$

$$b' = 3\alpha_{11}b_x^2 + 2\alpha_{12}b_x \quad (\text{D.3b})$$

donde hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que al ser lineal se resuelve invirtiendo la matriz 2x2 del sistema:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x^3 & b_x^2 \\ 3b_x^2 & 2b_x \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_y \\ b' \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Para la segunda cúbica se procede de forma análoga, esto es:

$$d_y = \alpha_{21}d_x^3 + \alpha_{22}d_x^2 \quad (\text{D.5a})$$

$$d' = 3\alpha_{21}d_x^2 + 2\alpha_{22}d_x \quad (\text{D.5b})$$

Y se resuelve el sistema:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x^3 & d_x^2 \\ 3d_x^2 & 2d_x \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_y \\ d' \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

Intersección de las dos cúbicas

Para hallar el punto P , que es el nodo buscado, hay que hallar la intersección de dos curvas de tercer grado. Pero antes de ello, hay que tener en cuenta que cada cúbica se ha expresado en unos ejes diferentes (sus ejes locales). Por tanto, hay que expresar cada punto de las cúbicas en los ejes globales. Esto se hace ejecutando primero una rotación (ángulo θ_1 para los ejes locales 1) y luego una traslación (vector \mathbf{OA}):

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix}}_{\text{rotación}} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}}_{\text{traslación}} \quad (\text{D.7a})$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix}}_{\text{rotación}} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix}}_{\text{traslación}} \quad (\text{D.7b})$$

El punto P es la intersección de ambas curvas, luego se halla imponiendo:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

Teniendo en cuenta ahora la ecuación (D.2) y la correspondiente para la segunda cúbica (la que une C con D), la igualdad (D.8) se desarrolla en las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1)x_1 - \sin(\theta_1)(\alpha_{11}x_1^3 + \alpha_{12}x_1^2) + A_x = \\ \cos(\theta_2)x_2 - \sin(\theta_2)(\alpha_{21}x_2^3 + \alpha_{22}x_2^2) + C_x \end{aligned} \quad (\text{D.9a})$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1)x_1 + \cos(\theta_1)(\alpha_{11}x_1^3 + \alpha_{12}x_1^2) + A_y = \\ \sin(\theta_2)x_2 + \cos(\theta_2)(\alpha_{21}x_2^3 + \alpha_{22}x_2^2) + C_y \end{aligned} \quad (\text{D.9b})$$

Las ecuaciones (D.9) forman un sistema *no lineal* de dos ecuaciones con dos incógnitas (x_1, x_2). Para resolverlo se ha utilizado el método de *Newton-Raphson*, el cual se ha comprobado que converge en 3 ó 4 iteraciones como mucho si se empieza a iterar por el punto medio, esto es: $x_1 = 0.5b_x$ y $x_2 = 0.5d_x$.

Asimismo, el programa se ha diseñado para que los lados de las regiones puedan ser rectos, arcos de circunferencia ó incluso también curvas cúbicas (para definir los ángulos deseados). Como ejemplo del mallado que resulta de la figura D.1, se muestra éste dividido en 7x6 elementos en la figura D.2.

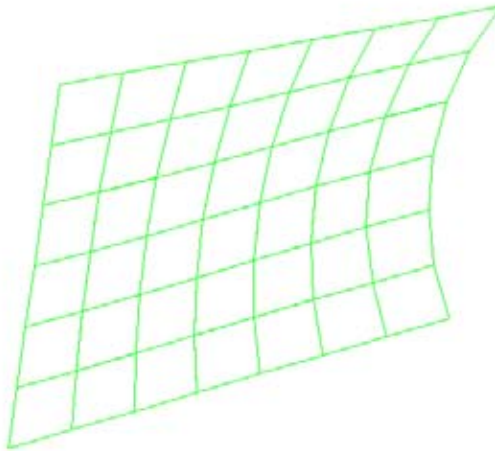


Figura D.2: *Mallado de la región en 7x6 elementos.*

Todas las regiones son malladas localmente y luego son ensambladas para formar una única malla de todo el dominio.

Extensión a 3D con hexaedros

Para geometrías como las arterias la idea es obtener la malla de hexaedros mediante la extrusión de una malla 2D a lo largo de una directriz.

Con el fin de racionalizar el proceso se ha hecho un módulo básico en el que la directriz es una curva cúbica en 3D. Por tanto, para usarlo en una

directriz de una arteria real lo que se hace es ajustar dicha directriz a una sucesión de cúbicas. La ventaja de la cúbica respecto a una recta es que podemos dar continuidad a las tangentes.

La idea básica es tomar una sección circular 2D mallada con cuadriláteros y mediante una sucesión de operaciones geométricas transformarla en la sección transversal de un punto de la directriz.

Expresión de la directriz cúbica

La cúbica se escribe de forma paramétrica y en ejes globales como:

$$X = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \tag{D.10a}$$

$$Y = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 \tag{D.10b}$$

$$Z = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 \tag{D.10c}$$

donde t es el parámetro y a_i, b_i, c_i son coeficientes a determinar. Las condiciones son que la curva ha de pasar por los puntos A y B con tangentes \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B respectivamente. Aparte de esas condiciones hay que fijar también el valor del parámetro t en los puntos A y B , esto es, t_A y t_B .

Lo más cómodo es exigir que para $t = 0$ la curva pase por el punto inicial A , esto es, $t_A = 0$. En cuanto al punto final hay infinitas posibilidades del parámetro t . Hay que tener en cuenta que si t_B se elige muy grande la curva hace muchos *giros* antes de llegar a B . Lo que se ha hecho es elegir $t_B = |AB|$, siendo $|AB|$ la distancia entre A y B . Esto se hace para que el parámetro t coincida con la distancia para los casos en que la curva sea una línea recta.

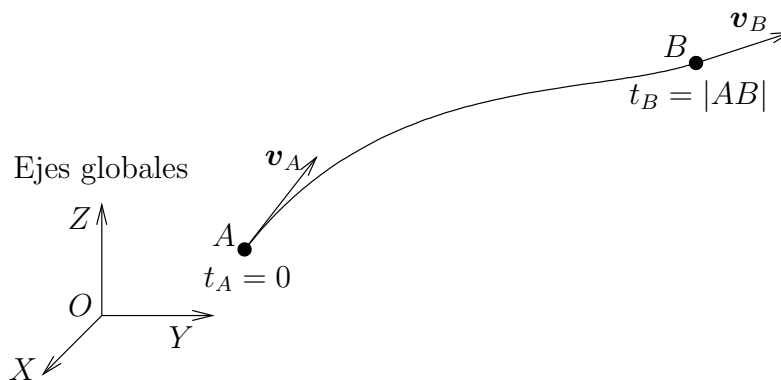


Figura D.3: *Directriz cúbica 3D. Puntos y tangentes.*

Una vez hecho esto, los coeficientes son fáciles de obtener. Para $t = 0$ se tiene que ha de pasar por el punto A , luego:

$$a_0 = A_x \qquad b_0 = A_y \qquad c_0 = A_z \tag{D.11}$$

y también para $t = 0$ la tangente es \mathbf{v}_A , luego derivando las expresiones (D.10) respecto t y particularizando en $t = 0$ se obtiene:

$$a_1 = v_{Ax} \quad b_1 = v_{Ay} \quad c_1 = v_{Az} \quad (\text{D.12})$$

con lo que hemos obtenido ya 6 de los 12 coeficientes incógnita.

Ahora el punto B . Para $t = t_B$ ha de pasar por dicho punto, de lo que resultan las condiciones:

$$B_x = a_0 + a_1 t_B + a_2 t_B^2 + a_3 t_B^3 \quad (\text{D.13a})$$

$$B_y = b_0 + b_1 t_B + b_2 t_B^2 + b_3 t_B^3 \quad (\text{D.13b})$$

$$B_z = c_0 + c_1 t_B + c_2 t_B^2 + c_3 t_B^3 \quad (\text{D.13c})$$

y la tangente en B es \mathbf{v}_B , por lo que se tiene:

$$v_{Bx} = a_1 + 2a_2 t_B + 3a_3 t_B^2 \quad (\text{D.14a})$$

$$v_{By} = b_1 + 2b_2 t_B + 3b_3 t_B^2 \quad (\text{D.14b})$$

$$v_{Bz} = c_1 + 2c_2 t_B + 3c_3 t_B^2 \quad (\text{D.14c})$$

obteniendo 3 condiciones más.

Con las 6 ecuaciones obtenidas (fijarse que son lineales) en (D.13) y (D.14) se despejan los 6 parámetros que quedan ($a_2, a_3, b_2, b_3, c_2, c_3$). Por ejemplo, de (D.13a) y (D.14a) se obtiene a_2 y a_3 . De forma similar se hace con los otros dos pares de ecuaciones.

Esto se hace con cada una de las cúbicas en que se ha dividido la directriz real de la arteria. Como podemos imponer tangentes se logra una continuidad suave cuando ensamblamos las sucesivas cúbicas.

Transformación de la sección transversal

Ahora queda definir cómo se construyen las secciones transversales a la directriz. En la figura D.4 se ha dibujado en azul la parte del lumen y en marrón la parte de la pared.

Se parte de una malla construida en el plano con el mallador 2D y se hacen las siguientes transformaciones:

1. Una homotecia para ajustar el diámetro y el espesor a los datos reales. Esta homotecia puede ser no homogénea y depender de la dirección para así ajustarse mejor a la sección real.
2. Una rotación tridimensional para orientar la normal a la sección en la dirección de la directriz en cada punto. Para esta operación lo más cómodo es utilizar la expresión de la matriz de rotación de *Euler-Rodrigues*:

$$\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \sin \theta \mathbf{H} \quad (\text{D.15})$$

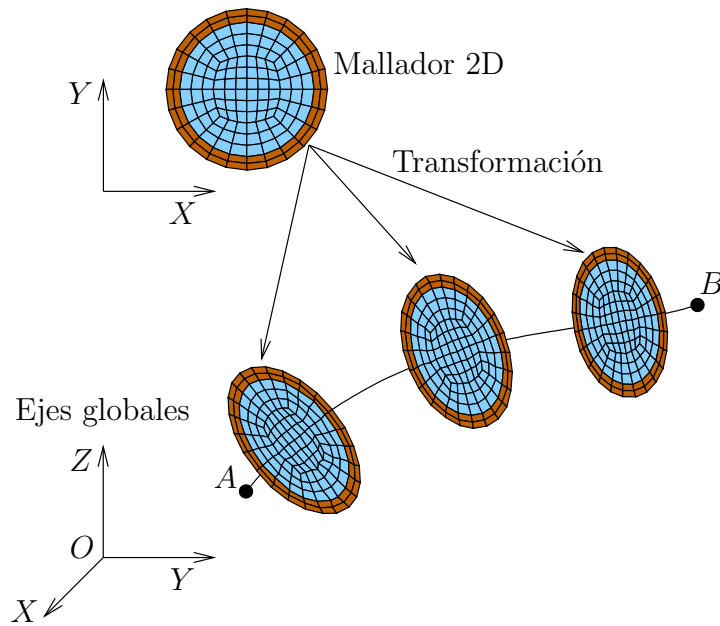


Figura D.4: Colocación de la sección transversal sobre la directriz.

donde θ es el ángulo girado, \mathbf{n} el vector unitario en la dirección del eje de rotación y \mathbf{H} es la matriz hemisimétrica asociada al producto vectorial $\mathbf{n} \wedge$.

3. Una traslación para colocar el centro de la sección en el punto de la directriz.

Una vez hechas unas cuantas transformaciones, dependiendo de cuántos elementos en la dirección de la directriz se quieran, se define fácilmente la conectividad de los hexaedros mediante la unión de secciones sucesivas.

En la figura D.5 se observa cómo quedaría finalmente la malla para una arteria sana.

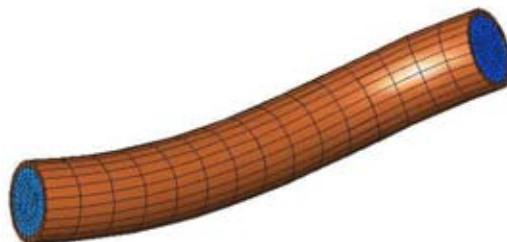


Figura D.5: Malla de hexaedros de una arteria sana hecha con el presente mallador.

También se ha elaborado una variante del mallador para poder obtener mallas de bifurcaciones también paramétricamente a partir de las dos

directrices. Cabe decir que el algoritmo se complica bastante para poder parametrizar la zona de unión de la bifurcación. En la figura D.6 se muestra un ejemplo de bifurcación utilizando una malla con un total de 5776 elementos entre fluido y sólido.

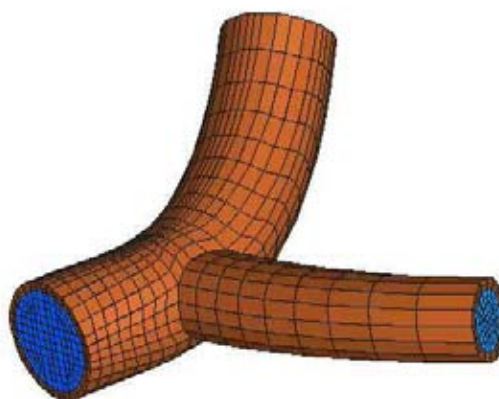


Figura D.6: *Malla de hexaedros de una bifurcación hecha con el presente mallador.*

El *software* desarrollado para este mallador, tanto el 2D con cuadriláteros como estos últimos en 3D se dejará en una página web ¹. El mallador 3D será útil porque permite obtener mallas de hexaedros automáticamente a partir de los datos clínicos con las técnicas usuales de angiografía e IVUS.

¹<http://w3.mecanica.upm.es/~fran>

Apéndice E

Cálculo del perfil parabólico 3D de velocidades

Objetivo

Se trata de hallar un perfil de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ que integrado en la superficie de entrada de la arteria Γ sea igual a un caudal Q :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{\Gamma} \approx Q \quad (\text{E.1})$$

siendo $d\mathbf{\Gamma}$ el vector diferencial de superficie.

El criterio elegido para calcular el perfil de velocidades es que sea una aproximación al flujo de Poiseuille, siendo esta aproximación exacta para el caso de sección circular.

Los datos disponibles son un conjunto de puntos no coplanarios en general en el extremo inicial de la geometría real, representando éstos la sección de entrada.

Descripción del método utilizado

La idea es trasladar el problema inicial 3D a un problema en el plano. Para ello se ajusta un plano por mínimos cuadrados y se proyecta la superficie Γ inicial al plano, creando la superficie proyectada Γ_p . Se mide el área por un método aproximado y se utiliza la fórmula para hallar el volumen del paraboloides, que es:

$$V = \frac{1}{2}Af$$

siendo V el volumen, A el área y f la flecha (distancia vertical desde el vértice a la base) del paraboloides, como se muestra en la figura E.1.

Por tanto, la aproximación que se hace es:

$$Q = \frac{1}{2}S_p v_{\text{punta}} \quad (\text{E.2})$$

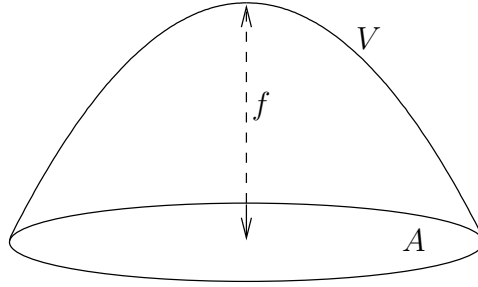


Figura E.1: *Paraboloide de referencia.*

siendo S_p el área de la superficie proyectada al plano Γ_p y v_{punta} la velocidad máxima, que es la del punto central de dicha superficie. La correspondencia sería:

$$\begin{aligned} V &\longleftrightarrow Q \\ A &\longleftrightarrow S_p \\ f &\longleftrightarrow v_{\text{punta}} \end{aligned}$$

De (E.2) se obtiene:

$$v_{\text{punta}} = \frac{2Q}{S_p} \quad (\text{E.3})$$

El punto P_c al que se asocia la velocidad punta es un nodo representativo del centro de Γ_p , calculado con el criterio de *máxima distancia* al perímetro de Γ_p .

Por último, para calcular la velocidad en los puntos restantes P_i de Γ_p se supone una parábola con valor nulo en el perímetro, vértice en el centro (punto P_c) y contenida en un plano perpendicular a Γ_p que pase por el centro y dicho punto P_i .

Desarrollo del algoritmo

Ajuste de un plano por mínimos cuadrados

Dados un conjunto de puntos P_{ij} , donde i representa el punto ($i = 1, 2, \dots, n$), siendo n el número de puntos de la superficie y j la coordenada ($j = 1, 2, 3$), se quiere ajustar un plano escrito en su forma canónica:

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 1 \quad (\text{E.4})$$

Para ello se calcula la siguiente suma:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^3 \beta_j P_{ij} - 1 \right)^2 \quad (\text{E.5})$$

que representa la suma de las desviaciones cuadráticas de todos los puntos respecto al cumplimiento de la ecuación del plano.

Observación E.0.3 *Un plano escrito en la forma (E.4) no puede pasar por el origen de coordenadas. Si el plano buscado pasara por el origen, lo que se hace es una traslación de los puntos P_{ij} y por tanto también el plano se traslada.*

Para hacer mínima la suma de (E.5), se calculan las derivadas parciales respecto β_k y se iguala a cero, obteniendo las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^3 \beta_j P_{ij} \right) P_{ik} - \sum_{i=1}^n P_{ik} = 0 \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{E.6})$$

que son tres ecuaciones lineales con tres incógnitas $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Proyección de los puntos al plano

Primero se obtiene el vector normal unitario \mathbf{n} al plano calculado anteriormente. Como la ecuación del plano está en su forma canónica (E.4), dicho vector es:

$$n_j = \frac{-\beta_j}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}} \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{E.7})$$

donde el signo menos es debido a que en las geometrías que se han usado el flujo se aleja del origen en el sentido positivo del eje z , por lo que el vector normal a Γ_p es el opuesto.

La distancia δ_i de cada punto al plano se calcula sumando al punto P_i un número de veces el vector \mathbf{n} , y obligando al punto resultante a cumplir la ecuación del plano (E.4).

$$\delta_i = \frac{1 - \sum_{j=1}^3 P_{ij} n_j}{\sum_{j=1}^3 \beta_j n_j} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{E.8})$$

donde δ_i puede ser positivo o negativo, aunque es irrelevante.

El punto proyectado será:

$$p_{ij} = P_{ij} + \delta_i n_j \quad (\text{E.9})$$

donde ahora se señalan con minúscula p los nodos ya proyectados.

Cálculo del punto central

Para calcular el punto central, se calcula primero la distancia mínima de cada punto al perímetro, la cual se denota por $d_{i,\text{mín}}$.

Una vez obtenidas dichas distancias, se calcula el máximo de dichas distancias según:

$$d = \max_i \{d_{i,\text{mín}}\} \quad (\text{E.10})$$

El punto cuya distancia es d se define como el punto central p_c .

Cálculo del área

El cálculo del área de la superficie Γ_p se hace utilizando la fórmula de *Herón*, la cual calcula el área de un triángulo a partir de la longitud de sus tres lados.

$$S_t = \sqrt{s(s - l_1)(s - l_2)(s - l_3)} \quad (\text{E.11})$$

donde s es el semiperímetro del triángulo y l_1 , l_2 y l_3 los lados de dicho triángulo.

Por lo tanto, se une el punto central p_c con todos los demás puntos del perímetro, formando triángulos (ver figura E.2) y calculando el área con la fórmula (E.11). El área de Γ_p será la suma de todas ellas, esto es:

$$S_p = \sum_{t=1}^{N_t} S_t \quad (\text{E.12})$$

donde N_t es el número total de triángulos contenidos en Γ_p .

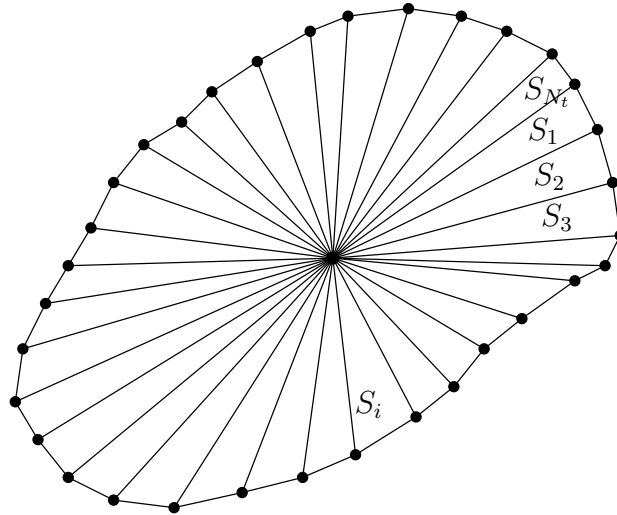


Figura E.2: Superficie Γ_p particionada en triángulos.

Cálculo del perfil de velocidades

Finalmente, se calcula la velocidad asociada a cada punto.

El primer paso es calcular la velocidad en el nodo central p_c , para lo cual se usa la fórmula (E.3).

Para calcular la velocidad en el resto de los nodos p_i , se supone una parábola con vértice en el centro p_c y valor nulo en el perímetro, pasando por dicho nodo p_i

$$v_i = v_{\text{punta}} \left(1 - \frac{r_i^2}{l^2} \right) \quad (\text{E.13})$$

siendo r_i la distancia del punto p_i al perímetro y v_i el módulo de la velocidad del punto p_i , como se muestra en la figura E.3.

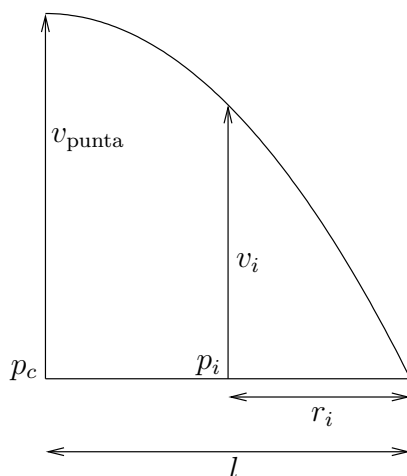


Figura E.3: *Parábola que aproxima el perfil de velocidades.*

Finalmente, se le asocia el vector velocidad a cada punto de la superficie tridimensional original Γ .

$$P_i \longrightarrow \boxed{\mathbf{v}_i = v_i \mathbf{n}}$$

En la figura E.4 se muestra un ejemplo en el que se ha aplicado el algoritmo descrito a una sección no circular.

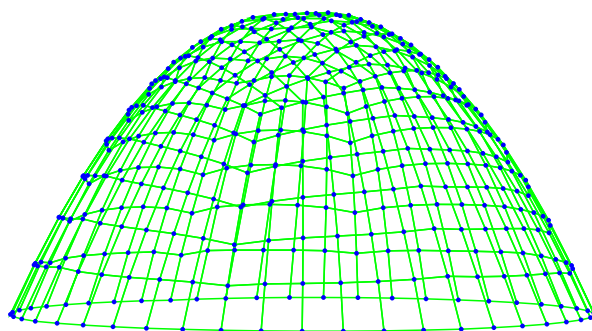


Figura E.4: *Ejemplo del perfil de velocidades calculado en una sección no circular.*

Bibliografía

- E. S. ALMEIDA Y R. L. SPILKER [1998]. Finite element formulations for hyperelastic transversely isotropic biphasic soft tissues. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **151**: 513–538.
- B. F. ARMALY, F. DURST, J. C. F. PEREIRA Y B. SCHÖNUNG [1983]. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. Fluid Mech.* **127**: 473–496.
- F. ARMERO [1993]. *Numerical Analysis of Dissipative Dynamical Systems in Solid and Fluid Mechanics, with a Special Emphasis on Coupled Problems*. Doctoral Thesis. Stanford.
- J. M. ATIENZA, G. V. GUINEA, M. MORÁN, M. L. ELICES, M. ELICES, R. J. BURGOS Y K. HAYASHI [2005]. Experimental data on thermo-mechanical behaviour of human aorta. *The 3rd IASTED International Conference on Biomechanics. Benidorm*.
- BEST Y TAYLOR [1993]. *Bases Fisiológicas de la Práctica Médica*. Ed. Panamericana.
- S. C. BRENNER Y L. R. SCOTT [1994]. *The Mathematical Theory of Finite Element Method*. Springer.
- A. N. BROOKS Y T. J. R. HUGHES [1982]. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **32**: 199–259.
- F. J. CALVO [2003]. *Simulación del Flujo Sanguíneo y su Interacción con la Pared Arterial*. Trabajo de Investigación, UPM, Madrid.
- H. Y. H. CHEN Y T. W. H. SHEU [2003]. Finite-element simulation of incompressible fluid flow in an elastic vessel. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids* **42**: 131–146.
- G. C. CHENG, H. M. LOREE, R. K. KAMM, M. C. FISHBEIN Y R. T. LEE [1993]. Distribution of circumferential stress in ruptured and stable atherosclerotic lesions. *Circulation* **87**: 1179–1187.

- R. CODINA Y M. CERVERA [1996]. Block iterative algorithms for non-linear coupled problems. *Advanced Computational Methods in Structural Mechanics, CIMNE* 115–134.
- R. S. COTRAN, V. KUMAR Y S. L. ROBBINS [1995]. *Patología Estructural y Funcional*. McGraw-Hill.
- P. A. DASHNER [2000]. Elastic shadow flow and its theoretical implications for inelastic solids. *International Journal of Solids and Structures*.
- DE A. CASTRO Y J. R. PASTOR [1958]. *Funciones de Bessel y Aplicaciones*. Dossat.
- S. DEPARIS [2004]. *Numerical Analysis of Axisymmetric Flows and Methods for Fluid-Structure Interaction Arising in Blood Flow Simulation*. Doctoral Thesis, EPFL, Switzerland.
- J. DONEA, P. FASOLLI-STELLA Y S. GIULIANI [1977]. Lagrangian and eulerian finite element techniques for transient fluid-structure interaction problems. *Transactions of the 4th SMIRT Conference, San Francisco*.
- J. DONEA Y A. HUERTA [2003]. *Finite Element Methods for Flow Problems*. Wiley.
- P. FARRERAS Y C. ROZMAN [1995]. *Medicina Interna, 13ª edición*. Mosby-Doyma Libros.
- FAUCI, BRAUNWALD, ISSELBACHER, WILSON, MARTIN, KASPER, HAUSER Y LONGO [1998]. *Principios de Medicina Interna*. Mc Graw Hill.
- C. A. FELIPPA, K. C. PARK Y C. FARHAT [2001]. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **190**: 3247–3270.
- M. A. FERNÁNDEZ [2001]. *Modèles simplifiés d'interaction fluide-structure*. Doctoral Thesis, INRIA, París.
- M. A. FERNÁNDEZ Y M. MOUBACHIR [2003]. An exact block-newton algorithm for the solution of implicit time discretized coupled systems involved in fluid-structure interaction problems. *Proceedings of the Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics* 1337–1341.
- M. A. FERNÁNDEZ Y M. MOUBACHIR [2004]. A newton method using exact jacobians for solving fluid-structure coupling. *Rapport de Recherche, INRIA, Paris*.

- L. FORMAGGIA, J. F. GERBEAU, F. NOBILE Y A. QUARTERONI [2001]. On the coupling of 3D and 1D navier-stokes equations for flow problems in compliant vessels. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **191**: 561–582.
- L. FORMAGGIA Y A. VENEZIANI [2003]. *Biological Fluid Dynamics. One Dimensional Models for Blood Flow in the Human Vascular System.* Lecture Notes.
- L. P. FRANCA, T. J. R. HUGHES Y R. STENBERG [1993]. Stabilized finite element methods for the stokes problem. *Incompressible Computational Fluid Dynamics* 87–107.
- Y. C. FUNG [1993]. *Biomechanics. Mechanical properties of living tissues.* Springer.
- Y. C. FUNG [1997]. *Biomechanics. Circulation.* Springer.
- J. F. GERBEAU Y M. VIDRASCU [2003a]. A quasi-newton algorithm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flows. *Proceedings of the Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics.*
- J. F. GERBEAU Y M. VIDRASCU [2003b]. A quasi-newton algorithm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flows. *Rapport de Recherche, INRIA, Paris.*
- U. GHIA, K. N. GHIA Y C. T. SHIN [1982]. High-resolution for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *J. Comp. Phys.* **48**: 387–411.
- O. GONZÁLEZ Y A. M. STUART [1995]. *Introduction to Continuum Mechanics. Lecture Notes.* Stanford University.
- P. M. GRESHO [2001]. Some current cfd issues relevant to the incompressible navier-stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*
- H. GUILLARD Y C. FARHAT [2000]. On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **190**: 1467–1482.
- M. E. GURTIN [1981]. *An introduction to continuum mechanics.* Academic Press.
- J. C. HEINRICH Y D. W. PEPPER [1999]. *The Intermediate Finite Element Method: Fluid Flow And Heat Transfer Applications.* Taylor and Francis.
- L. R. HERRMANN [1965]. Elasticity equations for nearly incompressible materials by a variational theorem. *AIAA Journal* **3**: 1896–1900.

- G. A. HOLZAPFEL [2000]. *Non linear solid mechanics*. Wiley.
- G. A. HOLZAPFEL Y T. C. GASSER [2000]. A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **190**: 4379–4403.
- T. J. R. HUGHES [1995]. Green's functions, the dirichlet-to-neumann formulations, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **127**: 387–401.
- T. J. R. HUGHES [2000]. *The finite element method*. Dover.
- T. J. R. HUGHES, W. K. LIU Y T. K. ZIMMERMANN [1981]. Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **29**: 329–349.
- J. HUMPHREY [1995]. Mechanics on the arterial wall: Review and directions. *Critical Reviews in Biomedical Engineering* **23**: 1–162.
- D. C. KAY [1989]. *Cálculo Tensorial*. McGraw-Hill.
- M. KRAFCZYK, M. CERROLAZA, M. SCHULZ Y E. RANK [1998]. Analysis of 3D transient blood flow passing through an artificial aortic valve by lattice-boltzmann methods. *Journal of Biomechanics* **31**: 453–462.
- M. KRAFCZYK, J. TOLKE, E. RANK Y M. SCHULZ [2001]. Two-dimensional simulation of fluid-structure interaction using lattice-boltzmann methods. *Computers and Structures* **79**: 2031–2037.
- A. M. MALEK, S. L. ALPER Y S. IZUMO [1999]. Hemodynamic shear stress and its role in atherosclerosis. *Journal of the American Medical Association* **282**: 2035–2042.
- L. E. MALVERN [1969]. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall.
- J. E. MARSDEN Y T. J. R. HUGHES [1983]. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover.
- H. G. MATTHIES Y J. STEINDORF [2002]. Partitioned but strong coupled iteration schemes for nonlinear fluid-structure interaction. *Computers and Structures* **80**: 1991–1999.
- H. G. MATTHIES Y J. STEINDORF [2003]. Partitioned strong coupling algorithms for fluid-structure interaction. *Computers and Structures. Special Issue* **81**: 805–812.
- J. N. MAZUMDAR [1992]. *Biofluid Mechanics*. World Scientific.

- R. W. MILNOR [1989]. *Hemodynamics*. William & Wilkins.
- D. P. MOK Y W. A. WALL [2001]. Partitioned analysis schemes for the transient interaction of incompressible flows and nonlinear flexible structures. *Trends in Computational Structural Mechanics, Barcelona. CIMNE* 689–698.
- D. P. MOK, W. A. WALL Y E. RAMM [2001]. Accelerated iterative substructuring schemes for instationary fluid-structure interaction. *Proceedings of the First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics* 1325–1328.
- H. MORAND Y R. OHAYON [1992]. *Interactions fluides-structures, volume 23 of Reserches en Mathématiques Appliquées*. Masson, Paris.
- T. D. MULDER [1997]. Stabilized finite element methods (supg, gls, ...) for incompressible flows. *28 CFD Lectures Series, Von Karman Institute, March '97*.
- N. M. NEWMARK [1959]. A method of computation for structural dynamics. *J. of the Engineering Mechanics Division* 67–94.
- F. NOBILE [2001]. *Numerical Approximation of Fluid-Structure Interaction Problems with Application to Haemodynamics*. Doctoral Thesis, EPFL, Switzerland.
- J. T. ODEN Y G. F. CAREY [1984]. *Finite Elements: Mathematical Aspects*. Prentice-Hall.
- R. W. OGDEN [1972]. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London* 565–584.
- R. W. OGDEN, G. SACCOMANDI Y I. SGURA [2004]. Fitting hyperelastic models to experimental data. *Computational Mechanics* **34**: 484–502.
- J. OHAYON, P. TEPPAZ, G. FINET Y G. RIOUFOL [2001]. In-vivo prediction of human coronary plaque rupture location using intravascular ultrasound and the finite element method. *Coron. Artery Dis.* **8**: 655–663.
- J. PEIRÓ Y S. SHERWIN [2003a]. One-dimensional modelling of arterial blood flow. *Lecture Notes. EFPL, Lausanne*.
- J. PEIRÓ Y S. SHERWIN [2003b]. *One-Dimensional Modelling of Arterial Blood Flow*. Lecture Notes. Lausanne.
- K. PERKTOLD [2002]. *Computational Model of Arterial Flow and Mass Transport*. Lecture Notes. CISM, Italy.

- K. PERKTOLD Y G. RAPPITSCH [1995]. Computer simulation of local blood flow and vessel mechanics in a compliant carotid artery bifurcation. *Journal of Biomechanics*.
- K. PERKTOLD, M. RESCH Y R. PETER [1991]. Three-dimensional numerical analysis of pulsatile flow and wall shear stress in the carotid artery bifurcation. *Journal of Biomechanics* **6**: 409–420.
- A. K. PIETAL [2005]. *Blood as Complex Fluid, Flow and Suspensions*. Lecture Notes. IPPT, Poland.
- B. PIQUET, C. T. SILVA Y A. E. KAUFMAN [1996]. Tetra-cubes: An algorithm to generate 3D isosurfaces based upon tetrahedra. *Anais do IX SIBGRAPI* 205–210.
- L. QUARTAPELLE [1993]. *Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations*. Birkhäuser Verlag, Basel.
- A. RACHEV [2001]. Remodeling of arteries in response to changes in their mechanical environment. *Course on Biomechanics of Soft Tissue, CISM*.
- R. S. RIVLIN [1948]. Large elastic deformations of isotropic materials. iv. further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 379–397.
- J. RODRÍGUEZ, J. M. GOICOLEA Y F. GABALDÓN [In press]. A volumetric model for growth of arterial walls with arbitrary geometry and loads. *Journal of Biomechanics*.
- J. RODRÍGUEZ, J. M. GOICOLEA, J. C. GARCÍA Y F. GABALDÓN [2003]. Finite element models for mechanical simulation of coronary arteries. *Lecture Notes in Computer Science* **2674**.
- A. RUSSO [1996]. Bubble stabilization of finite element methods for the linearized incompressible navier-stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **132**: 335–343.
- M. SANKARANARAYANAN, L. P. CHUA, D. N. GHISTA Y Y. S. TAN [2005]. Computational model of blood flow in the aorto-coronary bypass graft. *BioMedical Engineering OnLine*.
- M. SANMARTÍN, J. GOICOLEA, C. GARCÍA, J. GARCÍA, A. CRESPO, J. RODRÍGUEZ Y J. M. GOICOLEA [2006]. Influencia de la tensión de cizallamiento en la reestenosis intra-stent: Estudio in vivo con reconstrucción 3D y dinámica de fluidos computacional. *Revista española de Cardiología* **59**: 20–27.

- A. SEQUEIRA [2003]. *Analysis and Simulation of Non-Newtonian Models in Blood Circulation*. Lecture Notes. Lausanne.
- F. J. SERÓN, E. GARCÍA Y J. D. PICO [2001a]. *MOTRICO Project. Geometric Construction and Mesh Generation of Blood Vessels by means of the fusion of angiograms and IVUS*.
- F. J. SERÓN, E. GARCÍA Y J. D. PICO [2001b]. *MOTRICO Project. Geometric Construction and Mesh Generation of Blood Vessels in Coronary Bifurcation*.
- A. M. SHAABAN Y A. J. DUERINCKX [2000]. Wall shear stress and early atherosclerosis: A review. *American Journal of Roentgenology* **174**: 1657–1665.
- T. W. H. SHEU Y H. Y. H. CHEN [1999]. A transient analysis of incompressible fluid flow in vessels with moving boundaries. *Int. Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow* **9**: 833–846.
- J. C. SIMÓ Y N. TARNOW [1992]. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **100**: 63–116.
- J. C. SIMÓ Y R. L. TAYLOR [1991]. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stresses. continuum basis and numerical algorithms. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **85**: 273–310.
- J. C. SIMÓ, R. L. TAYLOR Y K. S. PISTER [1985]. Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elastoplasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **51**: 177–208.
- C. J. SLAGER, J. J. WENTZEL, J. C. SCHURBIERS, J. A. F. OOMEN, J. KLOET, R. KRAMS, C. BIRGELEN, W. J. GIESSEN, P. W. SERRUYS Y P. J. FEYTER [2000]. True 3-dimensional reconstruction of coronary arteries in patients by fusion of angiography and ivus (angus) and its quantitative validation. *Circulation* **102**: 511–516.
- M. SOULI, A. OUAHSINE Y L. LEWIN [2000]. Ale formulation for fluid-structure interaction problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **190**: 659–675.
- D. A. STEINMAN, C. R. ETHIER, X. ZHANG Y S. R. KARPIK [1995]. The effect of flow waveform on anastomotic wall shear stress patterns. *ASME Advances in Bioengineering* 173–176.
- J. SZUMBARSKI Y J. MIZERSKI [2005]. *Mathematical and Numerical Modelling of Cardiovascular Flows*. Lecture Notes. IPPT, Poland.

- P. L. TALLEC Y J. MOURO [2001]. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*
- R. L. TAYLOR [2000a]. *FEAP, a Finite Element Analysis Program. Example Manual.*
- R. L. TAYLOR [2000b]. *FEAP, a Finite Element Analysis Program. Theory Manual.*
- R. L. TAYLOR [2000c]. *FEAP, a Finite Element Analysis Program. User Manual.*
- P. D. THOMAS Y C. K. LOMBARD [1979]. Geometric conservation law and its applications to flow computations on moving grids. *AIAA Journal* **17**: 1030–1037.
- C. TRUESDELL [1977]. *A First Course in Rational Continuum Mechanics, Volume 1: General Concepts.* Academic Press.
- E. H. TWIZELL Y R. W. OGDEN [1983]. Non-linear optimization of the material constants in ogden's stress-deformation function for incompressible isotropic elastic materials. *J. Aust. Math. Soc. B, Appl. Math.* **24**: 424–434.
- O. H. VARGA [1966]. *Stress-Strain Behaviour of Elastic Materials, Selected Problems of Large Deformations.* Wiley-Interscience, New York.
- S. L. WATERS Y T. J. PEDLEY [1999]. *Oscillatory Flow in a Tube of Time-Dependent Curvature: Part I. Perturbation to Flow in a Stationary Curved Tube* 383.
- J. A. WEISS [1996]. Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **135**: 107–128.
- J. XU Y L. ZIKATANOV [2000]. Some observations on babuska and brezzi theories. *Numerische Mathematik.*
- O. C. ZIENKIEWICZ Y R. L. TAYLOR [2000a]. *The Finite Element Method. Vol 3: Fluid Dynamics.* Butterworth-Heinemann. Fifth edition.
- O. C. ZIENKIEWICZ Y R. L. TAYLOR [2000b]. *The Finite Element Method. Vol1: The Basis.* Butterworth-Heinemann. Fifth edition.

Índice alfabético

A	
acoplamiento	
débil	109
fuerte	110
modelos 3D y 1D	157
Aitken, método de	115–117
alargamientos principales	65
ALE, formulación	92, 96
arteria coronaria izquierda	170
ateroma, placa de	14, 180
aterosclerosis	14
B	
bifurcación	186
biomecánica	3
Block-Gauss-Seidel, método	112
Block-Jacobi, método	111
bloqueo	30
C	
conservación geométrica, ley	97
contorno, condiciones de	154, 156
convectiva, velocidad	95
E	
elasticidad	61
elementos finitos	26
estabilización	33, 42
experimentales, datos	70
H	
hemodinámica	4, 7
hiperelasticidad	63
anisotropía	67
isotropía	65
I	
incompresibilidad	23
interacción	
métodos	106
problema	102, 105
L	
LAD, arteria	170
LBB, condición	31
M	
masa adicional, efecto de la	110
mixtos, elementos	30
monolíticos, métodos	107
N	
Navier-Stokes, ecuaciones	24
neohookeano, material	67, 76, 79
Newmark, método de	69
Newton-Raphson	29, 106, 108
no-newtoniano, fluido	19, 21
O	
Ogden, material de	66, 75, 79
operador	
fluido	103
malla	103
sólido	104
P	
pared arterial	57
particionados, métodos	108
penalización, función de	69
penalización, método de	32
R	
relajación, parámetro de	113
rouleaux	18, 21
S	
sangre, propiedades	17, 19

SUPG, método 33

T

tensión tangencial 14, 169

tensor de elasticidad 62, 64, 66

U

unidimensional, modelo 141

V

viscosidad 18, 19

Von Karman, torbellinos de 51

W

Womersley, flujo de 46